



**BAĞIMLI AKTÜERYAL RİSKLER İÇİN FAYDA KAPULASINA DAYALI
YENİ KAPULA FONKSİYONU ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**

Kübra DURUKAN

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Kübra DURUKAN tarafından hazırlanan “BAĞIMLI AKTÜERYAL RİSKLER İÇİN FAYDA KAPULASINA DAYALI YENİ KAPULA FONKSİYONU ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. H. Hasan ÖRKÇÜ

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

İkinci Danışman: Dr. Öğr. Üye. Emel KIZILOK KARA

Aktüerya Bilimleri Ana Bilim Dalı, Kırıkkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Prof. Dr. Fatih TANK

Aktüerya Bilimleri Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Hasan BAL

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Üye: Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Bülent ÇELİK

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Hülya OLMUŞ

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Kübra DURUKAN

10/07/2019

BAĞIMLI AKTÜERYAL RİSKLER İÇİN FAYDA KAPULASINA DAYALI YENİ KAPULA FONKSİYONU ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

(Doktora Tezi)

Kübra DURUKAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Sigorta, aktüerya ve risk gibi alanlarda önemli bir rolü olan kapula fonksiyonları, rasgele değişkenlerin bağımlılık yapısını açıklamak için sıklıkla kullanılmaktadır. Diğer taraftan, fayda fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanan riskten kaçınma ölçütü, sigorta şirketleri açısından risk primi hesaplanmasında kullanılan önemli bir karar verme aracıdır. Bu çalışmada, bağımlı iki değişkenli riskler için riskten kaçınma katsayıları matrisi ve risk primi vektörü, Kettler (2007)'de verilen fayda kapula fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Risk prim vektörünün değerleri, risklerin bağımsız, yarı bağımlı ve tam bağımlı olması durumları için hesaplanmıştır. Kapula bağımlılık parametresinin farklı değerleri için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörünün değerleri hesaplanmış, sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Çalışmanın devamında, budanmış dağılım yöntemi kullanılarak, Kettler (2007)'de verilen fayda kapulası için, Sklar kapulası özelliklerini sağlayan, yeni bir Sklar kapula fonksiyonu elde edilmiştir. Çalışmanın sonunda, elde edilen bu yeni kapula için bir simülasyon çalışması yapılmıştır. Bu simülasyon çalışmasında, bağımlılık parametresinin tahmini için en çok olabilirlik tahmin yöntemi kullanılmıştır ve büyük örneklem için daha doğru tahminlerin yapıldığı gösterilmiştir. Seçilmiş bir parametre değeri için elde edilen simülasyon verileri kullanılarak, riskten kaçınma katsayıları ve risk prim vektörleri sayısal olarak hesaplanmış, sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Ayrıca, bağımlı örneklerle çalışan bir sigorta şirketinin riskten kaçınması durumunda daha fazla prim ve riski sevmesi durumunda daha az prim alması gerektiği sayısal örneklerle gösterilmiştir.

Bilim Kodu	: 20501
Anahtar Kelimeler	: İki değişkenli riskten kaçınma, fayda kapulası, budanmış kapula, bağımlılık, iki değişkenli fayda fonksiyonu, risk primi, simülasyon, parametre tahmini
Sayfa Adedi	: 54
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. H. Hasan ÖRKÜ
İkinci Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Emel KIZILOK KARA

A STUDY ON A NEW COPULA FUNCTION BASED ON UTILITY COPULA FOR DEPENDENT ACTUARIAL RISKS

(Ph. D. Thesis)

Kübra DURUKAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

Copula functions, which play an important role in insurance, actuarial and risk areas, are frequently used to explain the dependency structure of random variables. On the other hand, the risk aversion measure, which is defined based on utility functions, is an important decision-making tool used in the calculation of risk premium for insurance companies. In this study, the risk aversion matrix and risk premium vector for dependent bivariate risks are obtained by using the utility copula function given in Kettler (2007). The values of the risk premium vector are calculated for independent, semi-dependent and fully dependent risks. The risk aversion matrix and the risk premium vector are calculated for the different values of the copula dependency parameter and the results are presented in tables and graphs. In the continuation of the study, using the truncated distribution method, a new Sklar copula function is obtained for the utility copula given in Kettler (2007), which provides Sklar copula properties. At the end of the study, a simulation study is performed for this new copula. In this simulation study, the maximum likelihood estimation method is used to estimate the dependency parameter and it is shown that more accurate estimates are made for large samples. Using simulation data obtained for a selected parameter value, risk aversion coefficients and risk premium vectors are numerically calculated and the results are presented in tables and graphs. In addition, it is shown by numerical examples that an insurance company working with dependent risks should receive more premiums if it is risk aversion and less premiums if it is risk seeking.

Science Code : 20501

Key Words : Bivariate risk aversion, utility copula, truncated copula, dependence, bivariate utility function, risk Premium, simulation, parameter estimation

Page Number : 54

Supervisor : Prof. Dr. H. Hasan ÖRKÇÜ

Co-Supervisor : Dr. Lecturer Emel KIZILOK KARA

TEŞEKKÜR

Bana her zaman sahip çıkan, vakit ayıran ve çalışmalarımı destekleyen çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. H. Hasan ÖRKÜ'ye, akademik hayatımın en başından bu yana gerek bilimsel, gerekse manevi olarak her zaman yanımda olan, tez çalışmam boyunca olumlu yaklaşımları ve ilgisiyle desteğini ve vaktini hiçbir zaman esirgemeyen, uzun yıllar aynı ortamı paylaştığım çok değerli dostum ve hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Emel KIZILOK KARA'ya, lisans öğrenimimden bu yana gerek bir dost, gerekse bir hoca olarak ilgisini, bilgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, önerileri ile beni aydınlatan ve tez çalışmamın her aşamasını yakından takip eden çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Fatih TANK'a, her zaman olumlu, güler yüzlü ve cana yakın yaklaşımıyla desteğini gördüğüm hocam Sayın Doç. Dr. Hülya OLMUŞ'a, tezimi okuyan ve önerilerini benimle paylaşan, tez savunma jürimde bulunan Sayın Prof. Dr. Hasan BAL, Sayın Prof. Dr. Bülent ÇELİK ve Sayın Prof. Dr. Mehmet YILMAZ'a, tezimde kullandığım programlar ve hesaplamalarla ilgili bana her zaman destek olan, uzun yıllar aynı ortamı paylaştığım çok değerli arkadaşım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Abdullah YILMAZ'a, teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans öğrenimimden bu yana arkadaşım olan ve her konuda yardımını esirgemeyen sevgili dostum Sayın Doç. Dr. Altan TUNÇEL'e, cana yakın tavırlarıyla bana her zaman destek olan ve bana her zaman vakit ayıran bölüm başkanım ve hocam Sayın Prof. Dr. Sevgi YURT ÖNCEL'e teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman olduğu gibi çalışmalarım esnasında da maddi-manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, yoğun çalışmalarım boyunca büyük bir sabır göstererek hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan sevgili eşim Sayın İsmail DURUKAN'a, bu süreçte varlıklarıyla bana enerji veren, kimi zaman sevgi ve ilgilerinden feragat ederek büyüttüğüm biricik çocuklarım Kerem Mert DURUKAN ve Emir Mete DURUKAN'a, tez çalışmam boyunca iyi dilek ve dualarıyla yanımda olan kayınvalidem Sayın Münevver DURUKAN ve kayınpederim Sayın Seyfettin DURUKAN'a en içten dileklerle teşekkürlerimi sunarım.

Ve son olarak, tüm yaşamım boyunca olduğu gibi, eğitim ve çalışma hayatım boyunca da hiçbir fedakarlıktan kaçınmayan, her konuda destek olarak gördüğüm çok değerli ailem, annem Sayın Müzeyyen ABA, babam Sayın Mehmet ABA, kardeşim Sayın Dilek ABA NARİN ve ablam Sayın Jun.-Prof. Dr. Sevgi ÇIKRIKÇI'ya tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER	5
2.1. Kapulalar	5
2.1.1. Kapulalar ile ilgili temel bilgiler	5
2.2. Fayda Teorisi, Fayda Kapulası, Riskten Kaçınma ve Risk Primi	6
2.2.1. Fayda teorisi	7
2.2.2. Fayda kapulası.....	9
2.2.3. Riskten kaçınma	10
2.2.4. Risk primi.....	11
3. FAYDA KAPULASI İÇİN RİSKTEN KAÇINMA VE RİSK PRİMİ ...	13
4. FAYDA KAPULASI KULLANILARAK YENİ KAPULA ELDE ETME	25
4.1. Budanmış Dağılım.....	25
4.2. Parametre Tahmini	26
4.3. Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su	26
4.4. Yeni Sklar Kapulası	27
4.5. Yeni Sklar Kapulası İçin Parametre Tahmini	34
5. FAYDA KAPULASI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YENİ KAPULA İÇİN SİMÜLASYON ÇALIŞMASI	39

Sayfa

6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	45
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	51



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $UC_1(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisi değerleri	15
Çizelge 3.2. $UC_1(u, v)$ kapulası için risk prim vektörü değerleri	16
Çizelge 3.3. $UC_2(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisi değerleri	18
Çizelge 3.4. $UC_2(u, v)$ kapulası için risk prim vektörü değerleri	19
Çizelge 3.5. Belli (u, v) değerlerinin bağımlılık yapılarına göre prim katsayıları	21
Çizelge 4.1. Farklı θ değerleri için Kendall'ın τ ve Spearman'ın ρ katsayıları	37
Çizelge 5.1. Farklı n ve θ değerlerine göre MLE tahminleri, ρ ve τ katsayıları	39
Çizelge 5.2. $n = 30$ ve $\theta = 1,25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü değerleri	41

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $UC_1(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisinin grafikleri	15
Şekil 3.2. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12}=0, \rho_{21} = 0$ için risk prim grafikleri	16
Şekil 3.3. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$ için risk prim grafikleri	17
Şekil 3.4. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$ için risk prim grafikleri	17
Şekil 3.5. $UC_2(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisinin grafikleri	19
Şekil 3.6. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$ için risk prim grafikleri	20
Şekil 3.7. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$ için risk prim grafikleri	20
Şekil 3.8. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$ için risk prim grafikleri	20
Şekil 4.1. (a) $\theta = 2$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulasının grafiği, (b) $\theta = 10$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulasının grafiği	29
Şekil 4.2. (a) $\theta = 1$ için $c_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği (b) $\theta = 2$ için $c_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği	30
Şekil 4.3. (a) $\theta = 1$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği (b) $\theta = 2$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği	31
Şekil 4.4. (a) $F(u)$ ve (b) $G(v)$ marjinal dağılım fonksiyonlarının grafikleri	33
Şekil 4.5. (a) θ 'ya göre τ grafiği (b) θ 'ya göre ρ grafiği	37
Şekil 5.1. $n = 30, 50, 100, 150, 500$ için θ değerlerine göre $Bias$ değerlerinin grafiği	40
Şekil 5.2. $n = 30, 50, 100, 150, 500$ için θ değerlerine göre MSE değerlerinin grafiği	41
Şekil 5.3. $n = 5000$ ve $\theta = 1.25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün riskten kaçınma matrisi	43
Şekil 5.4. $n = 5000$ ve $\theta = 1.25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün risk prim vektörünün grafikleri	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

$\bar{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^2	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genişletilmiş reel düzlem
\mathbb{R}_+^2	$[0, \infty] \times [0, \infty]$ pozitif reel düzlem
F, G	Marjinal dağılım fonksiyonları
H	Ortak dağılım fonksiyonu
C	Kapula
c	Kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu
θ	Kapula bağımlılık parametresi
$\hat{\theta}_{MLE}$	Kapula parametresinin en çok olabilirlik tahmini
I	$[0,1]$ birim aralık
I^2	$[0,1] \times [0,1]$ birim kare
u	Fayda fonksiyonu
U_1	Tek değişkenli fayda fonksiyonu kümesi
U_2	İki değişkenli fayda fonksiyonu kümesi
A	Dikdörtgen
C_1, C_2	Marjinal kapula fonksiyonu
RA	Riskten kaçınma katsayısı
R	Riskten kaçınma matrisi
r^{ij}	R 'nin elemanları
π	Risk prim vektörü
Σ	Varyans-Kovaryans matrisi
τ	Kendall'ın τ katsayısı
ρ	Spearman'ın ρ katsayısı
UC_θ	Fayda kapulası
uc_θ	Fayda kapulası ölçüsü
C_{trun}	Yeni Sklar kapulası

Simgeler**Açıklamalar** **c_{trun}**

Yeni Sklar kapulası olasılık yoğunluk fonksiyonu

Kısaltmalar**Açıklamalar** **dg**

Köşegen matris

 MLE

En çok olabilirlik tahmini

 MSE

Hata Kareler Ortalaması



1. GİRİŞ

Günümüzde sigortacılık alanında sigorta ürünlerine ait prim fiyatlarının doğru bir şekilde belirlenmesi, sigortalı ve sigorta şirketi açısından oldukça önemlidir. Risk primlerinin belirlenmesinde risklerin bağımlılık yapıları önemli faktörlerden biridir. Diğer taraftan, sigortacılığa verilen önemin artması ile bireylerin birden fazla sigorta ürününü birlikte satın alma istekleri yaygınlaşmıştır. Örneğin, kaza sigortası satın alan bir sigortalı bunun yanında sakatlık sigortası da satın almak isteyebilir. Böylelikle risklerin aynı sigortalıya ait olması, bağımlı risk yapılarının ortaya çıkmasına neden olur. Burada risklerin bağımsız olması bireyin tek bir sigorta ürünüde poliçe sahibi olması anlamına gelirken, bağımlı olması aynı sigortalının birden fazla sigorta ürünüde poliçe sahibi olması anlamına gelmektedir.

Risk primlerinin belirlenmesinde diğer önemli bir faktör riskten kaçınma ölçüsüdür. Riskten kaçınma ölçüsü, riskten kaçınma ya da riski sevme durumlarına göre tek değişkenli ve çok değişkenli durumları için belirlenebilir. Ancak aynı kişilere ait bağımlı sigorta ürünleri (riskler) için çok değişkenli riskten kaçınma ölçüsüne göre prim fiyatlarının belirlenmesi daha anlamlı olacaktır. Bu amaçla, kapula fonksiyonları bağımlı risklerin modellenmesinde önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Riskten kaçınma ölçüsü ile prim hesaplamak için, fayda fonksiyonlarına dayalı fayda kapulalarından yararlanılmaktadır.

Fayda fonksiyonu ise iktisat (Cipu, ve Gheorghe, 2015), finans (Denuit vd, 2011), sigortacılık (Cherubini vd, 2004, Courbage ve Rey, 2007) gibi pek çok alanda riskli alternatiflerin modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Ayrıca portföy tercihi, fon tercihi ve menkul kıymet yatırımları alanlarında karar vermede bir araç olarak faydalanılmaktadır (Tekin, 2016). Bu düşünce ile her karar vericinin kendi tercihlerini ifade eden bir fayda fonksiyonuna sahip olduğu düşünülebilir (Cardin vd, 2004). Bu düşünce ile, Eeckhoudt vd (2007) bireylerin şu andaki tasarruflarına bakarak, fayda fonksiyonu yardımıyla birbiriyle ilişkili olan servet ve sağlık koşullarının gelecekteki durumlarını incelemişlerdir. Buna ek olarak, Denuit vd (2011) ise iki değişkenli fayda fonksiyonu ve buna bağlı olarak ilişkili finansal riskler için optimal çözümler vermiştir. Sigorta alanında da prim hesaplamalarında kullanılmaktadır (Lai,2015).

Fayda fonksiyonu, beklenen fayda teorisinin temelini oluşturmaktadır. Bir karar vericinin riskli alternatiflerle ilgili tercihleri, beklenen fayda teorisinin aksiyomlarını (tamlık,

dönüşlülük, geçişlilik, monotonluk, süreklilik, bağımsızlık) sağlıyorsa, bu karar vericinin tercihleri bir fayda fonksiyonu ile temsil edilebilir. Ancak Taşdemir (2007) çalışmasında, özellikle birbiriyle ilişkili riskli tercihlerin bazı aksiyomları sağlamadığında bu teoremin yetersiz kaldığını Ellsberg ve Allais Paradoksları örnekleri üzerinde göstermiştir. Bu durum, ilişkili risklerle karşılaşıldığında, risklerin bağımlılık yapısının nasıl açıklanacağı sorusunu akla getirir. Bu noktada fayda kapula fonksiyonları olarak adlandırılan yeni yapılar oluşturmak, bu soruya bir yanıt olabilir. Bu bağlamda ilk defa Kettler (2007), fayda kapulası inşa etme yöntemi vermiştir. Daha sonra Abbas (2009, 2010a, 2013, 2010b), Arşimedyan fayda kapulaları inşa etme yöntemleri ve fayda kapulalarının sınırlılık özellikleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Ayrıca Arşimedyan fayda kapulalarının iki ayrı sınıfını tanımlayarak, fayda kapulası için riskten kaçınma matrisinin tanımını vermiştir.

Riskten kaçınma, bir maldan veya paradan ne kadar fayda sağlandığını belirleyen temel bir parametredir (Thomas, 2016). Diğer taraftan, riskten kaçınma ölçüsü, risk yönetimi ve sigortacılık alanında, riskli tercihler arasında karar verme durumunda olan bir karar verici için ona en az risk getirecek seçimi belirlemede yardımcı olur. Ayrıca karar verici, riskten kaçınma ölçüsüne göre, ödenecek risk primi katsayılarını belirleyebilir (Goovaerts vd. 2012).

