GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

LUPAŞ-SZÁSZ TABAN FONKSİYONLARINA BAĞLI TOPLAMSAL-İNTEGRAL TİPLİ GBS OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

Nesibe MANAV

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2019

Nesibe MANAV tarafından hazırlanan "LUPAŞ-SZÁSZ TABAN FONKSİYONLARINA BAĞLI TOPLAMSAL-İNTEGRAL TİPLİ GBS OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Şeyhmus YARDIMCI
Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

………………..
Nesibe MANAV
10/07/2019

LUPAŞ-SZÁSZ TABAN FONKSİYONLARINA BAĞLI TOPLAMSAL-İNTEGRAL TİPLİ GBS OPERATÖRLERİ İLE YAKLAŞIM

(Doktora Tezi)

Nesibe MANAV

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2019

ÖZET

Bu tezde, integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için genellestirilmis Lupaş-Szász tabanlı yeni bir toplamsal-integral tip operatör tanımlandı. Bu operatörlerin toplamsal kısmında genelleştirilmiş Lupaş, integral kısmında genellestirilmiş Szász taban foksiyonları kullanıldı. Bu genelleştirmede, belirli koşulları sağlayan sınırsız diziler yardımıyla daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edildi. Bu operatörlerin Jain-tip genelleştirmeleri tek ve iki değişkenli biçimde tanımlanarak integrallenebilir fonksiyonlar için lokal ve global yaklaşım teoremleri elde edildi. Jain tipin Genelleştirilmiş Boolean Toplamı(GBS operatörleri) tanımlanarak Bögel sürekli fonksiyonlara yaklaşım sonuçları verildi. Böylece Lupaş-Szász tabanlı toplamsal-integral tip operatörlerin Jain GBS tipi için fonksiyonlara daha iyi bir yakınsama oranı elde edildi. Afin fonksiyonları koruyacak biçimde operatörler yeniden düzenlenerek mutlak sürekli hemen her yerde sınırlı salınımlı türeve sahip fonksiyonlara yakınsaklık oranı elde edildi.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Lupas fonksiyonları, Ditzian-Totik modülü, GBS operatörleri, Sınırlı salınımlı fonksiyonlar.
Sayfa Adedi	:	110
Danışman	:	Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

APPROXIMATION BY THE GENERALIZED SUMMATION-INTEGRAL TYPE GBS OPERATORS BASED ON LUPAŞ-SZÁSZ BASIS FUNCTIONS

(Ph. D. Thesis)

Nesibe MANAV

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2019

ABSTRACT

In this thesis, to approximate integrable functions a new type generalized summation-integral type operators based on Lupas-Szász basis functions are defined. In the summation part of these operators generalized Lupas basis functions and in integral part of these operators generalized Szász basis functions are used. In this generalization, by means of unbounded sequences supplying certain conditions, a better degree of approximation is obtained. After the definition of the univariate and bivariate Jain-type generalized form of these operators, local and global approximation theorems are given for integrable functions. The Generalized Boolean Sum operators of Jain-type operators are defined and the results of approximation on Bögel continious functions are given. Thus, a better rate of convergence is obtained for the Jain GBS type of the summation-integral type Lupas-Szász operators. By recomposition of these operators for preserving affine functions the rate of convergence is estimated for the function absolute continuous with derivatives of bounded variation almost everywhere.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Lupas functions, Ditzian-Totik modulu of smoothness, GBS operators, bounded variated functions.
Page Number	:	110
Supervisor	:	Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren, bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle faydalı olabilmek için elinden geleni sunan, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e tesekkür ederim. Tez İzleme Komitesi üyeleri değerli hocalarım Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ve Prof. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN'a olumlu ve yapıcı eleştirileriyle beni yönlendirdikleri ve birikimlerini paylaştıkları için teşekkürü borç bilirim. Eğitimimde bana yardımcı olan hocalarıma, değerli çalışma arkadaşlarıma, tüm dostlarıma ve hayatı birlikte anlamaya/anlamlandırmaya çalıstığımız en değerlim Nesrin MANAV'a çok tesekkür ederim. Doktora çalışmamı Yurtiçi Burs Programı ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Bu süreçte ve hep yanımda olan, beni bu günlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek sekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, bu hayattaki en büyük şansım olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ix

SİMGELER VE KISALTMALAR x

1. GİRİŞ 1

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPLAMSAL İNTEGRAL TİPLİ LUPAŞ-SZÁSZ TABANLI OPERATÖRLER 5

2.1. Yardımcı Sonuçlar 6

2.2. $D_{a_n,b_n}\left(f;x\right)$ Operatörleri ile Yaklaşım 11

2.3. Örnekler 35

3. OPERATÖRLERİN JAİN-TİP GENELLEŞTİRİLMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 38

3.1. Yardımcı Sonuçlar 39

3.2. Yaklaşımın Derecesi 53

4. İKİ DEĞİŞKENLİ JAİN-TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ 60

4.1. Operatörün Tanımı 60

4.2. İki Değişkenli Jain-tip Genelleştirilmiş Operatörlerle Yaklaşım 61

4.3. Yaklaşımın Derecesi 66

5. LUPAŞ-SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN JAİN GENELLEŞTİRMESİNİN GBS TİPİ 75

Sayfa

5.1. GBS Operatörleri ile Bögel Sürekli Fonksiyonlara Yaklaşım 78

5.2. Örnekler: Operatörlerin Yaklaşım Oranlarının Karşılaştırılması................... 81

6. AFİN FONKSİYONLARI KORUYAN LUPAŞ-SZÁSZ TOPLAMSAL-İNTEGRAL TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM 85

6.1. Türevi Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlara Yaklaşım 87

6.2. Örnekler.. 100

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 103

KAYNAKLAR 105

ÖZGEÇMİŞ 109

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Farklı diziler için D_{a_n,b_n}in $f(x)=\sqrt{2x+x^2}$ fonksiyonuna yaklaşımı . 35

Şekil 2.2. D_{a_n,b_n} operatörlerinin $f(x)=(2x+x^2)^3$ fonksiyonuna yaklaşımı . . . 35

Şekil 2.3. D_{a_n,b_n} operatörlerinin $f(x)=((x-1)/3)^2$ fonksiyonuna yaklaşımı . . 36

Şekil 5.1. $n=20$ için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $f(x,y)=x^2+y^2+1$ fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması 81

Şekil 5.2. $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin karşılaştırılması (şeklin üstten görünümü) 82

Şekil 5.3. $n = 20$ için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin karşılaştırılması (şeklin alttan görünümü) 82

Şekil 5.4. $n = 5$, $n = 10$ ve $n = 50$ durumları için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $f(x,y)=(x-1)^2(y-1)$ fonksiyonuna yaklaşımı 83

Şekil 6.1. D_{a_n,b_n}^{*} nin her yerde türevlenebilir, kapalı alt aralıkta sınırlı salınıma sahip fonksiyona yaklaşımı 100

Şekil 6.2. Türevli ve sınırlı salınımlı fakat türev fonksiyonu sınırsız fonksiyona yaklaşım 101

Şekil 6.3. Sürekli fakat sınırlı salınımlı olmayan fonksiyona yaklaşım 101

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\Delta_{xy} f\left[x_0, y_0; x, y\right]}$	f fonksiyonunun (x_0, y_0) noktasındaki karma farkı
$\boldsymbol{\phi_x\left(t\right)}$	Moment fonksiyonu
$\boldsymbol{\omega_1\left(f, \delta\right)}$	f fonksiyonunun süreklilik modülü(tek değişkenli)
$\boldsymbol{\omega_2\left(f, \Phi\right)}$	f fonksiyonunun Ditzian-Totik düzgünlük modülü
$\boldsymbol{\omega_B(f; \delta_1, \delta_2)}$	Bögel (karma) süreklilik modülü
$\boldsymbol{\omega^k\left(f, \delta\right)}$	f fonksiyonunun k-yıncı kısmi süreklilik modülü
$\boldsymbol{\Omega\left(f, \delta\right)}$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$\boldsymbol{\mathcal{K}\left(f, \delta\right)}$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli
$\boldsymbol{(x)_k}$	Pochhammer sembolü, $(x)_k := x(x+1)...(x+k-1)$ ve $(x)_0 := 1$
$\boldsymbol{B_b\left[0, \infty\right)}$	$[0, \infty)$ aralığında Bögel sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{B_\rho\left[0, \infty\right)}$	$[0, \infty)$ da $M > 0$ olmak üzere $\left\|f\left(x\right)\right\| \leq M\left(1+x^2\right)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C[a, b]}$	[a,b] aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C\left[0, \infty\right)}$	$[0, \infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonlar
$\boldsymbol{C_b\left[0, \infty\right)}$	$[0, \infty)$ da Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_B\left[0, \infty\right)}$	$[0, \infty)$ aralığında sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{C_\rho\left[0, \infty\right)}$	$B_\rho\left[0, \infty\right)$ nin sürekli fonksiyonlardan oluşan alt kümesi

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{C_\rho^* [0,\infty)}$	$C_\rho [0,\infty)$ nun $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}$ nin sonlu olması şartını sağlayan fonksiyonlardan oluşan alt kümesi
$\boldsymbol{C^{(k)} [0,\infty)}$	$[0,\infty)$ da tanımlı k-kez sürekli türevlenebilir $(k\in\mathbb{N})$ fonksiyonlar uzayı
$\boldsymbol{D_n (f,x)}$	$x \in \mathbb{R}$, D_n lineer operatörünün f sürekli fonksiyonuna uygulanması
$\boldsymbol{{}_2F_0 (-n,a;-;z)}$	Hipergeometrik fonksiyon
$\boldsymbol{Lip_\lambda(M)}$	$C[a,b]$ kümesinden olan ve her $x_1,x_2\in[a,b], 0<\lambda\leq 1, M\geq 0$, $\lvert f(x_2)-f(x_1)\rvert \leq M\lvert x_2-x_1\rvert^\lambda$ şartını sağlayan Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar uzayı
$\lVert\cdot\rVert_{\boldsymbol{B[0,\infty)}}$	$B[0,\infty)$ uzayında $\lVert f\rVert_{B[0,\infty)} = \sup\lvert f(x)\rvert$ ile tanımlı olan norm
$\lVert\cdot\rVert_{\boldsymbol{C[0,\infty)}}$	$C[0,\infty)$ uzayında $\lVert f\rVert_{C[0,\infty)} = \sup_{x\in[0,\infty)}\lvert f(x)\rvert$ ile tanımlanan norm
$\lVert\cdot\rVert_{\boldsymbol{\rho}}$	$C_\rho^*[0,\infty)$ uzayında $\lVert f\rVert_\rho = \sup_{x\leq 0}\frac{\lvert f(x)\rvert}{1+x^2}$ ile tanımlanan norm
$\lVert\cdot\rVert_{\boldsymbol{C_B(J^2)}}$	$C_B(J^2)$ uzayında $\lVert f\rVert_{C_B(J^2)} = \sup\limits_{(x,y)\in J^2}\lvert f(x,y)\rvert$ ile tanımlı olan norm

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi matematiksel analizin önemli konularından biridir ve çeşitli alanlardaki uygulamaları nedeniyle pek çok matematikçinin ilgisini çekmektedir. Bu alandaki önemli problemlerden biri de sınırsız aralıklardaki sürekli fonksiyonlara lineer pozitif operatörlerle yaklaşımın incelenmesidir.

1885 yılında Weierstrass reel sayıların bir alt aralığı olan $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli her f fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir [1], bu teoremin ispatı bazı özel lineer operatörler kullanılarak verilmiştir. Weierstrass yaklaşım teoreminin ispatı için 1912 yılında Bernstein tarafından $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $f \in C[0,1]$ için n. dereceden;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{(n-k)},$$

verilen polinomlar teoremin en şık ve kısa ispatını sağlaması yanı sıra yaklaşım teorisinin önemli cebirsel polinomlarından da biridir [2]. Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene birçok genellemeleri yapılmıştır. Bunların en önemlilerinden biri de 1995'te Lupaş'ın tanımladığı, $(\alpha)_0 = 1$ ve $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\,,\ k \geq 1$ olarak tanımlı Pochhammer sembolünü ifade etmek üzere;

$$\frac{1}{(1-a)^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} a^k, |a| < 1,$$

eşitliğinde $\alpha = nx$ almak suretiyle $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$L_n(f;x) = (1-a)^{nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)_k}{k!} a^k f\left(\frac{k}{n}\right), x \geq 0, \tag{1.1}$$

lineer pozitif operatörleridir [3]. Bu operatörleri Lupaş operatörleri olarak isimlendiriyoruz.

Agratini, [4]'te, Lupaş'ın tanımladığı Eş. 1.1 ile verilen operatörlerde $a = \dfrac{1}{2}$ alarak,

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}^{*}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), l_{n,k}^{*}(x) = 2^{-nx} \frac{(nx)_k}{2^k k!}, x \geq 0, \tag{1.2}$$

operatörlerini tanımlamış ve süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım dercesini vererek Voronovskaja-tip asimptotik formülü elde etmiş, olasılık yöntemlerle yaklaşımı incelemiş ve aynı zamanda integrallenebilir fonksiyonlar için hem Durrmeyer hem de Kantorovich genişletmelerini tanımlamıştır. Agratini, [5]'te, sınırlı salınımlı fonksiyonlar için Eş. 1.2 ile verilen operatörlerin Kantorovich varyantının yaklaşım özelliklerini süreklilik modülü yardımıyla ve olasılık yöntemler kullanarak incelemiştir.

$\mathbb{R}_0 = [0,\infty)$, $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ olmak üzere, Eş. 1.2 ile verilen operatörlerinin bir genelleştirmesi olan

$$L_n^*(f;x) = 2^{-a_n x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_n x)_k}{2^k k!}f\left(\frac{k}{b_n}\right), x\in\mathbb{R}_0, n\in\mathbb{N}$$

operatörleri [6]'da Erençin ve Taşdelen tarafından tanımlanmış ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Burada (a_n), (b_n) artan ve sınırsız pozitif reel sayı dizileridir ve

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + O\left(\frac{1}{b_n}\right), \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = 0$$

özelliklerini sağlar. Ayrıca [7]'de, yine Erençin ve Taşdelen tarafından L_n^* operatörünün Kantorovich formu tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım derecesi süreklilik modülü ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımıyla verilmiştir.

Eş. 1.2 ile tanımlanan operatörlerin Durrmeyer varyantı [4]'te Agratini tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$$M_n(f;x) = \left(\int_0^\infty l_{n,k}^*(u)du\right)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}l_{n,k}^*(x)\int_0^\infty l_{n,k}^*(u)f(u)du. \tag{1.3}$$

Lupaş operatörleri için, [8]'de Govil ve arkadaşları, Eş. 1.2'de verilmiş olan $l_{n,k}^*(x)$ ve $p_{n,k-1}(x) = e^{-nt}\frac{(nx)^{k-1}}{(k-1)!}$ şeklindeki Szász taban fonksiyonunu kullanarak

$$D_n(f;x) = n\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,k}^*(x)\int_0^\infty p_{n,k-1}(u)f(u)du + l_{n,0}^*(x)f(0),\ \ x\geq 0 \tag{1.4}$$

operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir.

Lupaş operatörlerin farklı genellemelerinin tanımlanacağı ve bunların yaklaşım özelliklerinin inceleneceği bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm tez konusunun genel olarak tanıtıldığı giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, genelleştirilmiş Lupaş ve Szász taban fonksiyonlarına bağlı toplamsal-integral tip operatörler:

$$D_{a_n,b_n}(f;x) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) f(u)\, du$$

olarak tanımlandı. Burada $f \in C[0,\infty)$ ve integrallenebilir fonksiyon olmak üzere,

$$P_{n,k}(x) = e^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{k!}, l_{n,k}(x) = \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x},$$

şeklinde ve $(a_n), (b_n)$ dizileri

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0, \ \frac{b_n}{a_n} \leq 1,$$

koşullarını sağlar. $(a_n), (b_n)$ dizilerinin bu şekilde seçilmesi daha iyi bir yaklaşım derecesi elde edilmesine olanak tanır. Bu operatörlerin Korovkin teoreminin şartlarını sağladığı gösterilip, yaklaşım derecesi süreklilik modülü, Ditzian-Totik düzgünlük modülü ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımıyla incelendi. Ayrıca Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için genel ve lokal yaklaşım özellikleri verilip, ağırlıklı yaklaşım özellikleri araştırıldı. Farklı $(a_n), (b_n)$ dizileri ve n değerleri için yaklaşımın derecesi görsel olarak grafikler yardımıyla resmedildi.

Bu tezin üçüncü bölümünde ise [9], [10] ve [11] numaralı kaynaklar dikkate alınarak $[0,\infty)$ da integrallenebilen fonksiyonlar için, $l_{n,k}(x)$ yukarıda tanımlanan olan Lupaş tabanı olmak üzere $\beta \in [0,1)$ için, Szász taban fonksiyonunun Jain genelleştirmesi

$$\theta_\beta\left(k, \frac{a_n}{b_n}x\right) = \frac{a_n}{b_n}x\left(\frac{a_n}{b_n}x + k\beta\right)^{k-1} \frac{e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}x+k\beta\right)}}{k!}, x \in [0,\infty), n \in \mathbb{N},$$

şeklinde kullanılarak aşağıdaki Jain-tip genelleştirilmiş operatörler tanımlandı:

$$\begin{aligned} & D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(f;x) \\ = & \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)du\right)^{-1} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)f(u)\,du+l_{n,0}(x)f(0). \end{aligned}$$

Bu operatörlerin yaklaşım özellikleri analizin farklı yöntemleri kullanılarak araştırıldı. Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım oranı elde edildi.

Dördüncü ve beşinci bölümlerde ise önceki bölümde verilmiş olan Jain-tip genelleştirilmiş operatörler sırasıyla önce iki değişkenli biçimde tanımlanıp yaklaşım özellikleri incelendi, sonra da Bögel sürekli fonksiyonlara yaklaşmak için Genelleştirilmiş Boolean Toplam(GBS) operatörleri tanımlandı. GBS operatörleri ile Bögel sürekli fonksiyonlara karma süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesi verildi ve karma Lipschitz tip sınıftan fonksiyonlara yakınsama oranları elde edildi. Bu iki bölümde verilen operatörlerin fonksiyonlara yaklaşımının karşılaştırıldığı örnekler grafikler yardımıyla görsel olarak beşinci bölüm sonunda verildi.

