



KARMA PROSES KONTROL GRAFİKLERİ

Beste YILMAZ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TEMMUZ 2019

Beste YILMAZ tarafından hazırlanan “KARMA PROSES KONTROL GRAFİKLERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Akif BAKIR

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Başkan: Doç. Dr. Rukiye DAĞALP

İstatistik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Filiz KARDİYEN

İstatistik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 01 / 07 / 2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

.....
Beste YILMAZ
01/07/2019

KARMA PROSES KONTROL GRAFİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Beste YILMAZ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Kontrol grafikleri istatistiksel proses kontrolünün en önemli araçlarından. Kontrol grafikleri bir prosesin hedeflenen dağılımından kaymaları denetlemek ve prosesi gözlemlemek için kullanılırlar. Parametrik kontrol grafiklerinde en yaygın kullanılan üç kontrol grafiği Shewhart, CUSUM ve EWMA'dır. Shewhart kontrol grafikleri proses dağılımındaki büyük kaymaları yakalamada etkin iken, küçük kaymalarda aynı etkinliğe sahip değildir. Bunun aksine CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri ise küçük kaymalarda etkin iken, büyük kaymalarda etkin değildirler. Literatürde kontrol grafiklerinin performansını iyileştirmek için bazı karma kontrol grafikleri önerilmiştir. Bunlar Shewhart, CUSUM veya EWMA'nın birleştirilmesiyle hem küçük kaymalarda hem de büyük kaymalarda etkin çalışacak karma kontrol grafikleri ya da küçük kaymalarda daha etkin çalışacak CUSUM ve EWMA'yı kombine eden karma kontrol grafikleri biçimindedir. Bu tez çalışmasında tek değişkenli durumlar için Shewhart, CUSUM ve EWMA'yı kombine eden ve SMEC olarak adlandırılan bir karma kontrol grafiği önerilmiştir. İkinci olarak çok değişkenli durumda ise MMEC olarak adlandırılan ve prosesteki küçük kaymaları yakalamada daha etkin çalışan çok değişkenli bir kontrol grafiği önerilmiştir.

Bilim Kodu : 20508
Anahtar Kelimeler : Shewhart, EWMA, CUSUM, SMEC, MEWMA, MCUSUM, MMEC
Sayfa Adedi : 55
Danışman : Prof. Dr. M. Akif BAKIR

MIXED PROCESS CONTROL CHARTS

(M. Sc. Thesis)

Beste YILMAZ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

Control charts are one of the most important tools of statistical process control. Control charts are used in order to monitor shifts from the targeted distribution of a process. Those the three most commonly used parametric control charts are Shewhart, CUSUM and EWMA. Shewhart control chart is efficient in detecting large shifts in process distribution, however, not in small shifts. In contrast, the CUSUM and EWMA control charts are efficient in detecting small shifts, but not in large shifts. Some mixed control charts have been proposed in the literature to improve the performance of control charts. These are in the form of mixed control charts which combine CUSUM and EWMA so as to work more efficiently in small shifts, or in combination with Shewhart, CUSUM and/or EWMA so as to work efficiently in both small and large shifts. In this thesis, an univariate control chart, which is called as SMEC, combining Shewhart, CUSUM and EWMA, is proposed. Secondly, in multivariate context, a multivariate control chart, which is called as MMEC working more effectively in detecting the small shifts in the mean parameter of process, has been proposed.

Science Code : 20508

Key Words : Shewhart, EWMA, CUSUM, SMEC, MEWMA, MCUSUM, MMEC

Page Number : 55

Supervisor : Prof. Dr. M. Akif BAKIR

TEŞEKKÜR

Bu alıőmada bana sonsuz sabır gösteren, her zaman anlayıőla yaklaőan, tecrübe ve bilgileriyle yönlendiren, yoğun çalıőmalarına rağmen her zaman vakit ayırarak her durumda yardımıını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. M. Akif BAKIR' a, Arő. Gör. Atacan ERDİŐ' e teőekkürü borç bilirim ve bu yolda devam edebilme motivasyonumu sağlayan kardeőim Buse YILMAZ ve Kaan YILMAZ' a ve hayatımda yapmak istediklerimden vazgeçmemeyi öğreten annem İnci YILMAZ ve babam Fikret YILMAZ' a sonsuz teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ	1
2. İSTATİSTİKSEL KALİTE KONTROL VE NİCELİKSEL DEĞİŞKENLER İÇİN KONTROL GRAFİKLERİ.....	7
2.1. Proses Değişkenliği ve Proses Kontrolü	7
2.2. İstatistiksel Proses Kontrolünün Evreleri.....	8
2.3. İstatistiksel Proses Kontrolü ve Kontrol Grafikleri	8
2.4. Kontrol Grafiği ve Hipotez Testi İlişkisi	10
2.5. Kontrol Grafiğinin Performansını Değerlendirme.....	11
3. TEK DEĞİŞKENLİ NİCELİKSEL KONTROL GRAFİKLERİ	13
3.1. Shewhart Kontrol Grafiği.....	13
3.2. Birikimli Toplam Kontrol Grafiği (CUSUM)	15
3.3. Hızlı Başlangıç Yanıt CUSUM (FIR CUSUM)	17
3.4. Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kontrol Grafiği (EWMA).....	19
3.5. Hızlı Başlangıç Yanıt EWMA (FIR EWMA)	22
4. KARMA KONTROL GRAFİKLERİ	25
4.1. Karma Shewhart Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kalite Kontrol Grafiği (CSEWMA).....	25

	Sayfa
4.2. Karma EWMA-CUSUM Kontrol Grafiği (MEC).....	28
4.3. Karma Shewhart-EWMA-CUSUM Kalite Kontrol Grafiği (SMEC).....	30
4.3.1. SMEC kontrol grafiğinin Monte Carlo simülasyonu ile performans değerlendirmesi.....	32
5. ÇOK DEĞİŞKENLİ KONTROL GRAFİKLERİ	37
5.1. Çok Değerışkenli Birikimli Toplam Kontrol Grafiği (MCUSUM).....	38
5.2. Çok Değerışkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kontrol Grafiği (MEWMA)	39
5.3. Çok Değerışkenli MEC Kontrol Grafiği (MMEC).....	41
5.3.1. MMEC kontrol grafiğinin Monte Carlo simülasyonu ile performans değerlendirmesi.....	44
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	55

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. Shewhart kontrol grafiği ARL için değerleri	14
Çizelge 3.2. $k = 0,5$ CUSUM kontrol grafiği için ARL değerleri.....	17
Çizelge 3.3. FIR CUSUM kontrol grafiği için ARL değerleri ($k = 0,5$ ve $h = 4$)	18
Çizelge 3.4. $L = 3$ için EWMA ARL değerleri.....	21
Çizelge 3.5. Zaman-değişen EWMA kontrol sınırları için ARL değerleri	22
Çizelge 3.6. FIR EWMA ARL değerleri: $\lambda = 0,10$ ve $L = 3$	23
Çizelge 4.1. $ARL_0 = 370$ için CSEWMA ARL değerleri	27
Çizelge 4.2. $k_z = 0,5$ için CUSUM, EWMA ve MEC ARL değerler.....	30
Çizelge 4.3. Shewhart, MEC ve SMEC için ARL değerleri	33
Çizelge 4.4. $ARL_0 = 500$ ve $\lambda = 0,10$ de Shewhart, MEC, CUSUM, EWMA, CSEWMA ve SMEC için ARL_1 değerleri.....	35
Çizelge 5.1. $k = 0,5$ ve $p = 2$, $ARL_0 = 200$ ve $\lambda = 0,1$ ARL_1 için hesaplamaları.....	45

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Kontrol grafiği ve değişkenlik	10
Şekil 4.1. $ARL_0 = 170$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_1 değerleri	33
Şekil 4.2. $ARL_0 = 400$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_1 değerleri	34
Şekil 4.3. $ARL_0 = 500$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_1 değerleri	34
Şekil 4.4. $ARL_0 = 500$ de Shewhart, MEC, CUSUM, EWMA, CSEWMA ve SMEC için ARL_1 değerleri	35
Şekil 5.1. $\lambda = 0,1$, $k = 0,5$, $h = 38,5353$, $p = 2$ için ARL_1	46
Şekil 5.2. $\lambda = 0,25$, $k = 0,5$, $h = 21,8328$, $p = 2$ için ARL_1	47
Şekil 5.3. $\lambda = 0,5$, $k = 0,5$, $h = 12,1394$, $p = 2$ için ARL_1	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler

Açıklamalar

a	Hızlı İlk Tepki İçin Hedef Ortalaması
α	I. Tip hata olasılığını
β	II. Tip hata olasılığını
μ_0	Hedef Ortalaması
μ_1	Kontrol Dışı Ortalaması
σ	Standart Sapma
σ^2	Varyans
$\sigma_{\bar{x}}$	Bağımsız Gözlemlerin Standart Sapması
k	Referans Değeri
k_z	MEC Referans Değeri
δ	Kayma Miktarı
t	Cari Zaman Noktası
n	Örneklem Büyüklüğü
m	Ardışık Zaman
p	Değişken Sayısı
C_t	Birikimli Toplam Değer
C_t^+	Üst CUSUM İstatistiği
C_t^-	Alt CUSUM İstatistiği
H	CUSUM İstatistiği İçin Karar Aralığı
h	Önceden Tanımlanmış Yanlış Alarm Oranını
Z_t	t. Örneklem İçin EWMA İstatistiği
λ	Ağırlıklandırma Parametresi
L	Standart Normal Değişken
MEC_t^+	Üst MEC Kontrol Grafiği İstatistiği
MEC_t^-	Alt MEC Kontrol Grafiği İstatistiği
K_{z_t}	Zamana Bağlı Değişen Referans Değeri
H_0	Proses Kontrol Altında
H_1	Proses Kontrol Dışı

Simgeler H_{z_t} h_{z_t} Σ Λ **Açıklamalar**

MEC İstatistiği İçin Kontrol Sınırı

MEC Önceden Tanımlanmış Yanlış Alarm Oranını

Varyans Kovaryans Matrisi

Diagonal Matris

Kısaltmalar*ARL**ARL₀**ARL₁**AKS**AKS_t**CSCUSUM**CSEWMA**CSMEC**CUSUM**EWMA**FIR CUSUM**FIR EWMA**KA**KD**KG**MCUSUM**MEC**MEWMA**MS**MMEC**MSPK**RL**SPK**Shewhart**ÜKS**ÜKS_t***Açıklamalar**

Ortalama İşletim Uzunluğu

Kontrol İçi Durumda Ortalama İşletim Uzunluğu

Kontrol Dışı Durumda Ortalama İşletim Uzunluğu

Alt Kontrol Sınırı

EWMA Yapısının Alt Kontrol Sınırı

Birleşik Shewhart-CUSUM

Birleşik Shewhart-EWMA

Birleşik Shewhart-MEC

Birikimli Toplam Kontrol Grafiği

Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kontrol Grafiği

Hızlı Başlangıç Yanıt CUSUM

Hızlı Başlangıç Yanıt EWMA

Kontrol Altında

Kontrol Dışı

Kontrol Grafiği

Çok Değişkenli Birikimli Toplam

Karma EWMA CUSUM

Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama

Merkez Çizgisi

Çok Değişkenli Karma EWMA-CUSUM

Çok Değişkenli Proses Kontrolü

Çalışma Uzunluğu

İstatistiksel Proses Kontrolü

Değişken Nicelikler İçin Kontrol Grafikleri

Üst Kontrol Sınırı

EWMA Yapısının Üst Kontrol Sınırı

1. GİRİŞ

İstatistiksel kalite kontrol grafikleri, bir prosesin çıktılarının hedeflenen tolerans ya da spesifikasyon sınırlarını sağlayıp sağlamadığını denetleyen, proses parametrelerini tahmin etmek ve etkin bir şekilde izlemek ve buna bağlı olarak sürecin yeterliliğini belirlemek amacıyla kullanılan en yaygın kontrol araçlardandır (Montgomery, 2009: 180). Kontrol grafiklerinin uygun olmayan (non-conforming) üretim yapma ve gereksiz sistem ayarlamalarını önlemesi ve böylece verimliliği artırması yaygın biçimde kullanılan araçlar olmasının temel nedenleridir. Üretim proseslerinde dinamik bir yapıya sahip olan proses iyileştirme, proses varyansının azaltılmasıyla yakın ilişkilidir. Kontrol grafiklerinin sistemlerde proses iyileştirme amacına yönelik olarak sistematik biçimde kullanılması, çıktı dağılımındaki değişkenliği azaltmanın önemli bir yoludur. Yine, kalite kontrol grafikleri bir sürecin değişkenliğinin rastgele ve özel nedenlere bağlı bileşenlerini ayırt eden araçlardır (Montgomery, 2009: 181).

İlgili literatürde geliştirilmiş çeşitli kontrol grafikleri mevcut olmakla birlikte en yaygın kullanılan ve bilinenleri Shewhart, üstel ağırlıklı hareketli ortalama (EWMA) ve birikimli toplam (CUSUM) kontrol grafikleridir. Bu kontrol grafikleri proseste ölçülen kalite değişkeninin sürekli, kesikli ya da kategorik olmasına bağlı olarak bazı uyarlamalarla kullanılabilir. Bu kontrol grafikleri proses kalite değişkeninin dağılım parametreleri olan ortalama ve varyanstaki hedeflenen değerden farklılaşmaları (kaymaları), kalite değişkeninin özellikle normal dağılıma sahip olduğu durumda denetlemek amacıyla kullanılmakla birlikte, Shewhart kalite kontrol grafikleri özellikle proses dağılımındaki büyük kaymaları (shift) (1,5-sigma ve ötesi) yakalamakta duyarlıdır. Proses dağılımındaki küçük kaymaları yakalamakta, bir yeteneğe sahip değildir. Bunun temel nedeni, Shewhart kontrol grafiklerinin sadece son örneklemden elde edilen gözlem değerlerinin sağladığı bilgiyi kullanması ve böylece belleksiz biçimde çalışmasıdır. Shewhart kontrol grafiklerine alternatif olarak geliştirilen CUSUM ve EWMA grafikleri ise Shewhart' da olduğu gibi örneklem aritmetik ortalamalarını ve varyanslarını kullanmak yerine, sırasıyla birikimli toplam ve üstel ağırlıklı hareketli ortalamaları kullandığından bellekli bir karaktere sahiptir (Page, 1951). Bu nedenle, örneklemden gelen bilgileri (örneğin sistematik küçük kaymaları) biriktirir. Dolayısıyla, bunlar proses dağılımındaki küçük kaymaları yakalamakta daha yetenekli iken, büyük kaymalarda Shewhart kadar etkin çalışmazlar. Proses kontrol altında

veya kontrol dışında iken önceki gözlem bilgilerini kullanabilen EWMA ve CUSUM kalite kontrol grafikleri, küçük ve orta kaymalara karşı duyarlıdır (Page, 1954; Lucas ve Saccucci, 1990). Sürecin başlangıç aşamasında örneğin procesteki bazı ayarlamalardan sonra sürecin kontrol dışı olabileceğinin dikkate alındığı durumlarda, klasik CUSUM ve EWMA grafikleri bunu yakalamakta zayıf kalabilir. Bu nedenle, Lucas ve Crosier (1982), CUSUM istatistiklerinin başlangıç noktaları sıfırdan farklı olacak şekilde oluşturulan yani başlangıç nokta değerinin esas alındığı hızlı başlangıç yanıt birikimli toplam (FIR CUSUM, fast initial response CUSUM) kalite kontrol grafiğini önermiştir. Benzer şekilde hızlı başlangıç yanıt üstel ağırlıklı hareketli ortalama (FIR EWMA) kalite kontrol grafiği de geliştirilmiş olup, başlangıç değeri için, hedeflenen ortalama yerine yeni parametre değerleri kullanılmıştır (Steiner, 1998). Procesteki küçük kaymaları yakalamada iyi bir performans gösteren bir diğer kontrol grafiği olan EWMA ise ilk olarak Robert (1959) tarafından *ARL* (average run length, ortalama işletim uzunluğu) değerleri ile birlikte önerilmiştir. Lucas ve Saccucci (1990) ve Crowder (1989) ise EWMA kontrol grafiklerinde modifikasyon yaparak yığın ortalamasındaki küçük kaymalardaki performansını göstermiştir.

Yukarıda sözü edilen grafiklerin yanısıra; Shewhart, CUSUM ve EWMA grafiklerinin karşılıklı dezavantajlarını bertaraf ederek hem küçük hem de büyük kaymaları yakalayabilmede etkin çalışacak şekilde, her iki kontrol grafiği birleştirilerek birleşik Shewhart-EWMA (CSEWMA) kontrol grafiği önerilmiştir. Lucas ve Saccucci (1990) yaptıkları çalışmada Shewhart ve EWMA kontrol grafiklerini birleştirerek kontrol dışı sinyal elde etme performansını iyileştirmiştir. Bu çalışmada, kontrol grafiklerinin dağılım parametrelerindeki özellikle ortalama parametresinde hem büyük hem de küçük kaymaları yakalamadaki performansını artırabilmek için CSEWMA kontrol grafiği ile Koshti (2015) daha geniş kontrol sınırlarında CSEWMA'nın performansını değerlendirmiş ve Lucas ve Saccucci'nin *ARL* tablosunu genişletmiştir. Wu, Jiao, Mei, Liu ve Wang (2009) CSCUSUM birleşik Shewhart CUSUM kontrol grafiğinin performansını iyileştirmek için kontrol grafiği tasarımının optimizasyonu üzerine çalışarak, aynı zamanda önerilen CSCUSUM üzerinde modifikasyonlar yapmış ve belli *ARL* değerlerine karşın optimum grafik tasarım parametrelerinin tablosunu vermiştir. Lucas ve Saccucci'nin (1990) önerdiği CSEWMA kontrol grafiğini Capizzi ve Masarotto (2010) yeniden çalışarak CSEWMA kontrol grafiğinin proses parametrelerinin Evre I' de (Phase I) tahmin edildiği durumda tahmin hatalarından önemli derecede etkilendiğini göstermek için CSEWMA grafiğinin tahmin edilmiş parametrelerle performansını değerlendirmiştir. Bu durumun kontrol dışı sinyal

almayı anlamlı biçimde etkilediğini göstermiştir. Ayrıca, Evre I çalışması için örneklem büyüklüğü konusunda önerilerde bulunmuştur.