Fayda fonksiyonları ve kapula modellerinin seçimi risk yönetimi kararlarında önemlidir. Riskten kaçınma ölçüsü de fayda fonksiyonu ve fayda kapulasına bağlı olarak belirlenebilir. Literatürdeki riskten kaçınma ölçüsüne dayalı ilk çalışmalar fayda fonksiyonuna göre yapılmıştır. Arrow (1971) ve Pratt (1964) tek değişkenli fayda fonksiyonuna bağlı olarak tek değişkenli riskten kaçınmanın bir ölçüsünü tanımlamışlardır. Duncan (1977) iki değişkenli fayda fonksiyonuna dayalı iki değişkenli riskten kaçınma fonksiyonunu kullanarak iki değişkenli risk primini elde etmiştir. Literatürde tek değişkenli ve iki değişkenli riskten kaçınma katsayıları ile ilgili başka çalışmalar da vardır (Sengupta, 1983, Cardin ve Ferretti, 2004, Li vd, 2016 ve Thomas, 2016).

Literatürde fayda kapulasına dayalı riskten kaçınma ölçüleri ile ilgili çalışmalar çok az mevcuttur. İlk kez Abbas (2009), Arşimedyan fayda kapulasına dayalı riskten kaçınma ölçülerine değinmiş, bu konuyla ilgili çalışmaları daha sonraki yıllarda da devam etmiştir (Abbas, 2010, 2013, 2015).

Son zamanlarda bağımlı risklerin modellenmesinde kapula fonksiyonları sıklıkla kullanılmaktadır. Tank ve Gebizlioğlu (2004), risklerin bağımlılığını yeni bir dağılım ile modellemişlerdir. Kızılok (2010) çalışmasında, Farlie-Gumbel- Morgenstern (FGM) kapulası ile modellenen bağımlı risklerin farklı parametre değerlerinde iki değişkenli Riske Maruz Değer (VaR) ve Koşullu Riske Maruz Değer (CVaR) risk ölçümlerini elde etmiştir. Kemaloğlu ve Kara (2015), çok değişkenli finans verilerinin bağımlılık yapısını kapulalar yardımıyla açıklamışlardır. Yine Kemaloğlu vd (2018), bağımlılık yapısını FGM kapula yardımıyla ele alarak, Pareto dağılımından kaynaklanan talep miktarını bulanık mantık yaklaşımı ile yorumlamıştır.

Bu tez çalışmasında ise, bağımlı riskler durumunda, fayda fonksiyonlarına dayalı fayda kapulaları ile iki değişkenli riskten kaçınma fonksiyonları ve risk primlerinin bulunması amaçlanmıştır. Risklerin bağımlılık yapısı için Kettler (2007)'de verilen fayda kapulası modeli kullanılmıştır. Bu model, budanmış dağılım yöntemi kullanılarak Sklar kapula özelliklerini sağlayan yeni bir Sklar kapula fonksiyonu olarak geliştirilmiştir. Bu yeni kapula fonksiyonu ile farklı bağımlılık parametre değerlerinde simülasyon çalışması yapılmıştır. Burada parametre tahmini için en çok olabilirlik tahmin yöntemi kullanılmıştır. Seçilen bir parametre değeri için simülasyon yolu ile elde edilen iki değişkenli risk verileri kullanılarak iki değişkenli riskten kaçınma ve risk prim katsayıları sayısal olarak bulunmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde kapula, fayda teorisi, fayda kapulası, riskten kaçınma ve risk primi hakkında bazı temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümünde Kettler (2007)'de verilen fayda kapulası için iki değişkenli riskten kaçınma matrisleri ve risk prim vektörleri elde edilmiştir. Farklı parametre değerleri için elde edilen sayısal sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuş ve yorumlanmıştır. Dördüncü bölümde, Kettler (2007)'deki fayda kapulası için, budanmış dağılım yöntemi kullanılarak yeni bir Sklar kapulası elde edilmiştir. Yine aynı bölümde, yeni Sklar kapulasının bazı kapula olma özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın beşinci bölümünde yeni Sklar kapulası için simülasyon çalışmasına yer verilmiştir. Belirli bağımlılık parametrelerine göre, bu kapuladan üretilen sayılar için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü elde edilmiştir. Sonuçlar tablo ve grafiklerle özetlenmiştir. Altıncı bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.



2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modelleyen kapulalar, sigortacılık, aktüerya ve risk yönetiminde riskli alternatiflerin tercihinde kullanılan fayda fonksiyonu ve fayda kapulaları tanıtılmıştır. Ayrıca riskten kaçınma ve risk primi ile ilgili temel bilgilere yer verilmiştir.

2.1. Kapulalar

Kapulalar, rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemek için kullanılmaktadır. Değişkenlerin marjinalleri normal dağılmadığında ve bu değişkenler arasındaki ilişkinin ölçüsüne ihtiyaç duyulduğunda, kapulalar oldukça kullanışlı araçlardır. Değişkenlerin marjinal dağılımları hakkında bilgi verdiği gibi, marjinallerin ortak dağılımları hakkında da bilgi verir. Ayrıca uygun kapulalar yardımıyla bağımlılık davranışları belirlenebilir. Aktüeryal ve finansal uygulamalarda bağımlı risk gruplarına çok rastlandığından bu gibi alanlarda kapulaların kullanımı oldukça çoktur. Örneğin,

- Aktüeryal uygulamalarda, kayıpların modellenmesinde ve aktüeryal kararlar vermede (Genest vd, 1998, Frees ve Valdez, 1998, Dhaene vd, 2002)
- Finans ve ekonomi alanlarında, risklerin modellenmesinde ve risk yönetiminde (Genest vd, 2009, Fischer vd, 2009, Cherubini vd, 2004)
- Sigortacılık alanında, bağımlı risklerin sigortalanmasında (Cebrian vd, 2003, Denuit vd, 2005)

sıklıkla kapulalardan faydaniılmaktadır.

2.1.1. Kapulalar ile ilgili temel bilgiler

Kapula fonksiyonu ilk olarak Sklar (1959) tarafından tanımlanmıştır. Buna göre $H(x, y)$ fonksiyonu marjinalleri F ve G olan iki boyutlu sürekli ortak dağılım fonksiyonu olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.1)$$

şekilde tanımlanan bir $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ kapula fonksiyonu vardır. Eğer F ve G sürekli ise, C tektir. Ayrıca C kapula fonksiyonu, F ve G de dağılım fonksiyonu ise, Eş. 2.1 ile tanımlanan H fonksiyonu, marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonudur (Nelsen, 2006: 18-22).

Kapulanın özellikleri

İki boyutlu bir kapula aşağıdaki özelliklere sahip bir $C: I^2 \rightarrow I$ fonksiyonudur (Nelsen, 2006:10):

i. Her $u, v \in I$ için

$$C(u, 0) = C(0, v) = 0$$

$$C(u, 1) = u \text{ ve } C(1, v) = v$$

ii. $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olacak şekilde her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ için

$$P(u_1 \leq U \leq u_2, v_1 \leq V \leq v_2) = C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

C kapula fonksiyonunun olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$c(u, v) = \frac{d^2}{dudv} C(u, v) \quad (2.2)$$

ile tanımlanır (Sklar, 1959).

2.2. Fayda Teorisi, Fayda Kapulası, Riskten Kaçınma ve Risk Primi

Bu bölümde öncelikle Fayda Teorisi'nden kısaca bahsedilerek, fayda fonksiyonları yardımıyla fayda kapulalarını elde etme yöntemi verilecektir. Daha sonra, tek ve iki değişkenli riskten kaçınma kavramları ele alınacaktır. İki değişkenli riskten kaçınmanın tanımı, fayda fonksiyonu ve fayda kapulası ile iki şekilde tanımlanmaktadır. Bu çalışmada, iki değişkenli riskten kaçınma fonksiyonları fayda kapulaları ile elde edilecektir. Risk primi ise, riskten kaçınma fonksiyonu yardımıyla tanımlanacaktır.

2.2.1. Fayda teorisi

Modern fayda teorisi, bir karar vericinin belirli rasyonel davranış aksiyomlarına göre (yapılan seçimlerde kazancın en üst, zararın ise en alt düzeye indirmeye çalışılması kuramı), belirsiz kazancı olan varlıklar arasında seçim yapması durumunda, portföy tercihlerinin beklenen faydasını maksimum yapacak şekilde bir fayda fonksiyonunun inşa edilebileceğini göstermektedir (Richter, 1960).

Fayda fonksiyonları genellikle risk ve aktüerya uygulamalarında belirsizlik altında uygun kararlar almak için kullanılır. Başka bir deyişle, gerçek hayatta bireyleri, riskli alternatifler arasından seçim yapmaya yönlendirir. Bu nedenle, riskten kaçınma, riski sevme ve risk primleri gibi bazı önemli risk ölçülerinin hesaplanmasında kullanılan önemli bir araçtır (Denuit vd, 2005).

Tanım

Tek değişkenli fayda fonksiyonlarının kümesi

$$U_1 = \{u(x) \in C^2: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad u'(x) > 0, u''(x) < 0\}$$

ile tanımlanır. $u'(x) > 0$ durumu u fayda fonksiyonunun artan olduğunu, $u''(x) < 0$ durumu ise u fonksiyonunun içbükey fonksiyon olduğunu gösterir (Denuit vd, 2005).

Tanım

İki değişkenli fayda fonksiyonlarının kümesi

$$U_2 = \left\{ u(x, y) \in C^2: A = [a, \infty) \times [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} > 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0, \right. \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} > 0 \right\}$$

ile tanımlanır. u fayda fonksiyonunun Hessian matrisinin pozitif olması, fayda fonksiyonunun dışbükey olduğunu gösterir (Kettler, 2007).

A bölgesi, $A_w = [a, x] \times [b, \infty]$, $x \geq a$ ve $B_z = [b, y] \times [a, \infty]$, $y \geq b$ olarak parçalansın.

$$\begin{aligned} I(x, y) &= - \int_A \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy dx \\ &= -u(x, y) + u(x, b) + u(a, y) - u(a, b) > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Burada $-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $u(x, y)$ fayda fonksiyonunun bir ölçüsüdür. Aynı zamanda $u_1(x)$ ve $u_2(y)$, $u(x, y)$ fayda fonksiyonunun marjinalleridir ve

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u(x, b) \\ u_2(y) &= u(a, y) \\ u(a, b) &= u_1(a) = u_2(b) = k \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$(u, v) \in \bar{\mathbb{R}}_+^2$ olmak üzere,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (u(x, y) - u(a, y)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (u(x, y) - u(x, b)) = 0$$

ise, Eş. 2.3'ten

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (u(x, y) - u(a, y)) = \lim_{x \rightarrow \infty} (u(x, y) - u(x, b)) = 0$$

ise

$$u = \lim_{y \rightarrow \infty} I(x, y) = u_1(x) - u_1(a) = \int_a^x \frac{du_1}{ds} ds > 0$$

$$v = \lim_{x \rightarrow \infty} I(x, y) = u_2(y) - u_2(b) = \int_b^y \frac{du_2}{dt} dt > 0$$

şeklindedir. Bu sonuçlar, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ varsayımı ile geçerlidir. Bu varsayım, $u_1(x)$

ve $u_2(y)$ 'nin marjinal fayda fonksiyonlarının varlığını göstermektedir. Ayrıca bu varsayımın

varlığı, birinci türevlerin 0'dan büyük olması $\left(\frac{\partial u}{\partial x} > 0, \frac{\partial u}{\partial y} > 0\right)$ şartından, dolaylı olarak söylenebilir. Böylece γ bir sınır olmak üzere

$$u(x, y) - u(a, y) > (x - a)\gamma > 0$$

veya

$$u(x, y) - u(x, b) > (y - b)\gamma > 0$$

eşitsizlikleri birinci türevler monoton azalan olduğu sürece sırasıyla y ve x 'den bağımsızdır. Bu nedenle u ve v değişkenleri, $u(x, y)$ 'nin $y = b$ ve $x = a$ kısıtlamaları ile elde edilemez (Kettler, 2007).

2.2.2. Fayda kapulası

İki değişkenli fayda kapulası $UC(u, v)$, $u(x, y)$ fayda fonksiyonu yardımıyla (2.4)'deki gibi elde edilir (Kettler, 2007):

$$UC(u, v) = -u(u_1^{-1}(u + k), u_2^{-1}(v + k)) + (u + k) + k > 0, \quad u(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4)$$

Burada $u_1(x) = u(x, b)$ ve $u_2(y) = u(a, y)$ marjinal fayda fonksiyonlarıdır. Ayrıca $u(a, b) = u_1(a) = u_2(b) = k$ dır.

Bir fayda kapulası

- i. Temel koşul (The ground condition): $UC(u, 0) = UC(0, v) = 0$
- ii. Düzgün marjinal koşul (The uniform margin condition): $UC_1(u) = UC(u, \infty) = u$ ve $UC_2(v) = UC(\infty, v) = v$

$$\text{iii. Fayda kapulası ölçüsü (Utility copula measure): } uc(u, v) := \frac{\partial^2 UC}{\partial u \partial v} = - \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}}{\frac{du_1}{dx} \frac{du_2}{dy}}$$

özelliklerini sağlar.

Her sürekli Sklar kapulası bir fayda kapulasıdır. Ancak her fayda kapulası bir Sklar kapulası değildir (Abbas, 2009).

2.2.3. Riskten kaçınma

Riskten kaçınma, karar vericinin riske karşı davranışı ile ilgili bir kavramdır. Karar verici, getirisi olan birkaç farklı durumla karşı karşıya geldiğinde, daha az riskli olanı tercih etmek ister. Dolayısıyla daha az riskli tercihi seçip seçmeyeceğine de riskten kaçınma katsayısı ile karar verebilir.

Riskli bir davranış, bir veya birden fazla risk söz konusu olduğunda, fayda fonksiyonları yardımıyla ele alınmaktadır. Bununla birlikte, çeşitli ekonomik problemlerin modellenmesinde tek boyutlu fayda fonksiyonları yetersiz kalmakta ve çok değişkenli fayda fonksiyonlarına ihtiyaç duyulmaktadır (Cardin ve Ferretti, 2004). Riskler arasında bağımlılık söz konusu olduğunda ise, karar verici risklere karşı davranışı kapula fonksiyonları ile modellenenebilir.

Riskten kaçınma, tek ve iki değişkenli olmak üzere, fayda fonksiyonu ve kapula fonksiyonu yardımıyla tanımlanacaktır.

Tek değişkenli riskten kaçınma

Riskten kaçınma katsayısı ilk olarak Arrow (1971) ve Pratt (1964) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$RA = - \frac{u''(x)}{u'(x)}$$

RA , riskten kaçınma gücünün bir ölçüsü olarak da tanımlanabilir. Burada $u(x)$ fayda fonksiyonudur. Kar sağlamak ve riskten kaçınmak isteyen her karar verici için $RA \geq 0$ olmalıdır. Riskten kaçınma katsayısı belirsizlik altında davranış gösteren teorik ve ampirik çalışmalarda kullanışlıdır (Arrow, 1965).

İki değişkenli riskten kaçınma matrisi

Fayda fonksiyonu yardımıyla,

$$R = [r^{ij}] = - \left[\frac{u_{ij}}{u_i} \right], \quad i, j = 1, 2$$

ile tanımlanır. Burada $u_i = \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x_i}$ marjinal fayda fonksiyonları ve $u_{ij} = \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x_i \partial y_j}$ dır (Duncan, 1977).

Kapula fonksiyonu yardımıyla,

$$R = r^{ij} = - \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2 \quad (2.5)$$

ile tanımlanır (Abbas, 2009). Burada R 'nin elemanları ise $i \neq j$ için $r_{ij} = \partial^2 C(u, v) / \partial u \partial v$ ve $r_{ji} = \partial^2 C(u, v) / \partial v \partial u$, $i = j$ için $r_{ii} = \partial^2 C(u, v) / \partial u^2$, $r_{jj} = \partial^2 C(u, v) / \partial v^2$ ile bulunur. Ayrıca u ve v için marjinal kapula fonksiyonları da $r_1 = \frac{d}{du} C(u, v)$ ve $r_2 = \frac{d}{dv} C(u, v)$ şeklinde hesaplanır.

Fayda fonksiyonu veya fayda kapulasının karma kısmi türevi, çok değişkenli riskten kaçınma olarak da bilinir. Bir karar vericinin karma kısmi türevi (pozitif) negatif ise çok değişkenli (risk seven) riskten kaçındığı söylenir (Abbas, 2009).

2.2.4. Risk primi

Risk primi, olası kayıp miktarını ve kayıp sayısını karşılamak üzere hesaplanan net prim tutarını ifade etmektedir. Lai (2015), istatistiksel primin riskten kaçınmanın artan bir fonksiyonu olduğunu ortaya koymaktadır. Bir karar verici riskten kaçınırsa, riski önlemek için risk primi ödemeye razıdır.

Yaklaşık risk prim vektörü

$$\pi = \frac{1}{2} dgR\Sigma \quad (2.6)$$

ile bulunur. Burada $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$ varyans kovaryans matrisidir. Bir karar verici riskten kaçınıyorsa ($R > 0$) daha çok prim ödemeyi kabul edecektir. Eğer bir karar verici riski seviyorsa ($R < 0$) daha az prim ödemeyi isteyecektir (Duncan, 1977).



3. FAYDA KAPULASI İÇİN RİSKTEN KAÇINMA VE RİSK PRİMİ

Çalışmanın bu bölümünde, Kettler (2007)'deki fayda fonksiyonu ve fayda kapulası için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü elde edilecektir. Ayrıca sonuçlar tablo ve grafikler ile yorumlanacaktır.