Altıncı bölümde, Lupaş-Szász tabanlı toplamsal-integral tip operatörler afin fonksiyonları koruyacak şekilde, $l_{n,k}(x)$ ve $P_{n,k}(x)$ yukarıda verilen Lupaş ve Szász taban fonksiyonları olmak üzere,

$$D_{a_n,b_n}^{*}(f;x)=\frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k-1}(t)\,f(t)\,dt+l_{n,0}(x)f(0),$$

şeklinde yeniden düzenlenerek mutlak sürekli ve hemen her yerde sınırlı salınımlı türeve sahip fonksiyonlara yakınsaklık oranı elde edildi. Ayrıca farklı fonksiyonlar için yaklaşım grafikler yardımıyla görsel olarak incelendi.

Yedinci ve son bölüm sonuç ve önerilerin verildiği bölümdür.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPLAMSAL İNTEGRAL TİPLİ LUPAŞ-SZÁSZ TABANLI OPERATÖRLER

Bu bölümde integrallenebilir fonksiyonlara yaklaşmak için sınırsız diziler yardımıyla genelleştirilmiş Lupaş-Szász tabanlı operatörleri tanımlayarak bazı yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz. (a_n) ve (b_n),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0,\ \frac{b_n}{a_n} \leq 1, \tag{2.1}$$

koşullarını sağlayan diziler ve sırasıyla genelleştirilmiş Lupaş ve Szász taban fonksiyonları

$$P_{n,k}(x) = e^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{k!}, l_{n,k}(x) = \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \tag{2.2}$$

olsun. $f \in C[0,\infty)$ integrallenebilir fonksiyonları için

$$D_{a_n,b_n}(f;x) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^\infty P_{n,k}(u) f(u)\, du \tag{2.3}$$

toplamsal-integral tip operatörünü tanımlayalım.

Düzgün yakınsama ile ilgili temel teoremi aşağıdaki gibi verelim.

2.0.1. Teorem (Korovkin Teoremi)

Her $n \in \mathbb{N}$ için ve $[c,d] \subset [a,b]$ olmak üzere $T_n : C[a,b] \to C[c,d]$ şeklinde tanımlı (T_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $i = 0,1,2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(e_i) - e_i\|_{C[a,b]} = 0,\ \ i = 0,1,2$$

koşulları gerçekleniyorsa, bu durumda her $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

dır [12].

Bu çalışma boyunca her bir $i = 0,1,2,3,4$ için $e_i(x) = x^i$ tek değişkenli test fonksiyonlarını gösterecektir. Şimdi, $D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini incelemek için öncelikle bazı yardımcı sonuçları verelim.

2.1. Yardımcı Sonuçlar

Bu bölümde öncelikle Lupaş tarafından tanımlanan operatörler ve bu operatörlerin genelleştirmelerinden bahsedeceğiz.

İlk olarak [3]'te tanımlanan

$$L_n(f;x) = (1-a)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!} a^k f\left(\frac{k}{n}\right), |a| < 1 \tag{2.4}$$

operatörlerinin bazı yaklaşım özellikleri $a = 1/2$, $\alpha = nx$ durumu ve $x \geq 0$ için [4]'te verilmiş ve [13]'te bu operatörlerin Kantorovich formu tanımlanıp yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.

Eş. 2.4 ile verilen operatörlerin bir genelleştirmesi olan

$$L_n^*(f;x) = 2^{-a_n x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_n x)_k}{2^k k!} f\left(\frac{k}{b_n}\right),\ x \in \mathbb{R}_0,\ n \in \mathbb{N}$$

operatörleri, $\mathbb{R}_0 = [0,\infty)$, $\mathbb{N} = \{1,2,...\}$ olmak üzere, [6]'da tanımlanmış ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Burada (a_n), (b_n) artan ve sınırsız pozitif reel sayı dizileridir ve

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 + O\left(\frac{1}{b_n}\right), \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$$

özelliği sağlanır. Ayrıca [7]'de L_n^* operatörünün Kantorovich formu tanımlanmış ve bu operatörlerin yaklaşım özellikleri süreklilik modülü ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımıyla verilmiştir.

$D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerinin incelenmesinde kullanılacak olan bazı sonuçların elde edilmesi için Eş. 2.4 ile verilen L_n operatörlerinin bir genelleştirmesinden faydalanacağız. Bu genelleştirmeyi aşağıdaki gibi tanımlıyoruz:

$x \in [0, \infty)$ ve $f \in C_B [0, \infty)$için,

$$L_{a_n,b_n}(f;x) = 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} f\left(\frac{b_n}{a_n}k\right) \tag{2.5}$$

şeklindedir, burada (a_n) ve (b_n) Eş. 2.1'de verilen şartları sağlayan pozitif reel sayı dizileridir. $C_B [0, \infty)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli ve sınırlı fonksiyonların kümesi ve bu uzaydaki norm $\|f\| = \sup_{x \geq 0} |f(x)|$ dir.

Şimdi bu operatörler için test fonksiyonlarındaki değerlerini verelim.

2.1.1. Lemma

L_{a_n,b_n}, Eş. 2.5 ile tanımlı operatörler ve $x \in [0, \infty)$ olsun. Test fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$L_{a_n,b_n}(e_0;x) = 1,$$

$$L_{a_n,b_n}(e_1;x) = x,$$

$$L_{a_n,b_n}(e_2;x) = x^2 + 2\frac{b_n}{a_n}x,$$

$$L_{a_n,b_n}(e_3;x) = x^3 + 6\frac{b_n}{a_n}x^2 + 6\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x,$$

$$L_{a_n,b_n}(e_4;x) = x^4 + 12\frac{b_n}{a_n}x^3 + 36\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x^2 + 26\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 x.$$

İspat

Üstel fonksiyonların seri açılımından yararlanarak oluşturulan,

$$2^{\frac{a_n}{b_n}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}, x \in [0, \infty),$$

eşitliğini ve Pochhammer sembolünün tanımını kullanarak e_0 için;

$$L_{a_n,b_n}\left(e_0; x\right) = 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} e_0\left(\frac{b_n}{a_n}k\right)$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} 2^{\frac{a_n}{b_n}x} = 1$$

bulunur. e_1 için;

$$L_{a_n,b_n}\left(e_1; x\right) = 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} e_1\left(\frac{b_n}{a_n}k\right)$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} \left(\frac{b_n}{a_n}k\right)$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} k$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k (k-1)!}$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{b_n}{a_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_{k+1}}{2^{k+1} (k)!}$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \frac{b_n}{a_n} \frac{a_n}{b_n} x \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)_k}{2^k (k)!}$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} x \frac{1}{2} 2^{\frac{a_n}{b_n}x+1}$$

$$= x$$

bulunur. e_2 için;

$$L_{a_n,b_n}\left(e_2;x\right) = 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} e_2\left(\frac{b_n}{a_n}k\right)$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} \left(\frac{b_n}{a_n}k\right)^2$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} k^2$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} k(k-1+1)$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} k(k-1) + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} k$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k (k-2)!} + \frac{b_n}{a_n}x$$

$$= 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{a_n}{b_n}x\left(\frac{a_n}{b_n}x+1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x+2\right)_k}{2^k k!} + \frac{b_n}{a_n}x$$

$$= x^2 + 2\frac{b_n}{a_n}x$$

bulunur. Benzer şekilde hesaplamalara devam edilerek diğer test fonksiyonları da kolayca elde edilebilir.

Not 1: Eş. 2.5 ile verilen $L_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörleri, $[0,a] \subset [0,\infty)$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_{a_n,b_n}(e_i) - e_i\|_{C[0,a]} = 0, i = 0,1,2$$

koşullarını sağladığından her $f \in C[0,a]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|L_{a_n,b_n}(f) - f\|_{C[0,a]} = 0$$

olup Korovkin teoremi sağlanır.

2.2. $D_{a_n,b_n}(f;x)$ Operatörleri ile Yaklaşım

2.2.1. Lemma

Sınırsız artan (a_n) ve (b_n) reel sayı dizileri Eş. 2.1'deki şartları sağlasın. Her $x \in [0,\infty)$ için Eş. 2.3 ile tanımlanmış olan D_{a_n,b_n} operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$D_{a_n,b_n}(e_0;x) = 1, \tag{2.6}$$

$$D_{a_n,b_n}(e_1;x) = x + \frac{b_n}{a_n}, \tag{2.7}$$

$$D_{a_n,b_n}(e_2;x) = x^2 + 5\frac{b_n}{a_n}x + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2, \tag{2.8}$$

$$D_{a_n,b_n}(e_3;x) = x^3 + 12\frac{b_n}{a_n}x^2 + 29\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x + 6\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3, \tag{2.9}$$

$$D_{a_n,b_n}(e_4;x) = x^4 + 22\frac{b_n}{a_n}x^3 + 131\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x^2 + 206\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 x + 24\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4. \tag{2.10}$$

İspat

Lemma 2.1.1.'den ve Pochhammer sembolünün tanımını kullanarak;

$$D_{a_n,b_n}(e_0;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(u)\, e_0(u)\, du$$

$$= \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}u}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^k}{k!}du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \Gamma\left(k+1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} k! = 1$$

elde edilir. Benzer olarak e_1 için,

$$D_{a_n,b_n}\left(e_1;x\right) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \int_0^{\infty} P_{n,k}\left(u\right) e_1\left(u\right) du$$

$$= \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}u} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^k}{k!} u du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \frac{b_n}{a_n.k!} \Gamma\left(k+2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \frac{b_n}{a_n.k!} \left(k+1\right)!$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \left(k+1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)^k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}$$

$$= x + \frac{b_n}{a_n}. \tag{2.11}$$

Benzer işlemlerle devam edilirse e_2, e_3 için,

$$D_{a_n,b_n}(e_2;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(u)\, e_2(u)\, du$$

$$= \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}u}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^k}{k!}u^2 du$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\,\frac{1}{k!}\Gamma(k+3)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}k^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}3k + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}$$

$$= x^2 + 5\frac{b_n}{a_n}x + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2, \tag{2.12}$$

$$D_{a_n,b_n}(e_3;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(u)\, e_3(u)\, du$$

$$= \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}u} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^k}{k!} u^3 du$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \frac{1}{k!} \Gamma\left(k+4\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{b_n}x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} k^3 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} 6k^2$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} 11k + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}$$

$$= x^3 + 12\frac{b_n}{a_n}x^2 + 29\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x + 6\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3, \tag{2.13}$$

ile son olarak e_4 için,

$$D_{a_n,b_n}\left(e_4;x\right) = \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \int_0^{\infty} P_{n,k}\left(u\right) e_4\left(u\right) du$$

$$= \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \int_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}u} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^k}{k!} u^4 du$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right) \frac{1}{k!} \Gamma\left(k+5\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x} \left(k+1\right)\left(k+2\right)\left(k+3\right)\left(k+4\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x} k^4 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x} 10k^3$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x} 35k^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x} 50k + 24 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n} x\right)_k}{2^k k!} 2^{-\frac{a_n}{b_n} x}$$

$$= x^4 + 22 \frac{b_n}{a_n} x^3 + 131 \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x^2 + 206 \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 x + 24 \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4, \tag{2.14}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi de yaklaşım derecesinin bulunmasında kullanılacak olan momentleri verelim.

Not 2: $\{D_{a_n,b_n}\}$ operatörleri ve her $x \in [0,\infty)$ için birinci moment, Eş. 2.11'i kullanarak:

$$D_{a_n,b_n}\left(\left(t-x\right);x\right) = D_{a_n,b_n}\left(t;x\right) - x D_{a_n,b_n}\left(1;x\right) = \left(x + \frac{b_n}{a_n}\right) - x = \frac{b_n}{a_n},$$

şeklinde elde edilir. Eş. 2.1'in koşullarını dikkate alırsak yeterince büyük n ler için,

$$D_{a_n,b_n}\left(t-x;x\right) = O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

olduğu yazılabilir.

$\{D_{a_n,b_n}\}$ operatörleri için Eş. 2.12'yi göz önüne alırsak ikinci moment:

$$\mu_{n,2}(x) = D_{a_n,b_n}\left((t-x)^2;x\right) = D_{a_n,b_n}\left(t^2;x\right) - 2xD_{a_n,b_n}(t;x) + x^2 D_{a_n,b_n}(1;x)$$

$$= x^2 + \frac{b_n}{a_n}5x + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 - 2x\left(x + \frac{b_n}{a_n}\right) + x^2 = 3x\frac{b_n}{a_n} + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \tag{2.15}$$

olarak elde edilir. Ayrıca bu eşitlikten, Eş. 2.1 koşulları da dikkate alınarak, yeterince büyük n ler için

$$D_{a_n,b_n}\left((t-x)^2;x\right) = O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)(x+1)$$

olduğu görülür. $\{D_{a_n,b_n}\}$ operatörleri için 4. moment ise Eş. 2.14'ü kullanarak

$$\mu_{n,4}(x) := D_{n,b_n}\left((t-x)^4;x\right)$$

$$= D_{n,b_n}\left(t^4;x\right) - 4xD_{n,b_n}\left(t^3;x\right) + 6x^2 D_{n,b_n}\left(t^2;x\right) - 4x^3 D_{n,b_n}(t;x) + x^4 D_{n,b_n}(1;x)$$

$$= 27\left(\frac{b_n}{n}\right)^2 x^2 + 182\left(\frac{b_n}{n}\right)^3 x + 24\left(\frac{b_n}{n}\right)^4. \tag{2.16}$$

Dahası Eş. 2.1 koşullarından yeterince büyük n ler için;

$$\mu_{n,4}(x) = 27\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 x^2 + 182\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 x + 24\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 = O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\left(x^2+x+1\right). \tag{2.17}$$

Böylece, $D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörleri için Lemma 2.2.1.'den, her bir $i = 0,1,2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|D_{a_n,b_n}(e_i) - e_i\| = 0, i = 0,1,2$$

koşulları gerçeklendiğinden her $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \|D_{a_n,b_n}(f) - f\|_{C[0,a]} = 0$$

dır, yani Korovkin-tip teorem gerçeklenir. $D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörleri $[0,\infty)$ un herhangi kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür.

D_{a_n,b_n} operatörleri için süreklilik modülüyle yaklaşım oranını aşağıdaki teoremle verelim.

2.2.2. Tanım

$f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonunun süreklilik modülü, $\delta \in [0,\infty)$ olmak üzere $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ için

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)| : |x-y| \leq \delta, x,y \in [0,\infty)\}$$

olarak tanımlanır [14],(s.17).

Süreklilik modülü aşağıda verilen özelliklere sahiptir:

- $\omega(f,\delta) \geq 0,$
- $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f,\delta_1) \leq \omega(f,\delta_2),$
- $m \in \mathbb{N}$ ise $\omega(f,m\delta) \leq m\omega(f,\delta),$
- Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ise $\omega(f,\lambda\delta) \leq (\lambda+1)\,\omega(f,\delta),$
- I, $\mathbb{R}$ de herhangi bir aralık olsun.
  f, I üzerinde düzgün sürekli $\Longleftrightarrow \lim_{\delta\to 0^+}\omega(f,\delta) = 0,$
- $|f(t)-f(x)| \leq \omega(f,|t-x|),$
- $|f(t)-f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f,\delta)$

2.2.3. Teorem

$T_n : C[a,b] \to C[c,d]$, $[c,d] \subset [a,b]$ olmak üzere (T_n) lineer pozitif operatörler dizisi, $\alpha_{n,2}^2(x) = T_n\left((t-x)^2;x\right)$ olmak üzere $f \in C[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|T_n(f;x)-f(x)| \leq |f(x)|\,|T_n(1;x)-1| + \left(T_n(1;x) + (T_n(1;x))^{1/2}\right)\omega(f,\alpha_{n,2}(x))$$

eşitsizliği sağlanır [12].

2.2.4. Teorem

Her $f \in C_B[0,\infty)$ için $\{D_{a_n,b_n}\}$, Eş. 2.3 ile tanımlanan operatörler dizisi olsun.

Bu durumda

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega\left(f,\delta_{a_n,b_n}\right) \tag{2.18}$$

eşitsizliği sağlanır ve burada her belirli $x \in [0,\infty)$ için $\delta_{a_n,b_n}(x) := \left(3x\dfrac{b_n}{a_n}+2\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ dır.

İspat

Eş. 2.3 ile verilen operatörün tanımını kullanarak

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right| = \left|\frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(u)\left(f(u)-f(x)\right)du\right|$$

elde edilir. Burada her bir $x,t\in[0,\infty)$ ve her $\delta>0$ için

$$|f(x)-f(t)|\le(1+\delta^{-1}|x-t|)\omega(f,\delta) \tag{2.19}$$

olduğunu biliyoruz. O halde Eş. 2.19'daki ifadenin her iki tarafına $\{D_{a_n,b_n}\}$ operatörlerini uygulayıp üçgen eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|\le \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k}(u)\left(1+\delta^{-1}|u-x|\right)\omega(f,\delta)\,du$$

$$=\omega(f,\delta)\,D_{a_n,b_n}(e_0)(x)+\delta^{-1}\omega(f,\delta)\,D_{a_n,b_n}(|u-x|)(x).$$

Bu son eşitsizlikte Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygullarsak;

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|\le\omega(f,\delta)+\delta^{-1}\omega(f,\delta)\left(3x\frac{b_n}{a_n}+2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada $\delta := \delta_{a_n,b_n}(x) = \left(3x\frac{b_n}{a_n}+2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ seçersek Eş. 2.18 sağlanmış olur. $n\to\infty$ için limit alındığında belirli her $x\in[0,\infty)$ için $\delta_{a_n,b_n}(x)\to 0$ ve $\omega(f,\delta)\to$

0 olduğu görülür.

2.2.5. Tanım (Petree-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli)

Herhangi bir $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $f \in C_B\,[0,\infty)$ fonksiyonları için Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyonelinin tanımı aşağıdaki şekilde verilir:

$$\mathcal{K}(f,\delta) = \inf_{g\in C_B^2[0,\infty)}\{\|f-g\|_{C_B[0,\infty)} + \delta\,\|g\|_{C_B^2[0,\infty)}\},\ (\delta > 0).$$

Burada $C_B^2\,[0,\infty) = \{g \in C_B\,[0,\infty) : g'' \in C_B\,[0,\infty)\}$ üzerindeki norm

$$\|g\|_{C_B^2[0,\infty)} = \|g\|_{C_B[0,\infty)} + \|g'\|_{C_B[0,\infty)} + \|g''\|_{C_B[0,\infty)}$$

ile verilen normdur [15].