Shewhart ve CUSUM' un veya EWMA birleştirilmesiyle önerilen birleşik kontrol grafikleriyle proses dağılım parametrelerindeki hem büyük ve hem de küçük farklılaşmalara duyarlı kontrol grafiği amaçlanmışken, aynı zamanda literatürde EWMA ya da CUSUM' un küçük kaymalardaki sinyal performansını iyileştirme yönünde de çalışmalar yapılmaya başlanmıştır. Bu bağlamdaki ilk çalışmalar Abbas, Riaz ve Does (2012 ve 2014) tarafından gerçekleştirilmiştir. Abbas, Riaz ve Does (2012) proses kontrolü için EWMA ve CUSUM kontrol grafiklerini birleştirerek MEC adını verdikleri kontrol grafiğini önermiştir. MEC (Mixed EWMA-CUSUM) kontrol grafiğinde CUSUM' da girdi olarak normal dağılıma sahip prosesten elde edilen ardışık bağımsız gözlemler yerine EWMA çıktısı olan üstel ağırlıklı hareketli ortalamalar kullanılmıştır. Böylece, önerilen MEC kontrol grafiğinin performansının EWMA, CUSUM, FIR EWMA ve FIR CUSUM kontrol grafiklerine nazaran dağılımın ortalamasındaki özellikle küçük kaymalara nazaran kontrol dışı sinyal performansının daha iyi olduğunu çeşitli tasarımlar altında *ARL* değerlerini hesaplayarak göstermişlerdir. Yine, Abbas, Riaz ve Does (2014) MEC' in bir başka versiyonunu çalışarak, bu defa da CUSUM çıktısını EWMA' da kullanıp MCE (Mixed CUSUM-EWMA) adını verdikleri kontrol grafiğini önermişlerdir. Bu çalışmada ise bir öncekinin tersine CUSUM çıktısı EWMA' da girdi olarak kullanılmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda önerilen kontrol grafikleri proses kalite değişkeninin tek olduğu durumlar için geliştirilmiştir. Hâlbuki birçok gerçek üretim prosesinde ürünün birden fazla özelliğine karşılık gelen kalite değişkeni söz konusudur. Dolayısıyla, birçok istatistiksel proses kontrol uygulaması çoklu kalite değişkenini dikkate almak durumundadır. Bu türden istatistiksel proses kontrol problemleri çok değişkenli proses kontrol problemleri olarak adlandırılır. Çok değişkenli kalite kontrol grafikleri, sürece ait birden fazla kalite kontrol değişkenlerinin eşanlı olarak değerlendirilmesini sağlayarak, sürecin çok değişkenli dağılımını takip etmek için kullanılır. Değişkenler arası anlamlı korelasyonların olduğu durumda süreci tek değişkenli kontrol grafikleriyle takip etmek doğru sonuç vermeyecektir. Bu çerçevede, ilk geliştirilen ve yaygın biçimde kullanılan kontrol grafiği Hotelling' in T^2 istatistiğine dayalı kontrol grafiğidir (Hotelling, 1947: 111-184). T^2 kontrol grafiği tek değişkenli Shewhart kontrol grafiğinin bir uzantısı olup, kalite değişkenlerin ortak dağılımının normal olmasını gerektirir. Ortak değişken T^2 asimptotik

olarak merkezi olmayan F dağılımına sahip olduğundan kontrol sınırı da bu dağılımdan elde edilmektedir (Nedumaran, Pignatiello ve Calvin, 2000). Ortak değişkenin normal dağılıma sahip olduğu durumlarda prosesteki büyük kaymaları yakalamaya karşı duyarlı olan kontrol grafiklerinin literatürde yaygın biçimde çalışıldığı gözlenmektedir. Bunlardan iki önemli çalışma Lowry ve Montgomery (1995), Mason, Camp, Tracy, Wierda ve Young (1997) tarafından yapılmıştır.

Yine tek değişkenli durumdakine benzer gerekçelerle prosesteki küçük farklılaşmaları yakalayabilmek için özellikle CUSUM ve EWMA'nın çok değişkenli versiyonları geliştirilmiş ve sırasıyla çok değişkenli birikimli toplam (MCUSUM) ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama (MEWMA) olarak adlandırılmıştır (Crosier, 1988; Prabhu ve Runger, 1997). Kalite değişkenlerinin ortak dağılımının yine normal olmasını gerektiren bu kontrol grafikleri için ortak değişken özünde T^2 istatistiğine dönüşmekle birlikte klasik T^2 kontrol grafiğindeki gibi kontrol sınırının F dağılımına dayalı olarak belirlenmesi söz konusu değildir. Bunun nedeni, ardışık EWMA ve CUSUM istatistiklerinin bağımsız olmamasıdır. Bu nedenle, üst kontrol sınırının belirlenmesi hususunda çeşitli yöntem önerileri yapılmıştır.

Bu çalışmada iki durum için kontrol grafiği önerisi yapılmaktadır. Bunlardan birincisi, tek değişkenli durumda MEC kontrol grafiği ile Shewhart grafiğini birleştiren birleşik Shewhart MEC (SMEC) grafiğidir. Bu kontrol grafiği ile proses dağılım parametrelerindeki hem küçük hem de büyük kaymaları daha duyarlı biçimde yakalamak hedeflenmiştir.

İkinci öneri ise, tek değişkenli MEC kontrol grafiğindeki düşüncüyü çok değişkenli duruma taşıyarak, değişkenler arası anlamlı yüksek ilişkinin olduğu durumlarda kullanmak üzere prosesteki küçük kaymaları MEWMA ve MCUSUM'a nazaran daha duyarlı biçimde yakalaması amaçlanan çok değişkenli MEC (MMEC) kontrol grafiğidir. Çalışmada ayrıca MMEC grafiği için üst kontrol sınırları türetilerek tabloları oluşturulmuştur.

Her iki kontrol grafiğinin de performansı Monte-Carlo simülasyonu ile ARL değerleri bakımından değerlendirilmiş ve önerilen grafiklerin performansının birçok durumda alternatiflerine nazaran daha iyi bir performansa sahip olduğu gösterilmiştir. Çalışmadaki algoritmalar ve tüm hesaplamalar için Matlab 2018.b ve istatistiksel programlama platformu olan R kullanılmıştır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde, istatistiksel kalite kontrol ve niceliksel değişkenler için kontrol grafiği incelenecektir. Üçüncü bölümde birikimli toplam, hızlı başlangıç yanıt birikimli toplam ve üstel ağırlıklı hareketli ortalama ile hızlı başlangıç yanıt üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafikleri tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde karma-birleştirilmiş Shewhart üstel ağırlıklı hareketli ortalama kalite kontrol grafiği ve karma-birleştirilmiş EWMA CUSUM kontrol grafiği ve çalışmada önerilen karma Shewhart MEC kalite kontrol grafiği açıklanmıştır. Beşinci bölümde çok değişkenli birikimli toplam ve çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafikleri açıklanarak, bu çalışmada önerilen çok değişkenli karma EWMA CUSUM kontrol grafiği tanımlanmıştır. Altıncı bölümde önerilen karma kontrol grafikleri hakkında öneride bulunulmuştur





2. İSTATİSTİKSEL KALİTE KONTROL VE NİCELİKSEL DEĞİŞKENLER İÇİN KONTROL GRAFİKLERİ

2.1. Proses Değişkenliği ve Proses Kontrolü

Bir üretim ya da hizmet prosesi, hammadde, malzeme, işgücü, makine vb. üretim için gerekli girdileri bir arada kullanarak bir ürün biçiminde şekillenen arzulan çıktıya dönüştürür. Bir üretim prosesinin kalitesi ürettiği ürünlerin kalitesi ile belirlenir. Eğer sürecin ürünleri yüksek kalitede ise süreç de yüksek kalitede bir süreçtir. Bir ürünün kalite özellikleri genellikle sayısal olarak ölçülebilmekle birlikte, bazı özellikler sayısal olarak ölçülemez ve dolayısıyla nitelikseldir.

Bir proseste, üretilen ürünlerin tanımlanan kalite özelliklerinin hedeflenen dağılım parametreleriyle uyumluluk içinde olması amaçlanır. Ancak, proses durağan biçimde çalışıyor olsa bile her ürün ilgili kalite değişkeni bakımından belli bir değişkenliğe sahiptir. Bu değişkenliğe temel olarak kontrol edilemeyen proses girdi değişkenleri sebep olur. Bu tür değişkenlik rastgele bir değişkenliktir ve proses kontrolü literatüründen genellikle ortak neden değişkenliği (common cause variation) denir. Bu tür değişkenlik bir üretim sürecinin doğal değişkenliğidir ve üretim sürecinin kendisi değişmeksizin değiştirilemez ve dolayısıyla süreçten bertaraf edilemez. Eğer süreçte sadece ortak neden değişkenliği söz konusu ise, bu prosesin istatistiksel olarak kontrol altında olduğu söylenir ve kısaca kontrol altında (KA) proses olarak nitelendirilir.

Bazen de prosesin girdilerindeki sıra dışı durumlar (hammadde problemleri, makine bozulmaları vb.) kalite değişkenlerinin hedeflenen dağılım parametrelerinden önemli derecede sistematik biçimde sapmasına neden olur. Bu durumda, ürünlerin önemli bir kısmı tasarlanan gereklilikleri sağlamaz. Süreçteki bu tür değişkenliğe özel nedenli değişkenlik (special cause variability) denir. Bu durumda süreç durağanlık özelliğini kaybeder ve prosesin istatistiksel olarak kontrol dışı olduğu ya da kısaca kontrol dışı (KD) olduğu söylenir.

İstatistiksel proses kontrolünün amacı özel nedenli değişkenliği ortak nedenli değişkenlikten ayırmak ve sürece ilişkin mümkün olan en kısa zamanda sinyal elde etmektir (Qiu, 2013: 70-118). İstatistiksel proses kontrolü ürünlerin hedeflenen dağılıma uygunluğunu kontrol

etmenin temel aracıdır. İstatistiksel proses kontrolü, proseste meydana gelen değişkenliği azaltarak sürecin iyileştirilmesine yardımcı olur (Montgomery, 2009: 180-181).

2.2. İstatistiksel Proses Kontrolünün Evreleri

İstatistiksel proses kontrolün (*SPK*) faaliyeti iki farklı evrede gerçekleştirilir. Evre I' de üretim prosesinin kalite değişkeni veya değişkenlerine ilişkin hedeflenen dağılım parametrelerini sağlayacak biçimde durağan olarak çalışmasını sağlayacak bir proses tasarlanması faaliyeti gerçekleştirilir. Başlangıç aşamasında prosesin açıklayıcı istatistiksel analizi yapılarak, prosesin performansı hakkında bilgi edinilir. Bu bağlamda, deney tasarımı (*DOE*), ANOVA ve regresyon analizi gibi yöntemler kullanılarak kontrol edilebilir girdiler ve çıktı arasındaki ilişki belirlenir ve çıktıya ilişkin hedeflenen gereksinimleri elde edebilmek için uygun değer girdi düzeylerinin belirlenmesi gerçekleştirilir. Bu evrede, istatistiksel kontrol grafikleri tasarlanan prodesten zaman boyunca alınan ürün örneklemelerinin sadece rastgele değişkenlik gösterip göstermediğini denetlemek için kullanılır ve proseste düzenlemeler ve düzeltmeler yapma hususunda bilgi verir. Nihai olarak, *SPK* grafikleri *KA* olan prosesin dağılım parametrelerinin tahmini için kullanılır.

İstatistiksel proses kontrolün ikinci evresinde (Evre II) ise *KA* olduğuna inanılan prosesin durağan bir biçimde çıktı verip vermediği gözlemlenir. Bu aşamanın en önemli aracı yine *SPK* grafikleridir.

2.3. İstatistiksel Proses Kontrolü ve Kontrol Grafikleri

Bir proseste ilgili kalite değişkenine ilişkin hedeflenen dağılım parametreleri iki biçimde belirlenir:

1. Dağılım parametreleri dışsal olarak belirlenir ve proses değeri bu hedeflenen dağılım parametrelerini sağlayacak biçimde tasarlanır. Buna kalite kontrol literatürün de VoC (voice of customer, müşterinin sesi) denir.
2. Hedeflenen dağılım parametreleri prosesin performansına dayalı olarak belirlenir. Buna VoP (voice of proses, prosesin sesi) denir.

VoP durumunda *KA*' da ki durağan koşullarda çalışan bir prodesten toplanan verilerle kalite

değişkeninin dağılımı tahmin edilir. Bu tahmin edilen dağılıma dayalı olarak Evre II kontrol grafiği tasarımı yapılır ve proses bu *KG* kullanılarak çevrimiçi biçimde takip edilir. *KG* prosesin dağılımındaki bir kaymaya ilişkin sinyal yakaladığında proses hemen durdurulur ve bu kaymaya neden olan ana neden belirlenerek ortadan kaldırılır. Böylece, proses tekrar hedeflenen dağılıma uygun biçimde çalışır.

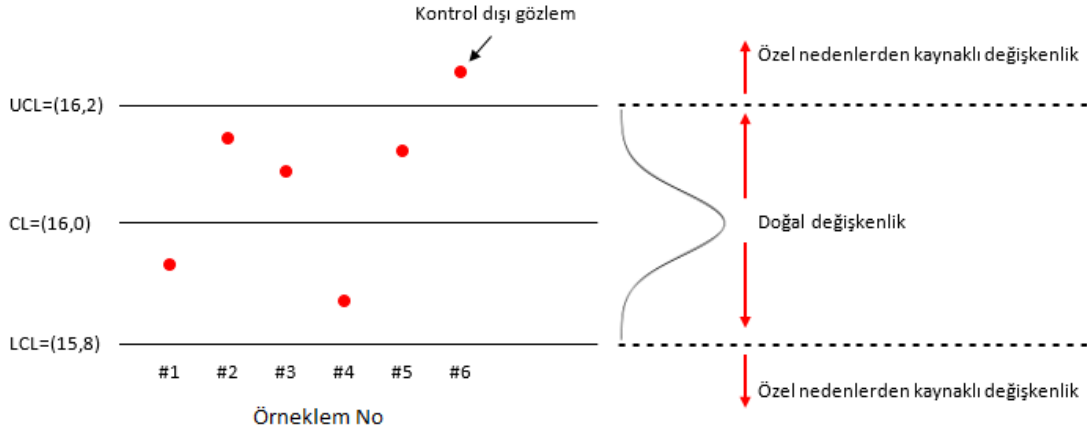
İstatistiksel kalite kontrolü ilk kez 1924 yılında Dr. Walter E. Shewhart tarafından Bell Laboratuvarların’ da uygulanmıştır (Montgomery, 2009: 180). İstatistiksel kalite kontrol, üretim prosesinde üretilen ürünlerin üretici tarafından belirlenen istatistiksel dağılıma sahip çıktığı olarak devamlılığını ve ürünlerdeki değişkenliğin takibinin yapılabilmesini sağlayan yöntemler bütünüdür (Montgomery, 2009: 186, 187). Proses kontrolünde birçok istatistiksel araç kullanılmakla birlikte bunlardan en önemlisi olan *KG*’ leri prosteki *KD* durumu yakalama performansı tatmin edici düzeyde olacak şekilde tasarlanıır. Kontrol grafikleri üretim prosesinden ardışık olarak örnekleme yoluyla seçilen ürünlerin ilgili kalite değişkeni değerlerinin bir zaman serisi grafiğidir.

Tipik bir *KG*’ nin üç önemli bileşeni vardır:

1. Orta (ya da merkez) çizgi (Ortalama)
2. Üst kontrol sınırı (*ÜKS*)
3. Alt kontrol sınırı (*AKS*)

Örnekleme istatistikleri, örneğin örnekleme ortalaması, alt ve üst sınırlar arasında rastgele dağıldığı sürece prosesin *KA* olduğu kabul edilir. Kontrol sınırlarının dışında gözlemlenen bir nokta “sinyal” olarak adlandırılır ve prosesin hedeflenen dağılımdan anlamlı biçimde farklılaştığına işaret eder. Bu durum prosesin *KD* olduğu biçiminde yorumlanır. Bir başka ifadeyle, stokastik prosesin durağanlık özelliğini kaybettiği söylenir.

Kalite değişkeninin normal dağıldığı tipik bir kontrol grafiğinde, *ÜKS* ve *AKS* genellikle endüstriyel uygulamalarda ortalamadan $\mp 3\sigma_x$ uzaklıkta çizilir. Bu durumda kontrol sınırları normal dağılımın %99,74’ ünü kapsar. Şekil 2.1.’ de tipik bir kontrol grafiği görülmektedir.



Şekil 2.1. Kontrol grafiği ve değişkenlik

2.4. Kontrol Grafiği ve Hipotez Testi İlişkisi

KG ve hipotez testi arasında yakın bir ilişki vardır. Aslında, kontrol grafiği zaman boyunca prosesten çekilen örneklemden elde edilen bilgiye dayalı olarak,

H_0 : Proses kontrol altındadır.

H_1 : Proses kontrol dışıdır.

biçiminde ifade edilen hipotezler setinde H_0 hipotezinin ardışık testinin görsel ifadesidir. Kontrol sınırları içindeki bir nokta yokluk hipotezini reddetmek için yeterli kanıt olmadığını söyler. *KS'* larının dışındaki bir nokta ise yokluk hipotezinin reddedildiğini söyler.