Kettler (2007)'de verilen logaritmik fayda fonksiyonu (logarithmic substitution utility function) aşağıdaki gibidir:

$$u(x, y) = \ln(x + y - 1), \quad (x, y) \in [1, \infty)^2 \quad (3.1)$$

Bu logaritmik fayda fonksiyonu yardımıyla Eş. 2.3'ten elde edilen fayda kapulası ise

$$UC(u, v) = (u + v - \ln(e^u + e^v - 1)), \quad (u, v) \in (0, \infty)^2 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu kapula tek parametrelili bir kapula ailesine

$$UC_\theta(u, v) = \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta} > 0, \quad (u, v) \in (0, \infty)^2, \quad \theta \in (0, \infty) \quad (3.3)$$

şeklinde genişletilebilir (Kettler, 2007).

Eş. 3.3 için, Eş. 2.5'ten elde edilen riskten kaçınma matrisi

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\theta e^{u^\theta} u^{\theta-1}}{u k_1} + \frac{(\theta-1) u^{\theta-1} (e^{v^\theta} - 1)}{k_1 [C_\theta(u, v)]^\theta} - \frac{(\theta-1)}{u} & h(v) \\ h(u) & z(v) + \frac{(\theta-1) k_1 ([C_\theta(u, v)]^\theta - v^\theta) - \theta e^{v^\theta} v^{2\theta}}{v k_1 [C_\theta(u, v)]^\theta} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada $h(u) = \frac{u^{\theta-1}}{k_1} \left(\frac{\theta e^{u^\theta} e^{v^\theta}}{(e^{u^\theta} - 1)} - \frac{(\theta-1)(e^{v^\theta} - 1)}{[C_\theta(u, v)]^\theta} \right)$, $h(v) = \frac{v^{\theta-1}}{k_1} \left(\frac{\theta e^{u^\theta} e^{v^\theta}}{(e^{v^\theta} - 1)} - \frac{(\theta-1)(e^{u^\theta} - 1)}{[C_\theta(u, v)]^\theta} \right)$,

$z(v) = \frac{e^{v^\theta} v^{\theta-1} (-\theta ([C_\theta(u, v)]^\theta - 1) - 1)}{v k_1 [C_\theta(u, v)]^\theta}$ ve $k_1 = e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1$ dir.

Eş. 2.6'dan elde edilen risk prim vektörü

$$\pi = \frac{1}{2k_1} \left[\begin{array}{c} \frac{\sigma_{11}}{u} \left(e^{u^\theta} u^\theta + (\theta - 1) \left(\frac{u^\theta (e^{v^\theta} - 1)}{[C_\theta(u,v)]^\theta} - k_1 \right) \right) + \sigma_{21} v^{\theta-1} \left(\frac{(\theta-1)(e^{u^\theta} - 1)}{[C_\theta(u,v)]^\theta} - \frac{\theta e^{u^\theta} e^{v^\theta}}{(e^{v^\theta} - 1)} \right) \\ - \frac{\sigma_{22}}{v} \left(\frac{(\theta-1)(e^{u^\theta} - 1)([C_\theta(u,v)]^\theta - v^\theta)}{[C_\theta(u,v)]^\theta} + e^{v^\theta} (\theta(1 - v^\theta) - 1) \right) + \sigma_{12} u^{\theta-1} \left(\frac{\theta e^{u^\theta} e^{v^\theta}}{(e^{u^\theta} - 1)} - \frac{(\theta-1)(e^{v^\theta} - 1)}{[C_\theta(u,v)]^\theta} \right) \end{array} \right] \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada, $k_1 = e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1$ dır.

Bağımlılık parametresinin $\theta = 1$ ve $\theta = 2$ olan iki durumu için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü hesaplanmıştır. Bunun için $\sigma_{11}\sigma_{22} = 1, \sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} \neq 0$ varsayımı yapılarak, risklerin bağımsız ($\rho_{12}=0, \rho_{21} = 0$), yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0.5, \rho_{21} = 0.5$) ve tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) olma durumları göz önünde bulundurulmuştur.

Durum 1. $\theta = 1$ için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü

Eş. 3.4'ten, bağımlılık parametresi $\theta = 1$ için elde edilen riskten kaçınma matrisi

$$R_{\theta=1} = \left[\begin{array}{cc} e^u / (e^u + e^v - 1) & -e^u e^v / (e^v - 1)(e^u + e^v - 1) \\ -e^u e^v / (e^u - 1)(e^u + e^v - 1) & e^v / (e^u + e^v - 1) \end{array} \right]$$

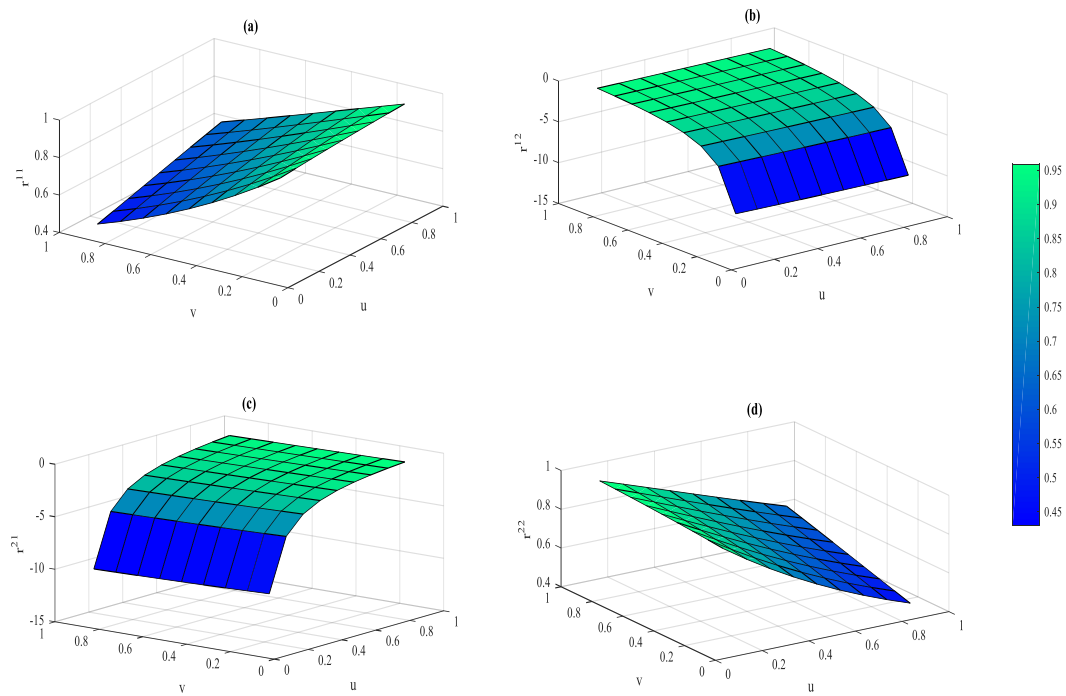
ve risk prim vektörü

$$\pi_{\theta=1} = -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} \frac{e^u}{e^v - 1} \frac{\rho_{21} e^v - \sigma_{11}(e^v - 1)}{e^u + e^v - 1} \\ \frac{e^v}{e^u - 1} \frac{\rho_{12} e^u - \sigma_{22}(e^u - 1)}{e^u + e^v - 1} \end{array} \right]$$

şeklindedir. Buna göre u ve v 'nin belli değerleri için riskten kaçınma ve risk prim değerleri sırasıyla Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2.'de verilmiştir. Ayrıca bu tablo değerleri için elde edilen grafikler de Şekil 3.1, Şekil 3.2, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4'te gösterilmiştir.

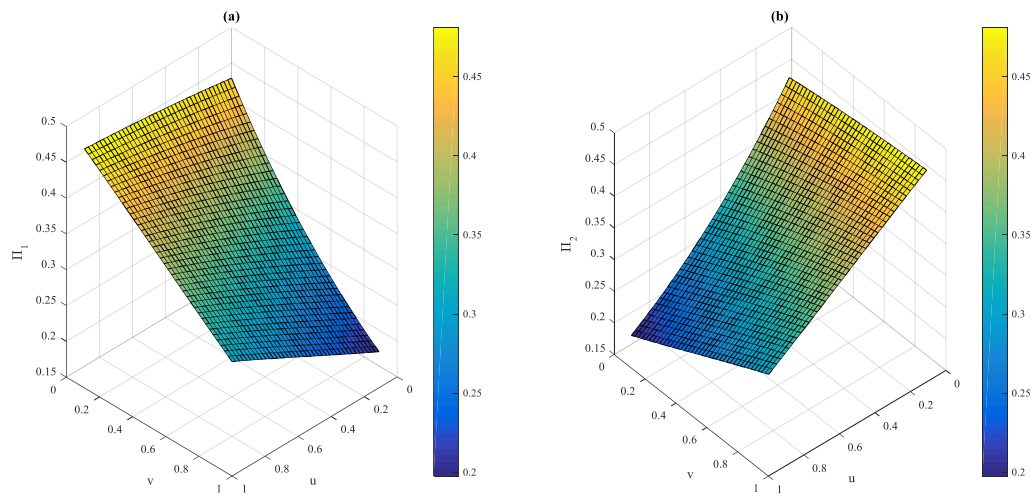
Çizelge 3.1. $UC_1(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisi değerleri

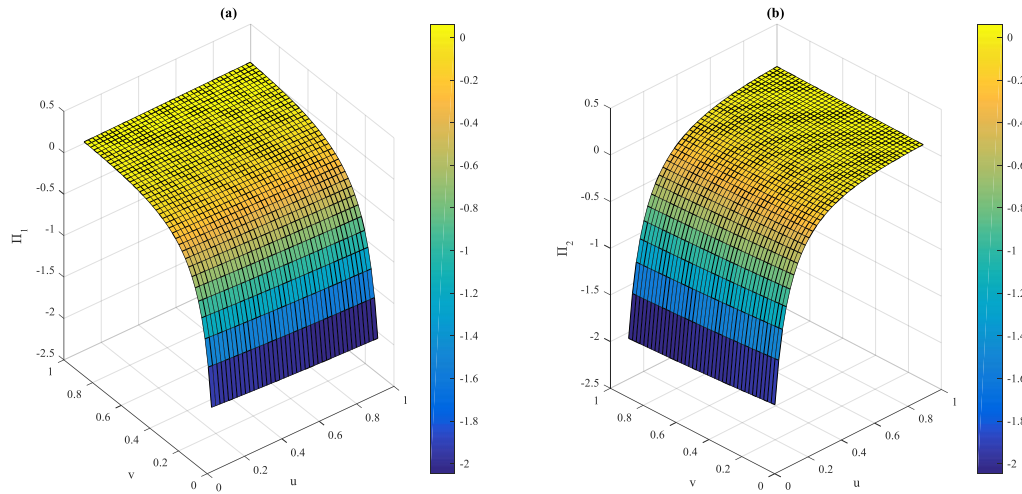
u	v	r^{11}	r^{12}	r^{21}	r^{22}
0,1	0,1	0,9131	-9,5952	-9,5952	0,9131
	0,3	0,7596	-2,9306	-9,7488	0,9277
	0,5	0,6301	-1,6015	-9,8782	0,9400
	0,7	0,5216	-1,0361	-9,9868	0,9504
	0,9	0,4309	-0,7261	-10,0774	0,9590
0,3	0,1	0,9277	-9,7488	-2,9306	0,7596
	0,3	0,7942	-3,0641	-3,0641	0,7942
	0,5	0,6754	-1,7165	-3,1829	0,8249
	0,7	0,5711	-1,1345	-3,2872	0,8520
	0,9	0,4805	-0,8096	-3,3778	0,8755
0,5	0,1	0,9400	-9,8782	-1,6015	0,6301
	0,3	0,8249	-3,1829	-1,7165	0,6754
	0,5	0,7176	-1,8239	-1,8239	0,7176
	0,7	0,6192	-1,2301	-1,9222	0,7563
	0,9	0,5304	-0,8938	-2,0111	0,7913
0,7	0,1	0,9504	-9,9868	-1,0361	0,5216
	0,3	0,8520	-3,2872	-1,1345	0,5711
	0,5	0,7563	-1,9222	-1,2301	0,6192
	0,7	0,6652	-1,3213	-1,3213	0,6652
	0,9	0,5798	-0,9770	-1,4067	0,7081
0,9	0,1	0,9590	-10,0774	-0,7261	0,4309
	0,3	0,8755	-3,3778	-0,8096	0,4805
	0,5	0,7913	-2,0111	-0,8938	0,5304
	0,7	0,7081	-1,4067	-0,9770	0,5798
	0,9	0,6276	-1,0575	-1,0575	0,6276

Şekil 3.1. $UC_1(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisinin grafikleri

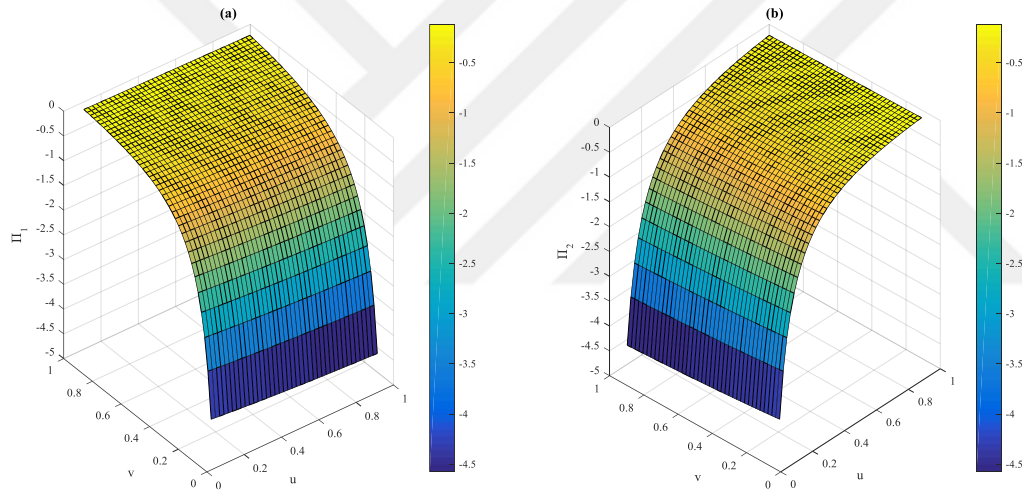
Çizelge 3.2. $UC_1(u, v)$ kapulası için risk prim vektörü değerleri

$\theta = 1$		$\rho_{12}=0, \rho_{21} = 0$		$\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$		$\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$	
u	v	π_{11}	π_{21}	π_{11}	π_{21}	π_{11}	π_{21}
0,1	0,1	0,4566	0,4566	-1,9423	-1,9423	-4,3411	-4,3411
	0,3	0,3798	0,4639	-0,3529	-1,9733	-1,0855	-4,4105
	0,5	0,3151	0,4700	-0,0853	-1,9995	-0,4857	-4,4691
	0,7	0,2608	0,4752	0,0018	-2,0215	-0,2572	-4,5182
	0,9	0,2155	0,4795	0,0339	-2,0399	-0,1476	-4,5592
0,3	0,1	0,4639	0,3798	-1,9733	-0,3529	-4,4105	-1,0855
	0,3	0,3971	0,3971	-0,3689	-0,3689	-1,1350	-1,1350
	0,5	0,3377	0,4125	-0,0914	-0,3832	-0,5206	-1,1790
	0,7	0,2856	0,4260	0,0019	-0,3958	-0,2817	-1,2176
	0,9	0,2402	0,4377	0,0378	-0,4067	-0,1646	-1,2512
0,5	0,1	0,4700	0,3151	-1,9995	-0,0853	-4,4691	-0,4857
	0,3	0,4125	0,3377	-0,3832	-0,0914	-1,1790	-0,5206
	0,5	0,3588	0,3588	-0,0971	-0,0971	-0,5531	-0,5531
	0,7	0,3096	0,3782	0,0021	-0,1024	-0,3054	-0,5830
	0,9	0,2652	0,3956	0,0418	-0,1071	-0,1817	-0,6099
0,7	0,1	0,4752	0,2608	-2,0215	0,0018	-4,5182	-0,2572
	0,3	0,4260	0,2856	-0,3958	0,0019	-1,2176	-0,2817
	0,5	0,3782	0,3096	-0,1024	0,0021	-0,5830	-0,3054
	0,7	0,3326	0,3326	0,0023	0,0023	-0,3281	-0,3281
	0,9	0,2899	0,3541	0,0456	0,0024	-0,1986	-0,3493
0,9	0,1	0,4795	0,2155	-2,0399	0,0339	-4,5592	-0,1476
	0,3	0,4377	0,2402	-0,4067	0,0378	-1,2512	-0,1646
	0,5	0,3956	0,2652	-0,1071	0,0418	-0,6099	-0,1817
	0,7	0,3541	0,2899	0,0024	0,0456	-0,3493	-0,1986
	0,9	0,3138	0,3138	0,0494	0,0494	-0,2150	-0,2150

Şekil 3.2. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12}=0, \rho_{21} = 0$ için risk prim grafikleri



Şekil 3.3. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12} = 0,5$ $\rho_{21} = 0,5$ için risk prim grafikleri



Şekil 3.4. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 1$ ve $\rho_{12} = 1$, $\rho_{21} = 1$ için risk prim grafikleri

Durum 2. $\theta = 2$ için riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü

Eş. 3.4'ten, bağımlılık parametresi $\theta = 2$ için elde edilen riskten kaçınma matrisi

$$R_{\theta=2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{u} - \frac{2e^{u^2}u}{k_{1:\theta=2}} - \frac{u(e^{v^2}-1)}{k_{1:\theta=2}[C_2(u,v)]^2} & \frac{v}{k_{1:\theta=2}} \left(\frac{2e^{u^2}e^{v^2}}{(e^{v^2}-1)} - \frac{e^{u^2}-1}{[C_2(u,v)]^2} \right) \\ \frac{u}{k_{1:\theta=2}} \left(\frac{2e^{u^2}e^{v^2}}{(e^{u^2}-1)} - \frac{e^{v^2}-1}{[C_2(u,v)]^2} \right) & \frac{e^{v^2}(1-2([C_2(u,v)]^2-v^2))-2e^{v^2}v^3}{k_{1:\theta=2}[C_2(u,v)]^2} + \frac{[C_2(u,v)]^2-v^2}{v[C_2(u,v)]^2} \end{bmatrix}$$