2.2.6. Tanım

$[0,\infty)$ aralığı $f \in C_B\,[0,\infty)$ fonksiyonları için $\delta \geq 0$ olmak üzere ikinci süreklilik modülü

$$\omega_2\,(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta}\ \sup_{x,x+2h\in[0,\infty)} |f(x+2h) - 2f(x+h) - f(x)|$$

olarak verilir [15].

$\omega_2(f,\sqrt{\delta})$ ikinci süreklilik modülü olmak üzere Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli ile ilişkisi

$$\mathcal{K}(f,\delta) \leq M\left\{\omega_2(f,\sqrt{\delta}) + \min(1,\delta)\,\|f\|_{C_B[0,\infty)}\right\} \tag{2.20}$$

olarak verilir [16]. Burada $\delta > 0$ ve M, δ ve f den bağımsız bir sabittir.

Şimdi, yaklaşım oranını Petree-$\mathcal{K}$ fonksiyonelini kullanarak verelim.

2.2.7. Teorem

Her $x \in [0,\infty),\ f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)\right| \leq 4\mathcal{K}_2\left(f,\frac{b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2\right) + \omega_1\left(f;\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.21}$$

$$\leq M\omega_2\left(f;\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right) + \omega_1\left(f;\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{2.22}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 = \phi^2(x) + \dfrac{b_n}{a_n}$, $\phi(x) = \sqrt{x}$ olmak üzere M, n ve x ten bağımsız bir sabittir.

İspat

$D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörleri birinci test fonksiyonunu korumadığından

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x) = D_{a_n,b_n}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{a_n x + b_n}{a_n}\right).$$

şeklinde yardımcı operatör tanımlayalım. Bu tanımdan

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(e_0;x) = D_{a_n,b_n}(e_0;x) = 1$$

ve

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(e_1;x) = D_{a_n,b_n}(e_1;x) + x - \frac{a_n x + b_n}{a_n} = x$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\overline{D}_{a_n,b_n}((t-x);x) = 0$ elde edilir. $g \in C_B^2[0,\infty)$ ve $t \in [0,\infty)$ için Taylor formülünü kullanarak

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)\,du$$

yazılabilir.

$\overline{D}_{a_n,b_n}$ operatörünü bu eşitliğin her iki yanına da uygulayarak

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x) = D_{a_n,b_n}\left(\int_x^t (t-u)\, g''(u)\, du; x\right) - \int_x^{\frac{a_n x + b_n}{a_n}} \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - u\right) g''(u)\, du.$$

elde edilir.

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right|$$

$$\leq D_{a_n,b_n}\left(\int_x^t |t-u|\, |g''(u)|\, du; x\right) + \int_x^{\frac{a_n x + b_n}{a_n}} \left|\frac{a_n x + b_n}{a_n} - u\right| |g''(u)|\, du$$

$$\leq \|g''\| \left(D_{a_n,b_n}\left((t-x)^2; x\right) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x\right)^2\right). \tag{2.23}$$

Lemma 2.2.1. ve Eş. 2.15'i kullanarak,

$$D_{a_n,b_n}\left((t-x)^2; x\right) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x\right)^2 = \frac{3b_n}{a_n} x + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$$

$$= \frac{3b_n}{a_n} x + 3\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$$

elde edilir ve burada $\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 = x + \frac{b_n}{a_n}$ olarak seçersek,

$$D_{a_n,b_n}\left((t-x)^2; x\right) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x\right)^2 = \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2. \tag{2.24}$$

Eş. 2.23'te Eş. 2.24'ten yararlanarak

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right| \leq \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 \|g''\| \tag{2.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, her $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)\right| \leq \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} p_{n,k}(u)\left|f(u)\right| du$$

$$\leq \|f\| \ \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} p_{n,k}(u)\, du$$

$$= \|f\|\, D_{a_n,b_n}(e_0;x) = \|f\|$$

yazılır. Bu durumda, $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x)\right| \leq \left|D_{a_n,b_n}(f;x)\right| + |f(x)| + \left|f\left(\frac{a_n x + b_n}{a_n}\right)\right| \leq 3\|f\| \tag{2.26}$$

sağlanır. Eş. 2.25 ve Eş. 2.26 kullanılarak, her $f \in C_B[0,\infty)$ ve $g \in C_B^2[0,\infty)$ için,

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq \left|\overline{D}_{a_n,b_n}((f-g);x)\right| + |(f-g)(x)| + \left|\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right| + \left|f\left(\frac{a_n x + b_n}{a_n}\right) - f(x)\right|$$

$$\leq 4\|f-g\| + \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 + \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right)$$

bulunur. Burada $g \in C_B^2[0,\infty)$ fonksiyonları üzerinden infimum alınırsa istenen Eş. 2.21 elde edilir. Ayrıca Eş. 2.21'de Eş. 2.20 dikkate alınarak Eş. 2.22 kolayca görülür.

Sıradaki kısımda yaklaşım özelliklerini Ditzian-Totik düzgünlük modülü yardımıyla inceleyelim.

2.2.8. Tanım

Herhangi bir $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu ve $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $[0,\infty)$ aralığına bağlı bir adım-ağırlık fonksiyonu olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $\delta \geq 0$ için

$$\Delta^n_{h\phi(x)} f(x) = \sum_k^n (-1)^k \binom{n}{k} f\left[x + h\phi(x)\left(\frac{n}{2-k}\right)\right], \; x \mp \frac{nh\phi(x)}{2} \in [0,\infty),$$

olduğunda Ditzian-Totik düzgünlük modülü aşağıdaki şekilde verilir:

$$\omega^n_\phi(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta} \sup_{x\in[0,\infty)} \left|\Delta^n_{h\phi(x)} f(x)\right|.$$

$\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\phi \neq 0$, Ditzian-Totik düzgünlük modülünün adım-ağırlık fonksiyonu olsun. Buradaki ϕ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar [15]:

- Her $[a',b'] \subset [a,b]$ alt aralığı için öyle bir $M_1 \equiv M(a',b') > 0$ sabiti vardır ki her $x \in [a',b']$ için

  $$M^{-1} \leq \phi(x) \leq M$$

  dir.
- $\beta(a) \geq 0$ ve $\beta(b) \geq 0$ iki sayısı için

  $$\phi(x) \sim \left\{ \begin{array}{ccc} x^{\beta(a)} & , & x \to 0^+ \\ (1-x)^{\beta(b)} & , & x \to 1^- \end{array} \right\}.$$

Ayrıca lokal yaklaşım özellikleri için Ditzian-Totik düzgünlük modülü ve buna bağlı Peetre $\mathcal{K}$- fonksiyoneli sırasıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\omega^\phi_2(f,\sqrt{\delta}) = \sup_{0<h\leq\sqrt{\delta}} \sup_{x\pm h\phi(x)\in[0,\infty)} |\, f(x+h\phi(x)) - 2f(x) + f(x-h\phi(x)) \,|,$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{2,\phi(x)}(f,\delta) = \inf\{\|f-g\| + \delta\left\|\phi^2 g''\right\| + \delta^2\|g''\| : g \in C^2(\phi)\}, (\delta > 0),$$

burada $C^2(\phi) = \{g \in C[0,\infty) : g' \in AC_{loc}[0,\infty), \phi^2 g'' \in C[0,\infty)\}$ ve $g' \in AC_{loc}[0,\infty)$ yani g diferansiyellenebilir ve g' her kapalı $[a,b] \subset [0,\infty)$ alt aralığında mutlak süreklidir. Ayrıca pozitif bir M sabiti için

$$\tilde{\mathcal{K}}_{2,\phi(x)}(f,\delta) \leq M\omega_2^{\phi}(f,\sqrt{\delta}) \tag{2.27}$$

eşitsizliği sağlanır ([17], s.68).

2.2.9. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ olsun. Her $x \in [0,\infty)$ için,

$$\|D_{a_n,b_n}(f) - f\| \leq 4\tilde{\mathcal{K}}_{2,\phi(x)}\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right),$$

eşitsizliği sağlanır ve burada $\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 = \phi^2(x) + b_n/a_n$ ve $\phi(x) = \sqrt{x}$ dir.

İspat

$D_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörünün birinci momenti sıfırdan farklı olduğundan, yardımcı operatörü aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x) = D_{a_n,b_n}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{a_nx+b_n}{a_n}\right)$$

olur ve buradan yeni tanımlanan $\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörlerinin

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(e_0;x) = 1, \overline{D}_{a_n,b_n}(e_1;x) = x$$

eşitliklerini sağladığı kolayca görülebilir. Ayrıca

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x)\right| = \left|D_{a_n,b_n}(f;x) + f(x) - f\left(\frac{a_nx+b_n}{a_n}\right)\right|$$

$$\leq \|f\| \left|D_{a_n,b_n}(e_0;x)\right| + |f(x)| - \left|f\left(\frac{a_nx+b_n}{a_n}\right)\right| \leq 3\|f\|. \tag{2.28}$$

Her bir $g \in C^2(\phi)$ için önceki teoremdekine benzer olarak, g fonksiyonunun Taylor açılımından faydalanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilebilir:

$$| \overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x) | \leq D_{a_n,b_n}\left(\left| \int_x^t |t-u| \, |g''(u)| \, du \right| ; x \right)$$

$$+ \int_x^{\frac{a_n x + b_n}{a_n}} \left| \frac{a_n x + b_n}{a_n} - u \right| |g''(u)| \, du. \tag{2.29}$$

$\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 = \phi^2(x) + b_n/a_n$ fonksiyonunun her $x \in [0,\infty)$ değeri için konkavlığından yararlanarak ve $u = \tau x + (1-\tau)t$, $\tau \in (0,1)$ denklemini göz önüne alarak

$$\frac{| t-u |}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(u)\right)^2} = \frac{\tau \, | t-x |}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(\tau x + (1-\tau)t)\right)^2} \leq \frac{\tau \, | t-x |}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 \tau + \left(\delta^*_{a_n,b_n}(t)\right)^2 (1-\tau)}$$

$$\frac{| t-u |}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(u)\right)^2} \leq \frac{| t-x |}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2} \tag{2.30}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Eş. 2.29 ve Eş. 2.30'u kullanarak

$$| \overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x) |$$

$$\leq \left\| \delta^2 g'' \right\| D_{a_n,b_n}\left(\int_x^t \frac{|t-u|}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2} du ; x \right) + \left\| \left(\delta^*_{a_n,b_n}\right)^2 g'' \right\| \left(\int_x^{\frac{a_n x + b_n}{a_n}} \frac{\left| \frac{a_n x + b_n}{a_n} - u \right|}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2} du \right)$$

$$\leq \frac{1}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2} \left\| \delta^{*2}_{a_n,b_n} g'' \right\| \left[\mu_{n,2}(x) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x \right)^2 \right]$$

$$\leq \frac{1}{\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2} \left\| \left(\delta^*_{a_n,b_n}\right)^2 g'' \right\| \left[\mu_{n,2}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \right],$$

yazılabilir. Önceki teoremin ispatından

$$| \overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x) | \leq \frac{3b_n}{a_n} \left\| \left(\delta^*_{a_n,b_n}\right)^2 g'' \right\| \tag{2.31}$$

olduğunu kullanarak ve Eş. 2.28, Eş. 2.31'den yararlanarak her $f \in C_B[0,\infty)$ için,

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)\right| \leq \left|\overline{D}_{a_n,b_n}((f-g);x)\right| + \left|\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right| + |g(x) - f(x)|$$

$$\leq 4\|f-g\| + \frac{3b_n}{a_n}\left\|\phi^2 g''\right\| + 3\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left\|g''\right\|$$

bulunur. Her $g \in C^2(\phi)$ için sağ taraftaki ifadeler üzerinden infimum alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\left|\overline{D}_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)\right| \leq 4\mathcal{K}_{2,\phi(x)}\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right).$$

Sıradaki kısımda iki parametreli Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar uzayı için operatörün yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bunun için öncelikle bu fonksiyonlar sınıfının tanımı verilmiştir.

2.2.10. Tanım

İki parametreli Lipchitz sınıfı,

$$Lip_M(\eta) = \left\{ f \in C_B[0,\infty) : |f(t) - f(x)| \leq M\frac{|t-x|^\eta}{(t+x)^{\frac{\eta}{2}}}; x,t \in (0,\infty) \right\},$$

ile tanımlanır ve burada M pozitif bir sabit ve $\eta \in (0,1]$ dir [18].

2.2.11. Teorem

Her $f \in Lip_M(\eta)$ fonksiyonu ve $x \in (0,\infty)$ için

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq M\left(\frac{\mu_{n,2}(x)}{x}\right)^{\eta/2} \tag{2.32}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mu_{n,2}(x)$ Eş. 2.15 ile verilmiş olan, operatörün ikinci momentidir.

İspat

Öncelikle $\eta = 1$ durumu için;

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) |f(u) - f(x)| \, du$$

$$\leq M \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) \frac{|u-x|}{\sqrt{u+x}} du$$

elde edilir. Her x ve u pozitif reel sayısı için $\dfrac{1}{\sqrt{u+x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ olduğununu kullanarak

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq M \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) |u-x| \, du$$

ve önce Hölder eşitsizliği, sonra da Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanarak

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq M \frac{1}{\sqrt{x}} D_{a_n,b_n}(|t-x|;x) \leq M \left(\frac{\mu_{n,2}(x)}{x} \right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu, $\eta = 1$ durumu için elde edilmek istenen sonucu verir. Şimdi de $0 < \eta < 1$ durumu için, Hölder eşitsizliğini $p = \frac{1}{\eta}$ ve $q = \frac{1}{1-\eta}$ için uygularsak,

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) |f(u) - f(x)| \, du$$

$$\leq \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \left(\frac{a_n}{b_n} \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) |f(u) - f(x)| \, du \right)^{\frac{1}{\eta}} \right\}^{\eta}$$

$$\leq \left\{ \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) \left| f(u) - f(x) \right|^{\frac{1}{\eta}} du \right\}^{\eta}$$

$$\leq M \left\{ \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) \frac{|u-x|}{\sqrt{u+x}} du \right\}^{\eta}$$

$$\leq \frac{M}{x^{\frac{\eta}{2}}} \left\{ \frac{a_n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x) \int_0^{\infty} P_{n,k}(u) \left| u-x \right| du \right\}^{\eta}$$

$$\leq \frac{M}{x^{\frac{\eta}{2}}} \left(D_{a_n,b_n}(|t-x|\,; x) \right)^{\eta} \leq M \left(\frac{\mu_{n,2}(x)}{x} \right)^{\eta/2}$$

elde edilir ve buradan Eş. 2.32'nin sağlandığı açıkça görülmektedir.

Şimdi de, Eş. 2.3 ile tanımlanan operatörlerin bazı noktasal yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

Öncelikle, f fonksiyonunun lokal düzgünlüğü ve lokal yaklaşımı arasındaki bağıntıyı verelim. $\eta \in (0,1]$ olsun ve E kümesi $[0,\infty)$ aralığının bir alt aralığı olsun. O halde $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq M_f \left| t-x \right|^{\eta}, \forall t \in \overline{E} \text{ ve } x \in [0,\infty),$$

koşulu f ye bağlı bir M_f sabiti için sağlanırsa $f \in Lip_{M_f}(E,\eta)$ dir. Burada $\overline{E}$ kapanış kümesi $[0,\infty)$ aralığının bir alt kümesi olan E nin kapanışını ifade eder.

2.2.12. Teorem

$f \in C_B[0,\infty) \cap Lip_{M_f}(E,\eta)$, $\eta \in (0,1]$ olsun ve E kümesi $[0,\infty)$ aralığının sınırlı bir alt aralığı olsun. O halde her bir $x \in [0,\infty)$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq M_f \left\{ \left(\frac{3b_n}{a_n} \delta^2_{a_n,b_n}(x) \right)^{\eta/2} + \left(d(x,E) \right)^{\eta} \right\}$$

burada M_f, f ye bağlı bir sabit ve $d\left(x,E\right)$ ise

$$d\left(x,E\right)=\inf\left\{\left|t-x\right|:t\in E\right\}$$

şeklinde x noktasının E kümesine uzaklığını gösterir ve $\delta^2_{a_n,b_n}\left(x\right)=3x\frac{b_n}{a_n}+2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$ dir.

İspat

$\overline{E}$, E kümesinin kapanışı olmak üzere

$$d\left(x,E\right)=\left|x_0-x\right|$$

olacak şekilde bir $x_0\in\overline{E}$ noktası bulunabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq\left|f\left(t\right)-f\left(x_0\right)\right|+\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right| \tag{2.33}$$

elde edilir. Eş. 2.33'ün her iki tarafına da D_{a_n,b_n} operatörleri uygulanıp, $f\in Lip_{M_f}\left(E,\eta\right)$ için tanımdan,

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|\leq D_{a_n,b_n}(\left|f\left(t\right)-f\left(x_0\right)\right|;x)+D_{a_n,b_n}(\left|f\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|;x)$$

$$\leq M_f\left\{D_{a_n,b_n}(\left|t-x_0\right|^\eta;x)+\left|x-x_0\right|^\eta\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $p=\frac{2}{\eta}$ ve $q=\frac{2}{2-\eta}$ için Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|\leq M_f\left\{\left(D_{a_n,b_n}(\left|t-x\right|^{\eta p};x)\right)^{1/p}\left(D_{a_n,b_n}(1^q;x)\right)^{1/q}+\left(d\left(x,E\right)\right)^\eta\right\}$$

$$\leq M_f\left\{\left(D_{a_n,b_n}(\left(t-x\right)^2;x)\right)^{\frac{\eta}{2}}+\left(d\left(x,E\right)\right)^\eta\right\}$$

$$\leq M_f\left\{\left(\frac{3b_n}{a_n}\delta^2_{a_n,b_n}\left(x\right)\right)^{\eta/2}+\left(d\left(x,E\right)^\eta\right)\right\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de Eş. 2.3 verilen operatörlerin lokal yaklaşım oranını araştırmak için Lenze tarafından tanımlanmış olan Lipschitz-tip maksimal fonksiyonu kullanalım. Öncelikle aşağıdaki gibi bu maksimal fonksiyonun tanımını verelim.