Kontrol grafiği için hipotez testlerindeki I. tip hata kontrol sınırlarının dışındaki alana denktir ve koşullu olasılık olarak ifade edilir. $\mp 3 \times$ standart sapma kontrol sınırları durumunda I. Tip hata

$$\alpha = Pr(\text{Proses } KD \mid \text{Proses } KA) = 1 - 0.9973 = 0.027 \quad (2.1)$$

değerine denktir. II. tip hata ise $\beta = Pr(\text{Proses } KA \mid \text{Proses } KD)$ koşullu olasılığı olarak ifade edilir.

I. tip hata durumunda bir örneklem noktası, proses kontrol altında olmakla birlikte α

olasılıkla kontrol sınırlarının dışına düşer ve böylece gereksiz yere prosesin durdurulmasıyla oluşan üretim kayıpları ve boş yere önlem alınması üreticiye bir yük getirdiğinden bu hataya aynı zamanda üretici riski de denir.

II. tip hata olasılığı ile de süreç KD olduğu halde örneklem noktası β olasılıkla KS' larının içine düşer. Bu ise müşteriye o anda üretilen uygun olmayan ürünün sevk edilmesiyle üretici bakımından bir risk oluşturduğundan tüketici riski olarak da adlandırılır.

2.5. Kontrol Grafiğinin Performansını Değerlendirme

Kontrol grafiklerinin performansı genellikle ortalama çalışma; işletim uzunluğu (ARL) ile ölçülür. Bir kontrol grafiğinin performansı iki bağlamda değerlendirilir:

1. Proses kontrol altındayken,
2. Proses kontrol dışındayken.

Kontrol grafiğinde sinyal iki biçimde meydana gelir. Birincisi, proses kontrol altında olduğu halde, yani proses dağılımı farklılaşmadığı halde, rastgele olarak bir nokta kontrol sınırları dışına düşer ve prosesin KD olduğu yorumu yapılır. Dolayısıyla, bu sinyal yanlış bir sinyaldir. İkinci durumda ise, prosesin hedeflenen dağılımında bir kayma meydana gelmiş, yani proses gerçekten KD iken, örneklem noktası kontrol sınırlarının dışına doğru sinyal olarak düşer ve prosesin KD olduğu biçiminde yorumlanır. Hipotez testi bağlamında, birinci durum I. Tip hata olarak adlandırılır. İkinci durum ise, yine hipotez testi bağlamında testin gücü ($1 - \beta$) kavramına karşılık gelir. Prosesin başlangıç durağan durumundan (0) durağan olmayan duruma (1) geçene kadar ki çekilen örneklem sayısına çalışma uzunluğu (işletim uzunluğu) (run length, RL) denir. RL , rastgele seçilen örneklemeler tarafından belirlendiğinden, bir rastgele değişkendir. Dolayısıyla, ARL iki sinyal arasında seçilen ortalama örneklem sayısı olarak tanımlanır. Böylece, ilk sinyalle karşılaşana kadar ki örneklem sayısı bir geometrik rastgele değişken olduğundan, ARL performans ölçütü de bu geometrik rastgele değişkenin beklenen değerinden başka bir şey değildir.

Proses KA iken, ortalama çalışma uzunluğu $KA-ARL$ ya da kısaca ARL_0 olarak gösterilir ve tipik olarak aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (2.2)$$

Daha basit ifadeyle, kontrol altında bir proseste α olasılıkla ortalama olarak ARL_0 defa da bir kontrol dışı sinyal alma beklenir.

Proses KD iken, ortalama çalışma uzunluğu ise $KD-ARL$ ya da ARL_1 sembolü ile gösterilir. ARL_1 ise yine tipik olarak

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} \quad (2.3)$$

biçiminde ifade edilir. Bir başka deyişle, proses dağılımında bir kayma meydana geldiğinde, tasarlanan KG ' nin bu kaymayı ortalama olarak ARL_1 örnekleme sonrasında yakalaması beklenir.

Bir kontrol grafiği için ideal durum ARL_0 değerinin büyük, ARL_1 değerinin ise küçük olmasıdır. Hipotez testindeki I. ve II. Tip hatalara benzer biçimde, bunu aynı anda başarmak zordur. ARL_0 değeri büyükse, ARL_1 değeri de büyük olur. Bunun tersi de doğrudur. Bunun üstesinden gelebilmek için, hipotez testinde Tip I hatayı sabit tutup Tip II hatayı mümkün olduğunca küçültme stratejisine benzer biçimde, kontrol grafiğinin tasarımında ya da performans değerlendirmesinde de benzer strateji takip edilerek, ARL_0 belli bir değerde sabitlenerek, ARL_1 değeri küçültülmeye çalışılır. ARL_1 değerinin küçülmesi, tasarlanan KG ' nin prosesin dağılımındaki bir kaymayı daha erken yakalaması anlamına gelir. ARL örnekleme büyüklüğü ve örnekleme frekansı ile ilgili kararları değerlendirmek ve kontrol grafiklerinin performansını karşılaştırmak için de kullanılan etkili bir ölçüm aracıdır (Costa, 1997).

3. TEK DEĞİŞKENLİ NİCELİKSEL KONTROL GRAFİKLERİ

3.1. Shewhart Kontrol Grafiği

Shewhart kontrol grafikleri prosesteki normal dağılıma sahip sürekli niceliksel kalite değişkeninin dağılımının ortalama ve değişkenlik parametresini takip etmek için kullanılan oldukça popüler bir kontrol grafiğidir.

Bir üretim prosesin de, m ardışık zaman noktasında n çapında alınan örneklemelerden ölçülen $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ i ' inci örneklemdeki ürünlerin ilgili kalite değişkenleri ölçümleri olsun. KA proses ortalaması μ_0 ve standart sapması σ olmak üzere, proses ortalamasını takip etmek için $H_0 : \mu = \mu_0$ yokluk hipotezi $H_1 : \mu = \mu_1$ hipotezine karşın test edilir.

x_{ij} , $i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$ olmak üzere n çaplı örneklem ortalaması

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \quad (3.1)$$

ortalaması μ_0 , varyansı $\frac{\sigma^2}{n}$ olan normal dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenlerdir.

Proses ortalaması değerini takip etmek için bu ardışık örneklem ortalamaları zamana karşın çizilir.

Dağılımın ortalama parametresi için Shewhart kontrol grafiğinin kontrol sınırları

$$\bar{ÜKS} = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.2)$$

$$\bar{AKS} = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır. Buradaki k referans değeri veya her iki kontrol sınırının merkez çizgisine uzaklığının standart sapma cinsinden katsayı değeri olarak adlandırılır. \bar{X}_j , \bar{AKS} ' nin altına

ya da $\bar{ÜKS}$ ' nin üzerine düşerse proses kontrol dışıdır yorumu yapılır.

Shewhart kontrol grafiği en son örneklem bilgisini kullandığından belleksiz bir kontrol grafiğidir. Bu sebepten, proses ortalamasındaki nispeten büyük kaymaları yani 1,5- standart sapmadan daha büyük kaymaları yakalamakta yetenekli araçlardır.

Çizelge 3.1.' de Shewhart kontrol grafiği için çeşitli kayma miktarları ve ortalamadan standart sapma cinsinden uzaklıklara (k) göre ARL değerleri yer almaktadır. δ parametresi kayma miktarı değerini ifade eder. $\delta = 0$ için ilk satırdaki değerler ARL_0 iken, $\delta \neq 0$ için satırlardaki değerler ARL_1 değerleridir. Örneğin $k = 2,998$, $\delta = 0$ için $ARL=370$ değeri, $\mu_0 \mp 2,998(\sigma)$ kontrol sınırlarına sahip bir Shewhart kontrol grafiği ile, proses ortalamasında kayma olmasa bile 370 örnekte bir defa KD sinyal (yanlış sinyal) beklendiğini gösterir. $k = 2,998$, $\delta = 0,25$ hücresindeki $ARL=271$ değeri ise, proses ortalamasında 0,25 birimlik bir kayma olsa, $\mu_0 \mp 2,998\sigma$ biçiminde tasarlanan bir kontrol grafiğinin, proses ortalamasındaki kaymayı 271 örneklemden sonra yakalayabileceğini gösterir.

Çizelge 3.1. Shewhart kontrol grafiği ARL için değerleri

δ	$k = 2,753$	$k = 2,807$	$k = 2,998$	$k = 3,023$	$k = 3,09$
0	170,03	201,3	370,19	401,3	503,5
0,25	133,13	157,3	271,09	303,6	371,1
0,5	79,19	90,06	154,93	166,4	202,3
0,75	43,93	48,56	80,64	86,66	102,6
1	24,99	28,69	43,50	46,84	54,66
1,50	9,52	10,44	14,86	15,61	17,79
2	4,41	4,78	6,26	6,52	7,22
3	1,68	1,73	1,99	2,04	2,15
4	1,11	1,13	1,18	1,19	1,22
5	1,01	1,01	1,02	1,02	1,03

Çizelge 3.1.' de kayma miktarının değer aralığı arttıkça, yani $\delta > 2$ olduğunda, Shewhart kontrol grafiği için hesaplanan ARL değerlerinin birbirine yakın değerler aldığı görülür. Kayma miktarı 0,25 iken $k=2,807$ için ARL_0 değeri 201,3; $k=3,023$ için ARL_0 değeri 401,3 bulunmuştur. Merkez çizgisine olan uzaklık değerlerinin birbirine yakın olmasına rağmen, k değerlerinin yakın değerler almasına rağmen, ARL_0 değerleri arasında iki kat fark vardır.

3.2. Birikimli Toplam Kontrol Grafiği (CUSUM)

Shewhart KG' inin prostedeki nispeten büyük kaymaları yakalayabilme performansı iyi olmakla birlikte, kk kaymaları yakalayabilme yeteneği iyi değildir. Bu nedenle, kk kaymalarda büyük ARL_1 değerlerine sahiptir. Bunun temel nedeni, Shewhart KG' nin sadece son örneklem bilgisini kullanması yani belleksiz olmasıdır.

Shewhart KG' ne alternatif bir KG birikimli toplam (CUSUM) kontrol grafiğidir. CUSUM proses ortalamasındaki kk kaymaları yakalamakta daha etkindir. Özellikle, CUSUM ARL değerleri kk kaymalarda Shewhart' dan daha iyidir.

CUSUM, ortalama veya hedef değerden sapmaları ölçerek biriktirir ve Shewhart gibi $X \sim iidN(\mu, \sigma^2)$ varsayımını gerektirir.

$\{x_1, x_2, \dots\}$ bir üretim prosesinde Evre II' de ardışık zaman noktalarında alınan aynı dağılımlı bağımsız, ortalamadaki kaymadan önce kontrol altında dağılımını $N(\mu_0, \sigma^2)$ ve örneklem büyüklüğü $n=1$ olan gözlemler olsun. Ortalama parametresindeki kaymadan sonraki kontrol dışı dağılım da $N(\mu_1, \sigma^2)$, $\mu_0 \neq \mu_1$, olsun. Özellikle ortalamada kk kayma olduğunda bunu sadece o zaman noktasındaki bilgiyi kullanarak yakalamak zordur. Bunun yerine, cari andaki ve geçmişteki bilginin tümünü kullanarak bu zorluk aşılabilir. Bu düşünceden hareketle, birikimli toplam değerini;

$$C_t = \sum_{j=1}^t (x_j - \mu_0) \quad ya \quad da \quad C_t = \frac{1}{\sigma_0} \sum_{j=1}^t (x_j - \mu_0) \quad (3.4)$$

biçiminde ya da denk biçimde

$$C_t = C_{t-1} + (x_t - \mu_0), \quad C_0 = 0 \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Burada, $t \geq 1$ cari zaman noktasını tanımlar. Örneklem apı $n > 1$ olduğunda x_j yerine \bar{x}_j yazılır ve verilen tüm değerler buna uygun düzenlenir.

Eş. 3.4' de μ_0 ve σ_0 sırasıyla, KA hedef ortalama ve hedef standart sapmadır. C_t ise t ' inci örnekleme kadar ki birikimli toplamdır. CUSUM KG , bu birikimli toplamları örneklem numarasına karşın çizelerek oluşturulur. Proses ortalaması kontrol altında olduğu sürece CUSUM, sıfır etrafında rastgele davranış gösterir.

Proses, t noktasına kadar kontrol altında olduğunda $C_t \sim N(\mu_0, t\sigma^2)$ dağılımına sahip veri üretirken, τ , $1 \leq \tau \leq t$ noktasında proses ortalaması μ_0 değerinden μ_1 değerine kayarsa $C_t \sim N[(t-\tau+1)\delta, t\sigma^2]$ dağılımından veri üretmeye başlar. Eş. 3.4 ve 3.5' den görüleceği üzere C_t ' ler, kontrol altında olduğu t zamanına kadar sıfır ortalamalı rastgele değişkenlerdir. Bir başka deyişle, proses bir rastgele yürüyüş prosesidir. τ noktasında kayma başladıktan sonra ise CUSUM C_t ortalaması δ eğimle doğrusal olarak değişmeye başlar. Dolayısıyla, C_t proses ortalamasındaki yukarıya ya da aşağıya doğru kayma hakkında oldukça yararlı bilgi verir (Qiu, 2013: 120-178).

CUSUM kontrol grafiği ile proses dağılımındaki kayma genellikle V-maskesi ve tabular CUSUM, karar aralığı da denir, olmak üzere iki yöntemle yakalanır. Ancak, CUSUM için genellikle tabular form tercih edilir.

Tabular yöntemde, prosesin konum parametresini kontrol etmek için tabular CUSUM aşağıdaki iki istatistiğe dayanır (Montgomery, 2009: 404)

$$C_t^+ = \max\left[0, (x_t - \mu_0) - K + C_{t-1}^+\right] \quad (3.6)$$

$$C_t^- = \max\left[0, -(x_t - \mu_0) - K + C_{t-1}^-\right] \quad (3.7)$$

C_t^+ ve C_t^- sırasıyla üst ve alt CUSUM istatistikleridir. Ortalama parametresindeki yukarı doğru kayma Eş.3.6, aşağı doğru kayma ise Eş.3.7 tarafından sinyal verilir. Yukarı doğru kaymaya $C_t^+ > H$ ile aşağı doğru kaymaya ise $C_t^- < -H$ olduğunda karar verilir.

CUSUM kontrol grafiğinin tasarımında iki parametre önemli rol oynar: referans değer K ve karar aralığı H . Bu parametrelerin değerleri CUSUM kontrol grafiğinin performansını

etkiler. CUSUM KG' nin performansı kontrol altı durum için ARL_0 , kontrol-dışı için ise ARL_1 ile değerlendirilir. Genellikle, ARL_0 değerinin değeri minimum tolere edilebilecek değer olarak önceden tanımlanır. Sonra, belli bir kayma miktarı δ yakalamak için daha düşük ARL_1 daha iyi performans gösteren kontrol grafiğine işaret eder. Belli h ve k değerlerinde CUSUM KG' nin performansını değerlendirmek için bazı analitik yöntemler olmakla birlikte, ARL_0 değerini hesaplamak için Monte Carlo simülasyonu kullanılabilir.

Referans değer $K = k|\mu_1 - \mu_0|$ ya da standart sapma cinsinden $K = k\sigma_0$ biçiminde tanımlanır ve genellikle $k=0,5$ olarak alınır. Bir başka biçimde bu standartlaştırılmış farkın yarısı olarak da görülebilir (Montgomery, 2009: 404).

$H = h\sigma_0$ standart sapma cinsinden karar aralığıdır ve burada h , belli bir ARL_0 değerini verecek biçimde belirlenir. Çizelge 3.2.' de $k=0,5$ ve belirli h değerlerine karşın ARL değerleri görülmektedir (Hawkins ve Olwell, 1998: 31-45; Montgomery, 2009: 408).

Çizelge 3.2. $k=0,5$ CUSUM kontrol grafiği için ARL değerleri

δ	0	0,25	0,50	0,75	1	1,50	2
$h=4$	169,3282	74,2781	26,6859	13,2803	8,3860	4,7514	3,3458
$h=5$	463,3795	138,5292	37,9664	17,0481	10,4539	5,7514	4,0070

Çizelge 3.2.' de $k=0,5$ olduğunda $h=4$ için CUSUM $ARL_0=169,32$ olarak hesaplanırken $h=5$ için CUSUM ARL_0' in 463,3795 olduğu görülmektedir. $\delta=0,25$ değerinde $h=4$ ve $h=5$ için hesaplanan ARL_1 değerleri sırasıyla 74,2781 ve 138,5292' dir.

Bulunan ARL_1 değerleri arasındaki fark oldukça büyüktür. Kayma miktarı arttıkça $h=4$ ve $h=5$ için hesaplanan ARL değerleri arasındaki farkta azalmaktadır. Görüleceği üzere, küçük kaymaların kontrolünde CUSUM kontrol grafiği etkilidir.

3.3. Hızlı Başlangıç Yanıt CUSUM (FIR CUSUM)

Bir proses, başlangıç aşamasında ya da proste bazı ayarlamalar yaptıktan sonra kontrol-dışı olabilir. Proses kontrolünde bu durumla ilgilenildiğinde standart CUSUM yöntemi başlangıç aşamasındaki böyle bir kaymayı yakalamakta yavaş kalabilir.

Lucas ve Crosier (1982) standart CUSUM' u modifiye ederek prosesin yeniden başlatıldığı zamandaki *KD* duruma hızlı yanıt veren FIR CUSUM' u önermiştir. Standart CUSUM' da üst ve alt CUSUM her ikisinin de başlangıç değerleri $C_0^+ = C_0^- = 0$ olarak alınmaktaydı. Önerilen FIR CUSUM' da ise bu başlangıç değerleri sıfır ve karar aralığı H arasında pozitif bir değer olarak alınır, $C_0^+ = C_0^- = C_0$. Lucas ve Crosier (1982), C_0 için $C_0 = \frac{H}{2}$ değerini önermektedir. Bu değere FIR CUSUM için başlangıç değeri denir.