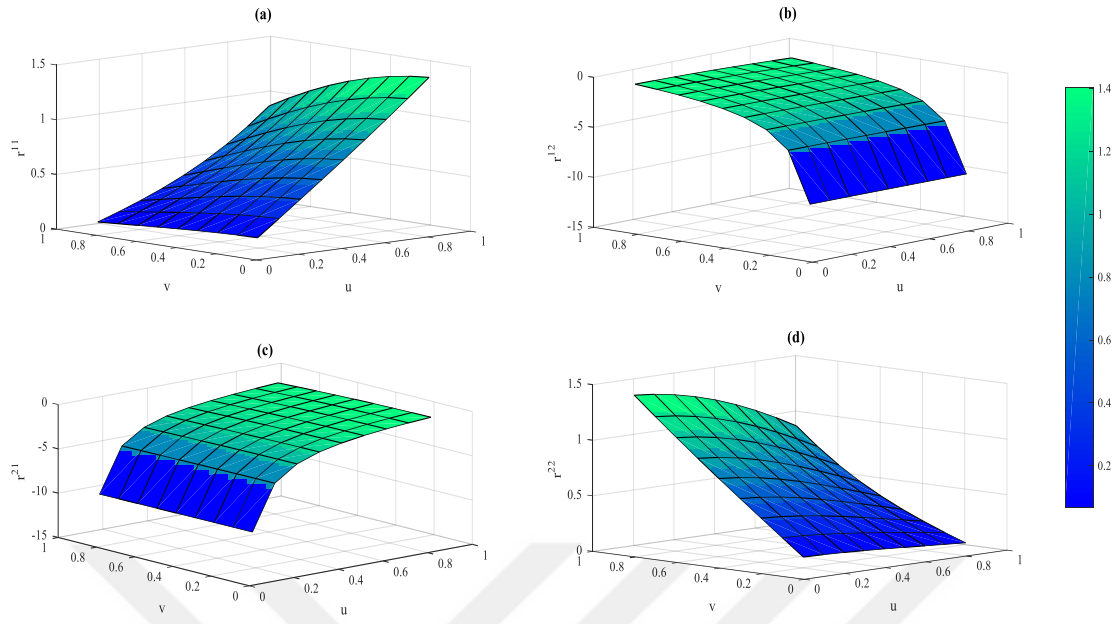
ve risk prim vektörü

$$\pi_{\theta=2} = \frac{1}{2k_{1:\theta=2}} \left[\begin{aligned} & \frac{\sigma_{11}}{u} \left(e^{u^2} u^2 + \left(\frac{u^2(e^{v^2} - 1)}{[C_2(u, v)]^2} - k_{1:\theta=2} \right) \right) + \rho_{21} v \left(\frac{e^{u^2} - 1}{[C_2(u, v)]^2} - \frac{\theta e^{u^2} e^{v^2}}{(e^{v^2} - 1)} \right) \\ & - \frac{\sigma_{22}}{v} \left(\frac{(e^{u^2} - 1)([C_2(u, v)]^2 - v^2)}{[C_2(u, v)]^2} + e^{v^2}(2(1 - v^2) - 1) \right) + \rho_{12} u \left(\frac{2e^{u^2} e^{v^2}}{(e^{u^2} - 1)} - \frac{e^{v^2} - 1}{[C_2(u, v)]^2} \right) \end{aligned} \right]$$

Burada $k_{1:\theta=2}$ ifadesi, $k_1 = e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1$ eşitliğinde θ yerine 2 değeri yazılarak elde edilen eşitliği göstermektedir. Buna göre belli (u, v) değerleri için riskten kaçınma ve risk prim değerleri sırasıyla Çizelge 3.3 ve Çizelge 3.4'te verilmiştir. Ayrıca bu tablo değerleri için elde edilen grafikler de sırasıyla Şekil 3.5, Şekil 3.6, Şekil 3.7 ve Şekil 3.8'de sunulmuştur.

Çizelge 3.3. $UC_2(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisi değerleri

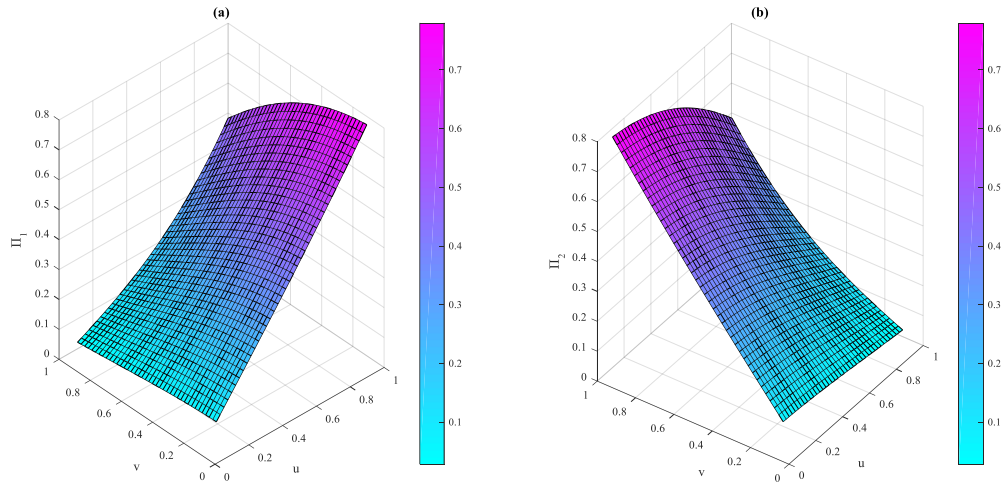
u	v	r^{11}	r^{12}	r^{21}	r^{22}
0,1	0,1	0,1486	-9,9516	-9,9516	0,1486
	0,3	0,1373	-3,1897	-9,9629	0,4482
	0,5	0,1172	-1,7662	-9,9830	0,7546
	0,7	0,0923	-1,1135	-10,0078	1,0720
	0,9	0,0672	-0,7272	-10,0330	1,4041
0,3	0,1	0,4482	-9,9629	-3,1897	0,1373
	0,3	0,4166	-3,2213	-3,2213	0,4166
	0,5	0,3594	-1,8117	-3,2784	0,7091
	0,7	0,2871	-1,1644	-3,3507	1,0211
	0,9	0,2118	-0,7756	-3,4260	1,3557
0,5	0,1	0,7546	-9,9830	-1,7662	0,1172
	0,3	0,7091	-3,2784	-1,8117	0,3594
	0,5	0,6242	-1,8966	-1,8966	0,6242
	0,7	0,5117	-1,2634	-2,0091	0,9221
	0,9	0,3881	-0,8737	-2,1327	1,2576
0,7	0,1	1,0720	-10,0078	-1,1135	0,0923
	0,3	1,0211	-3,3507	-1,1644	0,2871
	0,5	0,9221	-2,0091	-1,2634	0,5117
	0,7	0,7826	-1,4029	-1,4029	0,7826
	0,9	0,6174	-1,0216	-1,5681	1,1097
0,9	0,1	1,4041	-10,0330	-0,7272	0,0672
	0,3	1,3557	-3,4260	-0,7756	0,2118
	0,5	1,2576	-2,1327	-0,8737	0,3881
	0,7	1,1097	-1,5681	-1,0216	0,6174
	0,9	0,9183	-1,2130	-1,2130	0,9183



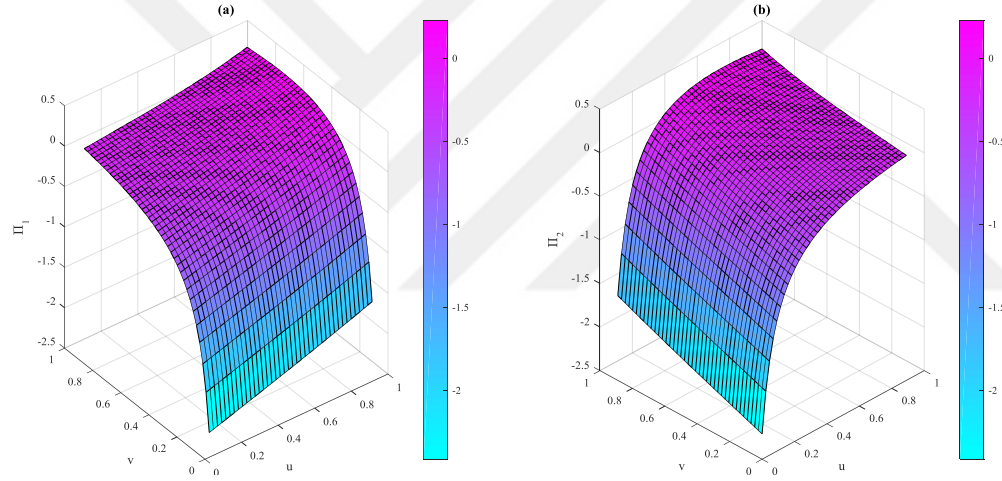
Şekil 3.5. $UC_2(u, v)$ kapulası için riskten kaçınma matrisinin grafikleri

Çizelge 3.4. $UC_2(u, v)$ kapulası için risk prim vektörü değerleri

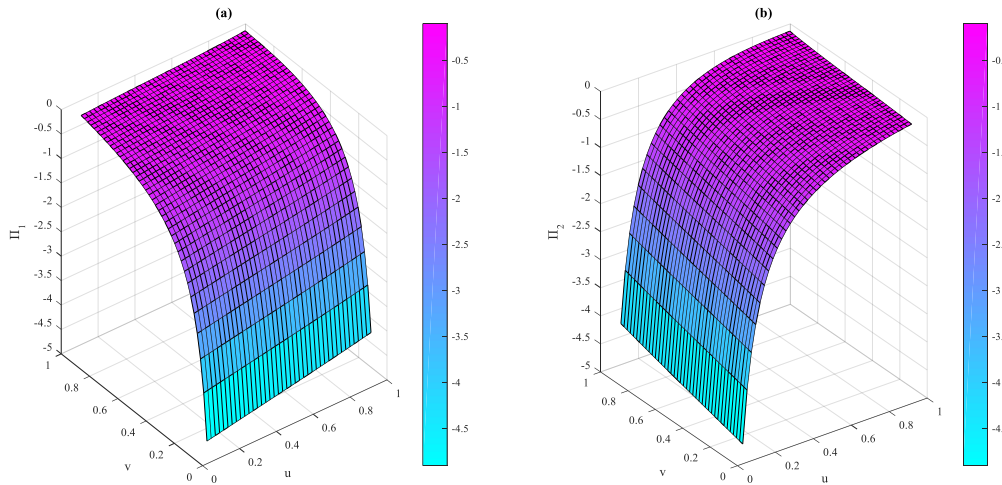
$\theta = 2$		$\rho_{12}=0, \rho_{21} = 0$		$\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$		$\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$	
u	v	π_{11}	π_{21}	π_{11}	π_{21}	π_{11}	π_{21}
0,1	0,1	0,0743	0,0743	-2,4136	-2,4136	-4,9015	-4,9015
	0,3	0,0686	0,2241	-0,7288	-2,2666	-1,5262	-4,7574
	0,5	0,0586	0,3773	-0,3830	-2,1185	-0,8245	-4,6142
	0,7	0,0462	0,5360	-0,2322	-1,9659	-0,5106	-4,4679
	0,9	0,0336	0,7020	-0,1482	-1,8062	-0,3300	-4,3145
0,3	0,1	0,2241	0,0686	-2,2666	-0,7288	-4,7574	-1,5262
	0,3	0,2083	0,2083	-0,5970	-0,5970	-1,4023	-1,4023
	0,5	0,1797	0,3546	-0,2732	-0,4651	-0,7261	-1,2847
	0,7	0,1436	0,5105	-0,1475	-0,3271	-0,4386	-1,1648
	0,9	0,1059	0,6778	-0,0880	-0,1787	-0,2819	-1,0352
0,5	0,1	0,3773	0,0586	-2,1185	-0,3830	-4,6142	-0,8245
	0,3	0,3546	0,1797	-0,4651	-0,2732	-1,2847	-0,7261
	0,5	0,3121	0,3121	-0,1621	-0,1621	-0,6362	-0,6362
	0,7	0,2559	0,4610	-0,0600	-0,0412	-0,3759	-0,5435
	0,9	0,1940	0,6288	-0,0244	0,0956	-0,2428	-0,4376
0,7	0,1	0,5360	0,0462	-1,9659	-0,2322	-4,4679	-0,5106
	0,3	0,5105	0,1436	-0,3271	-0,1475	-1,1648	-0,4386
	0,5	0,4610	0,2559	-0,0412	-0,0600	-0,5435	-0,3759
	0,7	0,3913	0,3913	0,0406	0,0406	-0,3101	-0,3101
	0,9	0,3087	0,5549	0,0533	0,1628	-0,2021	-0,2292
0,9	0,1	0,7020	0,0336	-1,8062	-0,1482	-4,3145	-0,3300
	0,3	0,6778	0,1059	-0,1787	-0,0880	-1,0352	-0,2819
	0,5	0,6288	0,1940	0,0956	-0,0244	-0,4376	-0,2428
	0,7	0,5549	0,3087	0,1628	0,0533	-0,2292	-0,2021
	0,9	0,4592	0,4592	0,1559	0,1559	-0,1473	-0,1473



Şekil 3.6. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 0$, $\rho_{21} = 0$ için risk prim grafikleri



Şekil 3.7. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 0,5$, $\rho_{21} = 0,5$ için risk prim grafikleri



Şekil 3.8. $UC_\theta(u, v)$ kapulasının $\theta = 2$ ve $\rho_{12} = 1$, $\rho_{21} = 1$ için risk prim grafikleri

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.3'e göre, bir sigorta şirketi iki riski ayrı ayrı sigortalayacaksa riskten kaçınan ($r^{11} > 0, r^{22} > 0$), aynı anda sigortalayacaksa riski seven ($r^{12} < 0, r^{21} < 0$) bir davranış sergileyeceği görülmektedir. Çizelge 3.2. ve Çizelge 3.4'te, bağımsız iki risk için ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) prim katsayılarının 0'dan büyük olduğu görülmektedir. Bu durum da sigorta şirketinin bağımsız riskler karşısında riskten kaçınan bir davranış sergilediğini göstermektedir. Riskler yarı ve tam bağımlı olduğunda ise, sigorta şirketi riski seven bir davranış sergileyeceği görülmektedir. Buna bağlı olarak sigorta şirketi yarı ve tam bağımlı riskleri sigortalarken riskten kaçınmak isterse, risk prim katsayılarının toplamı kadar sigortalananadan fazla prim alması gerekecektir. Bağımlılık parametresi θ 'nın değeri arttıkça da riskler için belirlenecek prim katsayılarında da artış olduğu görülmektedir. Diğer bir ifade ile, bağımlı risklerle çalışan bir sigorta şirketi, daha fazla risk üstleneceğinden risklerin bağımsız olması durumuna göre belirlenen primden daha fazla prim alacağı anlaşılmaktadır.

Bu durumlar, Çizelge 3.5'te verilen sayısal sonuçlar ile aşağıdaki örnekler ile daha ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Çizelge 3.5. Belli (u, v) değerlerinin bağımlılık yapılarına göre prim katsayıları

		$\theta = 1$			$\theta = 2$		
Riskler	Bağımlılık Yapısı	π_{11}	π_{21}	Toplam	π_{11}	π_{21}	Toplam
$u = 0,1$ $v = 0,3$	$\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$	0,3798	0,4639	0,8437	0,0686	0,2241	0,2927
	$\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$	-0,3529	-1,9733	-2,3262	-0,7288	-2,2666	-2,9954
	$\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$	-1,0855	-4,4105	-5,4960	-1,5262	-4,7574	-6,2836
$u = 0,3$ $v = 0,3$	$\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$	0,3971	0,3971	0,7942	0,2083	0,2083	0,4166
	$\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$	-0,3689	-0,3689	-0,7378	-0,5970	-0,5970	-1,1940
	$\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$	-1,1350	-1,1350	-2,2700	-1,4023	-1,4023	-2,8046
$u = 0,5$ $v = 0,3$	$\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$	0,4125	0,3377	0,7502	0,3546	0,1797	0,5343
	$\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$	-0,3832	-0,0914	-0,4746	-0,4651	-0,2732	-0,7383
	$\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$	-1,1790	-0,5206	-1,6996	-1,2847	-0,7261	-2,0108

1. Örnek ($u = 0,1, v = 0,3, u < v$): Bağımlılık parametresi $\theta = 1$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = 0,3798$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = 0,4639$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = -0,3529$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = -1,9733$ kadardır. Riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$)

olduğunda bu prim katsayıları sırasıyla -1,0855 ve -4,4105 olmaktadır. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 2,3262 ($0,3529+1.9733$) prim katsayısı ile daha fazla prim alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 5,496 ($1,0855+4,4105$) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.

$\theta = 2$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = 0,0686$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = 0,2241$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = -0,7288$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = -2,2666$ iken, riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) olduğunda bu prim katsayıları sırasıyla -1,5262 ve -4,7574 olmaktadır. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, riskten kaçınmak istiyorsa, riskleri ayrı ayrı sigortalamayı tercih edecektir. Ancak yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 2,9954 ($0,7288+2,2666$) prim katsayısı ile daha fazla prim alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 6,2836 ($1,5262+4,7574$) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.