2.2.13. Tanım

Her $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonu için η-yinci dereceden Lipschitz-tip maksimal fonksiyon, her $x \in [0,\infty)$ ve $\eta \in (0,1]$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır [19]:

$$\widetilde{\omega}_\eta(f;x) = \sup_{t\neq x, t\in[0,\infty)} \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|^\eta}.$$

2.2.14. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$ ve $\eta \in (0,1]$ olsun. O halde her $x \in [0,\infty)$ için,

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq \widetilde{\omega}_\eta(f;x)\left\{\frac{3b_n}{a_n}\delta^2_{a_n,b_n}(x)\right\}^{\eta/2}$$

elde edilir.

İspat

Öncelikle $\widetilde{\omega}_\eta(f;x)$ in tanımını kullanarak,

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq \widetilde{\omega}_\eta(f;x) D_{a_n,b_n}(|t-x|^\eta;x)$$

yazabiliriz. Burada Hölder eşitsizliğini $p = \frac{2}{\eta}$ ve $q = \frac{2}{2-\eta}$ için uygulamakla aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq D_{a_n,b_n}(|f(t)-f(x)|;x) \leq \widetilde{\omega}_\eta(f;x) D_{a_n,b_n}(|t-x|^\eta;x)$$

$$\leq \widetilde{\omega}_\eta(f;x)\left(D_{a_n,b_n}(|t-x|^2;x)\right)^{\eta/2} \leq \widetilde{\omega}_\eta(f;x)\left\{\frac{3b_n}{a_n}\delta^2_{a_n,b_n}(x)\right\}^{\eta/2}.$$

O halde ispat tamamlanmış olur.

Son olarak D_{a_n,b_n} operatörlerinin ağırlıklı yaklaşımını inceleyelim.

2.2.15. Tanım (Ağırlıklı Uzay)

ρ, $\mathbb{R}$ de sürekli, $\rho(x) \geq 1$ ve $\lim_{\|x\|\to\infty} \rho(x) = \infty$ koşullarını sağlayan ağırlık fonksiyonu olsun.

$B_\rho\,[0,\infty)$, $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı ve f ye bağlı bir M_f sabiti için $|f(x)| \leq M_f\,\rho(x)$ eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların uzayı ve $B_\rho\,[0,\infty)$ üzerindeki ağırlıklı norm $\|f\|_\rho = \sup_{x\geq 0} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$ dir.

$C_\rho[0,\infty)$, $B_\rho\,[0,\infty)$ uzayındaki tüm sürekli fonksiyonların uzayını ve $C_\rho^*[0,\infty)$ ise $C_\rho[0,\infty)$ uzayından olup $\lim_{x\to\infty} f(x)\rho(x)^{-1} < \infty$ koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayını gösterecektir. $C_\rho\,[0,\infty)$ ve $C_\rho^*[0,\infty)$, $B_\rho[0,\infty)$ un alt uzayları olup $\|f\|_\rho$ normu ile donatılmışlardır.

Her $f \in C_\rho^*[0,\infty)$ için ağırlıklı süreklilik modülü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Omega_\rho(f;\delta) = \sup_{\substack{x\geq 0\\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h)-f(x)|}{\rho(x)\,\rho(h)}.$$

$\Omega_\rho(f;\delta)$ ağırlıklı süreklilik modülünün özellikleri bilinen süreklilik modülünün özellikleriyle paraleldir [20].

Aşağıda ağırlıklı Korovkin-tip teorem yardımıyla ([14]) operatörün fonksiyona yaklaşımı verilecektir.

2.2.16. Teorem

$f \in C_\rho^*\,[0,\infty)$ ve $\rho(x) = 1 + x^2$ olsun. O halde $n \to \infty$ iken,

$$\|D_{a_n,b_n}\,(f) - f\|_\rho \to 0$$

dır.

İspat

Lemma 2.2.1.'i kullanarak

$$\|D_{a_n,b_n}(e_0)-e_0\|_\rho=\sup_{x\geq 0}\frac{|D_{a_n,b_n}(e_0;x)-e_0\left(x\right)|}{\rho\left(x\right)}=0,$$

$$\|D_{a_n,b_n}(e_1)-e_1\|_\rho=\sup_{x\geq 0}\frac{|D_{a_n,b_n}(e_1;x)-e_1\left(x\right)|}{\rho\left(x\right)}=\frac{b_n}{a_n},$$

ve

$$\|D_{a_n,b_n}(e_2)-e_2\|_\rho=\sup_{x\geq 0}\frac{|D_{a_n,b_n}(e_2;x)-e_2\left(x\right)|}{\rho\left(x\right)}=\sup_{x\geq 0}\left(\frac{5b_nx}{a_n}+2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\right)\frac{1}{1+x^2}.$$

elde edilir. O halde $\lim_{n\to\infty}\|D_{a_n,b_n}\left(e_k\right)-e_k\|_\rho=0$ her bir $k=0,1,2$ için sağlanır. Ağırlıklı uzaylar için Korovkin-tip teoremin ([14]) koşulları sağlandığından istenen elde edilir.

2.2.17. Teorem

$f\in C_\rho^*\left[0,\infty\right)$ olsun. O halde yeterince büyük n doğal sayıları için

$$\sup_{x\geq 0}\frac{|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)|}{\rho\left(x\right)^{5/2}}\leq K\Omega_\rho(f;\delta^{**}_{a_n,b_n})$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\delta^{**}_{a_n,b_n}=\sqrt{b_n/a_n}$ ve K, n den bağımsız bir sabittir.

İspat

Her $f\in C_\rho^*\left[0,\infty\right)$ ve $x,t\in\left[0,\infty\right)$ için, Ω_ρ tanımını ve özelliklerini kullanarak

$$|f\left(t\right)-f\left(x\right)|\leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)^2\right)\Omega_\rho\left(f;\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)\left(1+\frac{|t-x|}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\right)\left(1+(t-x)^2\right)$$

yazılabilir ve

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right| \leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)^2\right)\Omega_\rho\left(f;\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right)$$

$$\times\int_0^\infty P_{n,k}\left(u\right)\left(1+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\left|u-x\right|\right)\left(1+(u-x)^2\right)du$$

$$\leq 4\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)^2\right)\Omega_\rho(f;\delta^{**}_{a_n,b_n})\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}\left(x\right)$$

$$\times\left\{1+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\int_0^\infty P_{n,k}\left(u\right)\left|u-x\right|du+\int_0^\infty P_{n,k}\left(u\right)\left(u-x\right)^2du\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\int_0^\infty P_{n,k}\left(u\right)\left|u-x\right|\left(u-x\right)^2du\right\}$$

her $\delta^{**}_{a_n,b_n}>0$ için sağlanır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden,

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right| \leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)^2\right)\Omega_\rho\left(f;\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)$$

$$\times\left[1+D_{a_n,b_n}\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\sqrt{D_{a_n,b_n}\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta}\sqrt{D_{a_n,b_n}\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)D_{a_n,b_n}\left(\left(e_1-x\right)^4;x\right)}\right]$$

elde edilir. Eş. 2.15 ve Eş. 2.16 eşitsizliklerinden,

$$\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right| \leq 2\left(1+x^2\right)\left(1+\left(\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)^2\right)\Omega_\rho\left(f;\delta^{**}_{a_n,b_n}\right)$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)(x+1)+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\sqrt{O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)(x+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\sqrt{O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)(x+1)\left(x^2+x+1\right)}\right]$$

$$\times\left[1+O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\left(x^2+1\right)+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\sqrt{O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\left(x^2+1\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\delta^{**}_{a_n,b_n}}\sqrt{O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)\left(x^2+1\right)^2}\right]$$

elde edilir. $\delta^{**}_{a_n,b_n}=\sqrt{b_n/a_n}$ olduğunu kullanarak yeterince büyük n ler için

$$\sup_{x\geq 0}\frac{\left|D_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)\right|}{\left(1+x^2\right)^{5/2}} \leq K\Omega_\rho\left(f;\delta^{**}_{a_n,b_n}\right),$$

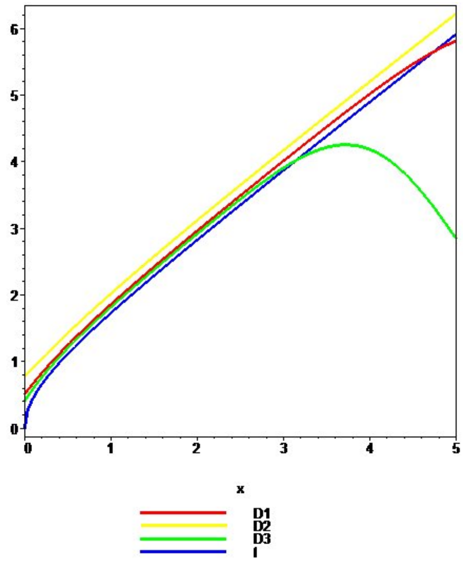
elde edilir, bu da istenen sonuçtur.

2.3. Örnekler

Örnek

Şekil 2.1'de, $f(x)=\sqrt{2x+x^2}$ fonksiyonu için D_{a_n,b_n} operatörlerinin fonksiyona yaklaşımı verilmiştir. Burada fonksiyon "mavi" ile temsil edilmek üzere (şekilde "f" ile gösterilmiştir), "kırmızı" D_{a_n,b_n} operatörünün $(a_n)=(n)$ ve $(b_n)=\left(\ln\sqrt{n+10}\right)$ dizileri için (şekilde "D1" ile gösterilmiştir), "sarı" $(a_n)=(n)$, $(b_n)=(\sqrt{n})$ olduğu durumu (şekilde "D2" ile gösterilmiştir) ve son olarak da "yeşil" $(a_n)=(n)$ ve

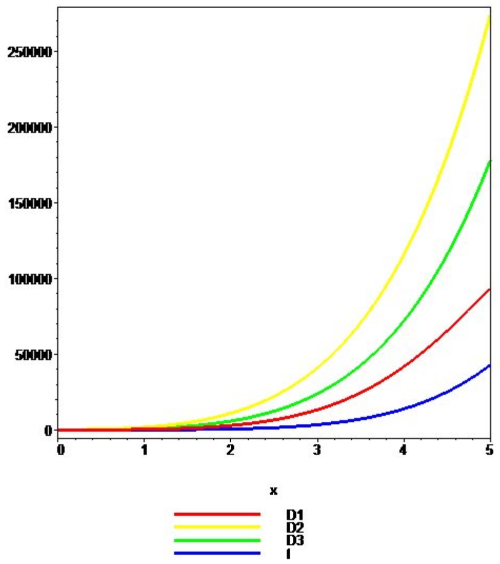
$(b_n) = (\ln n)$ alındığı durumunu (şekilde "D3" ile gösterilmiştir) gösterir. Şekilden de anlaşılacağı üzere farklı diziler için yaklaşım farklıdır.



Şekil 2.1. Farklı diziler için D_{a_n,b_n}in $f(x) = \sqrt{2x + x^2}$ fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

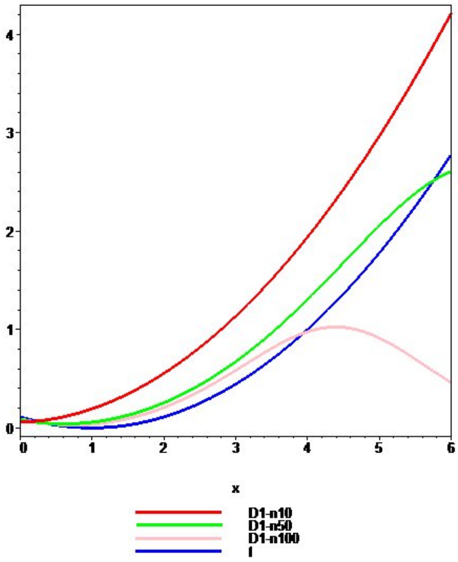
Şekil 2.2'de $f(x) = (2x + x^2)^3$ fonksiyonu "mavi" ile temsil edilmekte (şekilde "f" ile gösterilmiştir), D_{a_n,b_n} operatörlerinin $(a_n) = (n)$, $(b_n) = \left(\ln \sqrt{n + 10}\right)$ durumu "kırmızı" ile, operatörlerin $(a_n) = (n)$, $(b_n) = (\sqrt{n})$ durumu "sarı" ile ve son olarak da operatörlerin $(a_n) = (n)$, $(b_n) = (\ln n)$ durumu "yeşil" ile gösterilmektedir. Operatörlerin farklı yaklaşımları arasındaki farklı (a_n), (b_n) dizileri için verilen f fonksiyonlarına yaklaşımı aşağıda görülmektedir. Şekilden farklı (a_n), (b_n) dizileri için yaklaşımın değiştiği görülmektedir.



Şekil 2.2. D_{a_n,b_n} operatörlerinin $f(x) = (2x + x^2)^3$ fonksiyonuna yaklaşımı

Örnek

$f(x) = ((x-1)/3)^2$ fonksiyonu Şekil 2.3'te fonksiyon "mavi" ile temsil edilmek üzere, D_{a_n,b_n} operatörlerinin $(a_n) = (n)$, $(b_n) = (\ln n)$ için "kırmızı" $n = 10$, "pembe" $n = 50$, "yeşil" ise $n = 100$ durumlarını göstermektedir. Şekilde, artan n değerleri için belli bir aralıkta yaklaşımın daha iyi olduğu gözlenmektedir.



Şekil 2.3. D_{a_n,b_n} operatörlerinin $f(x) = ((x-1)/3)^2$ fonksiyonuna yaklaşımı

3. OPERATÖRLERİN JAİN-TİP GENELLEŞTİRİLMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Jain, [11]'de, modifiye Szász-Mirakjan operatörlerini,

$$B_n^{\beta}(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k}^{\beta}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), x \geq 0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $0 \leq \beta < 1$ şeklinde bir parametre ve

$$p_{n,k}^{\beta}(x) = e^{-nx+k\beta} \frac{nx(nx+k\beta)^{k-1}}{k!} \tag{3.2}$$

taban fonksiyonudur.

Gupta and Greubel, [21]'de, Eş. 3.1 ile verilen operatörlerin Durrmeyer biçimini

$$D_n^{\beta}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} p_{n,k-1}^{\beta}(u) du \right)^{-1} p_{n,k}^{\beta}(x) \int_0^{\infty} p_{n,k-1}^{\beta}(u) f(u) du + e^{-nx} f(0) \tag{3.3}$$

olarak tanımlamış ve momentleri Tricomi konfluent hipergeometrik fonksiyonları kullanarak hesaplamışlardır. Ayrıca yaklaşım özellikleri birinci tip Stirling sayıları yardımıyla verilmiştir.

3.0.1. Tanım

Birinci çeşit Stirling sayıları, $n > 0$ için $(x)_n = x(x+1)...(x+n-1)$ Pochhammer açılımından elde edilen ifade olmak üzere bu polinomdaki x^k ifadelerinin katsayılarıdır, yani,

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

Yukarıdaki denklemde $s(n,k)$ ifadesi birinci çeşit Stirling sayılarını gösterir.

Konfluent hipergeometrik (Tricomi) fonksiyon tanımı ise, a ve b sırasıyla $Re(a) > 0$ ve $Re(b) > 0$ özelliklerini sağlayan reel ya da kompleks sayılar olmak üzere aşağıdaki integral gösterimi ile verilir [22]:

$$U\left(a,b,z\right)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^{\infty}e^{-zt}t^{a-1}(1+t)^{b-a-1}dt. \tag{3.4}$$

$f\in C\left[0,\infty\right)$ integrallenebilen fonksiyonları ve $l_{n,k}(x)$ Lupaş tabanı olmak üzere $\beta\in[0,1)$ için,

$$\theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}x\right)=\frac{a_n}{b_n}x\left(\frac{a_n}{b_n}x+k\beta\right)^{k-1}\frac{e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}x+k\beta\right)}}{k!},x\in\left[0,\infty\right),n\in\mathbb{N}, \tag{3.5}$$

şeklindeki Szász taban fonksiyonunun Jain genelleştirmesi kullanılarak ve (a_n), (b_n) dizileri Eş. 2.1 ile verilen koşulları sağlamak üzere Jain-tip genelleştirilmiş operatörler

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(f;x\right) \tag{3.6}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)du\right)^{-1}l_{n,k}\left(x\right)\int\limits_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)f\left(u\right)du+l_{n,0}(x)f(0)$$

olarak tanımlanır.

Sıradaki bölümde, Eş. 3.6 ile tanımlanmış olan $D_{a_n,b_n}^{[\beta]}$ operatörlerinin yaklaşımı ile ilgili sonuçlar farklı analiz yöntemleri kullanılarak incelenecektir.

3.1. Yardımcı Sonuçlar

Yakınsama ile ilgili teoremleri vermeden önce bu teoremlerin ispatında kullanılacak, birinci tip Stirling sayıları ve konfluent hipergeometrik fonksiyonlar yardımıyla elde edilen bazı yardımcı sonuçları verelim.