FIR CUSUM' un tasarımı standart CUSUM' a benzemekle birlikte ikisi arasında iki temel fark vardır:

1. Standart CUSUM için üretilen *ARL* tabloları yerine, FIR CUSUM tasarımı için üretilen *ARL* tabloları kullanılır.
2. Başlangıç değeri olarak $C_0^+ = C_0^- = 0$ yerine $C_0^+ = C_0^- = \frac{H}{2}$ değeri kullanılır.

Eğer proses başlangıçta kontrol-altındaysa C_t^+ ve C_t^- az sayıdaki örnekleme sıfıra gidecektir. Başlangıçta proses kontrol-dışı ise C_t^+ ve C_t^- ' den biri az sayıdaki örnekleme karar aralığı H değerini aşacaktır.

FIR CUSUM' un faydası kontrol-altında ARL_0 değerindeki azalma nispeten küçükken, kontrol-dışı ARL_1 değerindeki azalma nispeten büyüktür. Bu da *KD* sinyalin, FIR olmayan duruma nazaran daha az sayıdaki birkaç örnekleme yakalanabileceğine işaret eder. ARL_0 değerindeki hafifçe azalmayı düzeltmek için, H istenilen ARL_0 değerini sağlayabilecek biçimde düzeltilir.

Çizelge 3.3.' de $k = 0,5$ ve $h = 4$ için ortalamadaki bazı kayma miktarlarına karşın *ARL* değerleri görülmektedir.

Çizelge 3.3. FIR CUSUM kontrol grafiği için *ARL* değerleri ($k = 0,5$ ve $h = 4$)

δ	0	0,25	0,50	0,75	1	1,50	2
$C_0=1$	163,5194	69,9323	24,2414	11,5900	7,0394	3,8561	2,7037
$C_0=2$	148,9864	62,0977	19,9496	8,8856	5,2852	2,8901	2,0147

Çizelge 3.3.' de $k = 0,5$ olduğunda FIR CUSUM ARL_0 , $C_0^+ = C_0^- = 1$ için 163,5194 iken $C_0^+ = C_0^- = 2$ için 148,9864 değerleri hesaplanmıştır. Buradan FIR CUSUM daha iyi sonuçlar veren bir kontrol grafiğidir. Aynı şekilde $C_0^+ = C_0^- = 1$ ve $C_0^+ = C_0^- = 2$ için sırasıyla ARL_1 değerleri kayma miktarı 0,25 iken 69,9323 ve 62,0977' dir. Bu değerler arasındaki fark CUSUM ARL_1 değerine yakın olmakla birlikte daha iyi sonuç elde edilmiştir.

3.4. Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kontrol Grafiği (EWMA)

EWMA kontrol grafiği Roberts (1959), Hunter (1986) tarafından geliştirilmiştir. CUSUM gibi EWMA da prosesin cari andan önceki örneklem bilgilerini kullandığından bellekli bir kontrol grafiğidir. EWMA cari zaman noktasına kadar ki tüm örneklemelerin ağırlıklı ortalamasıdır. $\{x_1, x_2, \dots\}$ $X \sim iidN(\mu_0, \sigma_0^2)$ dağılımına sahip kontrol-altındaki bir prosesten gelen kalite değişkeni gözlemleri olmak üzere proses ortalamasının μ_0 değerinden μ_1 değerine kayma miktarını yakalayabilmek için üstel ağırlıklı hareketli ortalama istatistiği

$$Z_t = \lambda x_t + (1 - \lambda) Z_{t-1} \quad (3.8)$$

kullanılır. Eş.3.8' de $0 \leq \lambda \leq 1$ ağırlıklandırma parametresi ve $Z_0 = \mu_0$ ' dır. Örneklem büyüklüğünün $n > 1$ olduğu durumda Eş.3.8' deki x_t yerine \bar{x}_t yazılır. Eş.3.8, yeniden

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda x_t + \lambda(1 - \lambda)x_{t-1} + \dots + \lambda(1 - \lambda)^{t-1}x_1 + (1 - \lambda)^t \mu_0 \\ &= \lambda \sum_{j=1}^t (1 - \lambda)^{t-j} x_j + (1 - \lambda)^t \mu_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

biçiminde yazılabilir. Görüldüğü üzere, EWMA, μ_0 ' ın ve t anına kadar ki $\{x_t, x_{t-1}, \dots, x_1\}$ gözlemlerin ağırlıklı ortalamasıdır ve i ' inci gözlemin ağırlığı olan $\lambda(1 - \lambda)^{t-j}$ j, t ' den uzaklaştıkça üstel olarak azalır. Bir başka deyişle, Z_t proses ortalaması μ ' nün $t+1$ anına ilişkin tahminidir (Lucas ve Saccucci, 1990).

t anına kadar proses kontrol altında iken EWMA' nın dağılım parametreleri bireysel gözlemler için Eş.3.10 ve Eş.3.11' de verildiği gibidir.

$$\mu_{z_t} = \mu_0 \quad (3.10)$$

$$\sigma_{z_t}^2 = \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}] \sigma^2 \quad (3.11)$$

Böylece, EWMA istatistiğinin dağılımı $Z_t \sim N(\mu_0, \frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}] \sigma^2)$ biçiminde yazılır.

Eş. 3.11' deki t büyüdükçe varyans

$$\sigma_{z_t}^2 = \frac{\lambda}{2-\lambda} \sigma^2 \quad (3.12)$$

değerine yakınsar. Proses ortalaması, $\tau, 1 \leq \tau \leq t$ anında μ_0 değerinden μ_1 değerine kaydığında, proses varyansı aynı kalmakla birlikte, yeni ortalama

$$\begin{aligned} \mu_{z_t, \tau} &= (1-\lambda)^{t-\tau+1} \mu_0 + [1 - (1-\lambda)^{t-\tau+1}] \mu_1 \\ &= \mu_0 + [1 - (1-\lambda)^{t-\tau+1}] (\mu_1 - \mu_0) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Eş.3.13' deki biçiminde μ_0 ve μ_1 ' in ağırlıklı ortalamasıdır ve t büyüdükçe μ_1 ' in ağırlığı da artar. Prosesin KA dağılımına dayalı olarak ortalamadaki değişmeyi yakalayacak EWMA kontrol sınırları Eş.3.14 ve Eş.3.16' daki gibi yazılır (Montgomery, 2009: 420):

$$\bar{U}KS_t = \mu_0 + L\sigma_x \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})} \quad (3.14)$$

$$MS = OC_\zeta = \mu_0 \quad (3.15)$$

$$\bar{A}KS_t = \mu_0 - L\sigma_x \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})} \quad (3.16)$$

Burada, L standart normal değişken değeridir. $n > 1$ durumunda standart sapma yerine örneklem ortalamalarının standart hatası $\sigma_{\bar{x}}$ yazılır. EWMA kontrol grafiği için λ ' nın değeri genellikle önceden belirlenir. L değeri ise önceden belirlenen ARL_0 değerini sağlayacak

biçimde belirlenir. λ ve L verildiğinde ARL_0 değeri ya da ARL_0 ve λ verildiğinde L değeri Markov zincirleri, sayısal integral ya da Monte Carlo simülasyonu ile hesaplanabilir.

Çizelge 3.4. $L = 3$ için EWMA ARL değerleri

δ	Asimtotik kontrol sınırları				Zaman-değişen kontrol sınırları			
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$
0	398	503	842	1379	382	500	828	1353
0,25	209	171	145	135	207	170	140	127
0,5	75,4	48,5	37,4	37,4	74,5	47,6	34,5	32,5
0,75	31,5	20,2	17,9	20	30,8	19,5	15,3	15,6
1	15,7	11,2	11,4	13,5	15,2	10,2	9,1	9
1,5	6,1	5,5	6,6	8,3	5,7	4,7	4,5	4,5
2	3,5	3,6	4,7	6	3,2	2,9	2,8	2,8
2,5	2,4	2,8	3,7	4,8	2,2	2,1	2	2
3	1,9	2,3	3,1	4	1,6	1,6	1,6	1,6
3,5	1,5	2	2,6	3,4	1,3	1,3	1,3	1,3
4	1,3	1,7	2,3	3	1,2	1,2	1,2	1,1

Çizelge 3.4.' de $L = 3$ için asimtotik ve zaman-değişen kontrol sınırları durumları için çeşitli ağırlıklandırma parametrelerine karşın Steiner (1998) tarafından üretilen ARL değerleri görülmektedir. $L = 3$ durumunda λ parametresinin değeri küçüldükçe EWMA' nın performansının da iyileştiği görülmektedir. Genellikle, $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$ aralığında seçilen λ uygulamada iyi çalışır ve yaygın biçimde $\lambda = 0,05; 0,10; 0,20$ değerleri kullanılır (Montgomery, 2009: 423). Ortalamadaki daha küçük kaymaları yakalama performansını iyileştirmek için daha küçük λ değeri seçilir. Ayrıca, λ ' nın büyük değerleri için $L = 3$ iyi çalışırken, $\lambda < 0,10$ için $L = 2,6 - 2,8$ arasındaki değerler iyi çalışır. Çizelge 3.5.' de ise çeşitli λ ve L değerleri için yine Steiner (1998) tarafından hesaplanan ARL değerleri görülmektedir. EWMA kontrol grafiklerinin tasarımında bu çizelgelerden yararlanılabilir.

Çizelge 3.5. Zaman-değişen EWMA kontrol sınırları için *ARL* değerleri

δ	$L = 3,5$				$L = 3,25$			
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$
0	2226	2638	4101	6442	910,6	1112	1789	2852
0,25	950,3	624,5	382,3	270,7	431	315,3	225,9	180,6
0,5	266,9	122,6	62,8	48,8	137	74,3	46,5	39,4
0,75	88,3	38,1	23,7	21,3	50,9	26,8	19,4	17,9
1	35,6	17,2	13,2	12,3	22,9	13,4	11,3	10,6
1,5	10	6,8	6,3	6	7,6	5,8	5,5	5,2
2	4,7	4	3,9	3,5	3,9	3,5	3,4	3
3	2,1	2,1	2	1,6	1,9	1,9	1,8	1,5
4	1,4	1,4	1,3	1,1	1,3	1,3	1,2	1,1
δ	$L = 3$				$L = 2,75$			
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$
0	396,6	500,5	832,1	1341	184	240	410	664
0,25	208	169,8	141,1	125	107	96,9	92,3	88,7
0,5	75	47,6	35,2	31,8	43,6	32	27,1	25,6
0,75	31,1	19,5	16	15,1	20,1	14,7	13,2	12,6
1	15,5	10,6	9,6	9,1	10,9	8,5	8,1	7,7
1,5	5,9	5	4,8	4,5	4,7	4,3	4,2	3,8
2	3,3	3,1	3	2,6	2,8	2,7	2,6	2,3
3	1,7	1,7	1,7	1,4	1,5	1,5	1,5	1,3
4	1,2	1,2	1,2	1	1,1	1,1	1,1	1
δ	$L = 2,5$				$L = 2,25$			
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,05$
0	90,5	122	213	343	47,2	65,2	115,2	182,1
0,25	57,8	58,2	62,3	63,7	33	36,4	42,6	45,8
0,5	26,8	22,4	21,1	20,5	17,3	16,1	16,4	16,2
0,75	13,7	11,3	10,8	10,4	9,7	8,8	8,8	8,5
1	8	6,9	6,8	6,4	6,1	5,6	5,7	5,3
1,5	3,9	3,6	3,6	3,2	3,2	3,1	3,1	2,7
2	2,4	2,4	2,3	2	2,1	2,1	2	1,7
3	1,4	1,4	1,4	1,2	1,3	1,3	1,3	1,1
4	1,1	1,1	1,1	1	1,1	1,1	1	1

3.5. Hızlı Başlangıç Yanıt EWMA (FIR EWMA)

FIR EWMA' da FIR CUSUM' a benzerdir ve aynı amaçla kullanılır. Başlangıç aşamalarında ya da prosesin yeniden başlatıldığı zaman dilimindeki proses ortalamasındaki kaymaları daha çabuk yakalayabilmek için Steiner (1998) tarafından ilk örneklem için zaman-değişken kontrol sınırlarını daraltan Eş.3.17' deki sınırları önerilmiştir:

$$FIREWMA(AKS_t, ÜKS_t) = \mu_0 \mp L\sigma \left[FIR_{adj} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t})} \right] \quad (3.17)$$

Burada, $FIR_{adj} = 1 - (1-f)^{1+a(t-1)}$ olarak tanımlıdır. Eş.3.17' deki başlangıç değerden orijinal uzaklığın oranı olan f ve a sabitleri belirlenmelidir. Steiner (1998), a ' nın FIR' ın 20 örneklemden sonra az etki gösterecek şekilde belirlenmesini önermektedir. Bu da, $a = [-2\log(1-f) - 1] / 19$ olarak hesaplanmasıyla sağlanır (Montgomery, 2009: 425). Çizelge 3.6.' da $\lambda = 0,10$ ve $L = 3$ için FIR ın farklı değerlerinin etkisini görmek için bazı f değerleri için ARL değerleri görülmektedir. Çizelgedeki son kolon klasik EWMA ya karşılık gelmektedir. Çizelge 3.6' dan görüleceği üzere özellikle ortalama parametresindeki küçük kayma miktarlarında f büyüdükçe ARL değerleri de büyümekte yani kontrol grafiğinin performansı düşmektedir. Klasik EWMA ile karşılaştırıldığında ise, FIR EWMA daha iyi bir performansa sahiptir.

Çizelge 3.6. FIR EWMA ARL değerleri: $\lambda = 0,10$ ve $L = 3$

δ	$f = 0,4$	$f = 0,5$	$f = 0,6$	$f = 0,7$	$f = 0,8$	$f = 1$
0	515,6	613,8	737,2	795	805,9	832,1
0,25	83,1	99,2	120,8	132,1	133,7	141,1
0,5	18,5	22,1	27,6	31,2	31,6	35,2
0,75	7,3	8,8	11,2	13,3	13,6	16
1	3,8	4,6	6,1	7,5	7,8	9,6
1,5	1,7	2,1	2,7	3,4	3,8	4,8
2	1,3	1,4	1,8	2,1	2,4	3
3	1	1	1,2	1,3	1,4	1,7
4	1	1	1	1,1	1,1	1,2



4. KARMA KONTROL GRAFİKLERİ

Niceliksel değişkenler için bölüm 2 de verilen kontrol grafiklerinden Shewhart KG' nin proses ortalamasındaki büyük kaymaları yakalama performansı yüksek iken, CUSUM ve EWMA KG' leri küçük kaymaları yakalamada daha etkin olduğu yorumu yapılır. Bu kontrol grafiklerinin performansını artırmak ve her iki durumda da etkin çalışabilen kontrol grafikleri önermek yönünde proses kontrolü literatüründe bazı çalışmalar mevcuttur. Bunlar birleşik (combined) ya da karma (mixed) KG' leri olarak bilinir. Bu bölümde bunlardan en bilinenleri kısa biçimde tanımlandıktan sonra, tek değişkenli durumda Shewhart, CUSUM ve EWMA kontrol grafiklerini birleştiren bir öneride bulunulacaktır.

4.1. Karma Shewhart Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kalite Kontrol Grafiği (CSEWMA)

Proses ortalamasındaki nispeten büyük kaymaları yakalamada Shewhart KG oldukça etkin bir araçtır. Ancak, nispeten küçük ya da orta derecedeki kaymaları yakalamak için ise bellekli KG' leri olan CUSUM ve EWMA daha etkindir. Lucas ve Saccuci (1990), Shewhart KG' nin büyük kayma miktarları ve EWMA KG' nin küçük kaymaları yakalamadaki etkinlik avantajlarını birleştirecek şekilde EWMA KG' de bazı iyileştirmeler önermiştir. Önerilen yaklaşım CSEWMA olarak adlandırılmıştır. CSEWMA hem büyük hem de küçük kaymaları yakalamada etkin biçimde çalışmaktadır (Capizzi ve Masarotto, 2010).

$\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tn}\}$ procesten t zamanında çekilen n çapındaki kalite değişkeni X değerine ilişkin bağımsız ve aynı normal dağılımlı gözlemler ve prosesin dağılımı kontrol-altında $X \sim iidN(\mu_0, \sigma_0^2)$ ve kontrol- dışında $X \sim iidN(\mu_1, \sigma_1^2)$ olsun. t' inci örneklem ortalaması,

$$\bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{tj} \quad (4.1)$$

olmak üzere standartlaştırılmış örneklem ortalaması Eş.4.2' deki gibi olur.

$$D_t = \frac{\bar{x}_t - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \quad (4.2)$$

Bu durumda, standartlaştırılmış örneklem ortalaması $D_t \sim N(\delta,1)$ olarak dağılır.