2. Örnek ($u = 0,3, v = 0,3, u = v$): Bağımlılık parametresi $\theta = 1$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda risklerden alınacak prim katsayıları $\pi_{11} = \pi_{21} = 0,3971$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) olduğunda iki riskten de alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = \pi_{21} = -0,3689$ dir. Riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) olduğunda bu prim katsayıları $\pi_{11} = \pi_{21} = -1,1350$ olmaktadır. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 0,7378 ($0,3689+0,3689$) prim katsayısı ile daha fazla prim alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 2,2700 ($1,1350+1,1350$) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.

$\theta = 2$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda risklerden alınacak prim katsayıları $\pi_{11} = \pi_{21} = 0,2083$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) olduğunda risklerden alınacak prim katsayıları $\pi_{11} = \pi_{21} = -0,5970$ iken, riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) olduğunda bu prim katsayıları $\pi_{11} = \pi_{21} = -1,4023$ olmaktadır. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, riskten kaçınmak istiyorsa, riskleri ayrı ayrı sigortalamayı tercih edecektir. Ancak yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 1,1940 ($0,5970+0,5970$) prim katsayısı ile daha fazla prim

alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 2,8046 (1,4023+1,4023) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.

3. Örnek ($u = 0,5$, $v = 0,3$, $u > v$): Bağımlılık parametresi $\theta = 1$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = 0,4125$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = 0,3377$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) iken, riskler için alınacak prim katsayıları $\pi_{11} = -0,3832$ ve $\pi_{21} = -0,0914$ şeklindedir. Riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) olduğunda bu prim katsayıları sırasıyla -1,1790 ve -0,5206 olmaktadır. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 0,4746 (0,3832+0,0914) prim katsayısı ile daha fazla prim alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 1,6996 (1,1790+0,5206) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.

$\theta = 2$ iken, riskler bağımsız ($\rho_{12} = 0, \rho_{21} = 0$) olduğunda ilk risk için alınacak prim katsayısı $\pi_{11} = 0,3546$, ikinci risk için alınacak prim katsayısı da $\pi_{21} = 0,1797$ kadardır. Riskler yarı bağımlı ($\rho_{12} = 0,5, \rho_{21} = 0,5$) olduğunda riskler için alınacak prim katsayıları ise $\pi_{11} = -0,4651$ ve $\pi_{21} = -0,2732$ şeklindedir. Riskler tam bağımlı ($\rho_{12} = 1, \rho_{21} = 1$) iken riskler için alınacak prim katsayıları $\pi_{11} = -1,2847$ ve $\pi_{21} = -0,7261$ şeklindedir. Dolayısıyla bir sigorta şirketi, riskten kaçınmak istiyorsa, riskleri ayrı ayrı sigortalamayı tercih edecektir. Ancak yarı bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde, riskten kaçınmak için, bu risklerden 0,7383 (0,4651+0,2732) prim katsayısı ile daha fazla prim alması gerekir. Tam bağımlı riskleri sigortalamak istediğinde ise, bu risklerden 2,0108 (1,2847+0,7261) prim katsayısı ile daha fazla prim almalıdır.



4. FAYDA KAPULASI KULLANILARAK YENİ KAPULA ELDE ETME

Bu bölümde, Eş. 3.3 ile verilen fayda kapulasından yararlanarak, budanmış (truncated) dağılım yöntemine dayalı yeni bir Sklar kapulası elde edilmiştir.

4.1. Budanmış Dağılım

Klasik olasılık dağılımlarında rastgele değişkenlerin tanım aralığı genellikle sonsuz aralıklarda tanımlanır. Ancak bu rasgele değişkenlerin örneklem değerleri sonlu aralıklarda değerler alırlar. Dolayısıyla rasgele değişkenin tanım aralığındaki bazı değerler ihmal edilebilir. Bu durum, “kuyruk dağılımı”nın dikkate alınması gerektiğini akla getirir. Bunun için kullanılacak yöntemlerden biri, budanmış dağılım yöntemidir. Bu yöntemde dağılımın daha küçük bir aralığı belirlenir ve dağılım yeniden düzenlenir. Böylelikle örneklem, bu yolla elde edilen yeni olasılık dağılımı ile daha iyi modellenenilmektedir (Tokmachev, 2018).

Budama işlemi, rasgele değişkenlerin bağımlılık yapısını, korelasyon katsayısını ve en çok olabilirlik gibi ölçütleri değiştirmez (David, 2005).

X rasgele değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_X(x)$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında budanmış bir dağılımın dağılım fonksiyonu

$$G(x) = P(X \leq x | X \in [a, b]) = \frac{P(X \leq x, X \in [a, b])}{P(X \in [a, b])} = \frac{\int_{(-\infty, x] \cap [a, b]} f_X(u) du}{\int_a^b f_X(x) dx}$$

ve olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\int_a^b f_X(x) dx}, & x \in [a, b] \\ 0, & dy \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindedir (Ahsanullah, vd. 2014).

4.2. Parametre Tahmini

Kapula parametrelerini tahmin etmek için pek çok farklı yöntem vardır. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlardan biri en çok olabilirlik (MLE) yöntemidir (Kara ve Yıldız, 2014).

MLE ile parametre tahmini, genellikle X 'in marjinal dağılımlarının parametrik veya parametrik olmayan bir yaklaşımını gerektirir. Bu çalışmada kullanılan rasgele değişkenler doğrudan ilgili kapuladan simüle edildiğinden, kapula parametrelerinin maksimum olasılık tahmini, sadece kapula yoğunluğuna dayanmaktadır.

$U = (u_i, v_i), i = 1:n$ iki boyutlu örneklem olmak üzere, kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$c(u, v; \theta) = \frac{\partial C(u, v; \theta)}{\partial u \partial v} \quad u, v \in [0,1]$$

ve en çok olabilirlik fonksiyonu

$$\mathcal{L}_U(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c(u_i, v_i; \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}^2, \quad U_i = (u_i, v_i)^t \in [0,1]^2$$

ile tanımlanır. θ parametresinin $\hat{\theta}_{MLE}$ en çok olabilirlik tahmin edicisi ise

$$\hat{\theta}_{MLE}(U) = \operatorname{argmax}_{\theta} \mathcal{L}_U(\theta)$$

ile bulunur (Weiß, 2011).

4.3. Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su

X ve Y gibi iki rasgele değişken arasındaki ilişkiyi ölçen ve en çok kullanılan parametrik olmayan iki ölçü, Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'sudur. Bu iki ölçü, Nelsen (2006)'da aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

X ve Y rasgele değişkenlerinin kapulası C olmak üzere, sırasıyla Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su

$$\tau_C(\theta) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v; \theta) dC(u, v; \theta) - 1 \quad (4.2)$$

$$\rho_C(\theta) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v; \theta) dudv - 3 \quad (4.3)$$

ile elde edilir (Nelsen, 2006:166-167).

4.4. Yeni Sklar Kapulası

Kettler (2007)'de verilen fayda kapulası ve bu fayda kapulasının ölçüsü aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} UC_\theta(u, v) &= \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}, (u, v) \in (0, \infty)^2 \\ uc_\theta(u, v) &= \frac{u^{\theta-1}v^{\theta-1}}{(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1)^2} (UC_\theta(u, v)^\theta)^{-2+\frac{1}{\theta}} \left((\theta - 1)(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right. \\ &\quad \left. + e^{u^\theta+v^\theta} (1 + \theta(u^\theta + v^\theta - 1)) - e^{u^\theta+v^\theta} \theta \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right) \\ &= \frac{u^{\theta-1}v^{\theta-1}}{(k_1)^2 UC_\theta(u, v)^{2\theta-1}} \left((\theta - 1)k_1 + e^{u^\theta+v^\theta} (1 + \theta(u^\theta + v^\theta - 1)) - e^{u^\theta+v^\theta} \theta \ln(k_1) \right) \\ &= \frac{u^{\theta-1}v^{\theta-1}}{(k_1)^2 UC_\theta(u, v)^{2\theta-1}} \left((\theta - 1)k_1 + e^{u^\theta+v^\theta} (1 + \theta(u^\theta + v^\theta - \ln(k_1) - 1)) \right) \\ &= \frac{u^{\theta-1}v^{\theta-1}}{(k_1)^2 UC_\theta(u, v)^{2\theta-1}} \left((\theta - 1)k_1 + e^{u^\theta+v^\theta} (1 + \theta(UC_\theta(u, v)^\theta - 1)) \right), \\ &\quad (u, v) \in (0, \infty)^2 \end{aligned}$$

Burada $k_1 = e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1$ dır.

Aşağıda $UC_\theta(u, v)$ fayda kapulasının, kapulası özelliklerini sağladığı gösterilmiştir:

i. Her $u, v \in (0, \infty)^2$ için

$$UC(u, 0) = UC(0, v) = 0, UC(u, \infty) = u \text{ ve } UC(\infty, v) = v ?$$

$$\begin{aligned}
UC_\theta(u, 0) &= \lim_{v \rightarrow 0} UC_\theta(u, v) = \lim_{v \rightarrow 0} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta} \\
&= \left(u^\theta - \ln(e^{u^\theta}) \right)^{1/\theta} \\
&= (u^\theta - u^\theta)^{1/\theta} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
UC_\theta(0, v) &= \lim_{u \rightarrow 0} UC_\theta(u, v) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta} \\
&= \left(v^\theta - \ln(e^{v^\theta}) \right)^{1/\theta} \\
&= (v^\theta - v^\theta)^{1/\theta} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
UC_\theta(u, \infty) &= \lim_{v \rightarrow \infty} UC_\theta(u, v) = \lim_{v \rightarrow \infty} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta} \\
&= u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
UC_\theta(\infty, v) &= \lim_{u \rightarrow \infty} UC_\theta(u, v) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta} \\
&= v
\end{aligned}$$

$UC_\theta(u, \infty)$ ve $UC_\theta(\infty, v)$ marjinal fonksiyonları hesaplanırken her $\theta \in (0, \infty)$ için, Mathematica 10.2 programında yazılan

Assuming[$u > 0$, Limit[$UC[u, v, 1]$, $v \rightarrow \text{Infinity}$]]

Assuming[$v > 0$, Limit[$UC[u, v, 1]$, $u \rightarrow \text{Infinity}$]]

komutlarından yararlanılmıştır.

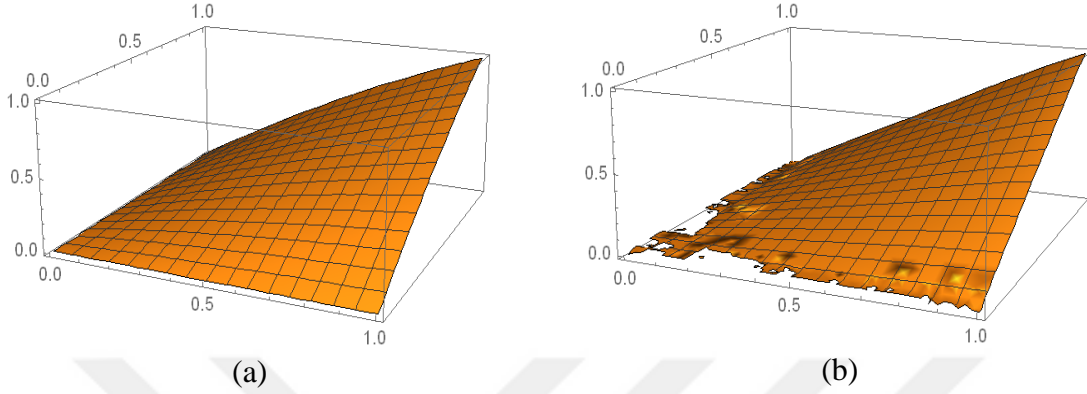
ii. $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olacak şekilde her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in (0, \infty)^2$ için

$$UC(u_1, v_1) - UC(u_2, v_1) - UC(u_1, v_2) + UC(u_2, v_2) \geq 0 ?$$

$\theta = 1$ için bu özellik incelensin:

$$\begin{aligned}
&UC(u_1, v_1) - UC(u_2, v_1) - UC(u_1, v_2) + UC(u_2, v_2) \\
&= (u_1 + v_1 - \ln(e^{u_1} + e^{v_1} - 1)) - (u_2 + v_1 - \ln(e^{u_2} + e^{v_1} - 1)) \\
&\quad - (u_1 + v_2 - \ln(e^{u_1} + e^{v_2} - 1)) + (u_2 + v_2 - \ln(e^{u_2} + e^{v_2} - 1)) \\
&= -\ln(e^{u_1} + e^{v_1} - 1) + \ln(e^{u_2} + e^{v_1} - 1) + \ln(e^{u_1} + e^{v_2} - 1) - \ln(e^{u_2} + e^{v_2} - 1) \\
&\quad (u_1, v_1) = (0, 0), (u_2, v_2) = (u, v) \text{ olsun. Eş. 2.3'ten} \\
&= \ln(e^u) + \ln(e^v) - \ln(e^u + e^v - 1) = u + v - \ln(e^u + e^v - 1) > 0
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. Ancak $0 < \theta \leq 5$ için bu durum sağlanmaktadır. $\theta \geq 6$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulası gerçel değerler almamaktadır. Şekil 4.1'de θ 'nın bazı değerleri için bu durum şekilsel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.1. (a) $\theta = 2$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulasının grafiği, (b) $\theta = 10$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulasının grafiği

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi, $\theta = 10$ için $UC_\theta(u, v)$ kapulasının kuyruk kısımlarında bozulmalar ortaya çıkmaktadır. Böylelikle $UC_\theta(u, v)$ fayda kapulası, kapula olma özelliklerini $0 < u, v < \infty$ aralığında ve $0 < \theta \leq 5$ aralığı için sağlarken, $uc_\theta(u, v)$ fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliğini sağlamamaktadır. Bu nedenle $UC_\theta(u, v)$ fayda kapulasını, bir dağılım fonksiyonu ve $uc_\theta(u, v)$ fonksiyonunu da bir olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde yazabilmek için, $uc_\theta(u, v)$ fonksiyonu bir k sabiti ile çarpılıp, 1'e eşitlendiğinde k sabiti

$$k \int_0^1 \int_0^1 uc_\theta(u, v) dv du = 1$$

$$\Rightarrow k \int_0^1 \int_0^1 \frac{u^{\theta-1} v^{\theta-1}}{(k_1)^2 UC_\theta(u, v)^{2\theta-1}} \left((\theta - 1)k_1 + e^{u^\theta + v^\theta} (1 + \theta(UC_\theta(u, v)^\theta - 1)) \right) dv du = 1$$

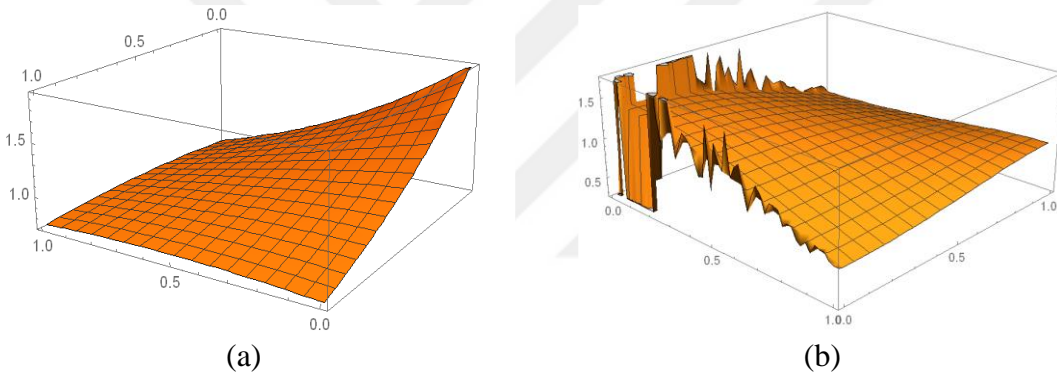
$$\Rightarrow k = (2 - \ln(2e - 1))^{1/\theta}.$$

olarak bulunmuştur. $k = k(\theta)$ olmak üzere, Eş. 4.1 kullanılarak budanmış dağılım yöntemi ile elde edilen $c_{trun}(u, v; \theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
c_{trun}(u, v; \theta) &= \frac{uc_{\theta}(u, v)}{\iint_0^1 uc_{\theta}(u, v)dvdu} = \frac{1}{k(\theta)} c_{\theta}(u, v) \\
&= \frac{(2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta}}{(k_1)^2 UC_{\theta}(u, v)^{2\theta-1}} u^{\theta-1} v^{\theta-1} \left((\theta - 1)k_1 + e^{u^{\theta} + v^{\theta}} (1 + \theta(UC_{\theta}(u, v)^{\theta} - 1)) \right) \\
&\quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 1
\end{aligned}$$

Burada $k_1 = e^{u^{\theta}} + e^{v^{\theta}} - 1$ ve $k(\theta) = (2 - \ln(2e - 1))^{1/\theta}$ dir.

Şekil 4.2’de budanmış olasılık yoğunluk fonksiyonunun $\theta = 1$ ve $\theta = 2$ için grafikleri verilmiştir.