3.1.1. Lemma

θ_β, Eş. 3.5 ile verilmiş fonksiyon olmak üzere $0\leq\beta<1$ için

$$P_r^*(k-1,\beta)=\frac{\left\langle\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right),t^r\right\rangle}{\left\langle\theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle} \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanan ifade için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$P_0^*(k-1,\beta)=1,$$

$$P_1^*(k-1,\beta)=\frac{b_n}{a_n}\left[(1-\beta)\,k+\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)}\right],$$

$$P_2^*(k-1,\beta)=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left[(1-\beta)^2\,k^2+a_1^2k+\frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)}\right],$$

$$P_3^*(k-1,\beta)=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3\left[(1-\beta)^3\,k^3+3a_1^3k^2+\frac{a_2^3k}{(1-\beta)}+\frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)}\right],$$

$$P_4^*(k-1,\beta)=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4\left[(1-\beta)^4\,k^4+2a_1^4k^3+a_2^4k^2+\frac{2a_3^4k}{(1-\beta)}+\frac{\beta^4(5-\beta)}{(1-\beta)}\right],$$

$$P_5^*(k-1,\beta)=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^5\left[(1-\beta)^5\,k^5+5a_1^5k^4+5a_2^5k^3+\frac{5a_3^5k^2}{(1-\beta)}+\frac{a_4^5k^2}{(1-\beta)}+\frac{\beta^5(6-\beta)}{(1-\beta)}\right],$$

ve burada

$$a_1^2=1+4\beta-2\beta^2,$$

$$a_1^3=1+\beta-3\beta^2+\beta^3,$$

$$a_1^4=3-2\beta-7\beta^2+8\beta^3-2\beta^4,$$

$$a_1^5=(1-\beta)^3\left(2+2\beta-\beta^2\right),$$

$$a_2^3 = 2 + 4\beta + 6\beta^2 - 12\beta^3 + 3\beta^4,$$

$$a_2^4 = 11 + 16\beta + 6\beta^2 - 24\beta^3 + 6\beta^4,$$

$$a_2^5 = (1-\beta)\left(7 + 8\beta - 8\beta^3 + 2\beta^4\right),$$

$$a_3^4 = 3 + 5\beta + 5\beta^2 + 5\beta^3 - 10\beta^4 + 2\beta^5,$$

$$a_3^5 = 10 + 6\beta - 3\beta^2 - 8\beta^3 - 12\beta^4 + 12\beta^5 - 6\beta^6,$$

$$a_4^5 = 24 + 36\beta + 30\beta^2 + 20\beta^3 + 15\beta^4 - 30\beta^5 + 5\beta^6,$$

dir.

İspat

θ_β için verilen Eş. 3.5'ten yararlanarak;

$$\left\langle \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \int_0^\infty \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n}u\right) t^r dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{a_n}{b_n} t \left(\frac{a_n}{b_n} t + (k-1)\beta\right)^{k-2} \frac{e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}t + (k-1)\beta\right)} t^r}{(k-1)!} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{a_n}{b_n} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}x + (k-1)\beta\right)} t^{r+1} \left(\frac{a_n}{b_n} t + (k-1)\beta\right)^{k-2} dt$$

elde ederiz. [21]'de verilen Lemma 2'den ve Eş. 3.4 tanımından faydalanarak

$$\left\langle \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right), t^r \right\rangle$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{a_n}{b_n} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{a_n}{b_n} t + (k-1)\beta\right)} t^{r+1} \left(\frac{a_n}{b_n} t + (k-1)\beta \right)^{k-2} dt$$

$$= \frac{((k-1)\beta)^{k+r} e^{-((k-1)\beta)}}{\Gamma(k)} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{r+1} \int_0^\infty e^{-(k-1)\beta t} t^{r+1} (1+t)^{k-2} dt$$

$$= \frac{\Gamma(r+2)((k-1)\beta)^{k+r}}{\Gamma(k)} \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{r+1} e^{-(k-1)\beta} U\left(r+2, k+r+1, (k-1)\beta\right) \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada

$$U(a,b,z) = z^{-a} \; {}_2F_0 \left(a, a-b+1; -; -\frac{1}{z} \right)$$

ve

$${}_1F_1\left(a; b; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{x^n}{n!}$$

olmak üzere

$${}_2F_0\left(-n, a; -; z\right) = (-1)^n (a)_n z^n \; {}_1F_1 \left(-n; 1-a-n; -\frac{1}{x} \right)$$

şeklindedir. O halde

$$\left\langle \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right), t^r \right\rangle = (k)_r \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^{r+1} \frac{{}_1F_1\left(2-k; 1-r-k; (k-1)\beta\right)}{{}_1F_1\left(2-k; 1-k; (k-1)\beta\right)}$$

olarak yazılabilir. Buradan da hipergeometrik fonksiyon tanımı kullanarak ve Eş. 3.8 satırındaki ifade göz önüne alınarak $\left\langle \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right), t^r \right\rangle$ için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left\langle \theta_\beta \left(k-1, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = (k)_r \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{r+1} \frac{{}_1F_1\left(2-k;1-r-k;(k-1)\beta\right)}{{}_1F_1\left(2-k;1-k;(k-1)\beta\right)}$$

$$= \frac{(r+1)!}{(k-1)\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-(k-1)\beta} \sum_{s=0}^{k-2} \binom{k-1+r-s}{r+1} \frac{k\beta}{s!}$$

yazılır. İşlem kolaylığı için yukarıdaki denklemi aşağıdaki şekilde k yerine $k+1$ alarak yeniden düzenleyelim:

$$\left\langle \theta_\beta \left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-k\beta} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{k+r-s}{r+1} \frac{k\beta}{s!}. \tag{3.9}$$

Burada binom ifadeyi açıp düzenlersek:

$$\left\langle \theta_\beta \left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-k\beta} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(k+r-s)!}{(k-s-1)!(r+1)!} \frac{k\beta}{s!}$$

olur. $k\beta = x$ alıp düzenlemeye devam edersek:

$$\left\langle \theta_\beta \left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-x} \sum_{s=0}^{k-1} (k-s)(k-s+1)...(k-s+r) \frac{x}{s!}$$

elde edilir. Burada da Pochhammer sembolünün özelliğinden

$$\left\langle \theta_\beta \left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-x} \sum_{s=0}^{k-1} (k-s)_{r+1} \frac{x}{s!}$$

olarak yazılabilir. Şimdi $(k-s)_{r+1} = \phi_r(s)$ olarak alalım. $\phi_r(s)$ değerlerini r nin artan değerleri için yazalım ve $k-s$ nin kuvvetlerine göre düzenleyelim:

$\phi_0(s) = (k-s)_1 = k-s,$

$$\phi_1(s) = (k-s)_2 = (k-s+1)(k-s) = (k-s)^2 + (k-s),$$

$$\phi_2(s) = (k-s)_3 = (k-s+2)(k-s+1)(k-s) = (k-s)^3 + 3(k-s)^2 + 2(k-s),$$

$$\phi_3(s) = (k-s)_4 = (k-s+3)(k-s+2)(k-s+1)(k-s)$$

$$= (k-s)^4 + 6(k-s)^3 + 11(k-s)^2 + 6(k-s),$$

olur ve buradan yukarıdaki polinomları

$$\phi_r(s) = \sum_{j=0}^{r+1} s(r+1, r-j+1)(k-s)^{r-j+1}, \tag{3.10}$$

ile ifade edebiliriz. Burada $s(n,k)$ birinci çeşit Stirling sayılarını göstermektedir. Eş. 3.10 ifadesini Eş. 3.9'da yerine yazarsak:

$$\left\langle \theta_\beta\left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-x} \sum_{s=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{r+1} s(r+1, r-j+1)(k-s)^{r-j+1}\frac{x}{s!}$$

olur ve buradan toplam ifadesini,

$$\left\langle \theta_\beta\left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-x} \sum_{j=0}^{r+1} s(r+1, r-j+1)\sum_{s=0}^{k-1}(k-s)^{r-j+1}\frac{x}{s!} \tag{3.11}$$

şeklinde yazarız. Eş. 3.11'deki ikinci toplam ifadesinde $r-j=m$ alarak

$$\Theta_m(x) = \sum_{s=0}^{k-1}(k-s)^{m+1}\frac{x}{s!} \tag{3.12}$$

yazabiliriz. Yani Eş. 3.11 ifadesi

$$\left\langle \theta_\beta\left(k, \frac{a_n}{b_n}u\right), t^r \right\rangle = \frac{(r+1)!}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^{r+1}} e^{-x} \sum_{j=0}^{r+1} s(r+1, r-j+1)\Theta_{r-j}(x) \tag{3.13}$$

olur. Burada r nin değerleri için $P_r^*(k-1,\beta) = \frac{\left\langle \theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right),t^r\right\rangle}{\left\langle \theta_\beta\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle}$ ifadesinde Eş. 3.13 yazımını kullanırsak, $r=0$ için Θ_m yi ve Stirling sayıları için $s(1,1)=1$, $s(1,0)=0$ eşitliklerini alarak Eş. 3.13'ü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle = \frac{e^{-x}}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^1}\sum_{j=0}^{1} s(1,-j+1)\Theta_{-j}(x)$$

$$= \frac{e^{-x}}{k\frac{a_n}{b_n}}\left[s(1,1)\Theta_0(x)+s(1,0)\Theta_{-1}(x)\right] = \frac{e^{-x}}{k\frac{a_n}{b_n}}\Theta_0(x) = \frac{e^{-x}}{k\frac{a_n}{b_n}}\sum_{s=0}^{k-1}(k-s)\frac{x}{s!}$$

olur. Bunu $P_r^*(k,\beta)$ de yerine yazarsak $r=0$ için,

$$P_0^*(k-1,\beta) = \frac{\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle}{\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle} = \frac{\frac{e^{-x}}{(k-1)\frac{a_n}{b_n}}\sum_{s=0}^{k-1}(k-s)\frac{x}{s!}}{\frac{e^{-x}}{(k)\frac{a_n}{b_n}}\sum_{s=0}^{k-1}(k-s)\frac{x}{s!}} = 1 \tag{3.14}$$

bulunur. Benzer olarak $r=1$ için $s(2,2)=1$, $s(2,1)=1$, $s(2,0)=0$ eşitliklerini kullanarak;

$$\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),t\right\rangle = \frac{e^{-x}}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}\sum_{j=0}^{2} s(1,-j+1)\Theta_{-j}(x)$$

$$= \frac{e^{-x}}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}\left[s(2,2)\Theta_1(x)s(2,1)\Theta_0(x)+s(2,0)\Theta_{-1}(x)\right]$$

$$= \frac{e^{-x}}{k\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}\left[\Theta_1(x)+\Theta_0(x)\right]$$

olur. Bunu $P_1^*(k,\beta)$ de yerine yazarsak,

$$P_1^*(k,\beta) = \frac{\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),t\right\rangle}{\left\langle \theta_\beta\left(k,\frac{a_n}{b_n}u\right),1\right\rangle} = \frac{\frac{e^{-x}}{(k)\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}\left[\Theta_1(x)+\Theta_0(x)\right]}{\frac{e^{-x}}{(k)\frac{a_n}{b_n}}\Theta_0(x)}$$

$$= \frac{b_n}{a_n} \frac{\Theta_1(x) + \Theta_0(x)}{\Theta_0(x)} = \frac{b_n}{a_n} \left(\frac{\Theta_1(x)}{\Theta_0(x)} + 1 \right).$$

Son eşitlikte $\frac{\Theta_r(x)}{\Theta_0(x)}$ ifadesini

$$S_r(x) = \frac{\Theta_r(x)}{\Theta_0(x)} = \frac{\sum_{s=0}^{k-1} (k-s)^{r+1} \frac{x}{s!}}{\sum_{s=0}^{k-1} (k-s) \frac{x}{s!}} \tag{3.15}$$

olarak adlandıralım. O halde Eş. 3.14'ü

$$P_0^*(k, \beta) = \frac{b_n}{a_n} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_0(x)} + 1 = \frac{b_n}{a_n} (S_1(x) + 1)$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu yazımı Eş. 3.15 ile verilen ifadede kullanarak;

$$P_r^*(k-1, \beta) = \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^r \sum_{j=0}^{r+1} s(r+1, j) S_{j-1}(x)$$

yazılır. Buradan $P_r^*(k, \beta)$ ifadelerini hesaplayarak yazabiliriz. Eş. 3.15'teki $S_r(x)$ ifadelerini hesaplayarak $r = 0$ için $S_0(x) = 1$ olduğunu kullanarak, $r = 1$ için,

$$S_1(x) = \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_0(x)} = \frac{\sum_{s=0}^{k-1} (k-s)^2 \frac{x}{s!}}{\sum_{s=0}^{k-1} (k-s) \frac{x}{s!}}$$

$$= k - \left(\frac{k-1}{k} \right) x + \left(\frac{x}{k} \right)^2 + \left(\frac{x}{k} \right)^3 + \left(\frac{x}{k} \right)^4 + ... = k - x + \frac{x}{k-x}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$S_2(x) = x^2 - (2k-3)\, x + k^2 - \frac{x}{k-x},$$

$$S_3(x) = k^3 - 3k - 1 - \left(3k^2 - 6k + 7\right) x - x^3 + \frac{k(3k+1)}{k-x},$$

$$S_4(x) = k^4 + (4k^3 - 10k^2 + 10k - 15) + (6k^2 - 20k - 25)$$

$$-\left(3k^2-6k+7\right)x^2-2(2k-5)x^3+x^4-\frac{x(10k+1)}{k-x},$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlarda $x = k\beta$ dönüşümü kullanarak

$$S_1(k\beta) = (1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta},$$

$$S_2(k\beta) = (1-\beta)^2k^2 - 3\beta k - \frac{\beta}{1-\beta},$$

$$S_3(k\beta) = (1-\beta)^3k^3 + 6\beta(1-\beta)k^2 + \frac{\beta(7\beta-4)k}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta},$$

$$S_4(k\beta) = (1-\beta)^4k^4 + 10\beta(1-\beta)^2k^3 + 5\beta(5\beta-2)k^2 + \frac{5\beta(1-3\beta)k}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta},$$

ifadeleri bulunur. Bulunan ifadeleri $P_r^*(k,\beta)$ de yerine yazarak r nin değişen değerleri için aşağıdaki sonuçları $r = 0, 1, 2, 3$ değerlerine göre elde ederiz:

$$P_0^*(k,\beta) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^0 \sum_{j=0}^{1} s(1,j)S_{j-1}(x) = [s(1,1)S_0(x) + s(1,0)S_{-1}(x)] = 1,$$

$$P_1^*(k,\beta) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right) \sum_{j=0}^{2} s(2,j)S_{j-1}(x) = \frac{b_n}{a_n}\left[s(2,2)S_1(x)s(2,1)S_0(x) + s(2,0)S_{-1}(x)\right]$$

$$= \frac{b_n}{a_n}(S_1(x)+1) = \frac{b_n}{a_n}\left((1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta} + 1\right),$$

$$P_2^*(k,\beta) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \sum_{j=0}^{3} s(3,j)S_{j-1}(x)$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 [s(3,3)S_2(x) + s(3,2)S_1(x)s(3,1)S_0(x) + s(3,0)S_{-1}(x)]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 [S_2(x) + 3S_1(x)2S_0(x)]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left[(1-\beta)^2k^2 - 3\beta k - \frac{\beta}{1-\beta} + 3\left((1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta} + 1\right) + 2\right]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left[(1-\beta)^2k^2 - 3k - \frac{2!}{1-\beta}\right],$$

$$P_3^*(k,\beta) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 \sum_{j=0}^{4} s(4,j)S_{j-1}(x)$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 [s(4,4)S_3(x) + s(4,3)S_2(x) + s(4,2)S_1(x) + s(4,1)S_0(x) + s(4,0)S_{-1}(x)]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 [S_3(x) + 6S_2(x) + 11S_1(x) + 6S_0(x)]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 \left[(1-\beta)^3k^3 + 6\beta(1-\beta)k^2 + \frac{\beta(7\beta-4)k}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta}\right.$$

$$\left. + 6\left((1-\beta)^2k^2 - 3\beta k - \frac{\beta}{1-\beta}\right) + 11\left((1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta}\right) + 6\right]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3 \left[(1-\beta)^3k^3 + 6k^2(1-\beta) + \frac{k(11-8\beta)}{1-\beta} + \frac{3!}{1-\beta}\right],$$

ve $r = 4$ için,

$$P_4^*(k,\beta) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 \sum_{j=0}^{5} s(5,j)S_{j-1}(x)$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 [s(5,5)S_4(x) + s(5,4)S_3(x) + s(5,3)S_2(x)s(5,2)S_1(x) + s(5,1)S_0(x) + s(5,0)S_{-1}(x)]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 \left[(1-\beta)^4k^4 + 10\beta(1-\beta)^2k^3 + 5\beta(5\beta-2)k^2 + \frac{5\beta(1-3\beta)k}{1-\beta} - \frac{\beta}{1-\beta}\right.$$

$$+ 10\left((1-\beta)^3k^3 + 6\beta(1-\beta)k^2 + \frac{\beta(7\beta-4)k}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta}\right)$$

$$\left. + 35\left((1-\beta)^2k^2 - 3\beta k - \frac{\beta}{1-\beta}\right) + 50\left((1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta}\right) + 24\right]$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^4 \left[(1-\beta)^4k^4 + 10(1-\beta)^2k^3 + 5(7-4\beta)k^2 + \frac{10k(5-3\beta)}{1-\beta} + \frac{4!}{1-\beta}\right].$$

$P_r^*(k,\beta)$ deki her r için k değerleri yerine $k-1$ yazılırsa istenen eşitlikler elde edilir.

3.1.2. Lemma

$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}$ operatörler için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_0;x) = 1,$

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_1;x) = x(1-\beta) + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)},$$

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_2;x) = (1-\beta)^2 x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left(\left(1+4\beta-2\beta^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n}\right) x + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)}.$$

İspat

Eş. 3.6 ile verilen operatörlerin tanımını göz önüne alırsak ve önce Lemma 3.1.1., sonra Lemma 2.1.1.'deki eşitlikleri kullanarak;

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_0;x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_0^*(k-1,\beta) l_{n,k}(x) + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} e_0(0) = \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x) = 1,$$

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_1;x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_1^*(k-1,\beta) l_{n,k}(x) + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} e_1(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x) \left[\frac{b_n}{a_n}\left((1-\beta)k + \frac{\beta}{1-\beta} + 1\right)\right]$$

$$= \frac{b_n}{a_n}(1-\beta)\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)(k) + \frac{b_n}{a_n}\left(\frac{\beta(2-\beta)}{1-\beta}\right) = (1-\beta)x + \frac{b_n}{a_n}\left(\frac{\beta(2-\beta)}{1-\beta}\right),$$

ve benzer işlemlerle devam edilirse,

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}(e_2;x) = \sum_{k=1}^{\infty} P_2^*(k-1,\beta) l_{n,k}(x) + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} e_2(0)$$

$$= \frac{b_n}{a_n}^2 (1-\beta)^2 \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\left(k^2\right) + \frac{b_n}{a_n}^2 (1+4\beta-2\beta^2) \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\, k + \frac{b_n}{a_n}^2 \frac{\beta^2(3-\beta)}{1-\beta} \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)$$

$$= (1-\beta)^2 x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left(\left(1+4\beta-2\beta^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n}\right) x + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)}$$

olduğu elde edilir.