Proses ortalamasındaki standart sapma cinsinden kayma miktarı

$$\delta = \sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0) / \sigma_0 \quad (4.3)$$

olarak tanımlanabilir. Prosesin kontrol-altında durumu için $\delta=0$ 'dır. Lucas ve Saccuci (1990) tarafından önerilen CSEWMA kontrol grafiği

$$|D_t| > k \text{ ya da } |Z_t| > h\sqrt{\lambda(1-\lambda)} \quad (4.4)$$

olduğunda sinyal, proses kontrol-dışı verir. Burada $Z_t = \lambda D_t + (1-\lambda)Z_{t-1}$, $Z_0 = 0$ ve $\lambda \in (0,1]$ olarak tanımlıdır. CSEWMA'nın sinyal verene kadar ki çalışma uzunluğu

$$RL_{CSEWMA} = \min\{RL_{SHEWHART}, RL_{EWMA}\} \quad (4.5)$$

olarak tanımlanır. $RL_{SHEWHART}$ ve RL_{EWMA} kontrol istatistikleri $|D_t|$ ve $|Z_t|$ 'nin kontrol sınırını aştığı ilk t 'dir:

$$RL_{SHEWHART} = \inf\{t : |D_t| > k\} \quad (4.6)$$

$$RL_{EWMA} = \inf\{t : |z_t| > h\} \quad (4.7)$$

CSEWMA kalite kontrol grafiği belli durumlarda Shewhart ya da EWMA kontrol grafiğine indirgenir. Şöyle ki, $h = \infty$ ise, EWMA sınırları işlevsiz olur ve CSEWMA Shewhart KG'ne, $k = \infty$ ise, EWMA KG'ne indirgenir. CSEWMA'nın ARL'si Markov zincirleri (Lucas ve Saccuci, 1990; Brook ve Evans, 1972), integral denklem yaklaşığı (Crowder, 1987) veya Monte Carlo simülasyonu ile sayısal olarak hesaplanabilir. Çizelge 4.1.'de Capizzi ve Masarotto (2010) tarafından sayısal integral denklem yaklaşığı ile verilen çeşitli λ , h ve k değerlerine karşın Eş.4.8 ve Eş.4.9'un birlikte çözümüyle hesaplanan ARL değerleri görülmektedir.

$$E_0(RL_{CSEWMA}) = ARL_0 \quad (4.8)$$

$$E_0(RL_{SHEWART}) = R \times E_0(RL_{EWMA}) \quad (4.9)$$

$E_0(\cdot)$, proses kontrol altında hipotezinin doğruluğu altında beklenen değer işlemcisini, R ise $R > 0$ olacak şekilde uygun bir sabiti göstermektedir.

Çizelge 4.1. $ARL_0 = 370$ için CSEWMA ARL değerleri

Tasarım parametreleri				Standartlaştırılmış kayma miktarı (δ)						
λ	R	h	k	0	0,5	1	2	3	4	5
				Shewhart						
			3	370,4	155,22	43,89	6,3	2	1,19	1,02
				EWMA						
0,05	2,49			370,4	26,46	10,74	4,98	3,35	2,57	2,1
0,1	2,7			370,4	28,23	9,74	4,18	2,76	2,14	1,89
0,2	2,86			370,4	36,17	9,8	3,59	2,31	1,81	1,41
0,4	2,96			370,4	58,46	12,71	3,35	1,95	1,39	1,1
				CSEWMA						
0,05	0,5	2,91	3,11	370,4	32,9	12,12	4,54	2,08	1,23	1,03
0,1	0,5	3,08	3,11	370,4	37,51	11,23	4,03	1,99	1,22	1,03
0,2	0,5	3,2	3,1	370,4	52,84	11,95	3,65	1,89	1,22	1,03
0,4	0,5	3,25	3,08	370,4	87,84	17,31	3,6	1,78	1,19	1,03
0,05	1	2,75	3,19	370,4	30,3	11,55	4,53	2,16	1,26	1,04
0,1	1	2,94	3,19	370,4	33,58	10,61	3,98	2,04	1,25	1,04
0,2	1	3,07	3,18	370,4	45,51	11,03	3,57	1,91	1,24	1,04
0,4	1	3,13	3,16	370,4	74,49	15,12	3,45	1,78	1,21	1,03
0,05	2	2,64	3,31	370,4	28,58	11,16	4,58	2,29	1,32	1,05
0,1	2	2,84	3,31	370,4	31,12	10,2	3,99	2,13	1,3	1,05
0,2	2	2,97	3,3	370,4	41,05	10,44	3,54	1,95	1,27	1,05
0,4	2	3,04	3,28	370,4	66,25	13,86	3,38	1,81	1,25	1,04

Çizelge 4.1.' de 0,50 kayma miktarı için Shewhart kontrol grafiğinin ARL_1 değeri 155,22; $\lambda = 0,10$ için, EWMA kontrol grafiğinin ARL_1 değeri 28,23 ve CSEWMA kontrol grafiğinin ARL_1 değeri ise 37,51 olarak hesaplanmıştır. Çizelgeden görüleceği üzere CSEWMA KG' nin prosesteki büyük kaymaları yakalama performansı Shewhart KG' ne yakındır. Benzer biçimde, CSEWMA KG' nin prosesteki küçük kaymaları yakalama performansı EWMA KG' ine yakındır.

4.2. Karma EWMA-CUSUM Kontrol Grafiği (MEC)

Prosesteki küçük kaymaları yakalamada etkin olan EWMA ve CUSUM kontrol grafiklerinin performansını iyileştirmek için literatürde yer alan ikinci grup çalışmalar, bunların küçük kaymaları yakalamadaki performanslarını daha da iyileştiren çalışmalardır.

Bu yönde bir yaklaşım Zaman, Riaz, Abbas ve Does (2014)' de önerilmiş olup, kontrol grafiğinin ortalamadaki küçük kaymaları daha etkin biçimde yakalama amacıyla, EWMA çıktılarını CUSUM' da girdi olarak kullanan karma bir EWMA-CUSUM (MEC) kontrol grafiği tanımlanmıştır. Bir sonraki kısımda, bu tezde önerilen yöntem MEC kontrol grafiğine dayanacağından, burada MEC' in özellikleri hakkında kısmen bilgi verilecektir.

MEC kontrol grafiğinde CUSUM benzeri birikimli toplamlar Eş.4.10 ve Eş.4.11' de verildiği gibidir.

$$MEC_t^+ = \max[0, (Z_t - \mu_0) - K_{Z_t} + MEC_{t-1}^+] \quad (4.10)$$

$$MEC_t^- = \max[0, -(Z_t - \mu_0) - K_{Z_t} + MEC_{t-1}^-] \quad (4.11)$$

Başlangıç değeri $MEC_0^+ = MEC_0^- = 0$ olarak alınır. MEC_t^+ ve MEC_t^- ; MEC kontrol grafiğinin alt ve üst istatistikleridir. Eş.3.6 ve Eş.3.7' de görüldüğü üzere, klasik CUSUM' daki bağımsız örneklem aritmetik ortalamalarının yerini üstel ağırlıklı hareketli ortalamalar almaktadır.

Z_t değerleri t ' inci örneklem için EWMA istatistiklerinin hesaplanan değerleridir. Ağırlıklandırma parametresi $0 < \lambda \leq 1$ arasında değerleri alır. K_{Z_t} , t ' inci örnekleme bağılı zaman-değişen referans değeri ve Eş.4.12' de EWMA istatistiğinin varyansının karekökünün kaydırma miktarının yarısına eşit olan k_z değeri ile çarpımından oluşmaktadır.

$$K_{Z_t} = k_z \sqrt{\sigma_z^2} \quad (4.12)$$

Eş.4.13' deki Z ' nin varyansı

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t}) \quad (4.13)$$

olarak tanımlanır. MEC kontrol grafiğinin kontrol sınırı ise H_{z_t} zaman-değişen biçimde t ' inci örnekleme bağı olarak Eş.4.14' deki gibi hesaplanır.

$$H_{z_t} = h_z \sqrt{\sigma_z^2} \quad (4.14)$$

Buradaki h_z değeri önceden tanımlanmış olan yanlış sinyal oranını düzeltici katsayıdır. MEC_t^+ ve MEC_t^- değerleri kontrol sınırı içinde bulunduğu müddetçe, sürecin kontrol altında olduğu söylenir. Tam tersi durumda ise proses kontrol-dışıdır. MEC_t^+ istatistiğinin H_{z_t} ' nin üstünde olması, proses ortalamasının, hedef ortalama değerine kaydığını gösterirken, MEC_t^- istatistiğinin $-H_{z_t}$ kontrol sınırını aşması proses ortalamasının hedef ortalamasının altına kaydığını gösterir.

Abbas, Riaz ve Does (2012) çalışmalarında önerdikleri MEC kontrol grafiğinin performansını değerlendirmek ve tasarım parametrelerini belirlemek için simülasyonla ürettikleri *ARL* değerlerinden bazıları CUSUM, EWMA ve MEC' in performans karşılaştırması için Çizelge 4.2.' de verilmiştir.

Çizelge 4.2.' den görüleceği üzere kayma miktarı küçükken, yani $0 < \delta < 1$ olduğunda, tüm λ değerlerinde MEC klasik CUSUM' a göre daha iyi *ARL* değerlerine sahiptir. Yine benzer şekilde, klasik EWMA ile MEC karşılaştırıldığında MEC $0 < \delta < 0,75$ kayma değerleri için daha iyi (daha küçük) *ARL₁* değerlerine sahiptir. Örneğin $ARL_0 = 500$ ve $\delta = 0,25$ kayma miktarında *ARL₁* değerleri CUSUM için 143,7 iken, $\lambda = 0,10$ olduğunda EWMA için *ARL₁* = 103,8 ve MEC için *ARL₁* = 73,24' dür. Bu üç kontrol dışı durum değerlerinden en iyi sonucu MEC *KG*' i almıştır. Yapılan karşılaştırmalar, MEC kontrol grafiğinin küçük kaymaları tespit etmek için tasarlanan diğer kontrol grafiklerinden daha duyarlı olduğunu göstermektedir.

Çizelge 4.2. $k_z = 0,5$ için CUSUM, EWMA ve MEC ARL değerler

δ	CUSUM			EWMA				MEC	
	$k = 0,5$			$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,25$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,75$	$\lambda = 0,10$	$\lambda = 0,5$
	$h = 4$	$h = 4,85$	$h = 5,065$	$L = 2,824$	$L = 3$	$L = 3,07$	$L = 3,09$	$h_z = 33,54$	$h_z = 11,2$
0	166,9	400,6	503,3	500,6	500,3	500,8	501,9	399,9	503,5
0,25	73,4	128,9	143,7	103,8	171,3	253,3	325,8	73,24	96,42
0,50	26,75	35,71	38,83	28,92	46,82	88,63	140,39	33,11	30,83
0,75	13,45	16,55	17,45	13,80	19,40	35,48	62,42	22,47	16,73
1	8,26	10,01	10,48	8,24	10,56	17,19	30,32	17,67	11,49
1,25	6,03	7,16	7,46	5,64	6,6935	9,70	16,49	14,87	8,91
1,50	4,78	5,60	5,78	4,64	4,7787	6,29	9,77	12,93	7,35
1,75	3,92	4,58	4,78	3,26	3,6777	4,48	6,42	11,58	6,19
2	3,33	3,93	4,05	2,89	2,94	3,39	4,47	10,46	5,52

4.3. Karma Shewhart-EWMA-CUSUM Kalite Kontrol Grafiği (SMEC)

MEC kontrol grafiği ortalamadaki küçük kaymalara karşı etkin olan bellekli EWMA ve CUSUM kontrol grafiklerinin kombinasyonundan oluştuğu için, MEC' de küçük kaymalara karşın daha iyi iş gören kontrol grafiğidir. Lucas ve Saccucci (1990) ile Woodall ve Maragah (1990) tarafından tasarlanan karma Shewhart-EWMA (CSEWMA) kontrol grafiği prostedeki tüm kaymalara karşın iş gören bir kontrol grafiğidir. Bu düşünceden hareketle Shewhart ve EWMA' yı kombine etmek yerine, Shewhart ve MEC' i kombine etmenin hem büyük hem de küçük kaymaları yakalama performansı daha iyi olabilecek bir sonuçla karşılaşılacağı beklentisiyle, bu tezde araştırmacı tarafından SMEC olarak adlandırılan kontrol grafiği önerilmekte ve ARL performansları karşılaştırmalı olarak verilmektedir.

$\{x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tm}\}$ n çapında kalite değişkeni X ' e ilişkin bağımsız ve aynı normal dağılımlı gözlemler ve prosesin dağılımı kontrol altında $X \sim iidN(\mu_0, \sigma_0^2)$ ve kontrol-dışında $X \sim iidN(\mu_1, \sigma_0^2)$ olmak üzere t' inci standartlaştırılmış örneklem ortalaması

$$D_t = \frac{\bar{x}_t - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \quad (4.15)$$

olarak yazılır. Bu durumda, standartlaştırılmış örneklem ortalaması $D_t \sim N(\delta, 1)$ olarak dağılır. Buradaki Eş.4.16' da

$$\delta = \sqrt{n}(\mu_1 - \mu_0) / \sigma_0 \quad (4.16)$$

örneklem ortalamasının standart hatası cinsinden ortalamadaki kaymayı ifade etmektedir. CSEWMA' ya benzer şekilde kontrol grafiği

$$|D_t| > k \quad (4.17)$$

olduğunda kontrol dışı sinyali verecektir. Bir önceki kısımda Eş.4.10 ve Eş.4.11' de MEC kontrol grafiğinin değerleri tanımlanmıştı. Burada, $K_{z_t} = k_z \sqrt{\sigma_z^2}$ ve $k = \frac{\delta}{2}$ olarak tanımlıdır. MEC kontrol grafiği için karar sınırı $H_{z_t} = h_z \sqrt{\sigma_z^2}$ biçiminde tanımlanmıştı. Böylece, $\{MEC_t^- \leq -H_{z_t}, MEC_t^+ \geq H_{z_t}\}$ olunca prosesin kontrol dışı durumda olduğu söylenir. Bu kısaca,

$$|MEC_t| > H_{z_t} \quad (4.18)$$

biçiminde yazılabilir. Böylece, eğer

$$|D_t| > k \text{ ya da } |MEC_t| > H_{z_t} \quad (4.19)$$

ise kontrol grafiği kontrol dışı sinyal verir. Buradan çalışma uzunluğu

$$RL_{SMEC} = \min \{RL_{SHEWHART}, RL_{MEC}\} \quad (4.20)$$

olur. CSEWMA' dakine benzer şekilde $RL_{SHEWHART}$ ve RL_{MEC} kontrol istatistikleri $|D_t|$ ve $|MEC_t|$ ' nin kontrol sınırını aştığı ilk t zamanıdır.

$$RL_{SHEWHART} = \inf\{t : |D_t| > k\} \quad (4.21)$$

$$RL_{MEC} = \inf\{t : |MEC_t| > H_{z_t}\} \quad (4.22)$$

Kontrol-dışı ortalama işletim uzunluğu ARL_I ise işletim uzunluklarının beklenen değeridir. $RL_{SHEWHART}$ ve RL_{MEC} ' den minimum olanı SMEC kontrol grafiği için çalışma uzunluğu değeridir ve bu değerlerin ortalaması da ARL_I ' dir. Kontrol-altında beklenen çalışma uzunluğu ise ARL_0 ' dır.

4.3.1. SMEC kontrol grafiğinin Monte Carlo simülasyonu ile performans değerlendirmesi

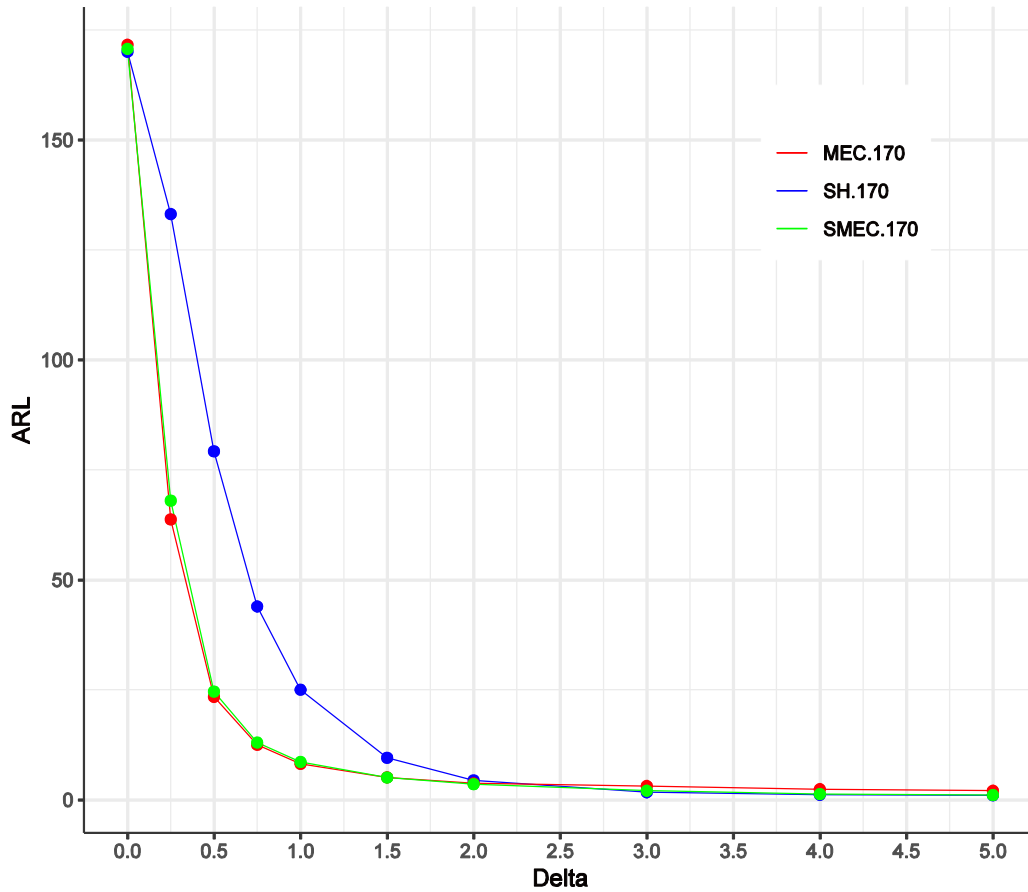
CUSUM, EWMA, CSEWMA, MEC ve önerilen SMEC kontrol grafiklerinin ARL performanslarının karşılaştırmalı olarak değerlendirilmesi için Monte Carlo Simülasyonu yapılmış ve aynı zamanda SMEC için $ARL_0 = 170; 400; 500$ değerlerinde karar aralığı parametreleri olan h_z ler üretilmiştir.