Şekil 4.2. (a) $\theta = 1$ için $c_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği (b) $\theta = 2$ için $c_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği

Budanmış olasılık yoğunluk fonksiyonunun dağılım fonksiyonu $C_{trun}(u, v; \theta)$ ise Eş. 2.2’den aşağıdaki gibi bulunur:

$$C_{trun}(u, v; \theta) = \int_0^u \int_0^v c_{trun}(w, t; \theta) dt dw, \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 1$$

$\theta = 1$ için;

$$C_{trun}(u, v; 1) = \frac{u + v - \ln(e^u + e^v - 1)}{2 - \ln(2e - 1)} = \frac{UC_1(u, v)}{k(1)}$$

$\theta = 2$ için;

$$C_{trun}(u, v; 2) = \left(\frac{u^2 + v^2 - \ln(e^{u^2} + e^{v^2} - 1)}{2 - \ln(2e - 1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{UC_2(u, v)}{k(2)}$$

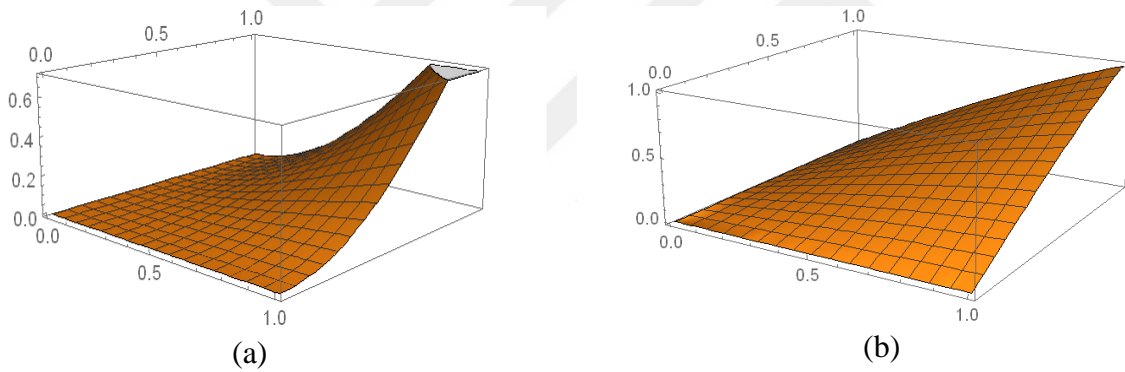
Dolayısıyla her $\theta > 0$ için fayda kapulasını içeren budanmış kapula fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_{trun}(u, v; \theta) = \frac{1}{k(\theta)} UC_{\theta}(u, v), \quad 0 < u < 1, \quad 0 < v < 1$$

$$= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^{\theta} + v^{\theta} - \ln(e^{u^{\theta}} + e^{v^{\theta}} - 1) \right)^{1/\theta},$$

$$0 < u < 1, \quad 0 < v < 1, \quad \theta > 0$$

$C_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun farklı θ değerleri için grafikleri Şekil 4.3'te verilmiştir.



Şekil 4.3. (a) $\theta = 1$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği (b) $\theta = 2$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ fonksiyonunun grafiği

$[0, a]^2$ üzerinde budanmış kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi genellenebilir:

$$k_a(\theta) = \left(2a^{\theta} - \ln(2e^{a^{\theta}} - 1) \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

olmak üzere,

$$c_{trun}(u, v; \theta) = \frac{1}{k_a(\theta)} uc_{\theta}(u, v), \quad (u, v) \in (0, a)^2$$

şeklindedir.

$C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasının kapula özelliklerini sağladığı aşağıda gösterilmiştir.

i. Her $(u, v) \in (0, 1)^2$ için

$$C_{trun}(u, 0; \theta) = C_{trun}(0, v; \theta) = 0 ?$$

$$C_{trun}(u, 1; \theta) = F(u) \text{ ve } C_{trun}(1, v; \theta) = G(v) ?$$

$$C_{trun}(u, 0; \theta) = \lim_{v \rightarrow 0} C_{trun}(u, v; \theta)$$

$$= \lim_{v \rightarrow 0} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}$$

$$= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta - \ln(e^{u^\theta}) \right)^{1/\theta}$$

$$= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (u^\theta - u^\theta)^{1/\theta}$$

$$= 0$$

$$C_{trun}(0, v; \theta) = \lim_{u \rightarrow 0} C_{trun}(u, v; \theta)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}$$

$$= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(v^\theta - \ln(e^{v^\theta}) \right)^{1/\theta}$$

$$= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (v^\theta - v^\theta)^{1/\theta}$$

$$= 0$$

$$C_{trun}(u, 1; \theta) = \lim_{v \rightarrow 1} C_{trun}(u, v; \theta)$$

$$= \lim_{v \rightarrow 1} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}$$

$$= \lim_{v \rightarrow 1} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta + 1 - \ln(e^{u^\theta} + e - 1) \right)^{1/\theta}$$

$\theta = 1$ için

$$= \frac{u+1-\ln(e^u+e-1)}{2-\ln(2e-1)} = F(u)$$

$$C_{trun}(1, v; \theta) = \lim_{u \rightarrow 1} C_{trun}(1, v; \theta)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(u^\theta + v^\theta - \ln(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 1} (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \left(1 + v^\theta - \ln(e + e^{v^\theta} - 1) \right)^{1/\theta}$$

$\theta = 1$ için

$$= \frac{1+v-\ln(e+e^v-1)}{2-\ln(2e-1)} = G(v)$$

$F(u) \cong u$ ve $G(v) \cong v$ olduğu sayısal olarak gösterilebilir: Mathematica 10.2 programında

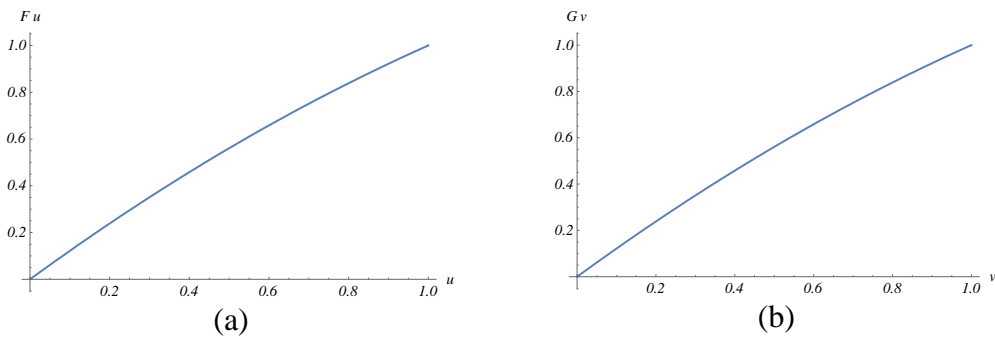
`Limit[trunC[0.2, v, 1], v → 1]`

`Limit[trunC[u, 0.1, 1], u → 1]`

komutları ile yapılan hesaplamalar sonucunda

$u = 0,2$ için $F(u) = 0,2385$ ve $v = 0,1$ için $G(v) = 0.1216$

elde edilmiştir. u ve v 'nin farklı değerleri için yakın sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca F ve G marjinal fonksiyonlarının grafikleri de Şekil 4.4'te gösterilmiştir.



Şekil 4.4. (a) $F(u)$ ve (b) $G(v)$ marjinal dağılım fonksiyonlarının grafikleri

ii. $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olacak şekilde her $u_1, u_2, v_1, v_2 \in (0, 1)^2$ için
 $C_{trun}(u_1, v_1; \theta) - C_{trun}(u_2, v_1; \theta) - C_{trun}(u_1, v_2; \theta) + C_{trun}(u_2, v_2; \theta) \geq 0$?

$\theta = 1$ için bu özellik özel olarak incelensin:

$$\begin{aligned}
& C_{trun}(u_1, v_1; \theta) - C_{trun}(u_2, v_1; \theta) - C_{trun}(u_1, v_2; \theta) + C_{trun}(u_2, v_2; \theta) \\
&= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (u_1 + v_1 - \ln(e^{u_1} + e^{v_1} - 1)) \\
&\quad - (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (u_2 + v_1 - \ln(e^{u_2} + e^{v_1} - 1)) - (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} \\
&\quad (u_1 + v_2 - \ln(e^{u_1} + e^{v_2} - 1)) + (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (u_2 + v_2 - \ln(e^{u_2} + e^{v_2} - 1)) \\
&= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (\ln(e^{u_1} + e^{v_1} - 1) - \ln(e^{u_2} + e^{v_1} - 1) - \ln(e^{u_1} + e^{v_2} - 1) \\
&\quad + \ln(e^{u_2} + e^{v_2} - 1)) \\
&\quad (u_1, v_1) = (0, 0), (u_2, v_2) = (u, v) \text{ olsun. Eş. 2.3'ten} \\
&= (2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta} (\ln(e^u) + \ln(e^v) - \ln(e^u + e^v - 1)) \\
&= \underbrace{(2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta}}_{>0} \underbrace{(u + v - \ln(e^u + e^v - 1))}_{>0} > 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylelikle $C_{trun}(u, v)$ fonksiyonu kapula şartlarını sağladığı için bir Sklar kapulasıdır.

4.5. Yeni Sklar Kapulası İçin Parametre Tahmini

En çok olabilirlik parametre tahmini

$U = (u_i, v_i), i = 1:n$ örnekleme için yeni Sklar kapulasının aşağıda $\mathcal{L}_U(\theta)$ ile verilen en çok olabilirlik fonksiyonu kullanılarak θ parametresinin $\hat{\theta}_{MLE}$ en çok olabilirlik tahmin edicisi Matlab R2016a programında $\max(x) = -\min(-x)$ bilgisine dayalı “fminsearch” komutu ile elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_U(\theta) &= - \sum_{i=1}^n \ln c_{trun}(u_i, v_i; \theta) \\
&= - \sum_{i=1}^n \ln \left(1 / \left(e^{u_i^\theta} + e^{v_i^\theta} - 1 \right)^2 u_i^{\theta-1} v_i^{\theta-1} (2 - \ln(2e - 1))^{-\frac{1}{\theta}} \left(u_i^\theta + v_i^\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \ln \left(e^{u_i^\theta} + e^{v_i^\theta} - 1 \right)^{\frac{1}{\theta-2}} \right) \left(1 + e^{u_i^\theta} (\theta - 1) + e^{v_i^\theta} (\theta - 1) - \theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{u_i^\theta + v_i^\theta} \left(1 + \theta (u_i^\theta + v_i^\theta - 1) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \theta e^{u_i^\theta + v_i^\theta} \ln \left(e^{u_i^\theta} + e^{v_i^\theta} - 1 \right) \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\theta \in \mathbb{R}^p \ (p \geq 1), \quad U_i = (u_i, v_i)^t \in [0,1]^2$$

θ parametresi için Kendall'in τ ve Spearman'ın ρ ilişki katsayıları

$C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasının Kendall'in τ ve Spearman'ın ρ ilişki katsayıları, Eş. 4.2 ve Eş. 4.3'ten

$$\begin{aligned}
\text{tau}[u_ , v_ , t_] &:= 4 \text{Simplify}[\text{Integrate}[\text{trunC}[u, v, t] \times \text{trunc}[u, v, t], \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 1\}]] - 1 \\
\text{ro}[u_ , v_ , t_] &:= 12 \text{Integrate}[\text{trunC}[u, v, t], \{u, 0, 1\}, \{v, 0, 1\}] - 3
\end{aligned}$$

komutları yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
\tau(C_{trun}(u, v; \theta)) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{trun}(u, v; \theta) dC_{trun}(u, v; \theta) - 1 \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^1 \left(2 \right. \\
&\quad \left. - \ln(2e - 1) \right)^{-1/\theta} \left(u^\theta + v^\theta \right. \\
&\quad \left. - \ln \left(e^{u^\theta} + e^{v^\theta} - 1 \right) \right)^{1/\theta} \frac{(2 - \ln(2e - 1))^{-1/\theta}}{(k_1)^2 UC_\theta(u, v)^{2\theta-1}} u^{\theta-1} v^{\theta-1} \left((\theta - 1)k_1 \right. \\
&\quad \left. + e^{u^\theta + v^\theta} \left(1 + \theta (UC_\theta(u, v)^\theta - 1) \right) \right) dudv - 1
\end{aligned}$$

$$= e^{\frac{1.3463}{\theta}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{(uv)^{\theta-1} UC_{\theta}(u, v)^{-1+\frac{1}{\theta}} \left(k_1(\theta-1) + e^{u^{\theta}+v^{\theta}} \left(1 + \theta(UC_{\theta}(u, v)^{\theta} - 1) \right) \right)}{(k_1)^2} dv du$$

$\theta = 1$ için

$$\begin{aligned} & 2(2\pi^2 + 3(-3 + 4\ln(e-1) + \ln(e-1)^2 + \ln(2e-1)^2 - 2\ln(1-3e+2e^2) \\ & + 4\text{PolyLog}\left(2, -1 + \frac{1}{e}\right) + 2\text{PolyLog}\left(2, \frac{1}{1-e}\right) - 2\text{PolyLog}\left(2, \frac{1}{e}\right))) \\ & = \frac{3(\ln(2e-1) - 2)^2}{3(\ln(2e-1) - 2)^2} - 1 \end{aligned}$$

elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} \rho(C_{trun}(u, v; \theta)) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C_{trun}(u, v; \theta) dudv - 3 \\ &= \frac{12}{(2 - \ln(2e-1))^{1/\theta}} \int_0^1 \int_0^1 \left(u^{\theta} + v^{\theta} - \ln(e^{u^{\theta}} + e^{v^{\theta}} - 1) \right)^{1/\theta} dudv - 3 \end{aligned}$$

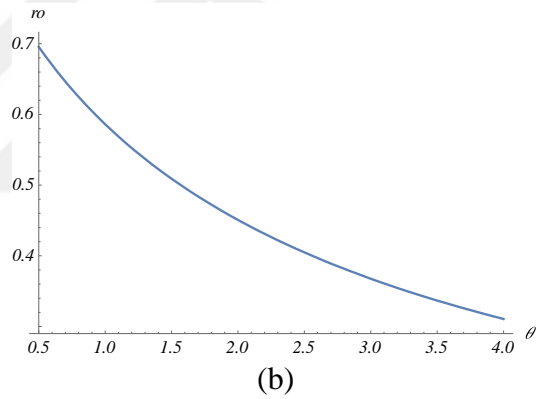
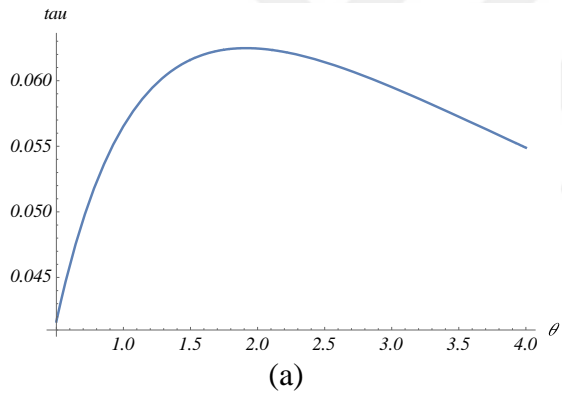
$\theta = 1$ için

$$= 12 \int_0^1 \frac{1 + 2x - 2\ln(e^x - 1) - 2\text{PolyLog}\left(2, \frac{1}{1-e^x}\right) + 2\text{PolyLog}\left(2, -\frac{e}{1-e^x}\right)}{4 - 2\ln(2e-1)} dx - 3$$

Kendall'ın τ ve Spearman'ın ρ katsayıları belli θ değerleri için hesaplanarak Çizelge 4.1'de verilmiştir. Şekil 4.5'te ise bu katsayıların θ 'ya göre değişimlerini gösteren grafikler verilmiştir.

Çizelge 4.1. Farklı θ değerleri için Kendall'ın τ ve Spearman'ın ρ katsayıları

θ	τ	ρ
0,25	0,0263	0,7722
0,50	0,0416	0,6956
0,75	0,0509	0,6354
1	0,0565	0,5861
1,25	0,0598	0,5446
1,50	0,0615	0,5090
1,75	0,0623	0,4780
2	0,0624	0,4507
2,25	0,0620	0,4265
2,50	0,0614	0,4048
2,75	0,0605	0,3853
3	0,0595	0,3676
3,25	0,0584	0,3514
3,50	0,0572	0,3367
3,75	0,0560	0,3231
4	0,0550	0,3106
4,25	0,0537	0,2991

Şekil 4.5. (a) θ 'ya göre τ grafiği(b) θ 'ya göre ρ grafiği

Çizelge 4.1 ve Şekil 4.5'e göre, Kendall'ın τ 'su $\theta = 2$ değerinden sonra azalmaya başlarken, Spearman'ın ρ 'su θ 'nın değeri arttıkça azalmaktadır. Ayrıca $0,25 < \theta \leq 4,25$ için Spearman'ın ρ 'su ve Kendall'ın τ 'su ilişki katsayıları sırasıyla, $0,2991 \leq \rho \leq 0,7722$ ve $0,0263 \leq \tau \leq 0,0567$ olduğu gözlenmiştir.



5. FAYDA KAPULASI YARDIMIYLA ELDE EDİLEN YENİ KAPULA İÇİN SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, elde edilen yeni $C_{trun}(u, v; \theta)$ Sklar kapulasından bir simülasyon çalışması yapılmıştır. θ 'nın farklı değerlerine göre MLE tahminleri $n = 30, 50, 100, 150, 500$ örneklem büyüklükleri için elde edilmiştir. Burada ortalama θ tahmini her bir örneklemin 100 kez tekrar edilmesi ile bulunmuştur. Yan (*Bias*) ve Hata Kareler Ortalamaları (*MSE*) hesaplanarak θ tahmin sonuçları farklı örneklem büyüklükleri için değerlendirilmiştir. Daha sonra seçilen bir θ değeri için yeni kapuladan rasgele vektörler üretilip, riskten kaçınma ve risk primi değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Yeni Sklar kapulası için yapılan bu simülasyon çalışmasında üretilen rasgele vektörler için, Öztürk ve Özbek (2015) tarafından verilen aşağıdaki algoritma kullanılmıştır.

Adım 1. $f_X(x)$ ve $g_Y(y \setminus x)$ koşullu dağılımlarından sırasıyla $X \sim f_X(x)$, $Y \sim g_Y(y \setminus x)$ bulunur.

Adım 2. $U_i \sim U(0,1)$, $i = 1, 2$ olmak üzere,

$$F_X(x) = U_1$$

$$G_Y(y \setminus x) = U_2$$

denklem sisteminden X ve Y , U_1 ve U_2 cinsinden çözülür.