Şimdi de yaklaşım derecesinin bulunmasında kullanılacak, olan $\left\{D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\right\}$ operatörleri için 1. ve 2. momentlerini verelim.

Not 3: $\left\{D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\right\}$ operatörleri ve her $x \in [0,\infty)$ için 1. momentin tanımını kullanarak:

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left((t-x);x\right) = D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(t;x\right) + xD_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(1;x\right)$$

$$= x\left(1-\beta\right) + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)} - x = \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)} - \beta x \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilir. Benzer olarak ikinci moment;

$$\mu_{n,2}\left(x\right) = D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left((t-x)^2;x\right)$$

$$= D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(t^2;x\right) - 2xD_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(t;x\right) + x^2 D_{a_n,b_n}^{[\beta]}\left(1;x\right)$$

$$= (1-\beta)^2 x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left(\left(1+4\beta-2\beta^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n}\right) x$$

$$+ \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)} - 2x^2\left(1-\beta\right) + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)} + x^2$$

$$= (-\beta)^2 x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left(\left(1+4\beta-2\beta^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n}\right) x + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{\beta^2(3-\beta)}{(1-\beta)}$$

$$-2x^2\left(1-\beta\right)+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta(2-\beta)}{(1-\beta)}+x^2 \tag{3.17}$$

şeklinde elde edilir.

Yukarıdaki lemmanın doğrudan bir sonucu olarak Korovkin-tip teoremi verelim. Bu teoremi elde etmek amacıyla $\beta\in[0,1)$ sayısı yerine

$$\beta_n\in[0,1) \ \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\beta_n=0 \tag{3.18}$$

sağlayacak şekilde $\{\beta_n\}$ dizisini alalım.

3.1.3. Teorem

$\left\{D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\right\}$, Eş. 3.6 ile tanımlanan operatörler dizisi ve $[0,a]\subset[0,\infty)$ olmak üzere her bir $f\in C[0,a]$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(f\right)-f\right\|_{C[0,a]}=0$$

sağlanır.

İspat

Lemma 3.1.2.'deki eşitlikleri kullanarak

$$\lim_{n\to\infty}\left\|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(e_k\right)-e_k\right\|_{C[0,a]}=0, k=0,1,2, \tag{3.19}$$

olduğundan Korovkin teoreminin şartları sağlanır. $D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(f;x\right)$ operatörlerinin $[0,\infty)$ un herhangi kompakt alt kümesi üzerinde $n\to\infty$ iken f fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğunu elde ederiz.

Şimdi, $D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(f;x\right)$ operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşım derecesini süreklilik modülü yardımıyla inceleyeceğiz.

3.2. Yaklaşımın Derecesi

3.2.1. Teorem

$\{D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\}$, Eş. 3.6 ile tanımlanan lineer pozitif operatörler dizisi olsun. O halde $f \in C_B[0,\infty)$ ve her $x \in [0,\infty)$ için

$$\left|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x) - f(x)\right| \le 2\omega(f,\delta_n) \tag{3.20}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\delta_n(x) = \left\{ \left(-2\beta_n + \beta_n^2\right)x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \left(\left(1+4\beta_n - 2\beta_n^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n}\right)x + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 \frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)} \right\}^{1/2},$$

olup x e ve β_n e bağlıdır.

İspat

Her bir $x, t \in [0,\infty)$ ve her $\delta > 0$ için

$$|f(x) - f(t)| \le (1 + \delta^{-1}|x-t|)\omega(f,\delta)$$

eşitsizliğinin her iki tarafına $D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}$ operatörlerini uygularsak

$$\left|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^\infty \theta_{\beta_n}\left(k-1, \frac{a_n}{b_n}u\right)du\right)^{-1} l_{n,k}^*(x) \int_0^\infty \theta_{\beta_n}\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)\left(1+\delta^{-1}|u-x|\right)du + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} f(0)$$

$$= \omega(f,\delta) D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(e_0)(x) + \delta^{-1}\omega(f,\delta) D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(|u-x|)(x) \tag{3.21}$$

yazılır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve Eş. 3.21'den,

$$\left|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x)-f(x)\right| \leq \omega(f,\delta)$$

$$+\delta^{-1}\omega(f,\delta)\left\{\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\right\}^{1/2}$$

elde edilir. Burada

$$\delta:=\delta_n(x)=\left\{\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\right\}^{1/2}$$

seçilerek Eş. 3.20 ifadesi her bir $x\in[0,\infty)$ için noktasal olarak sağlanmış olur. Yaklaşım $[0,\infty)$ un her kapalı ve sınırlı alt aralığında düzgündür.

Sıradaki kısımda, yaklaşım oranını Peetre $\mathcal{K}$-fonksiyonelini kullanarak elde edeceğiz.

3.2.2. Teorem

Her $x\in[0,\infty),\ f\in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x)-f(x)\right| \leq 4\mathcal{K}_2\left(f,\frac{b_n}{a_n}\left(\delta_{a_n,b_n}^{*}(x)\right)^2\right)+\omega_1\left(f;\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{3.22}$$

$$\leq M\omega_2\left(f;\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta_{a_n,b_n}^{*}(x)\right)+\omega_1\left(f;\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{3.23}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $\left(\delta_{a_n,b_n}^{*}(x)\right)^2=\phi^2(x)+\dfrac{b_n}{a_n}$, $\phi(x)=\sqrt{x}$ olmak üzere M, n ve x den bağımsız bir sabittir.

İspat

$D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x)$ operatörleri birinci test fonksiyonunu korumadığından

$$\overline{D}_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x)=D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x)+f(x)-f\left(\frac{a_nx+b_n}{a_n}\right), \tag{3.24}$$

şeklinde yardımcı operatör tanımlayalım. Bu tanımdan

$$\overline{D}_{a_n,b_n}(e_0;x) = D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(e_0;x) = 1$$

ve

$$\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(e_1;x) = D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(e_1;x) + x - \frac{a_n x + b_n}{a_n} = x$$

elde edilir. Buradan $g \in C_B^2[0,\infty)$ ve $t \in [0,\infty)$ için Taylor formülünü kullanarak;

$$g(t) = g(x) + (t-x)g'(x) + \int_x^t (t-u)g''(u)\,du$$

yazılır. $\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}$ operatörünü bu eşitliğin her iki yanına da uygulayarak

$$\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x) = D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}\left(\int_x^t (t-u)g''(u)\,du;x\right) - \int_x^{\frac{a_n x+b_n}{a_n}} \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - u\right) g''(u)\,du$$

elde edilir.

$$\left|\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right|$$

$$\leq D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}\left(\int_x^t |t-u|\,|g''(u)|\,du;x\right) + \int_x^{\frac{a_n x+b_n}{a_n}} \left|\frac{a_n x + b_n}{a_n} - u\right| |g''(u)|\,du$$

$$\leq \|g''\| \left(D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}\left((t-x)^2;x\right) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x\right)^2\right). \tag{3.25}$$

Not 3'deki, Eş. 3.17 ifadesi ve Eş. 2.1'deki koşullar göz önünde bulundurarak,

$$D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}\left((t-x)^2;x\right) + \left(\frac{a_n x + b_n}{a_n} - x\right)^2 = \frac{3b_n}{a_n}x + 2\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2$$

$$= \frac{3b_n}{a_n}x + 3\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 \tag{3.26}$$

olduğunu elde ederiz. Eş. 3.25'te Eş. 3.26'yı yerine yazarsak;

$$\left|\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right| \leq \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 \|g''\| \tag{3.27}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, her $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(f;x)\right| \leq \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(u)\,|f(u)|\,du$$

$$\leq \|f\| \ \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} p_{n,k}(u)\,du = \|f\|\, D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(e_0;x) = \|f\|$$

yazılır. Bu durumda, $f \in C_B[0,\infty)$ için

$$\left|\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(f;x)\right| \leq \left|D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(f;x)\right| + |f(x)| + \left|f\left(\frac{a_n x + b_n}{a_n}\right)\right| \leq 3\|f\| \tag{3.28}$$

sağlanır. Eş. 3.27 ve Eş. 3.28 kullanılarak, her $f \in C_B[0,\infty)$ ve $g \in C_B^2[0,\infty)$ için,

$$\left|D^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)\right|$$

$$\leq \left|\overline{D}^{[\beta_n]}_{a_n,b_n}((f-g);x)\right| + |(f-g)(x)| + \left|\overline{D}_{a_n,b_n}(g;x) - g(x)\right| + \left|f\left(\frac{a_n x + b_n}{a_n}\right) - f(x)\right|$$

$$\leq 4\|f-g\| + \frac{3b_n}{a_n}\left(\delta^*_{a_n,b_n}(x)\right)^2 + \omega_1\left(f, \frac{b_n}{a_n}\right)$$

bulunur. Burada $g \in C_B^2[0,\infty)$ fonksiyonları üzerinden infimum alınırsa Eş. 3.22 elde edilir. Ayrıca Eş. 3.22'de, Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli ile süreklilik modülü arasındaki bağıntı dikkate alınarak Eş. 3.23'ün sağlandığı kolayca görülür.

Şimdi Voronovskaja-tip teoremi verelim.

3.2.3. Teorem

$f \in C_B[0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \to \infty$ iken $\beta_n \to 0$ olsun. Eğer bir $x \in [0,b] \subset [0,\infty)$ noktası için f'' türevi mevcutsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}(1-\beta_n)\left[D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x) - f(x)\right] = f'(x) - 2xf''(x), \tag{3.29}$$

sağlanır.

İspat

Taylor açılımını kullanarak $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonları için

$$f(t) = f(x) + (t-x)f'(x) + \frac{1}{2}(t-x)^2 f''(x) + r(t,x)(t-x)^2,$$

eşitliği vardır. Burada $t \to x$ iken kalan terim $r(t,x) \to 0$ dır. Yukarıdaki eşitliğin iki tarafına $D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}$ operatörünü uygularsak;

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x) - f(x) = D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}((t-x);x)\,f'(x) + \frac{1}{2}D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left((t-x)^2;x\right)f''(x)$$

$$+D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(r(t,x)(t-x)^2;x\right) \tag{3.30}$$

ve bu eşitliği katsayıları dikkate alarak düzenlediğimizde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}(1-\beta_n)\left[D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x) - f(x)\right] = f'(x) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{a_n}{b_n}(1-\beta_n)\left(\delta_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(x)\right)^2\right]f''(x)$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}(1-\beta_n)\,D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(r(t,x)(t-x)^2;x\right) \tag{3.31}$$

elde edilir. $t \to x$ iken $r(t,x) \to 0$ dir, yani verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $|t-x| < \delta$ iken $|r(t,x)| < \varepsilon$ sağlanır. Eğer $|t-x| \geq \delta$ ise $M > 0$ için $|r(t,x)| \leq M\dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$ yazabiliriz. χ_A, $A = (x-\delta, x+\delta) \subset [0,\infty)$ aralığı için tanımlanan karakteristik fonksiyon olsun. Karakteristik fonksiyon tanımını kullanır ve Eş. 3.30'un son terimini aşağıdaki şekilde düzenlersek,

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(r\left(t,x\right)\left(t-x\right)^2;x\right) \leq D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(\left|r\left(t,x\right)\right|\left(t-x\right)^2\chi_A;x\right)$$

$$+D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(\left|r\left(t,x\right)\right|\left(t-x\right)^2\left(\chi_A^c\right);x\right)$$

$$< \varepsilon D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(\left(t-x\right)^2;x\right) + M\frac{1}{\delta^2}D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(\left(t-x\right)^4;x\right)$$

Burada Eş. 2.1'deki şartları ve Eş. 3.30'u dikkate alarak

$$D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(r\left(t,x\right)\left(t-x\right)^2;x\right) \leq \varepsilon O\left(\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(-4x+1\right)\right)$$

$$+M\frac{1}{\delta^2}O\left(\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^3\left(x^4+22x^3+113x^2+103x+24\right)\right) \tag{3.32}$$

bulunur ve her $x \in [0,b] \subset [0,\infty)\,, b \in \mathbb{R}$ için limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\left(1-\beta_n\right)D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}\left(r\left(t,x\right)\left(t-x\right)^2;x\right) = 0$$

olduğu görülür. Bu son Eş. 3.31'de yerine yazılırsa Eş. 3.29 sağlanmış olur. Düzgün yakınsama için ise f'yi $[0,\infty)$ da düzgün sürekli, δ ve x'den bağımsız olarak seçmek yeterlidir.

4. İKİ DEĞİŞKENLİ JAİN - TİP OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda birinci bölümde Eş. 3.6 ile tanımlanmış olan Jain-tip genelleştirilmiş operatörleri iki boyutlu uzayda tanımlayıp kısmi ve tam süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesini vereceğiz. Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneline bağlı ikinci süreklilik modülü cinsinden hata oranını elde edeceğiz. Ayrıca, kısmi ve tam Lipschitz sınıfından fonksiyonlar için yaklaşım oranına ilişkin elde edilen bazı sonuçlar verilecektir.

4.1. Operatörün Tanımı

Eş. 3.6 ile tanımlanmış olan operatörlerin iki değişkenli formu;

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}(f;x,y) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,m}^{k,j}(x,y)\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\theta_\beta(k-1,j-1;x,y)\,dudv\right)^{-1}$$

$$\times\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty}\theta_\beta(k-1,j-1;x,y)\,f(u,v)\,dudv + 2^{-\frac{a_n}{b_n}\frac{c_m}{d_m}xy}f(0,0) \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

$J=[0,\infty)$, $J\times J = J^2$ olmak üzere $C(J^2)$ iki değişkenli reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayını göstersin. $f\in C(J^2)$ iki değişkenli integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $(x,y)\in J^2$ ve $n,m\in\mathbb{N}$ ve $\beta_1,\beta_2\in[0,1)$ için

$$\theta_{\beta_1}\left(k,\frac{a_n}{b_n}x\right) = \frac{a_n}{b_n}x\left(\frac{a_n}{b_n}x+k\beta_1\right)^{k-1}\frac{e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}x+k\beta_1\right)}}{k!},$$

$$\theta_{\beta_2}\left(j,\frac{c_m}{d_m}y\right) = \frac{c_m}{d_m}y\left(\frac{c_m}{d_m}y+j\beta_2\right)^{j-1}\frac{e^{-\left(\frac{c_m}{d_m}y+j\beta_2\right)}}{j!}$$

alarak bunların tensörel çarpımı ile ,

$$\theta_\beta(k,j;x,y) = \theta_{\beta_1}\left(k,\frac{a_n}{b_n}x\right)\theta_{\beta_2}\left(j,\frac{c_m}{d_m}y\right)$$

yi tanımlayalım. Ayrıca

$$l_{n,k}^{*}(x)=\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x} \text{ ile } l_{m,j}^{*}(y)=\frac{\left(\frac{c_m}{d_m}y\right)_j}{2^j j!}2^{-\frac{c_m}{d_m}y}$$

nin tensörel çarpımını

$$l_{n,m}^{k,j}(x,y)=l_{n,k}^{*}(x)\, l_{m,j}^{*}(y)$$

ile ifade edelim. Burada (a_n), (b_n) ile (c_m), (d_m),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0,\ \frac{b_n}{a_n}\leq 1,\ \lim_{m\to\infty}\frac{d_m}{c_m}=0,\ \frac{d_m}{c_m}\leq 1 \tag{4.2}$$

şartını sağlayan, artan ve sınırsız reel sayı dizileridir. $C(J^2)$, J^2 üzerinde tüm reel değerli iki değişkenli sürekli f fonksiyonlarının kümesini, $C_B(J^2)$ ise $C(J^2)$ den olan sınırlı fonksiyonların kümesini göstermektedir. $C_B(J^2)$ uzayı $\|f\|_{C_B(J^2)}=\sup\limits_{(x,y)\in J^2}|f(x,y)|$ normu ile bir normlu uzaydır. Eş. 4.1 operatörleri $C_B(J^2)$ üzerinde tanımlanmıştır.

4.2. İki Değişkenli Jain-tip Genelleştirilmiş Operatörlerle Yaklaşım

Bu bölümde Eş. 4.1 ile tanımlanmış iki değişkenli $D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}$ operatörleri için önce operatörün test fonksiyonları elde edilecek ve sonrasında bu operatörler için yakınsama incelenecektir.

Burada ve sonrasında $i,j\in\mathbb{N}_0$ ve $i+j\leq 2$ olmak üzere $e_{i,j}(x,y)=x^i y^j$ şeklinde iki değişkenli durumun test fonksiyonları olarak alınacaktır.