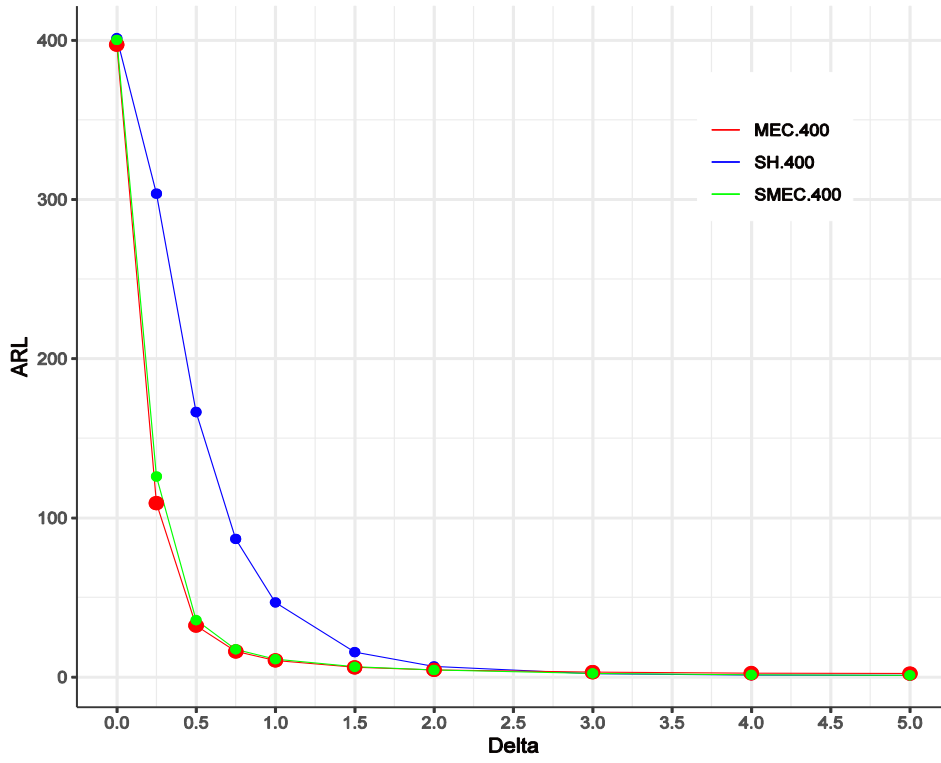
Çizelge 4.3.' de ve Şekil 4.1., Şekil 4.2. ve Şekil 4.3.' de sırasıyla $ARL_0=170; 400; 500$ değerleri için Abbas, Riaz ve Does (2012) nin önerdikleri MEC kontrol grafiğiyle, SMEC kontrol grafiklerinin performansını değerlendirmesi ve tasarım parametrelerini belirlemek için simülasyonla üretilen bazı ARL_I değerleri verilmiştir. Tüm durumlarda, dağılımın ortalama parametresindeki kayma küçükken MEC' in Shewhart' a nazaran oldukça üstün olduğu kolayca görülebilmektedir. Ancak, kayma miktarı büyüdükçe Shewhart MEC' e nazaran daha küçük ARL_I değerlerine sahiptir. Dolayısıyla, MEC proses ortalamasındaki küçük kaymaları yakalamada avantaja sahiptir.

Hem büyük hem de küçük kaymaları yakalamak için kullanılabilecek ara bir kontrol grafiği olan SMEC ise, küçük kaymalarda MEC kontrol grafiğine nazaran küçük farklarla biraz daha kötü performansa sahipken, Shewhart' a nazaran oldukça iyi bir performansa sahiptir. Yine proses ortalama parametresindeki kayma miktarı büyüdükçe, 1,5-sigmanın ötesinde, Shewhart kontrol grafiği SMEC' e karşı az farklarla iyi performansa sahiptir. Ancak, büyük kaymalarda önerilen SMEC yöntemi MEC' e göre daha küçük ARL değerlerine sahiptir.

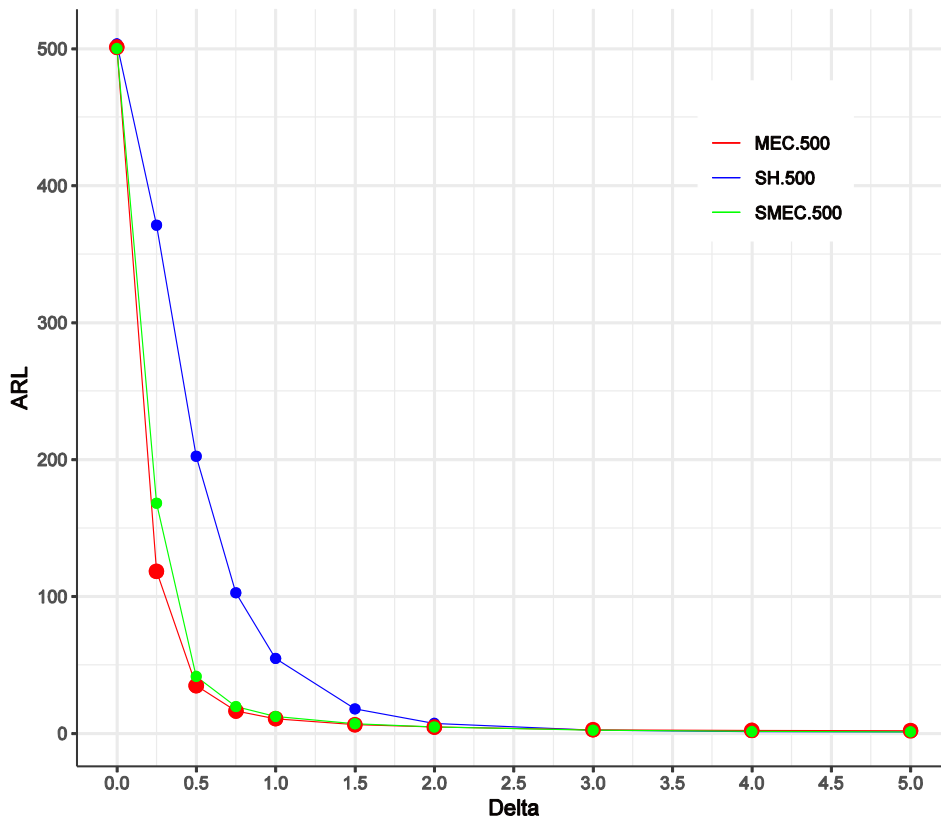
Çizelge 4.3. Shewhart, MEC ve SMEC için ARL değerleri

δ	Shewhart			MEC			SMEC		
	$k = 2,75$	$k = 3,02$	$k = 3,09$	$h_z = 5,48$	$h_z = 6,94$	$h_z = 7,32$	$h_z = 5,76$	$h_z = 7,9$	$h_z = 9,01$
0	170,03	401,3	503,5	171,63	397,17	501,05	170,67	400,19	500,09
0,25	133,13	303,6	371,1	63,71	109,12	118,32	67,99	125,93	168,05
0,50	79,19	166,4	202,3	23,39	32,28	34,74	24,59	35,70	41,54
0,75	43,93	86,66	102,6	12,48	16,04	16,29	12,98	17,34	19,51
1	24,99	46,84	54,66	8,13	10,37	10,64	8,59	11,11	12,31
1,50	9,52	15,61	17,79	5,07	6,02	6,23	5,04	6,34	6,95
2	4,41	6,52	7,22	3,71	4,42	4,55	3,54	4,32	4,65
3	1,68	2,04	2,15	3,12	2,99	2,52	2,05	2,23	2,29
4	1,11	1,19	1,22	2,39	2,33	2,06	1,29	1,31	1,30
5	1,01	1,02	1,03	2,05	2,09	1,85	1,04	1,05	1,04

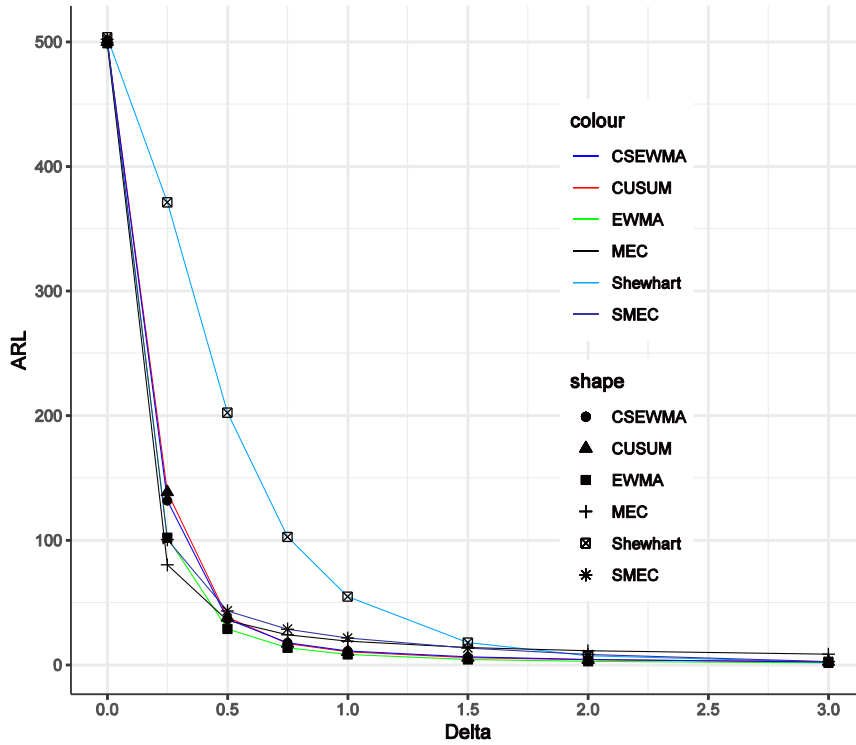
Şekil 4.1. $ARL_0=170$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_1 değerleri



Şekil 4.2. $ARL_0=400$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_0 değerleri



Şekil 4.3 $ARL_0=500$ de Shewhart, MEC ve SMEC için ARL_1 değerleri



Şekil 4.4 $ARL_0=500$ de Shewhart, MEC, CUSUM, EWMA, CSEWMA ve SMEC için ARL_1 değerleri

Çizelge 4.4. ve Şekil 4.5.' de $ARL_0=500$ ve $\lambda=0,10$ de Shewhart, MEC, CUSUM, EWMA, CSEWMA ve SMEC için simülasyonla elde edilen ARL_1 değerleri görülmektedir. $\lambda=0,10$ alındığında, kayma miktarı oldukça küçükken, $\delta=0,25$ iken, MEC ve SMEC en iyi performansa sahip kontrol grafikleri iken, kayma miktarı büyüdükçe EWMA ve CSEWMA daha iyi performans değerlerine sahiptir.

Çizelge 4.4. $ARL_0=500$ ve $\lambda=0,10$ de Shewhart, MEC, CUSUM, EWMA, CSEWMA ve SMEC için ARL_1 değerleri

δ	Shewhart	CUSUM	EWMA	MEC	CSEWMA	SMEC
	$k = 3,09$	$h = 5$	$L = 2,824$	$h_z = 37,42$	$k = 3,014$	$h_z = 53,82$
0	503,5	500	498,73	499,23	500,81	501,79
0,25	371,1	138,52	102,04	80,11	131,72	100,35
0,50	202,3	37,96	28,79	35,57	36,55	43,24
0,75	102,6	17,04	13,61	24,10	17,63	28,57
1	54,66	10,453	8,21	18,79	11,12	21,43
1,50	17,79	5,75	4,17	13,82	6,26	13,43
2	7,22	4,00	2,66	11,19	4,20	8,17
3	2,15	2,55	1,50	8,41	2,17	2,59



5. ÇOK DEĞİŞKENLİ KONTROL GRAFİKLERİ

İstatistiksel proses kontrolü uygulamalarında birçok durumda çok sayıda kalite değişkeniyle karşılaşılır. Bu türden proses kontrol problemlerine çok değişkenli proses kontrol, MSPC, denir.

Çoklu değişkenin eşanlı olarak izlenmesi gereken proseslerde basitçe bu değişkenlerin her birinin bireysel kontrol grafikleriyle izlenmesi düşünülebilir. Bu durumda, değişkenlerden en az biri için sinyal alındığında prosesin kontrol dışı olduğu söylenir. Basitliğinden dolayı bazıları bu yolu tercih edebilir. Ancak, bu yolu takip etmenin iki önemli sınırlılığı söz konusudur. Birincisi, çok sayıdaki değişkenin her biri için kontrol grafiği, kendi tasarım parametrelerinin bilinmesini gerektirir. Örneğin, CUSUM k ve h olmak üzere iki parametrenin değerinin bilinmesini gerektirir. p tane değişkenin olması durumunda $2p$ tane parametre değerine gereksinim vardır. Bu parametrelerin belirlenmesinde farklı olasılık dağılımlarının ve aynı zamanda korelasyon yapılarının dikkate alınması gerekir. İkincisi ise, hipotez testinden bilinir ki, örneğin p boyutlu iki yığın ortalamasının farkına ilişkin hipotez testinde iki yığın değişkenlerini vektörlerle ifade edip T^2 gibi çok değişkenli test istatistiğini kullanmak, p tek değişkenli testten daha güçlüdür (Qiu, 2013: 257-270). Benzer şekilde, vektör tabanlı MSPC prosedürünün, prosesi tek değişkenli SPC grafikleriyle takip etmekten daha güçlü olduğu Crossier (1988) tarafından gösterilmiştir. Böyle olmasının temel nedeni MSPC durumunda değişkenler arasındaki ilişkinin de dikkate alınmıyor olmasıdır.

Çok değişkenli proses kontrolü için en yaygın biçimde kullanılan kontrol grafikleri Hotelling T^2 , çok değişkenli CUSUM (MCUSUM) ve çok değişkenli EWMA (MEWMA)'dır. Bu bölümde MCUSUM ve MEWMA kontrol grafiklerinin prensipleri öz biçimde tanıtılıp, proses ortalamasındaki özellikle küçük kaymaları daha etkin biçimde yakalayacak ve MMEC olarak adlandırılacak karma bir kontrol grafiği önerisinde bulunulacaktır.

5.1. Çok Değişkenli Birikimli Toplam Kontrol Grafiği (MCUSUM)

$\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$ KA dağılımı $\mathbf{X}_t \sim iid N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ olan bir prosesten gelen ardışık gözlemler vektörü olsun. p -boyutlu prosesin dağılımının $\mathbf{X}_t \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ kaymasını yakalamak ve prosesi izlemek için literatürde önerilmiş çeşitli parametrik yaklaşımlar olmakla birlikte, bunlardan en iyi bilinenleri Woodall ve Ncube (1985), Healy (1987), Hawkins (1991) ve Crosier (1988)' dir. Woodall ve Ncube (1985) p tek orjinal değişkenli CUSUM ya da p önemli bileşen için CUSUM kontrol grafiğini kullanarak p -boyutlu çok değişkenli normal dağılımlı bir prosesin nasıl izlenebileceğini göstermiştir. Healy (1987), önerdiği MCUSUM KG' ni geliştirmek için CUSUM KG' lerinin ardışık olasılık oran testlerinin bir serisi olduğu hususunu dikkate almıştır.

Hawkins (1991) prosesin KA durumundan sapmasının çoğunlukla belli bir yapıya sahip olduğu düşüncesinden hareketle regresyon ayarlı değişkenler için CUSUM değerleri önermiştir. Literatürde en çok üzerinde durulan bir başka çok değişkenli CUSUM yöntemi Crossier (1988) tarafından önerilmiştir. Burada önerilen MMEC kontrol grafiği CUSUM için Crossier' in yöntemini dikkate aldığından sadece buna ilişkin açıklama ve tanımlamalar verilecektir.

$\mathbf{X}_t \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ dağılımlı çoklu kalite değişkenleri için CUSUM KG istatistiği Eş.5.1' deki Hotelling' in T^2 sinin karekökü $\sqrt{T^2}$ biçiminde tanımlanır.

$$T_t = (\mathbf{S}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{S}_t)^{1/2} \quad (5.1)$$

C_t ve S_t ler ise aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$C_t = [(\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{S}_t = \begin{cases} \mathbf{0}, & C_t \leq k \\ (\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{k}{C_t}\right), & C_t > k \end{cases} \quad (5.3)$$

burada, $S_0 = 0$ ve $k > 0$ dir. Yukarıdaki eşitlikler bireysel gözlem durumu için yazılmıştır. Örneklem çapı $n > 1$ olduğunda eşitliklerdeki \mathbf{X}_t ler örneklem ortalaması \bar{X}_t ve Σ_0 da $\frac{\Sigma_0}{n}$ ile değiştirilir.

$$T_t = (\mathbf{S}_t^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{S}_t)^{1/2} > h \quad (5.4)$$

olduğunda prosesin kontrol dışı olduğuna karar verilir. Burada $h > 0$ ve önceden verilmiş ARL_0 ulaşmak için gerekli kontrol sınırır. T_t istatistiği CUSUM KG' lerinin yeniden başlama mekanizması kullanarak tanımlanmıştır. Şöyle ki, $C_t < k$ olduğunda, $S_t = 0$ değerine atama yapılır. Çünkü bu durumda proses ortalamasının kaydığına ilişkin yeterli kanıt yoktur. Aksi durumda ise $(\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{k}{C_t}\right)$ ataması yapılır ve $(\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$ birikimli toplam, $\left(1 - \frac{k}{C_t}\right)$ değeri ile daraltılır.