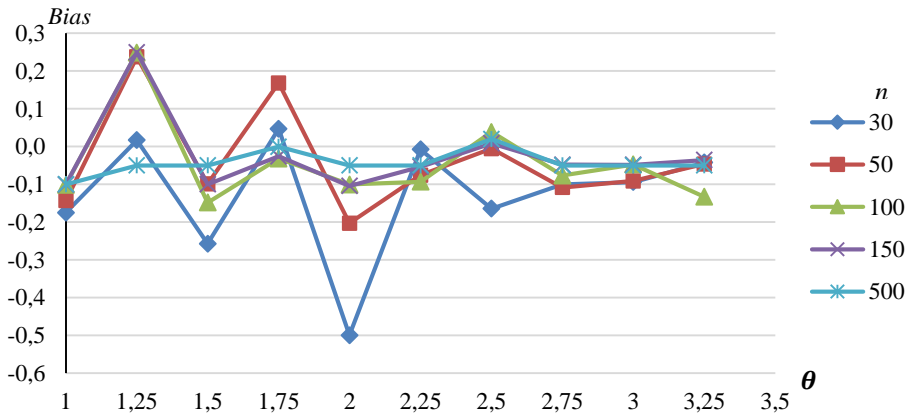
Çizelge 5.1. Farklı n ve θ değerlerine göre MLE tahminleri, ρ ve τ katsayıları

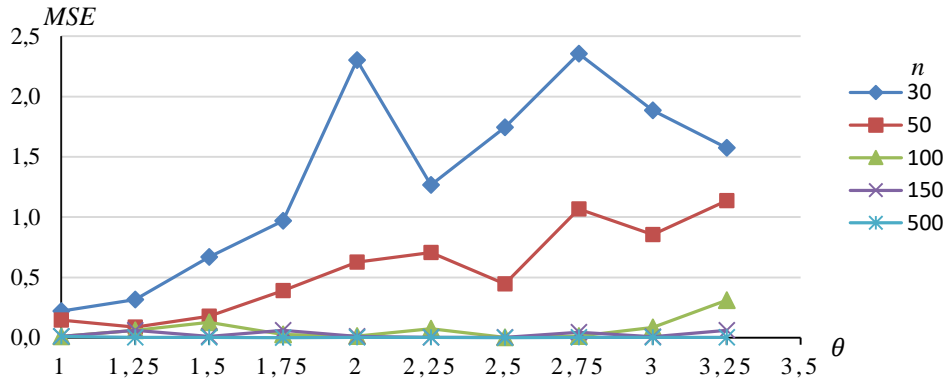
$\theta = 1$						$\theta = 1,50$					
n	$\hat{\theta}_{MLE}$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	ρ	τ	n	$\hat{\theta}_{MLE}$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	ρ	τ
30	1,1752	-0,1752	0,2194	0,1049	0,0565	30	1,7573	-0,2573	0,6695	0,0963	0,0566
50	1,1432	-0,1432	0,1468	0,1356	0,0790	50	1,5989	-0,0989	0,1768	0,0913	0,0518
100	1,1015	-0,1015	0,0103	0,1049	0,0573	100	1,6483	-0,1483	0,1283	0,1063	0,0644
150	1,1007	-0,1007	0,0102	0,0939	0,0545	150	1,6002	-0,1002	0,0100	0,0768	0,0438
500	1,1000	-0,1000	0,0100	0,0854	0,0467	500	1,5500	-0,0500	0,0025	0,0874	0,0494
$\theta = 1,25$						$\theta = 1,75$					
n	$\hat{\theta}_{MLE}$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	ρ	τ	n	$\hat{\theta}_{MLE}$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	ρ	τ
30	1,2330	0,0170	0,3171	0,0893	0,0486	30	1,7031	0,0469	0,9699	0,0874	0,0522
50	1,0126	0,2374	0,0883	0,0785	0,0447	50	1,5818	0,1682	0,3892	0,0699	0,0433
100	1,0016	0,2484	0,0617	0,0719	0,0378	100	1,7818	-0,0318	0,0276	0,0809	0,0428
150	1,0006	0,2494	0,0622	0,0966	0,0531	150	1,7761	-0,0261	0,0614	0,0767	0,0444
500	1,3000	-0,0500	0,0025	0,0857	0,0478	500	1,7505	-0,0005	0,0002	0,0823	0,0472

Çizelge 5.1. (Devam) Farklı n ve θ değerlerine göre MLE tahminleri, ρ ve τ katsayıları

$\theta = 2$						$\theta = 2,75$					
n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ	n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ
30	2,4996	-0,4996	2,3009	0,0788	0,0457	30	2,8502	-0,1002	2,3549	0,0884	0,0523
50	2,2033	-0,2033	0,6256	0,0811	0,0445	50	2,8587	-0,1087	1,0687	0,0640	0,0394
100	2,1006	-0,1006	0,0120	0,0890	0,0510	100	2,8268	-0,0768	0,0137	0,0488	0,0288
150	2,1043	-0,1043	0,0113	0,0839	0,0483	150	2,7978	-0,0478	0,0455	0,0471	0,0262
500	2,0500	-0,0500	0,0025	0,0773	0,0438	500	2,8000	-0,0500	0,0025	0,0370	0,0368
$\theta = 2,25$						$\theta = 3$					
n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ	n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ
30	2,2576	-0,0076	1,2672	0,0672	0,0390	30	3,0942	-0,0942	1,8853	0,0699	0,0439
50	2,3260	-0,0760	0,7070	0,0619	0,0350	50	3,0912	-0,0912	0,8557	0,0563	0,0351
100	2,3434	-0,0934	0,0734	0,0710	0,0411	100	3,0475	-0,0475	0,0849	0,0399	0,0234
150	2,3033	-0,0533	0,0030	0,0730	0,0427	150	3,0483	-0,0483	0,0093	0,0616	0,0349
500	2,3000	-0,0500	0,0025	0,0721	0,0410	500	3,0500	-0,0500	0,0025	0,0500	0,0287
$\theta = 2,50$						$\theta = 3,25$					
n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ	n	$\hat{\theta}_{MLE}$	$Bias$	MSE	ρ	τ
30	2,6644	-0,1644	1,7442	0,0948	0,0637	30	3,2923	-0,0423	1,5754	0,0250	0,0106
50	2,5056	-0,0056	0,4448	0,0666	0,0393	50	3,2965	-0,0465	1,1365	0,0697	0,0392
100	2,4614	0,0386	0,0028	0,0579	0,0320	100	3,3830	-0,1330	0,3105	0,0642	0,0384
150	2,4918	0,0082	0,0038	0,0684	0,0393	150	3,2856	-0,0356	0,0599	0,0554	0,0328
500	2,4800	0,0200	0,0004	0,0681	0,0398	500	3,3000	-0,0500	0,0025	0,0718	0,0438

Şekil 5.1'e göre, $n = 30$ için $\hat{\theta}_{MLE} = 1,2331$ (0,0170) tahmini ve $\hat{\theta}_{MLE} = 2,2576$ (-0,0076) tahmini en küçük $Bias$ değerlerine sahiptir. $n = 50$ için $\hat{\theta}_{MLE} = 2,5056$ (-0,0056) yapılan tahminlerden $Bias$ değeri en küçük olan tahmindir. $n = 100$ için $\hat{\theta}_{MLE} = 1,7818$ (0,0318) tahmini en küçük $Bias$ değerine sahiptir. $n = 150$ olduğunda $\hat{\theta}_{MLE} = 2,4918$ (0,0082) tahmini diğer tahminler içerisinde $Bias$ değerine göre en iyi tahmindir. $n = 500$ örneklem değeri için $\hat{\theta}_{MLE} = 1,7505$ (-0,0005) tahmini $Bias$ değerleri arasında en küçüğüdür.

Şekil 5.1. $n = 30, 50, 100, 150, 500$ için θ değerlerine göre $Bias$ değerlerinin grafiği



Şekil 5.2. $n = 30, 50, 100, 150, 500$ için θ değerlerine göre MSE değerlerinin grafiği

Şekil 5.2’de, örneklem genişliği arttıkça $\hat{\theta}_{MLE}$ tahminlerine ait MSE değerlerinin azaldığı görülmektedir. Ayrıca seçilmiş $\hat{\theta}_{MLE}$ tahmin değerlerine ait MSE değerleri, küçük örneklemelerde ($n = 30, 50$) daha büyük olurken, büyük örneklemelerde ($n = 100, 150, 500$) daha küçük olmaktadır.

$Bias$ ve MSE bilgilerinden yararlanarak $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından $n = 30$ ve $\theta = 1.25$ için üretilen rasgele vektörlerin riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Çizelge 5.2. $n = 30$ ve $\theta = 1,25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü değerleri

u	v	r^{11}	r^{12}	r^{21}	r^{22}	π_{11}	π_{21}
0,3968	0,2314	0,8510	-4,1190	-2,2020	0,7213	-0,0347	-0,0044
0,1381	0,0628	0,9466	-15,5500	-6,8058	0,8779	-0,2139	-0,0713
0,0552	0,2714	0,7721	-3,2481	-17,8429	0,9585	-0,0237	-0,2443
0,3526	0,7197	0,5745	-1,1196	-2,7907	0,8293	0,0031	-0,0092
0,1453	0,1659	0,8650	-5,6567	-6,5307	0,8830	-0,0588	-0,0667
0,6185	0,6713	0,6599	-1,3496	-1,5082	0,6956	0,0026	0,0056
0,0249	0,6388	0,5341	-1,1315	-40,1758	0,9869	0,0014	-0,5999
0,9642	0,9307	0,6306	-1,0411	-0,9856	0,6098	0,0064	0,0103
0,3602	0,8724	0,5072	-0,8715	-2,7992	0,8466	0,0046	-0,0086
0,2026	0,5811	0,6085	-1,3806	-4,8443	0,8884	0,0002	-0,0395
0,9783	0,9244	0,6363	-1,0548	-0,9662	0,6029	0,0064	0,0103
0,3364	0,1890	0,8706	-5,0556	-2,6302	0,7513	-0,0490	-0,0100
0,0872	0,7276	0,5049	-0,9767	-11,4710	0,9578	0,0028	-0,1425
0,3381	0,4258	0,7254	-2,0918	-2,7601	0,7919	-0,0069	-0,0103
0,0539	0,3061	0,7466	-2,8316	-18,3134	0,9608	-0,0180	-0,2517
0,5650	0,9556	0,5237	-0,8509	-1,7931	0,7740	0,0055	0,0044
0,1991	0,1413	0,8894	-6,7471	-4,6489	0,8394	-0,0753	-0,0385
0,6670	0,5994	0,7035	-1,5605	-1,3508	0,6575	0,0008	0,0065

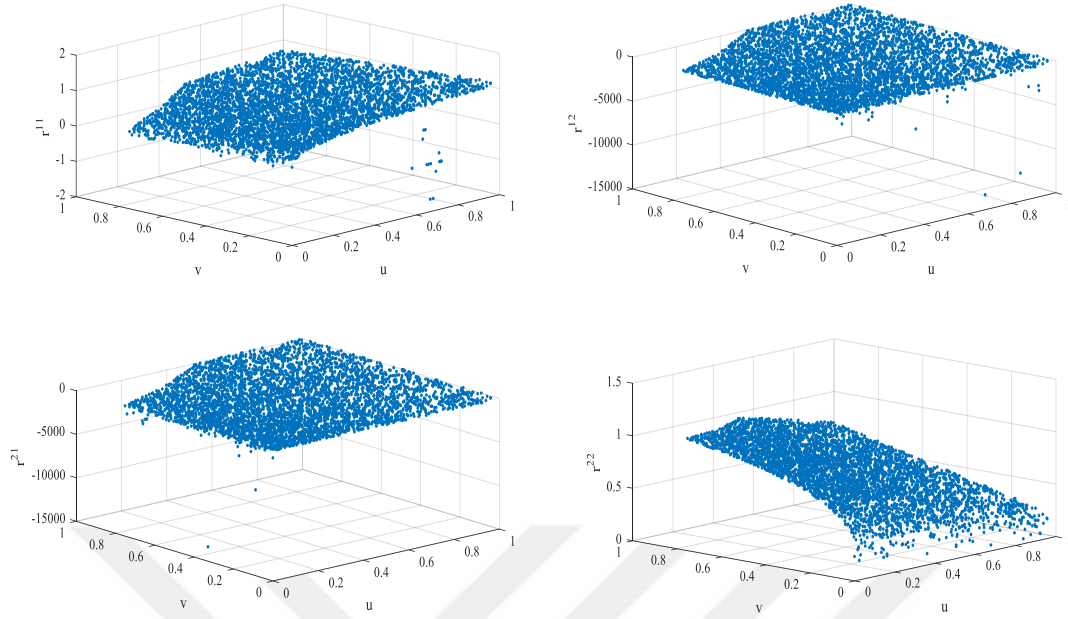
Çizelge 5.2. (devam) $n = 30$ ve $\theta = 1,25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü değerleri

0,4345	0,5670	0,6693	-1,5466	-2,1683	0,7641	-0,0002	-0,0021
0,8507	0,1494	0,9356	-6,7399	-0,8100	0,4640	-0,0735	0,0068
0,5801	0,1469	0,9186	-6,7255	-1,3532	0,5956	-0,0739	0,0038
0,0413	0,1348	0,8783	-6,9627	-23,8653	0,9645	-0,0792	-0,3402
0,4916	0,7970	0,5729	-1,0429	-2,0020	0,7775	0,0043	0,0012
0,2978	0,1707	0,8786	-5,5972	-3,0045	0,7737	-0,0573	-0,0150
0,6356	0,2852	0,8512	-3,4305	-1,2748	0,5996	-0,0237	0,0052
0,1890	0,5277	0,6348	-1,5482	-5,1713	0,8907	-0,0015	-0,0447
0,1684	0,4371	0,6834	-1,9298	-5,7699	0,8941	-0,0059	-0,0541
0,4095	0,6465	0,6237	-1,3098	-2,3521	0,7904	0,0019	-0,0039
0,2478	0,6885	0,5639	-1,1331	-3,9927	0,8762	0,0025	-0,0264
0,6587	0,9595	0,5454	-0,8842	-1,5271	0,7368	0,0058	0,0070

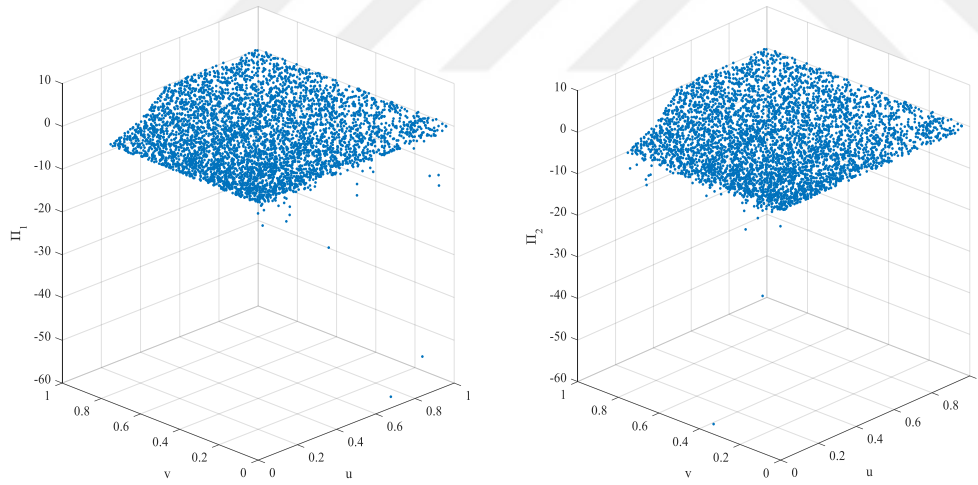
$n = 30$ için üretilen $[u \ v]$ rasgele vektörü için Spearmann'ın ρ 'su 0,4047, Kendall'ın τ 'su ise 0,3057 olarak bulunmuştur.

Çizelge 5.2'ye göre, bir sigorta şirketi, $u = 0,1991$ ve $v = 0,1413$ birim düzgün bağımlı riskleri sigortalamak için 0,1138 ($0,0753+0,0385$) katsayısı ile risk primini hesaplayacaktır. Ayrıca sigorta şirketi riskleri aynı anda sigortalamak isterse riski seven bir davranış sergileyecektir ($r^{12} < 0, r^{21} < 0$). Eğer sigorta şirketi riskten kaçınmayı tercih ederse, riskleri sigortalamak için 0,1138 prim katsayısı ile sigortalanandan daha fazla prim almalıdır.

Riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü grafiklerinin daha anlaşılır görülebilmesi için $n = 5000$ birim için bu grafikler Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te elde edilmiştir. Bu grafikler sırasıyla Şekil 3.1 ve Şekil 3.3 ile verilen riskten kaçınma ve risk primi grafikleri ile benzerlik göstermektedir.



Şekil 5.3. $n = 5000$ ve $\theta = 1.25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün riskten kaçınma matrisi



Şekil 5.4. $n = 5000$ ve $\theta = 1.25$ için $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulasından üretilen rasgele vektörün risk prim vektörünün grafikleri



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında bağımlı riskler durumunda, Kettler (2007)'de verilen fayda kapulasına dayalı iki değişkenli riskten kaçınma matrisi ve risk prim vektörü elde edilmiştir. θ bağımlılık parametresinin farklı değerleri için riskten kaçınma ve risk primleri hesaplanmıştır. Ayrıca risklerin bağımsız, yarı bağımlı ve tam bağımlı olma durumlarına göre riskten kaçınma ve risk primi katsayıları elde edilmiştir. Sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Bu sonuçlara göre, risklerin bağımlılığı arttıkça, sigorta şirketinin riski seven bir davranış sergilediği görülmüştür. Buna ek olarak riski seven bir sigorta şirketi, risk almak istemezse prim katsayılarının toplamı kadar sigortalananadan fazla prim almayı tercih edecektir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, bağımlı bir veri grubu için riskten kaçınma ve risk primi ölçütlerini sayısal olarak yorumlayabilmek amacıyla ele alınan modelden simülasyon çalışması yapılmak istenmiştir. Ancak bu fayda kapulası, dağılım fonksiyonu özelliklerini sağlamadığından simülasyon çalışmasında kullanılamamıştır. Böylelikle simülasyon yapabilmek için dağılım fonksiyonu özelliğini de sağlayan yeni bir Sklar kapula oluşturmaya gerek duyulmuştur. $[0, \infty)$ aralığında değerler alan Kettler fayda kapulasından budanmış dağılım yöntemi ile, $[0, 1]$ aralığında değerler alan aynı zamanda dağılım fonksiyonu da olan yeni bir Sklar kapulası elde edilmiştir.