4.2.1. Lemma

$\left\{D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\right\}$, Eş. 4.1 ile tanımlanmış iki değişkenli operatörler dizisi olsun. $e_{i,j}(x,y)$ test fonksiyonları ve her $m,n\in\mathbb{N}$ için, $D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}$ aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}(e_{0,0};x,y)=1,$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{1,0};x,y\right)=x\left(1-\beta_1\right)+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_1(2-\beta_1)}{(1-\beta_1)},$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{0,1};x,y\right)=y\left(1-\beta_2\right)+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_2(2-\beta_2)}{(1-\beta_2)},$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{2,0};x,y\right)=\left(1-\beta_1\right)^2x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_1-2\beta_1^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_1^2(3-\beta_1)}{(1-\beta_1)}$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{0,2};x,y\right)=\left(1-\beta_2\right)^2y^2+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\left(\left(1+4\beta_2-2\beta_2^2\right)+2\frac{d_m}{c_m}\right)y+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\frac{\beta_2^2(3-\beta_2)}{(1-\beta_2)}.$$

İspat

Tensörel çarpımın özelliğinden ve Eş. 4.1 ile verilen operatörün tanımını kullanarak,

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{0,0};x,y\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,m}^{k,j}\left(x,y\right)\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)dudv\right)^{-1}$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)f\left(u,v\right)dudv+2^{-\frac{a_n}{b_n}\frac{c_m}{d_m}xy}f(0,0)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}l_{n,k}^{*}\left(x\right)\int_0^{\infty}\frac{a_n}{b_n}u\left(\frac{a_n}{b_n}u+k\beta_1\right)^{k-1}\frac{e^{-\left(\frac{a_n}{b_n}u+k\beta_1\right)}}{k!}du$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}l_{m,j}^{*}\left(y\right)\int_0^{\infty}\frac{c_m}{d_m}v\left(\frac{c_m}{d_m}v+j\beta_2\right)^{j-1}\frac{e^{-\left(\frac{c_m}{d_m}v+j\beta_2\right)}}{j!}dv$$

$$=1.$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse diğer iki değişkenli test fonksiyonları da kolayca görülür:

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{1,0};x,y\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,m}^{k,j}\left(x,y\right)\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)dudv\right)^{-1}$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)e_{1,0}\left(u,v\right)dudv+2^{-\frac{a_n}{b_n}\frac{c_m}{d_m}xy}e_{1,0}(0,0)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\theta_{\beta_1}\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)du\right)^{-1}l_{n,k}^{*}\left(x\right)\int_0^{\infty}\theta_{\beta_1}\left(k-1,\frac{a_n}{b_n}u\right)e_1\left(u\right)du$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}l_{n,k}^{*}\left(x\right)\left(\frac{b_n}{a_n}\left[\left(1-\beta_1\right)k+\frac{\beta_1(2-\beta_1)}{(1-\beta_1)}\right]\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}l_{n,k}^{*}\left(x\right)\frac{b_n}{a_n}\left(1-\beta_1\right)k+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_1(2-\beta_1)}{(1-\beta_1)}$$

$$=\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)\frac{b_n}{a_n}\left(1-\beta_1\right)+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_1(2-\beta_1)}{(1-\beta_1)}.$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left(e_{2,0};x,y\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,m}^{k,j}\left(x,y\right)\left(\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)dudv\right)^{-1}$$

$$\times\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\theta_\beta\left(k-1,j-1;x,y\right)e_{2,0}\left(u,v\right)dudv+2^{-\frac{a_n}{b_n}\frac{c_m}{d_m}xy}e_{2,0}(0,0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{0}^{\infty} \theta_{\beta_1} \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right) du \right)^{-1} l_{n,k}^{*}(x) \int_{0}^{\infty} \theta_{\beta_1} \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right) e_2(u)\, du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} l_{n,k}^{*}(x) \left(\left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \left[(1-\beta_1)^2 k^2 + \left(1+4\beta_1-2\beta_1^2 \right) k + \frac{\beta_1^2(3-\beta_1)}{(1-\beta_1)} \right] \right)$$

$$= \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \left[(1-\beta_1)^2 \left(\left(\frac{a_n}{b_n} x \right)^2 + 2\frac{a_n}{b_n} x \right) + \left(1+4\beta_1-2\beta_1^2 \right) x + \frac{\beta_1^2(3-\beta_1)}{(1-\beta_1)} \right].$$

Yukarıdaki lemmanın doğal bir sonucu olarak aşağıdaki not verilebilir.

Not 4: Değişkenlere göre birinci momentler sırasıyla;

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left((t-x);x,y\right) = -\beta_1 x + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_1(2-\beta_1)}{1-\beta_1}, \tag{4.3}$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left((s-y);x,y\right) = -\beta_2 y + \frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_2(2-\beta_2)}{1-\beta_2}$$

ve ikinci momentler,

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left((t-x)^2;x,y\right)$$

$$= \left(-2\beta_1+\beta_1^2\right) x^2 + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \left(\left(1+4\beta_1-2\beta_1^2\right) + 2\frac{a_n}{b_n} \right) x + \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \frac{\beta_1^2(3-\beta_1)}{(1-\beta_1)},$$

$$D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}\left((s-y)^2;x,y\right)$$

$$= \left(-2\beta_2+\beta_2^2\right) y^2 + \left(\frac{d_m}{c_m} \right)^2 \left(\left(1+4\beta_2-2\beta_2^2\right) + 2\frac{c_m}{d_m} \right) y + \left(\frac{d_m}{c_m} \right)^2 \frac{\beta_2^2(3-\beta_2)}{(1-\beta_2)},$$

şeklindedir.

Şimdi iki değişkenli durum için Volkov tip teoremi verelim. Burada Volkov teoremini elde etmek için $D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}$ operatöründe β_1 ve β_2 yerine sırasıyla,

$$n,m\to\infty \text{ iken } \beta_n\to 0 \text{ ve } \beta_m\to 0, \tag{4.4}$$

koşulunu sağlayan (β_n) ve (β_m) dizilerini alalım. Bu durumda Not 4'teki sonuçları da gözönünde bulundurursak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Not 5: Herbir $(x,y)\in J^2$ için Eş. 4.2 ve Eş. 4.4 deki koşullar dikkate alınırsa $D_{n,m}^{[\beta_1,\beta_2]}$ operatörü için birinci moment $n\to\infty$ için;

$$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(t-x;x,y)=-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}\to 0\ ,$$

benzer şekilde birinci bileşen için ikinci moment $n\to\infty$ için;

$$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((t-x)^2;x,y\right)=\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2$$

$$+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\to 0.$$

İkinci bileşen için birinci moment, $m\to\infty$ için;

$$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((s-y);x,y\right)=-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\to 0\ ,$$

ve ikinci bileşen için ikinci moment, $m\to\infty$ için;

$$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((s-y)^2;x,y\right)=\left(-2\beta_m+\beta_m^2\right)y^2$$

$$+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\left(\left(1+4\beta_m-2\beta_m^2\right)+2\frac{c_m}{d_m}\right)y+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\frac{\beta_m^2(3-\beta_m)}{(1-\beta_m)}\to 0, \tag{4.5}$$

olur.

4.2.2. Teorem

$\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\right\}$, Eş. 4.1 ile tanımlanmış lineer pozitif operatörler dizisi her $f \in C(J^2)$ fonksiyonuna J^2 nin kompakt bir alt kümesinde düzgün olarak yakınsaktır .

İspat

Yeterince büyük n ve m sayıları için (a_n), (b_n), (c_m) ve (d_m) dizileri Eş. 4.2 ile verilen özelliği sağlayan reel sayı dizileri ve $(\beta_n), (\beta_m)$ de Eş. 4.4'ü sağlayan diziler olsun. Lemma 4.2.1.'i dikkate alarak $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(e_{0,0}; x, y)$, $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(e_{1,0}; x, y)$, $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(e_{0,1}; x, y)$, $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(t^2 + s^2; x, y)$ terimlerinin sırasıyla 1, x, y ve $x^2 + y^2$ ye J^2 nin kompakt bir alt kümesinde düzgün olarak yakınsadığı görülür. O halde Volkov teoreminden ([23]), $\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\right\}$ operatör dizisi, f fonksiyonuna $n, m \to \infty$ iken J^2 nin kompakt alt kümesinde düzgün olarak yakınsaktır.

4.3. Yaklaşımın Derecesi

Bu bölümde Eş. 4.1 eşitliği ile tanımlanmış $\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\right\}$ operatörler dizisi için yaklaşım hızını tam süreklilik modülü, kısmi süreklilik modülleri ve Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımıyla inceleyeceğiz.

Bunun için önce tam süreklilik modülünün tanımını verelim.

Reel değerli ve sınırlı $f \in C_B(J^2)$ fonksiyonu için her (t, s), $(x, y) \in J^2$ olmak üzere birinci süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\omega(f; \delta) = \sup\{|f(t, s) - f(x, y)| : \sqrt{(t - x)^2 + (s - y)^2} \le \delta\}. \tag{4.6}$$

Dahası x ve y değişkenlerine göre kısmi süreklilik modülleri ise birinci bileşen için,

$$\omega^1(f; \delta) = \sup\left\{|f(x_1, y) - f(x_2, y)| : y \in J \;\; ve \;\; |x_1 - x_2| \le \delta\right\}, \tag{4.7}$$

ve ikinci bileşen için,

$$\omega^2(f; \delta) = \sup\left\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| : x \in J \;\; ve \;\; |y_1 - y_2| \le \delta\right\}, \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanır.

4.3.1. Teorem

$\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\right\}$, Eş. 4.1 ile tanımlanmış operatörler dizisi olsun. O halde düzgün sürekli her $f \in C_B\left(J^2\right)$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$(i)\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq 2\omega\left(f;\delta_{n,m}\left(x,y\right)\right),$$

$$(ii)\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq 2\left[\omega^1(f;\delta_n\left(x\right))+\omega^2(f;\delta_m\left(y\right))\right].$$

Burada $(x,y) \in J^2$ ve

$$\delta_{n,m}\left(x,y\right)=\left\{\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\right.$$

$$\left.+\left(-2\beta_m+\beta_m^2\right)y^2+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\left(\left(1+4\beta_m-2\beta_m^2\right)+2\frac{c_m}{d_m}\right)y+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\frac{\beta_m^2(3-\beta_m)}{(1-\beta_m)}\right\}^{1/2},$$

ve

$$\delta_n\left(x\right)=\left\{\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\right\}^{1/2},$$

$$\delta_m\left(y\right)=\left\{\left(-2\beta_m+\beta_m^2\right)y^2+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\left(\left(1+4\beta_m-2\beta_m^2\right)+2\frac{c_m}{d_m}\right)y+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\frac{\beta_m^2(3-\beta_m)}{(1-\beta_m)}\right\}^{1/2}.$$

İspat

(i) Eş. 4.6 ile verilen süreklilik modülünün tanımından

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right| \leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right)\right|;x,y\right)$$

$$\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\omega\left(f;\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2}\right);x,y\right)$$

$$\leq \omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\sqrt{(t-x)^2+(s-y)^2};x,y\right)\right],$$

yazılır. Ardından Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak;

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq \omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left((t-x)^2+(s-y)^2\right);x,y\right)\right\}^{1/2}\right],$$

$$\leq \omega(f;\delta)\left[1+\frac{1}{\delta}\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((t-x)^2;x\right)+D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((s-y)^2;y\right)\right\}^{1/2}\right],$$

elde edilir. Burada

$$\delta:=\delta_{n,m}\left(x,y\right)$$

ve

$$\delta_{n,m}\left(x,y\right)=\left\{\left(-2\beta_n+\beta_n^2\right)x^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\left(\left(1+4\beta_n-2\beta_n^2\right)+2\frac{a_n}{b_n}\right)x+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\frac{\beta_n^2(3-\beta_n)}{(1-\beta_n)}\right.$$

$$\left.+\left(-2\beta_m+\beta_m^2\right)y^2+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\left(\left(1+4\beta_m-2\beta_m^2\right)+2\frac{c_m}{d_m}\right)y+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2\frac{\beta_m^2(3-\beta_m)}{(1-\beta_m)}\right\}^{1/2},$$

alınırsa istenen elde edilir.

(ii) Şimdi de Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 ile verilen kısmi süreklilik modüllerinin özelliklerinden ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|f\left(t,s\right)-f\left(x,y\right)\right|;x,y\right)$$

$$\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|f\left(t,s\right)-f\left(t,y\right)\right|;x,y\right)+D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|f\left(t,y\right)-f\left(x,y\right)\right|;x,y\right)$$

$$\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(1+\frac{1}{\delta_m}|s-y|\omega^2\left(f;\delta_m\right);x,y\right)+D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(1+\frac{1}{\delta_n}|t-x|\omega^1\left(f;\delta_n\right);x,y\right)$$

$$\leq \omega^2\left(f;\delta_m\right)\left(1+\frac{1}{\delta_m}\left(D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(s-y\right)^2\right);x,y\right)\right)^{1/2}\right)$$

$$+\omega^1\left(f;\delta_n\right)\left(1+\frac{1}{\delta_n}\left(D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(t-x\right)^2\right);x,y\right)\right)^{1/2}\Bigg)$$

$$=A_1+A_2.$$

Burada $\delta_m=\delta_m\left(y\right)$, alıp Eş. 4.8 ile verilen tanımdan $A_1=2\omega^2\left(f;\delta_m\right)$ elde edilir. Benzer olarak da Eş. 4.7'de $\delta_n=\delta_n\left(x\right)$ alarak $A_2=2\omega^1\left(f;\delta_n\right)$ elde edilir.

Şimdi de, $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $f\left(x,y\right)\in C_B\left(J^2\right)$ fonksiyonlarına yaklaşım derecesini Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli yardımı ile bulalım.

$$C_B^2\left(J^2\right)=\left\{f\in C_B\left(J^2\right):\frac{\partial^i f}{\partial x^i},\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\in C_B\left(J^2\right),i=1,2,\right\}$$

dir ve bu uzay

$$\|f\|_{C_B^2(J^2)}=\|f\|_{C_B(J^2)}+\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\frac{\partial^i f}{\partial x^i}\right\|_{C_B(J^2)}+\left\|\frac{\partial^i f}{\partial y^i}\right\|_{C_B(J^2)}\right)$$

şeklinde tanımlı norm ile bir normlu uzaydır.

4.3.2. Tanım

$f\in C\left(J^2\right)$ fonksiyonları için Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyonelinin tanımı

$$\mathcal{K}(f,\delta)=\inf_{g\in C_B^2(J^2)}\{\|f-g\|_{C_B(J^2)}+\delta\,\|g\|_{C_B^2(J^2)}\},(\delta>0)\tag{4.9}$$

ile verilir.

Buradan $\omega_2(f,\sqrt{\delta})$ ikinci süreklilik modülü olmak üzere Peetre-$\mathcal{K}$ fonksiyoneli ile ilişkisi

$$\mathcal{K}(f,\delta)\leq M\left\{\omega_2(f,\sqrt{\delta})+\min\left(1,\delta\right)\|f\|_{C_B(J^2)}\right\}\tag{4.10}$$

şeklindedir [16]. Burada $\delta>0$ ve M, δ ve f den bağımsız bir sabittir.

4.3.3. Teorem

$f \in C_B(J^2)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)-f(x,y)\right| \leq 4\mathcal{K}(f;M_{n,m}(x,y))+\omega\left(f;\delta_{n,m}^{*}(x,y)\right)$$

$$\leq M\left\{\omega_2(f,\sqrt{M_{n,m}(x,y)})+\min(1,M_{n,m}(x,y))\|f\|_{C_B(J^2)}\right\}+\omega\left(f;\delta_{n,m}^{*}(x,y)\right).$$

Burada $\delta_{n,m}^{*}(x,y)=\left(-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}\right)^2+\left(-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\right)^2$ ve

$$M_{n,m}(x,y)=\left(3\tfrac{b_n}{a_n}\delta_n^2(x)+\left(\tfrac{b_n}{a_n}\right)^2+3\tfrac{d_m}{c_m}\delta_m^2(y)+\left(\tfrac{d_m}{c_m}\right)^2\right)$$

olup f den bağımsız bir sabittir.

İspat

Yardımcı operatör aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)=D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)+f(x,y)$$

$$-f\left(-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n},-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\right). \tag{4.11}$$

Not 5'i kullanarak

$$\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}((t-x);x,y)=0,\ \overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}((s-y);x,y)=0$$

olduğu kolayca görülebilir. Bir $g \in C_B^2(J^2)$ fonksiyonu için her $(t,s) \in J^2$ olmak üzere Taylor teoreminden

$$g(t,s)-g(x,y)=g(t,y)-g(x,y)+g(t,s)-(t,y)$$

$$=(t-x)\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}+(s-y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}$$

$$+\int_{x}^{t}(t-u)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du+\int_{y}^{s}(s-v)\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv \tag{4.12}$$

yazılır. Eş. 4.12'nin her iki tarafına da $\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörünü aşağıdaki gibi uygulayalım:

$$\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(g;x,y)-g(x,y)$$

$$=D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\int_{x}^{t}(t-u)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du;x,y\right)-\int_{x}^{-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}}\left(\frac{a_n x+b_n}{a_n}-u\right)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}du$$

$$+D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\int_{y}^{s}(s-v)\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}dv;x,y\right)-\int_{y}^{-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}}\left(\frac{c_m y+d_m}{c_m}-v\right)\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}dv$$

ve buradan mutlak değere geçilirse

$$\left|\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(g;x,y)-g(x,y)\right|\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|\int_{x}^{t}|t-u|\left|\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}\right|du\right|;x\right)$$

$$+\left|\int_{x}^{-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}}\left|-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}-u\right|\left|\frac{\partial^2 g(u,y)}{\partial u^2}\right|du\right|$$

$$+D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|\int_{y}^{s}|s-v|\left|\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}\right|du\right|;x\right)$$

$$+\left|\int_{y}^{-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}}\left|-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}-v\right|\left|\frac{\partial^2 g(x,v)}{\partial v^2}\right|dv\right|$$

$$\leq \left\{ D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((t-x)^2;x\right) + \left(-\beta_n x + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n} - x\right)^2 \right\} \|g\|_{C_B^2(J^2)}$$

$$+ \left\{ D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left((s-y)^2;x\right) + \left(-\beta_m y + \frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m} - y\right)^2 \right\} \|g\|_{C_B^2(J^2)}$$

elde edilir. Not 4 ve Eş. 4.2'den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$\left|\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(g;x,y) - g(x,y)\right| \leq \left[3\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (x+1)^2 + 3\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2 (y+1)^2\right] \|g\|_{C_B^2(J^2)}$$

$$\leq 4\left[\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 (x+1)^2 + \left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2 (y+1)^2\right] \|g\|_{C_B^2(J^2)}. \tag{4.13}$$

Dahası $f \in C_B(J^2)$ için,

$$\left|\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)\right| \leq \left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)\right| + |f(x,y)|$$

$$+ \left| f\left(-\beta_n x + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}, -\beta_m y + \frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\right)\right|$$

$$\leq 3\|f\|_{C_B(J^2)} \tag{4.14}$$

olduğunu biliyoruz. O halde Eş. 4.13 ve Eş. 4.14'ü birlikte düşünürsek

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq \left|\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}((f-g);x,y)\right| + \left|\overline{D}_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(g;x,y) - g(x,y)\right|$$

$$+ |g(x,y) - f(x,y)| + \left| f\left(-\beta_n x + \frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}, -\beta_m y + \frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\right) - f(x,y)\right|$$

$$\leq 4\left\|f-g\right\|_{C(I^2)}+4\left[\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2(x+1)^2+\left(\frac{d_m}{c_m}\right)^2(y+1)^2\right]\|g\|_{C_B^2(J^2)}$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}-x\right)^2+\left(-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}-y\right)^2}\right).$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $g\in C_B^2\left(J^2\right)$ ler üzerinden infimum alırsak

$$\left|D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq 4\mathcal{K}\left(f;M_{n,m}\left(x,y\right)\right)$$

$$+\omega\left(f;\sqrt{\left(-\beta_n x+\frac{b_n}{a_n}\frac{\beta_n(2-\beta_n)}{1-\beta_n}\right)^2+\left(-\beta_m y+\frac{d_m}{c_m}\frac{\beta_m(2-\beta_m)}{1-\beta_m}\right)^2}\right)$$

elde edilir. Ayrıca Eş. 4.10'u göz önüne alarak

$$\leq M\left\{\omega_2(f,\sqrt{M_{n,m}\left(x,y\right)})+\min\left(1,M_{n,m}\left(x,y\right)\right)\|f\|_{C(J^2)}\right\}+\omega\left(f;\delta^*_{n,m}(x,y)\right)$$

olduğu görülür.