Kontrol sınırı h katsayı değeri, önceden belirlenmiş ARL_0 bağlıdır ve Monte Carlo simülasyonu ile elde edilir. h , Monte Carlo simülasyonu ile belirlenmesinin nedeni birikimli toplam istatistiklerinin, Shewhart tipi kontrol grafiğinde olduğu gibi ardışık bağımsız olmamasıdır. MCUSUM kontrol grafiğinin ARL performansı merkezi olmama parametresi olan $(\mathbf{S}_{t-1} + \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0)$ ' a bağlıdır.

5.2. Çok Değişkenli Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Kontrol Grafiği (MEWMA)

$p > 1$ olduğunda proses ortalamasındaki özellikle küçük kaymaları etkin biçimde yakalayan bir diğer kontrol grafiği grubu da çok değişkenli üstel ağırlıklı hareketli ortalama kontrol grafiği ya da kısaca MEWMA' dır (Choi ve Lee Hawkins, 2002).

$\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$ KA dağılımı $\mathbf{X}_t \sim iid N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$ olan bir prosesten gelen ardışık gözlemler vektörü olmak üzere p -boyutlu prosesin dağılımının $\mathbf{X}_t \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_0)$ dağılımına farklılaşmasını yakalamak için kullanılan MEWMA kontrol grafiği ilk olarak Lowry,

Woodall, Champ ve Rigon (1992) tarafından geliştirilmiştir. MEWMA istatistiği, $n=1$ için merkezleştirilmiş verilerle

$$\mathbf{Z}_t = \lambda(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) + (\mathbf{I} - \lambda)\mathbf{Z}_{t-1} \quad (5.5)$$

ya da orijinal verilerle

$$\mathbf{Z}_t = \lambda\mathbf{X}_t + (\mathbf{I} - \lambda)\mathbf{Z}_{t-1} \quad (5.6)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$, ağırlıklandırma parametresi λ

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

biçiminde köşegen matrisle tanımlanır ve $0 < \lambda_j \leq 1$ değerini alır. Ancak, her bir kalite değişkeni için farklı ağırlıklandırma gerekmiyorsa $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \lambda$ olarak alınır.

MEWMA kontrol grafiği Eş.5.7' de verilen istatistiğin örneklem numarasına, kesikli zamana, karşın çizilmesiyle elde edilir.

$$\mathbf{T}_t^2 = \mathbf{Z}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_{z_t}^{-1} \mathbf{Z}_t \quad (5.8)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = \lambda$ ise \mathbf{Z}_t istatistiğinin varyans kovaryans matrisi ise aşağıdaki eşitlikle tanımlıdır.

$$\boldsymbol{\Sigma}_{z_t} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \left(1 - (1 - \lambda)^{2t} \right) \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (5.9)$$

MEWMA istatistiğinin varyansı olarak Eş.5.8' de verilen tanım kullanıldığında hızlı başlangıç yanıt durumu dikkate alınmış olur ve başlangıçtaki kontrol dışı durumunun daha hızlı yakalanması sağlanır MacGregor ve Harris (1993). $t \rightarrow \infty$ iken $(1 - (1 - \lambda)^{2t})$ değeri sabitleşir ve varyans-kovaryans matrisi

$$\Sigma_{z_t} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \Sigma_0 \quad (5.10)$$

eşitliğine indirgenir. MEWMA kontrol grafiği

$$\mathbf{T}_t^2 = \mathbf{Z}_t^T \Sigma_{z_t}^{-1} \mathbf{Z}_t > h \quad (5.11)$$

olduğunda kontrol-dışı sinyal verir. MEWMA KG' nin *ARL* performansı sadece Eş.5.12' de verilen merkezi olmama parametresine yani $\boldsymbol{\mu}_0$ ve Σ_0 parametrelerine bağlıdır.

$$\theta = [(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)] \quad (5.12)$$

Rigdon (1995a ve 1995b) *KA* ve *KD* durumun *ARL* değerlerini hesaplamak için integral ve çift integral kullanmış olup, Bodden ve Rigdon (1999) MEWMA için *ARL*₀ değerini hesaplayan bir program geliştirmiştir. Runger ve Prabhu (1996) ise *ARL* performansını değerlendirmek için Markov Zinciri ile yaklaşık çözümünü elde ederek parametrelerin seçimi hakkında öneride bulunmuştur.

5.3. Çok Değişkenli MEC Kontrol Grafiği (MMEC)

İstatistiksel proses kontrol tekniklerinin amacı, bir prosesin kalitesini etkileyen özel değişim nedenlerinden dolayı kontrol dışı durumu mümkün olduğunca erken tespit etmektir. EWMA ve CUSUM grafiklerinin proses ortalamasındaki küçük kaymaları yakalamada Shewhart KG ne nazaran daha etkin olduğu bilinmektedir. EWMA ve CUSUM KG lerinin etkinliğini daha da artırmak için, tek değişkenli durumda Zaman, Riaz, Abbas ve Does (2014) tarafından geliştirilen MEC kontrol grafiği bölüm 4.2. de tartışılmış ve MEC' in küçük δ değerlerinde daha yüksek performansa sahip olduğu görülmüştü.

Bu bölümde tek değişkenli durum için geliştirilen MEC kontrol grafiği çok değişkenli duruma genişletilerek MMEC olarak adlandırılan yeni bir kontrol grafiği önerilmekte ve MMEC için ARL değerleri hesaplanarak elde edilen performansları karşılaştırmalı olarak değerlendirilmektedir.

MMEC, Lowry ve Montgomery (1995) tarafından tanımlanan MEWMA kontrol grafiği ve Crossier (1988) tarafından tanımlanan MCUSUM kontrol grafiğine dayalı olarak geliştirilmiştir. Klasik MCUSUM' da girdi olarak bağımsız ve aynı normal dağılımlı kalite değişkeninin orijinal değerleri kullanılırken, MMEC de duyarlılığı artırmak için MCUSUM' da girdi olarak orijinal değişken değerleri yerine MEWMA istatistikleri kullanılmıştır. MEWMA istatistikleri olan \mathbf{Z}_t vektörü, \mathbf{X}_t vektörünün aksine bağımsız değil, ardışık olarak bağımlıdır. Bu nedenle, MMEC istatistiklerinin dağılımı çok değişkenli Shewhart kontrol grafiğinde olduğu gibi bir dağılımla tanımlanamamış ve kontrol-altında ARL_0 değerleri ve dolayısıyla üst kontrol sınırı Monte Carlo simülasyonu ile belirlenmiştir.

$\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots\}$, $\mathbf{X}_t \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ olarak dağılan bir prosesten alınan ardışık bağımsız örneklem olsun. MMEC yönteminin birinci aşamasında üstel ağırlıklı hareketli örneklem ortalamaları hesaplanır. $n=1$ durumu için EWMA istatistikleri

$$\mathbf{Z}_t = \lambda(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_0) + (\mathbf{I} - \lambda)\mathbf{Z}_{t-1} \quad (5.13)$$

eşitliğinden başlangıç değerini $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}$ olarak hesaplanır. Ağırlıklandırma parametresi $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$, $0 < \lambda \leq 1$, olduğu varsayıp her kalite değişkeni için aynı alınırsa, \mathbf{Z}_t değerinin asimptotik varyans kovaryans matrisi

$$\boldsymbol{\Sigma}_{Z_t} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (5.14)$$

olur ve artık varyans-kovaryans matrisi t değerinin fonksiyonu olmadığından

$$\boldsymbol{\Sigma}_Z = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \boldsymbol{\Sigma}_0 \quad (5.15)$$

olarak yazılabilir. MMEC yönteminin ikinci aşamasında, MCUSUM KG girdileri \mathbf{Z}_t olacak şekilde uyarlanır.

$$C_t = \left[(\mathbf{MEC}_{t-1} + \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1} (\mathbf{MEC}_{t-1} + \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \right]^{1/2} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{MEC}_t = \begin{cases} \mathbf{0}, & C_t \leq k \\ (\mathbf{MEC}_{t-1} + \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{K_Z}{C_t} \right), & C_t > k \end{cases} \quad (5.17)$$

MMEC kontrol grafiği

$$T_t = (\mathbf{MEC}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1} \mathbf{MEC}_t)^{1/2} \quad (5.18)$$

değerlerinin örneklem numaralarına karşı çizilmesiyle elde edilir. Burada $\mathbf{MEC}_0 = \mathbf{0}$ ve $k > 0$ 'dır. Referans değer standart sapma çarpanı olarak kayma miktarı δ 'nın MCUSUM' da önerilen $k_z = \frac{1}{2}$ değeri alınabilir. Böylece, standart sapma olarak referans değer

$$K_Z = k_z \times \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_Z} = k_z \times \boldsymbol{\Sigma}_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \quad (5.19)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Örneklem çapı $n > 1$ olduğunda eşitliklerdeki \mathbf{X}_t ler örneklem ortalaması $\bar{\mathbf{X}}_t$ ve $\boldsymbol{\Sigma}_0$ da $\frac{\boldsymbol{\Sigma}_0}{n}$ ile değiştirilir.

MMEC kontrol grafiği

$$T_t = (\mathbf{MEC}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1} \mathbf{MEC}_t)^{1/2} > h \quad (5.20)$$

olduğunda kontrol dışı sinyali verir. Dolayısıyla, h değeri MMEC KG değerinin kontrol sınırındır. MCUSUM ve MEWMA kontrol grafiklerinde olduğu gibi burada da kontrol sınırı h ' nin değerlerinin verilen çeşitli ARL_0 değerleri için üretilmesi gerekir. Bu nedenle, bazı ARL_0 için kontrol sınırları Monte Carlo simülasyonu ile elde edilmiş ve MMEC kontrol grafiğinin performans değerlendirmesi yapılmıştır.

5.3.1. MMEC kontrol grafiğinin Monte Carlo simülasyonu ile performans değerlendirmesi

$ARL_0=200$ değerini verecek kontrol sınırı h değeri MATLAB' da bir simülasyon algoritması yazılarak elde edilmiştir. Kontrol grafiğinin tasarımında tasarım parametreleri olarak $\lambda=0,1; 0,25; 0,5$ ve $k=0,5$ alınmış olup, simülasyon bu değerler için gerçekleştirilmiştir. Ayrıca, MMEC $p=2$ değişken için oluşturulmuş olup, KA hedef ortalama vektörü $\mu_0 = (0 \ 0)$ ve hedef varyans-kovaryans matrisi $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ olarak belirlenmiştir.

$ARL_0=200$ verecek h değerini elde etmek için belirli bir aralıkta h değerleri 0,1 artırılarak 1000 simülasyondan elde edilen çalışma uzunluklarının ortalamaları olan ARL değerleri hesaplanmıştır. Bu simülasyon 400 kez tekrarlanarak h ve ARL serisi elde edilmiştir. 400 birimlik seri kullanılarak ARL ' nin h üzerine log regresyon denklemi tahmin edilerek, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Linear regression model:

$$\log_arl \sim 1 + f_h$$

Estimated Coefficients:

	<u>Estimate</u>	<u>SE</u>	<u>tStat</u>	<u>pValue</u>
(Intercept)	2,91	0,01	196,88	0,00
f_h	0,06	0,00	125,58	0,00

Number of observations: 400, Error degrees of freedom: 398

Root Mean Squared Error: 0,094

R-squared: 0,975, Adjusted R-Squared 0,975

F-statistic vs. constant model: 1,58e+04, p-value = 2,82e-322

h_sapka = 38,535269573206257

Uydurulan modelin $adj_R^2=0,975$ gibi oldukça yüksek bir değerle verilere iyi uyum gsterdiği görülmektedir. Böylece, tahmin edilen model kullanılarak, belli ARL_0 değerlerine karşın h değerleri şöyle hesaplanmıştır:

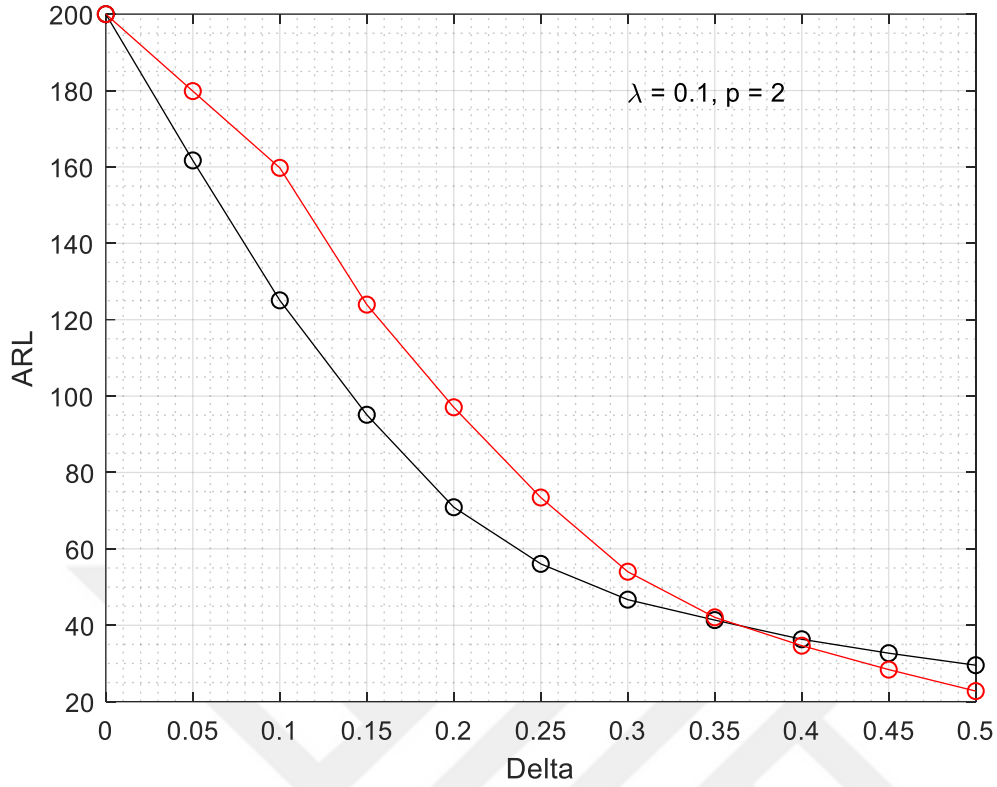
$$\hat{h} = (\log_ ARL - 2,91) / 0,06 = 38,535 \quad (5.21)$$

Böylece, $ARL_0=200$ ve $\lambda = 0,1$ için kontrol sınırı $h =38,535$ olarak hesaplanır. Çizelge 5.1.’ de $ARL_0=200$ ve $\lambda = 0,1$ için $h =38,535$ alınarak çeşitli kayma miktarlarına karşın MMEC ve MCUSUM kontrol grafiklerinin performans ölçüleri olan ARL değerleri görülmektedir.

Çizelge 5.1. $k = 0,5$ ve $p = 2$, $ARL_0=200$ ve $\lambda = 0,1$ için ARL_1 hesaplamaları

$p = 2, k = 0,5$								
$\lambda = 0,1, h_{mmecc} = 38,5353$			$\lambda = 0,25, h_{mmecc} = 21,8328$			$\lambda = 0,5, h_{mmecc} = 12,1394$		
δ	MMEC	MCUSUM	δ	MMEC	MCUSUM	δ	MMEC	MCUSUM
0,000	200,000	200,000	0,000	200,000	200,000	0,000	200,000	200,000
0,050	161,698	179,849	0,050	182,058	195,353	0,050	178,675	189,533
0,100	125,069	159,758	0,100	138,253	162,815	0,100	135,605	156,917
0,150	95,110	123,949	0,150	98,870	123,037	0,150	103,347	126,077
0,200	70,898	97,068	0,200	72,192	93,987	0,200	74,388	90,954
0,250	56,074	73,448	0,250	54,907	68,212	0,250	56,853	70,978
0,300	46,707	54,019	0,300	44,654	54,103	0,300	45,661	57,099
0,350	41,355	42,075	0,350	36,595	41,619	0,350	36,863	43,505
0,400	36,333	34,654	0,400	32,028	35,684	0,400	29,694	34,303
0,450	32,692	28,394	0,450	27,659	28,041	0,450	25,511	28,103
0,500	29,541	22,765	0,500	24,846	23,219	0,500	22,326	23,927

Çizelge 5.1.’ deki sonuçları şekil 5.1. zerinden yorumlamak daha kolaydır. Elde edilen sonuçlara göre, prosesin ortalama vektöründeki küçük kaymalarda MMEC, MCUSUM’ dan daha iyi performansa sahiptir. şöyle ki, proses ortalama vektöründe δ kadar bir kayma meydana geldiğinde MMEC ile bu kayma daha erken yakalanabilmektedir. Örneğin, $\delta=0,2$ birimlik bir kaymanın, MCUSUM kullanıldığında ortalama 97 örneklem sonra yakalanması beklenirken, MMEC ile bunun daha kısa zamanda yani ortalama 70 örneklem sonra yakalanması beklenir. Ancak, kayma miktarı büyüdükçe (0,350’ den sonra) MCUSUM’ un performansı MMEC’ e göre daha iyi olmaktadır.



Şekil 5.1. $\lambda = 0,1, k = 0,5, h = 38,535, p = 2$ için ARL_I

Aynı koşullar altında $\lambda = 0,25$ değerinde daha büyük ağırlıklandırma katsayısı ile elde edilen ve Çizelge 5.1. ve Şekil 5.2.' de verilen sonuçlara göre $ARL_0 = 200$ için karar aralığı $h = 21,83$ olarak elde edilmiştir. Buna ilişkin regresyon denklemi tahmini aşağıda görülmektedir.