Beşinci bölümde verilen simülasyon çalışmasında, yeni Sklar kapulasından $n = 30, 50, 100, 150, 500$ birimlik rasgele vektörler, kapula bağımlılık parametresi θ 'nın bazı değerleri için üretilmiştir. Bu işlemler 100'er kez denenerek θ parametresinin MLE tahminleri yapılmış ve bu tahminler *Bias* ve *MSE* ölçütleri ile değerlendirilmiştir. Buna göre örneklem genişliği arttıkça, *MSE* değerlerinin düştüğü görülmüştür.

Ayrıca, yeni Sklar kapulası için Kendall'ın τ 'su ve Spearman'ın ρ 'su yöntemlerine göre de parametre tahmini yapabilmek amacıyla θ 'ya bağlı fonksiyonlar elde edilmeye çalışılmıştır. Ancak bu fonksiyonların açık formları elde edilemediğinden sayısal yöntemler ile bulunan sonuçlar verilmiştir. Burada $0,25 < \theta \leq 4,25$ için Spearmann'ın ρ 'su ve Kendall'ın τ 'su ilişki katsayıları sırasıyla, $0,2991 \leq \rho \leq 0,7722$ ve $0,0263 \leq \tau \leq 0,0567$ olduğu gözlenmiştir.

Çalışmanın devamında, $\theta = 1.25$ parametre değerinde $n = 30$ birimlik örneklemden üretilen rasgele vektör için riskten kaçınma ve risk prim vektörü katsayıları elde edilmiştir. Buna göre, risklerin bağımlılık yapısının $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulası ile modellendiği durum için belirlenen prim katsayıları, riski sevme ve riskten kaçınma durumlarına göre yorumlanmıştır. Sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuştur. Böylelikle bağımlı risklerle çalışan bir sigorta şirketinin riskten kaçınması durumunda daha fazla prim katsayısı belirlemesi gerekirken, riski sevmesi durumunda daha az prim katsayısı belirlemesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır.

Literatürde, fayda fonksiyonlarına dayalı bağımlı çok değişkenli durumlar için oluşturulmuş fayda kapula modelleri çok fazla bulunmamaktadır. Böylece bu tez çalışmasında oluşturulmuş olan $C_{trun}(u, v; \theta)$ kapulası prim hesaplamalarında kullanılan fayda kapulalarına alternatif olarak kullanılabilir.

Gelecek çalışmalarda diğer bilinen fayda kapulaları için de budanmış dağılım yöntemi ile başka Sklar kapula modelleri oluşturulabilir. Bu şekilde oluşturulan, dağılım fonksiyonu özelliğini sağlayan yeni kapula fonksiyonları ile sigortacılık alanında, özellikle prim hesaplamalarında daha gerçekçi modellemelerin yapılacağı öngörülmektedir. Diğer taraftan, yeni modellerin marjinal fonksiyonları olarak farklı fayda fonksiyonlarından yararlanılacağı için modellerin parametre sayısında artış olabilecektir. Bu durum, daha doğru modelleme yapılmasına olanak sağlarken, parametre sayısının artması ile parametre tahmini gibi istatistiksel sorunlarla da karşılaşılacağı düşünülmektedir. Ayrıca elde edilen kapula modelleri, sigortacılık alanında birçok gözlenmiş bağımlı sigorta ürünlerine ait risk veri setleri için uygulandığında, var olan fayda kapulası modelleri ile karşılaştırılabilecektir ve model uyum iyiliği testleri ile daha gerçekçi model seçimlerinin yapılacağı değerlendirilebilecektir.

KAYNAKLAR

- Abbas, A.E. (2009). Multiattribute utility copulas. *Operations Research*, 57(6), 1367-1383.
- Abbas, A.E. (2010a). General decompositions of multiattribute utility functions with partial utility independence. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 17, 37–59.
- Abbas, A.E. (2010b). Constructing multiattribute utility functions for decision analysis. In *INFORMS TutORials in Operations Research*, 62-98.
- Abbas, A.E. (2013). Utility copula functions matching all boundary assessments. *Operations Research*, 61(2), 359-371.
- Ahsanullah, M, Golam Kibria, B.M. and Shakil M. (2014). Normal distribution. *Atlantis Studies in Probability and Statistics*, 4, 7-50.
- Arrow, K.J., (1965). *Aspects of The Theory of Risk-Bearing*. Helsinki: Yrjö Jahnsson Lectures, Yrjö Jahnssonin Saatio, 13-56.
- Arrow, K.J., (1971). *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Chicago: Markham, 45-50.
- Cardin, M., Ferretti, P. (2004). Bivariate Risk Aversion and Concordance Aversion: Similarities and Differences. *Working paper, Department of Applied Mathematics, University Ca'Foscari Venice*, 27-35.
- Cebrián, A., Denuit, M. and Lambert, P. (2003). Analysis of bivariate tail dependence using extreme values copulas: an application to the SOA medical large claims database, *Belgian Actuarial Journal* 3(1), 33–41.
- Cipu, C., Gheorghe, C. (2015). Some applications in economy for utility functions involving risk theory, *Procedia Economics and Finance*, 22, 595-600.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. England: John Wiley & Sons Ltd, 49-135.
- Courbage, C., Rey, B. (2007). Precautionary saving in the presence of other risks. *Economic Theory*, 32, 417–424.
- David, O. (2005). On the Preservation of copula structure under truncation. *The Canadian Journal of Statistics*, 33(3), 465-468.
- Denuit, M.M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. (2005). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. England: John Wiley and Sons, 59-224.
- Denuit, M.M., Eeckhoudt, L. and Menegatti, M. (2011). Correlated risks, bivariate utility and optimal choices. *Economic Theory*, 46, 39–54.
- Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R. and Vyncke, D. (2002). The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications. *Insurance: Mathematics and Economics*. 31(2), 133–161.

- Duncan, G.T. (1977). A matrix measure of multivariate local risk aversion. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 45(4), 895-903.
- Eeckhoudt, L., Rey, B. and Schlesinger, H. (2007). A good sign for multivariate risk taking. *Management Science*, 53(1), 117-124.
- Fischer, M., Köck, C., Schlüter, S. and Weigert, F. (2009). An empirical analysis of multivariate copula models. *Quantitative Finance*, 9(7), 839–854.
- Frees, E.W., Valdez, E.A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 1–25.
- Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L.P. (1998): Understanding relationships using copulas by Edward Frees and Emiliano Valdez. *North American Actuarial Journal*, 2(3), 143–149.
- Genest, C., Gendron, M. and Bourdeau-Brien, M. (2009). The advent of copulas in finance. *European Journal of Finance*, 15(7–8), 609–618.
- Goovaerts, M., Linders, D., Van Weert, K. and Tank, F. (2012). On the in-terplay between distortion, mean value and Haezendonck-Goovaerts risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1), 1018.
- Kara, E., Yıldız, O. (2014). Bivariate analysis of precipitation and using copulas. *Journal of The Turkish Statistical Association*, 7 (3), 63-70.
- Kemaloğlu, S.A., Kara, E.K. (2015). Modeling dependent financial assets by dynamic copula and portfolio optimization based on CVaR. *Communications Series A1 Mathematics & Statistics*, 64(1), 1-13.
- Kemaloğlu, S.A., Shapiro, A.F., Tank, F. and Apaydın, A. (2018). Using fuzzy logic to interpret dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics* 79, 101-106.
- Kızılok, E. (2010). *Çok Değişkenli Bağımlı Risklerin Modellenmesi ve Optimal Aktüeryal Kararlar*, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kettler, P.C. (2007). *Utility Copulas*. Oslo: Department of Mathematics, University of Oslo, Pure Mathematics, No. 20.
- Lai, L.H. (2015). Statistical premium in correlated losses of insurance. *Economic Modelling*, 49, 248.253.
- Li, J., Liu, D. and Wang, J. (2016). Risk aversion with two risks. *A Theoretical Extension Journal of Mathematical Economics*, 63, 100–105.
- Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas* (Second Edition). New York: Springer, 65-70.
- Öztürk, F., Özbek, L. (2015). *Matematiksel Modelleme ve Simülasyon* (Üçüncü Baskı), Ankara : Yazarın Kendi Yayını, 38-39.

- Pratt, J.W. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 122-136.
- Richter, M.K. (1960). Cardinal Utility, Portfolio Selection and Taxation. *The Review of Economic Studies*, 27(3), 152-166.
- Sengupta, J.K. (1983). Multivariate risk aversion with applications. *Mathematical Modelling*, 4 (4), 307-322.
- Sklar, A. (1959). Functions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229-231.
- Tank, F., Gebizlioglu, O.L. (2004). Sarmanov distribution class for dependent risks and its applications. *Belgian Actuarial Bulletin*, 4(1), 50-52.
- Taşdemir, M. (2007). Belirsizlik altında tercihler ve beklenen fayda modelinin yetersizlikleri. *Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(1), 307-318.
- Tekin, B. (2016). Traditional finance-behavioral finance distinction in the context of expected utility and prospect theories. *Journal of Accounting, Finance and Auditing Studies*, 2 (4), 75-107.
- Thomas, P.J. (2016). Measuring risk-aversion. *The challenge. Measurement*, 79, 285–301.
- Tokmachev, M.S. (2018). Modeling of truncated probability distributions. *IOP Conferance Series: Materials Science and Engineering*, 441.
- Wei, G. (2011). Copula parameter estimation by maximum-likelihood and minimum-distance estimators: a simulation study. *Computational Statistics*, 26, 31–54.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : DURUKAN, Kübra
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 20.11.1981, Ankara
 Medeni Hali : Evli
 Telefon : 0532 245 73 80
 e-posta : kubraba@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	Devam ediyor
Y. Lisans	Kırıkkale Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2008
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2003
Lise	Anıttepe Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003- Halen	Kırıkkale Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dili

İngilizce

Yayınlar

A. Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

1. Öncel, S.Y., Aba, K. (2005). *Tail Probability For Gaussian Processes*. Ordered Statistical Data: Approximations, Bounds and Characterizations 15-18 June 2005, Poster Session, İzmir University of Economics Department of Mathematics, İzmir, Turkey, 61.
2. Bayrak H., Jarjies O., Durukan K. (2013). *Using of Fractional Factorial Design (r^{k-p}) in DEA to Selection of Outputs and Inputs*. 11th International Conference on Data Envelopment Analysis (DEA2013), 27-30 June, Samsun, Turkey, 74.

3. Kara K. E., Durukan K. (2015). *Analyzing of Earthquake Risks in Turkey with Generalized Linear Models*. 16th International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, Trakya University, May 7-12, 2015, Edirne, Turkey, 463.
4. Kara K. E., Durukan K. (2015). *Modeling by Copula of the Earthquake Risk Analysis for Turkey*. 16th International Symposium on Econometrics, Operations Research and Statistics, Trakya University, May 7-12, 2015, Edirne, Turkey, 209.
5. Durukan, K., Kızılok Kara, E., Örkücü, H.H., 2017. *Bivariate Risk Aversion for Utility Copula Functions*. 3rd International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, Mayıs 24-26 2017, Konya, Turkey, 257.
6. Durukan, K., Kızılok Kara, E., Örkücü, H.H. (2017). *Bivariate Risk Aversion and Risk Premium Based on Various Utility Copula Functions*. 10th International Statistics Congress (ISC2017), December 6-8 2017, Ankara, Turkey, 149.

B. Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

1. Erbay H., Aba, K. (2009). An Algorithm For Rank Estimation And Subspace Tracking. *International Journal of Computer Mathematics*, 86(7), 1194–1203.
2. Ozcan K, Ozcan O, Muluk NB, Cingi C, Durukan K. (2013). Self-Inserted Foreign Body and Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder: Evaluated by The Conners' Parent Rating Scales-Revised. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*, 77, 1992-1997.
3. Seren E, San T, Cingi C, Bayar Muluk N, Durukan K. (2014). Effects of Body Mass Index and Adenotonsillar Size on Snoring Sound Intensity Levels at Highest Power. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*, 78, 50-54.
4. Bayrak, H., Jarjies, O., Durukan, K. (2015). Using of Fractional Factorial Design (r^{k-p}) in Data Envelopment Analysis to Selection of Outputs and Inputs. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44 (3), 679 – 687.
5. Kızılok Kara, E., Durukan, K. (2017). The Statistical Analysis of The Earthquake Hazard for Turkey by Generalized Linear Models. *Gazi University Journal of Science*, 30(4), 584-597.
6. Durukan, K., Kızılok Kara, E., Örkücü, H.H. (2019). Risk Premium For Dependent Risks Using Utility Copulas and Risk Aversion. *İstatistik: Journal of The Turkish Statistical Association*, (Kabul edildi).

C. Ulusal hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

1. Durukan, K., Öncel, S. Y. (2013). Üniversite Öğrencilerinde İşsizlik Kaygısı Durumunun Değerlendirilmesi. *Kırıkkale Üniversitesi Bilimde Gelişmeler Dergisi*, 2(1), 108-117.

D. Devam eden veya faaliyet döneminde tamamlanmış bilimsel araştırma projeleri

Görevi	Proje Başlığı	Bitiş Tarihi
Proje Yardımcısı	Kırıkkale İlinde Sigara Bağımlılığı ve Sigara ile 2012 İlişkili Psikiyatrik Hastalıkların İkiz Modelleri Yardımı ile İncelenmesi	

Atıflar

An algorithm for rank estimation and subspace tracking

1. Geunseop, L. and Barlow, J., (2017). Updating approximate principal components with applications to template tracking. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 24(2), 1-12.
2. Geunseop, L. (2013). *Fast regularized total least squares methods with*. Diss. The Pennsylvania State University, Doctora Thesis.

Self-inserted foreign body and attention-deficit/hyperactivity disorder: Evaluated by the Conners' Parent Rating Scales-Revised

1. Çakmak, M., Göllü, G., Boybeyi, Ö., Küçük, G., Sertçelik, M., Günal, Y. D. and Çetin, Ş., (2015). Cognitive and behavioral characteristics of children with caustic ingestion. *Journal of Pediatric Surgery*, 50(4), 540-542.
2. Guner, S., Gozen, A., Ceylan, M.F., Turktas, U. and Gokalp, M.A., (2014). Psychotic patient who has multiple foreign body in the forearm. *International Journal of Academic Research*, 6(4), 29-31.
3. Jariwala, N., Kratimenos, P., Eng, D., Gaughan, J. and Koutroulis, I., (2016). Foreign body injuries in children: Are the younger siblings doomed?. *International Journal of Pediatrics and Adolescent Medicine*, 3(1), 7-11.
4. Bakhshaei, M., Hebrani, P., Shams, M., Salehi, M., Ghaffari, A. and Rajati, M., (2017). Psychological status in children with ear and nose foreign body insertion. *International Journal of Pediatric Otorhinolaryngology*, 92, 103-107.

Effects of body mass index and adenotonsillar size on snoring sound intensity levels at highest power

1. Acar, M., Yazıcı, D., Bayar Muluk, N., Hancı, D., Seren, E. and Cingi, C. (2016). Is There a Relationship Between Snoring Sound Intensity and Frequency and OSAS Severity?, *Annals of Otolaryngology, Rhinology and Laryngology*, 125(1), 31-36.
2. Seren, E., İlhanlı, İ., Muluk, N.B., Cingi, C. and Hancı, D. (2014). Telephonic analysis of the snoring sound spectrum. *Annals of Otolaryngology, Rhinology and Laryngology*, 0003489414538401.
3. Zaffanello, M., Piacentini, G., Gasperi, E., Maffeis, C., Fava, C., Bonafini, S., and Antoniazzi, F. (2016). Snoring in a cohort of obese children: association with palate position and nocturnal desaturations. *Journal of Pediatric and Neonatal Individualized Medicine*, 5(1), 1-5.
4. Acar, M., Ulusoy, S., Seren, E., Muluk, N.B., Cingi, C. and Hancı, D. (2014). Effects of Lateral Osteotomy on Nasal Sound Intensity Levels in Patients Who Underwent Rhinoplasty. *Journal of Craniofacial Surgery*, 25(6), 2017-2021.
5. Ovcharenko, L.S., Tkachenko, Yu V., Vertegel, A.A., Samokhin, I.V., Kryazhev, A.V., Andrienko, T.G. and Sheludko, D.N. (2017). The Adenoids Hyperplasia and Adenotomy Effects on the Children's Immunity and Health. *Childs Health*, 12(4), 514-520.

Üniversite Öğrencilerinde İşsizlik Kaygısı Durumunun Değerlendirilmesi

1. Çolakoğlu, T., Kanyılmaz Polat, E. ve Gezer Aydın, G., (2017). İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Öğrencilerinin İşsizlik Kaygısı Üzerine Bir Araştırma: Biga IIBF Örneği. *International Journal of Innovative Approaches in Social Sciences*, 1(1), 29-39.

Hobiler

Yüzmek, Origami yapmak, fotoğraf çekmek, kitap okumak, müzik dinlemek



GAZİ GELECEKTİR..