Linear regression model:

$$\log_arl \sim 1 + f_h$$

Estimated Coefficients:

	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	2,3545	0,028911	81,441	2,7503e-250
f_h	0,13483	0,0014221	94,812	2,8263e-275

Number of observations: 400, Error degrees of freedom: 398

Root Mean Squared Error: 0,0924

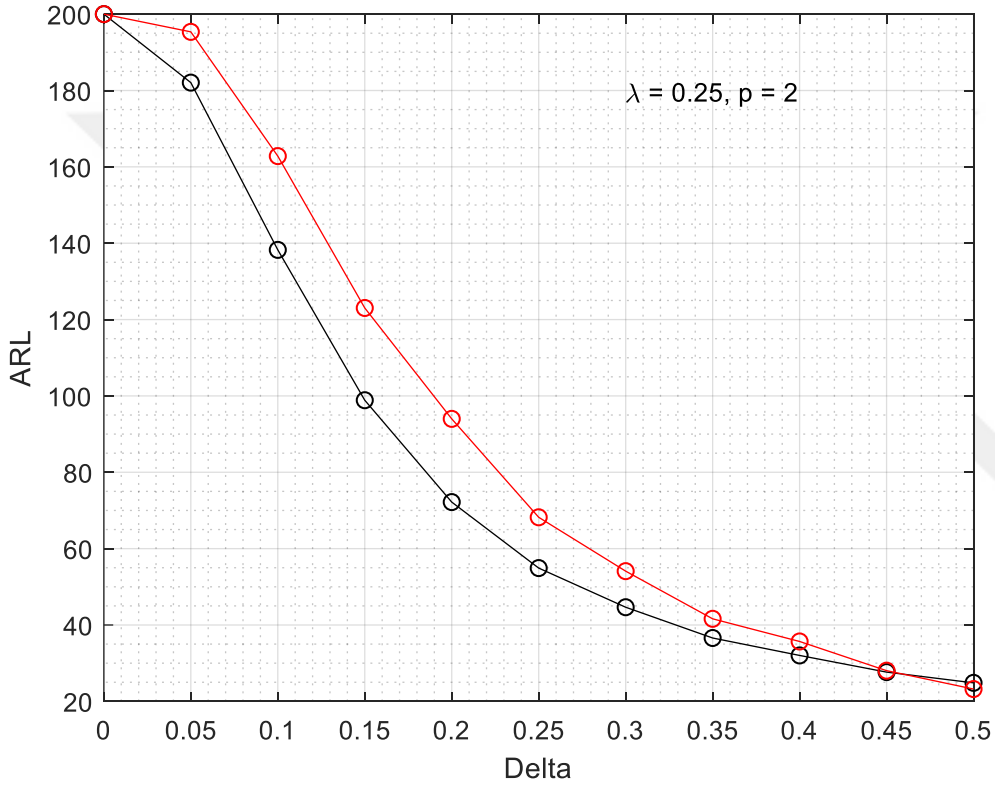
R-squared: 0,958, Adjusted R-Squared 0,957

F-statistic vs. constant model: 8,99e+03, p-value = 2,83e-275

Buradan, karar aralığı

$$\hat{h} = (\log_ ARL - 2,3545) / 0,1348 = 21,83$$

olarak hesaplanır. Yine MMEC, MCUSUM' a göre daha iyi performans göstermekte ve MCUSUM' un daha yüksek performansa sahip olmaya başladığı kayma miktarı daha büyüyerek 0,45 e çıkmaktadır.



Şekil 5.2. $\lambda = 0,25, k = 0,5, h = 21,8328, p = 2$ için ARL_I

Son simülasyon çalışması ise yine aynı parametre değerleri ve $\lambda = 0,50$ olarak alınarak gerçekleştirilmiş olup, Çizelge 5.1. ve Şekil 5.3.' de görülen sonuçlara göre de MMEC daha önceki tasarımlarla benzer performansı göstermiş olup, ortalama vektöründeki kayma miktarı arttıkça MMEC ve MCUSUM performansları birbirine yaklaşmaktadır. Bu parametre değerlerinde $ARL_0 = 200$ değeri için $h = 12,1394$ olarak hesaplanmıştır. h değerinin hesaplanmasında kullanılan log regresyon modeli tahmini aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Linear regression model:

$$\log_{ar1} \sim 1 + f_h$$

Estimated Coefficients:

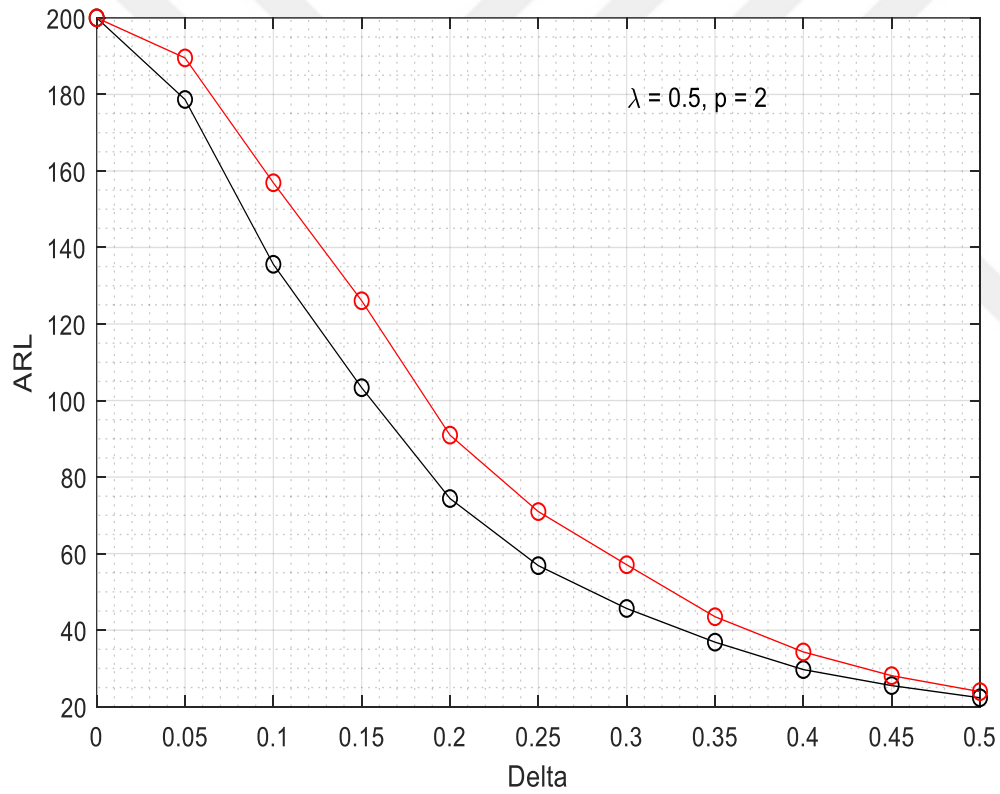
	Estimate	SE	tStat	pValue
(Intercept)	3,832	0,034601	110,75	3,8002e-301
f_h	0,12079	0,0025512	47,348	1,3223e-165

Number of observations: 400, Error degrees of freedom: 398

Root Mean Squared Error: 0,12

R-squared: 0,849, Adjusted R-Squared 0,849

F-statistic vs. constant model: 2,24e+03, p-value = 1,32e-165



Şekil 5.3. $\lambda = 0,50$, $k = 0,5$, $h = 12,1394$, $p = 2$ için ARL_I

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Proses, kontrol altında olan bir sistemdeki çıktı maliyetlerinin azaltılmasında çok önemli rol oynayan bir faaliyetler dizisidir. Bu bağlamda, gerçek yaşam uygulamalarında kullanılan ve proses kontrolünün en önemli aracı olan çeşitli kontrol grafikleri söz konusudur. Niceliksel türden normal dağılımlı değişkenlerin takip edildiği prosesler için önerilmiş olan Shewhart, CUSUM ve EWMA kontrol grafikleri bunlardan en yaygın kullanılanlarıdır. Ancak, Shewhart kontrol grafiklerinin genellikle dağılımın parametresindeki büyük kaymaları, CUSUM ve EWMA' nın ise nispeten küçük kaymaları yakalamakta daha başarılı olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, literatürdeki çalışmaların önemli bir kısmı, bir sistemde kullanılan kontrol grafiklerinin duyarlılıklarını artırmaya yöneliktir. Bu amaçla, çalışmalar ya hem büyük hem de küçük kaymaları yakalamada iyi bir *ARL* performansı verecek kontrol grafikleri önerme yönünde ya da özellikle küçük kaymalarda EWMA ve CUSUM' a alternatif daha duyarlı kontrol grafikleri önermek yönündedir. Bu çalışmada önerilen ve dağılımın ortalama parametresindeki kaymayı takip etmeye yönelik ve SMEC olarak adlandırılan kontrol grafiği Shewhart, CUSUM ve EWMA kontrol grafiklerini kombine eden bir yaklaşımla ele alınmıştır. Bu önerinin geliştirilmesinde CSEWMA kontrol grafiklerinin düşüncesinden hareket edilmiş ve Shewhart ve EWMA' yı kombine etmek yerine Shewhart ve MEC kontrol grafikleri kombine edilmiştir.

SMEC kontrol grafiği hem büyük hem de küçük kaymalara karşı daha duyarlı olduğu gözlemlenmiştir. Çizelge 4.4.' de $ARL_0 = 500$ için $\lambda = 0,10$ ve $0 < \delta < 1$ aralığında iken SMEC kontrol grafiğinin CSEWMA kontrol grafiğinden iyi sonuç verdiği görülmektedir. δ değerinin 1' den büyük değerleri içinde SMEC, CSEWMA' ya yakın ARL_1 değerleri vermiştir. Önerilen yöntemin ortalama işletim performansı Shewhart' a nazaran oldukça iyi iken, CUSUM ve EWMA' yı kombine den MEC' e nazaran biraz daha kötüdür. Ancak, ikisi arasındaki fark kayma miktarı arttıkça hızla kapanmaktadır. Bununla birlikte SMEC yönteminin tek başına CUSUM ve EWMA' ya nazaran performansının oldukça iyi olduğu görülmüştür.

Yukarıdaki açıklamaya benzer şekilde çok değişkenli proseslerde ortalama vektörünü takip etmek için etkin çalışan kontrol grafikleri yönünde de gösterilmiştir. Çok değişkenli normal dağılımlı prosesler için de literatürde, değişkenler arası kovaryans yapısını dikkate alan

Shewhart, MCUSUM ve MEWMA kontrol grafikleri önerilmiştir. Bu kontrol grafiklerinin *ARL* performanslarını iyileştirmek için yine literatürde bazı karma ya da modifiye edilmiş öneriler olduğu görülmektedir. Bu bağlamda bu çalışmada önerilen yöntem de, MMEC, prosesdeki küçük kaymaları yakalamada daha iyi *ARL* performansı veren ve MEWMA ve MCUSUM' u kombine etmeye dayanan bir yaklaşım takip edilmiştir. Çeşitli ARL_0 ve ağırlıklandırma parametresi λ ya karşın elde edilen ARL_1 değerlerinin MMEC' de MCUSUM' a nazaran çok daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Bu çalışmada, MMEC için karar aralığı değerleri olan, h değerleri sınırlı sayıda tasarım parametre kombinasyonu için üretilmiştir. İleride h değerleri daha fazla sayıda parametre kombinasyonu için üretilerek uygulamacıların kullanımına sunulabilir.

Sürecin kayma miktarının küçük olduğu durumda ARL_1 değeri de en küçük değerdir. Prosesdeki küçük kaymaları yakalayan CUSUM ve EWMA kontrol grafiklerine nazaran daha en iyi performans gösteren MEC kontrol grafiğidir. En iyi sonucu veren kontrol grafiği ise MEC olmuştur. *ARL* performansının, prosesdeki küçük kayma miktarları için MEC kontrol grafiği daha duyarlıdır. MEC kontrol grafiği λ değerlerinin 0,10 olduğu durumlarda prosesdeki küçük kaymaları saptamakta daha etkilidir. Kayma miktarlarının sabitken ve diğer parametre değerlerinin farklı olması durumunda MEC kontrol grafiği için ARL_1 değerleri küçük kayma miktarlarında daha iyi sonuçlar vermiştir. Ayrıca kayma miktarı azalması ARL_1 değerini de azaltmaktadır. Bu durumun tam tersi de geçerlidir. MEC kontrol grafiğinde sabit kayma miktarı ve aynı ARL_0 değerleri baz alınarak λ ve h_z nin farklı değerleri için ARL_1 değerleri birbirine yakın sonuçlar almaktadır.

KAYNAKLAR

- Abbas, N., Riaz, M. and Does, R. J. M. M. (2012). Mixed exponentially weighted moving average cumulative sum charts for process monitoring. *Quality and Reliability Engineering International*, 29, 345-356.
- Abbas, N., Riaz, M. and Does, R. J. M. M. (2014). An EWMA-type control chart for monitoring the process mean using auxiliary information. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 43, 3485-3498.
- Brook, D. and Evans, D. A. (1972). An approach to the probability distribution of CUSUM run length. *Biometrika*, 59, 539-549.
- Bodden, K. M. and Rigdon, S. E. (1999). A program for approximating the in-control ARL for them ewma chart. *Journal of Quality Technology*, 31, 120-123.
- Capizzi, G. A. and Masarotto, G. (2010). Combined Shewhart EWMA control charts with estimated parameters. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 80(7), 793-807.
- Choi, S. and Lee Hawkins D. M. (2002). *A General Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Control Chart*. Technical Report 640, School of Statistics, University of Minnesota, USA.
- Costa, A. F. B. (1997). X charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29, 197-204.
- Crowder, S. V. (1987). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, 29, 401-407.
- Crowder, S. V. (1989). Design of exponentially weighted moving average schemes. *Journal of Quality Technology*, 21(3), 155-162.
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality control schemes. *Technometrics*, 30, 291-303.
- Hawkins, D. M. (1991). Multivariate quality control based on regression-adjusted variables. *Technometrics*, 33, 61-75.
- Hawkins, D. M. and Olwell, D. H. (1998). *Cumulative Sum Charts and Charting for Quality Improvement*, New York: Springer-Verlag, 31-45.
- Healy, J. D. (1987). A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*, 29, 409-412.
- Hotelling, H. (1947). Multivariate quality control illustrated by the air testing of sample bombsights. In: C. Eisenhart, M. W. Hastay, and W. A. Wallis, Editors. *Techniques of Statistical Analysis*, New York: Mc Graw-Hill, 111-184.

- Hunter, J. S. (1986). The exponentially weighted moving average. *Journal of Quality Technology*, 18, 203-210.
- Koshti, V. V. (2015). *Combined Shewhart-EWMA Control Scheme*. Conference: National Seminar on Recent Developments in Applied Statistics (NSRDS), at Vita, Dist. Sangli, Maharashtra Volume: Proceedings of National Seminar.
- Lowry, C. A. and Montgomery, D. C. (1995). Review of multivariate control charts. *IIE Transactions*, 27, 800-810.
- Lowry, C. A. ,Woodall, W. H. , Champ, C. W. and Rigon, S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*, 34, 46-53.
- Lucas J. and Crosier, R. (1982). Fast initial response for CUSUM quality-control scheme. *Technometrics*, 32, 1-12.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*, 24, 199-205.
- Nedumaran, G., Pignatiello, J. J. and Calvin, J. A. (1998). Identifying the time of a step-change with X2 control charts. *Semantic Scholar*, 2(13), 153-159.
- MacGregor, J. and Harris, T. (1993). The exponentially weighted moving variance. *Journal Qual Technology*, 106-118.
- Mason, R. L., Champ, C. W., Tracy, N. D., Wierda, S. J. and Young, J. C. (1997). Assessment of multivariate process control techniques. *Journal of Quality Echnology*, 29, 140-143.
- Montgomery, D. C. (2009). *Introduction to Statistical Quality Control* (Sixth edition). New York: John Wiley and Sons, 180, 181, 186, 187, 404, 408, 420, 423, 425.
- Rigdon, S. E. (1995a). A double-integral equation for the average run length of a MEWMA control chart. *Statistics and Probability Letters*, 24, 365-373.
- Rigdon, S. E. (1995b). An integral equation for the in-control average length of a MEWMA control chart. *Journal of Statistical Computations and Simulation*, 52, 351-365.
- Roberts, S. W. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*, 1, 239-250.
- Runger, G. C. and Prabhu, S. S. A. (1996). Markov chain model for the multivariate EWMA control chart. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1701-1706.
- Page, E. S. (1951). Cumulati and sum charts. *Technometrics*, 3, 1, 1-9.
- Page, E. S. (1954). Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 14, 100-115.
- Prabhu, S. S. and Runger, G. C. (1997). Designing a multivariate EWMA control chart. *Journal of Quality Technology*, 29, 8-15.

- Qiu, P. (2013). *Introduction to Statistical Process Control* (First edition). New York: Chapman and Hall CRC Press, 70-118, 120-178, 257-270.
- Steiner, S. H. (1998). EWMA control charts with time varying control limits and fast initial response. *Journal of Quality Technology*, 31, 75-86.
- Woodall, W. and Ncube, M. M. (1985). Multivariate CUSUM quality control procedures. *Technometrics*, 27, 285-292.
- Woodall, W. H. and Maragah, H. D. (1990). Discussion exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*, 32, 1-2.
- Wu, Z., Jiao J., Mei, Y., Liu, Y. and Wang, Z., (2009). An enhanced adaptive CUSUM control chart. *IIE Transactions*, 41, 642-653.
- Zaman, B., Riaz, M., Abbas, N. and Does, R. J. M. M. (2014). Mixed cumulative sum-exponentially weighted moving average control charts: an efficient way of monitoring process location. *Quality and Reliability Engineering International*, 31(8), 1407-1421.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YILMAZ, Beste
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 17.04.1992, Ankara
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0(539) 862 84 92
e-mail : 1905bst@gmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik	Devam ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik	2014
Lise	Ömer Seyfettin Lisesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2018 - Hâlen	IVECO Özgözde Otom. Tic. A.Ş	Finans/Muhasebe

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzmek, Dans etmek



GAZİ GELECEKTİR..