Şimdi, Eş. 4.1 ile tanımlanmış $\left\{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\right\}$ operatörler dizisi için kısmi ve tam Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşım derecesine ilişkin sonuçları verelim.

Eğer iki değişkenli bir f fonksiyonu, $u=(t,s)$, $v=(x,y)$ ve $\|,\|$ Öklid normu olmak üzere $\alpha\in(0,1]$ için

$$|f(t,s)-f(x,y)|\leq M\left\|u-v\right\|^{\alpha},$$

koşulunu sağlarsa o zaman f fonksiyonu $Lip_M\alpha$ Lipschitz sınıfındandır ve bu $f\in Lip_M\alpha$ ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu, (x_1,y), (x_2,y) keyfi noktalar olmak üzere $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1]$ için

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq M_1\left|x_1-x_2\right|^{\alpha_1}$$

ve benzer şekilde (x, y_1), (x, y_2) keyfi noktaları için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M_2 |y_1 - y_2|^{\alpha_2}$$

koşullarını sağlarsa f sırasıyla x değişkenine göre $Lip^x_{M_1}\alpha_1$ sınıfı ve y değişkenine göre $Lip^y_{M_2}\alpha_2$ sınıfındandır, denir.

Sonuç

$D^{[\beta_n,\beta_m]}_{n,m}$, Eş. 4.1 ile verilen genelleştirilmiş iki değişkenli Jain tip operatörler olsun. Bu durumda,

a) $f \in Lip_M\alpha$ için

$$\left|D^{[\beta_n,\beta_m]}_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\right| \leq M' \left(\delta_{n,m}\right)^{\alpha/2}, M' = 2M,$$

b) $M_1' = 2M_1, M_2' = 2M_2$ olmak üzere $f \in (Lip^x_{M_1}\alpha_1 \cap Lip^y_{M_2}\alpha_2)$ için

$$\left|D^{[\beta_n,\beta_m]}_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)\right| \leq M_1' \left(\delta_n\right)^{\alpha_1/2} + M_2' \left(\delta_m\right)^{\alpha_2/2}$$

sağlanır. Burada $\delta_{n,m}(x, y), \delta_n(x)$ and $\delta_m(y)$ Teorem 4.3.1.'de verildiği gibidir.

5. LUPAŞ - SZÁSZ OPERATÖRLERİNİN JAİN GENELLEŞTİRMESİNİN GBS TİPİ

Bu bölümde bir önceki bölümde iki değişkenli formunu Eş. 4.1 ile tanımladığımız operatörlerin GBS (Genelleştirilmiş Boolean Toplam) operatörlerini tanımlayarak bu operatörler yardımıyla Bögel sürekli (B-sürekli) fonksiyonlara karma süreklilik modülü ve karma Lipschitz tip uzayda yaklaşım derecesine ait sonuçları vereceğiz. Ayrıca, bölüm sonunda bir önceki bölümde tanımlayıp yaklaşım özelliklerini incelediğimiz genelleştirilmiş Jain tip iki değişkenli operatörler ve bu bölümde vereceğimiz GBS operatörlerinin yaklaşımını görsel olarak grafikler yardımıyla karşılaştıracağız. Değişen n değerleri için GBS operatörlerinin yaklaşımı için de görsel bir örnek vereceğiz.

B-süreklilik ve B-diferansiyellenebilme kavramları ilk olarak 1934-35 yıllarında Karl Bögel'in çalışmaları sayesinde ortaya çıkmış ve geliştirilmiştir([24, 25]). B-sürekli fonksiyonlar için Korovkin teoremi ise 1986-90 yıllarında C. Badea, I. Badea, H. H. Gonska ve C. Cottin tarafından çalışılmıştır([26, 27]).

İki değişkenli Bernstein tip operatörler ve onların GBS operatörlerinin yaklaşım özellikleri [28], [29], [30], [31] ve [32] de incelenmiştir.

Şimdi bu çalışmada kullanılacak temel tanım ve gösterimleri verelim.

5.0.1. Tanım

I, J reel sayıların iki alt aralığı ve $D = I \times J$ olsun. $f : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun karma farkı $\Delta_{xy} f\left[x_0, y_0; x, y\right]$ ile gösterilir. Her $(x_0, y_0) \in D$ noktası için $f(x, y)$ nin karma farkı

$$\Delta_{xy} f\left[x_0, y_0; x, y\right] = f\left(x, y\right) - f\left(x, y_0\right) - f\left(x_0, y\right) + f\left(x_0, y_0\right)$$

şeklindedir. Herhangi $(x, y) \in D$ noktası için

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta_{xy} f\left[x_0, y_0; x, y\right] = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa o zaman f'ye $(x_0, y_0) \in D$ noktasında Bögel sürekli (B-sürekli) fonksiyon denir. D üzerindeki bütün B-sürekli fonksiyonlar uzayı $C_b\left(D\right)$ ile gösterilir [33].

B-sürekli fonksiyonları yukarıdaki ifadeye eşdeğer olarak;

"Her $\epsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ ve $|y - y_0| < \delta$ iken $|\Delta_{xy} f [x_0, y_0; x, y]| < \epsilon$ olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ varsa f, $(x_0, y_0) \in D$ noktasında B-süreklidir."

şekilde de ifade edebiliriz. Bögel sürekli fonksiyonlar uzayı sürekli fonksiyonlar uzayından daha geniştir. Yani her sürekli fonksiyon Bögel süreklidir, ancak bunun tersi doğru değildir [34].

5.0.2. Tanım

Her $f : D \to \mathbb{R}$, her $(x, y), (t, s) \in D$ için $\left|\Delta_{(x,y)} f [t, s; x, y]\right| < K$ olacak biçimde en az bir $K > 0$ reel sayısı varsa f, D de, Bögel sınırlıdır (B-sınırlıdır) denir.

D üzerinde sınırlı fonksiyonların kümesini $B(D)$ ile gösterirsek, D üzerinde B-sınırlı fonksiyonların kümesine $B_b(D)$ diyebiliriz.

5.0.3. Tanım

$I, J \subset \mathbb{R}$ alt aralıklar, $E(I \times J), F(I \times J)$ kümeleri $I \times J$ de tanımlı reel değerli fonksiyonların kümesi ve $L : E(I \times J) \to F(I \times J)$ şeklinde verilmiş bir lineer pozitif operatör olsun.

Her $(x, y) \in I \times J$ de tanımlı herhangi $f \in E(I \times J)$ fonksiyonları için L operatörünün $GL : E(I \times J) \to F(I \times J)$, GBS operatörleri

$$(GLf)(x, y) = L\left(f(x, *) + f(., y) - f(., *)\right)(x, y)$$

olarak tanımlanır.

$J^2 = [0, \infty) \times [0, \infty)$ olmak üzere Eş. 4.1 ile verilen operatörün 1. ve 2. bileşenlere göre parametrik genişletmeleri $f \in C\left(J^2\right)$ fonksiyonları ve $(x, y) \in J^2$ değerleri için sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$${}_xD_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f; x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \theta_{\beta_n} \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right) du \right)^{-1} l_{n,k}^{*}(x) \int_0^{\infty} \theta_{\beta_n} \left(k-1, \frac{a_n}{b_n} u \right) f(u)\, du + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} f(0),$$

$${}_{y}D_{c_m,d_m}^{[\beta_m]}(f;y)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \theta_{\beta_m} \left(j-1, \frac{c_m}{d_m} v \right) dv \right)^{-1} l_{m,j}^{*}(y) \int_0^{\infty} \theta_{\beta_m} \left(j-1, \frac{c_m}{d_m} v \right) f(v)\, dv + 2^{-\frac{c_m}{d_m}y} f(0),$$

Yukarıdaki iki operatörün tensörel çarpımından Eş. 4.1 ile verilen $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$operatörlerini elde ederiz.

5.0.4. Tanım

$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)$ operatörlerinin GBS operatörü parametrik genişletmeler yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]} =_x D_{a_n,b_n}^{[\beta_n]}(f;x,y) +_y D_{c_m,d_m}^{[\beta_m]}(f;x,y) - D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y).$$

$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y)$ operatörü, $f \in C_b(J^2)$ ve $(x,y),(u,v) \in J^2$ için

$$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,m}^{k,j}(x,y) \left(\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta_{\beta}(k-1,j-1;x,y)\, dudv \right)^{-1} \tag{5.1}$$

$$\times \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \theta_{\beta}(k-1,j-1;x,y) \left[f(u,y) + f(x,v) - f(u,v) \right] dudv + 2^{-\frac{a_n}{b_n}\frac{c_m}{d_m}xy} f(0,0)$$

şeklindedir ve burada $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]} : C_b(J^2) \to B(J^2)$ dir.

Eş. 5.1 ile tanımlanan bu operatörlerin $f \in C_b(J^2)$ fonksiyonlarına yaklaşım oranını karma düzgünlük modülünü kullanarak verelim.

5.1. GBS Operatörleri ile Bögel Sürekli Fonksiyonlara Yaklaşım

5.1.1. Tanım

$I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ alt aralıklar, $I_1 \times I_2 = D$ olmak üzere, bir $f \in B_b(D)$ fonksiyonu alalım. Her $(x, y), (t, s) \in D$ için $(\delta_{1,}\delta_2) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ olmak üzere $\omega_B : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\omega_B(f; \delta_1, \delta_2) = \sup \left\{ \left| \Delta_{(x,y)} f\left[t, s; x, y\right] \right| : |x - t| < \delta_1, |y - s| < \delta_2 \right\},$$

ifadesine karma süreklilik modülü denir [35].

Bu süreklilik modülünün özellikleri bilinen süreklilik modülünün özelliklerine benzerdir. Aşağıdaki teoremi buna örnek olarak verebiliriz.

5.1.2. Teorem

$I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ kompakt alt aralıklar, $I_1 \times I_2 = D$ olmak üzere, bir $f \in B_b(D)$ fonksiyonu alalım.

$\lim\limits_{n,m \to \infty} \omega_B \left(f; \delta_n, \delta_m\right) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $f \in C_b(D)$ olmasıdır.

Belirtelim ki, kompakt aralıklardaki B-sürekli fonksiyonlar B-düzgün süreklidir.

5.1.3. Teorem

Her $f \in C_b(J^2)$ ve her $(x, y) \in J^2$ için Eş. 5.1 ile tanımlanan operatörler

$$\left| GD_{n,m}^{[\beta_n, \beta_m]} \left(f; x, y\right) - f\left(x, y\right) \right| \le 4\omega_B \left(f; \delta_n(x), \delta_m(y)\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada δ_n ve δ_m Teorem 4.3.1.'deki ifadelerin aynısıdır.

İspat

$\omega_B \left(f; \delta_n, \delta_m\right)$ nin tanmından ve onun

$$\omega_B \left(f; \lambda_n \delta_n, \lambda_m \delta_m\right) \le \left(1 + \lambda_n\right) \left(1 + \lambda_m\right) \omega_B \left(f; \delta_n, \delta_m\right); \lambda_n, \lambda_m > 0$$

temel özelliğinden her $(x,y),(t,s)\in J^2$ ve herhangi $\delta_n,\delta_m>0$ için,

$$\left|\Delta_{(x,y)}f\left[t,s;x,y\right]\right|\leq\omega_B\left(f;\left|x-t\right|,\left|y-s\right|\right)$$

$$\leq\left(1+\frac{|x-t|}{\delta_n(x)}\right)\left(1+\frac{|y-s|}{\delta_m(y)}\right)\omega_B\left(f;\delta_n(x),\delta_m(y)\right) \tag{5.2}$$

elde edilir. $\Delta_{(x,y)}f\left[t,s;x,y\right]$ tanımını kullanarak

$$f(x,s)+f(t,y)-f(t;s)=f(x;y)-\Delta_{(x,y)}f[t,s;x,y]$$

yazabiliriz. Bu eşitliğe $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)$ operatörlerini uygulayalım:

$$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)=f(x,y)D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(e_{0,0};x,y\right)-D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\Delta_{(x,y)}f[t,s;x,y];x,y\right).$$

$D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(e_{0,0};x,y\right)=1$ olmasından ve Eş. 5.2'den $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ nin lineerliğini de hesaba katarak ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak,

$$\left|GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)-f\left(x,y\right)\right|\leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|\Delta_{(x,y)}f[t,s;x,y]\right|;x,y\right)$$

$$\leq\left(D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(e_{0,0};x,y\right)+\delta_n(x)^{-1}\sqrt{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(e_{1,0}-x\right)^2;x,y\right)}\right.$$

$$+\delta_m(y)^{-1}\sqrt{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(e_{0,1}-y\right)^2;x,y\right)}$$

$$\left.+\delta_n(x)^{-1}\delta_m(y)^{-1}\sqrt{D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(e_{1,0}-x\right)^2;x,y\right)D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left(e_{0,1}-y\right)^2;x,y\right)}\right)\omega_B\left(f;\delta_n(x),\delta_m(y)\right),$$

elde edilir. Not 4 kullanılarak istenen eşitsizlik sağlanır.

$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f;x,y\right)$ operatörlerinin Lipschitz sınıfından olan B-sürekli fonksiyonlar için yaklaşım derecesini inceleyelim.

5.1.4. Tanım

$f \in C_b(J^2)$ fonksiyonlarının Lipschitz sınıfını $\lambda, \mu \in (0,1]$ olmak üzere $Lip_M(\lambda,\mu)$ ile gösterelim. $(t,s),(x,y) \in J^2$ ve $M > 0$ için

$$Lip_M(\lambda,\mu) = \left\{ f \in C_b\left(J^2\right) : \left|\Delta_{(x,y)} f\left[t,s;x,y\right]\right| \leq M\left|t-x\right|^{\lambda}\left|s-y\right|^{\mu}\right\}$$

olarak tanımlanır([33] s.382).

5.1.5. Teorem

$f \in Lip_M(\lambda,\mu)$ olsun.O halde aşağıdaki eşitsizlik $\lambda, \mu \in (0,1]$ ve her $(x,y) \in J^2$ için sağlanır:

$$\left|GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq M\delta_n^{\lambda/2}\delta_m^{\mu/2},$$

burada δ_n, δ_m değerleri Teorem 4.3.1.'deki ile aynıdır.

İspat

$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin tanımı ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin linnerliğinden

$$GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) = D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f(x,s)+f(t,y)-f(t;s);x,y\right)$$

$$= D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(f(x;y)-\Delta_{(x,y)}f[t;s;x;y];x,y\right)$$

$$= f(x;y)D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(e_{0,0};x,y) - D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\Delta_{(x,y)}f[t;s;x;y];x,y\right)$$

yazabiliriz. $f \in Lip_M(\lambda,\mu)$ olmasından

$$\left|GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|\Delta_{(x,y)}f[t;s;x;y]\right|;x,y\right)$$

$$\leq MD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(\left|t-x\right|^{\lambda}\left|s-y\right|^{\mu};x,y\right)$$

$$= MD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(|t-x|^{\lambda};x,y\right)D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(|s-y|^{\mu};x,y\right)$$

elde edilir. Burada Hölder eşitsizliğini $p_1 = 2/\lambda, q_1 = 2/(2-\lambda)$ ve $p_2 = 2/\mu, q_2 = 2/(2-\mu)$ için uygularsak

$$\left|GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}(f;x,y) - f(x,y)\right| \leq MD_{n}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(|t-x|^{2};x\right)^{\frac{\lambda}{2}}D_{m}^{[\beta_n,\beta_m]}\left(|s-y|^{2};y\right)^{\frac{\mu}{2}}$$

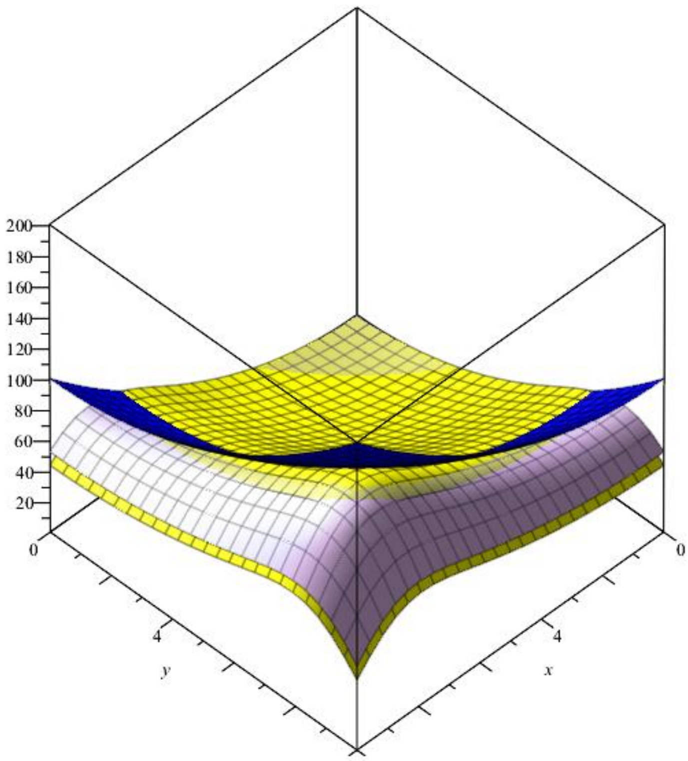
$$\leq M\delta_n^{\frac{\lambda}{2}}\delta_m^{\frac{\mu}{2}}.$$

elde ederiz. Bu da ulaşılmak istenen sonuçtur.

5.2. Örnekler: Operatörlerin Yaklaşım Oranlarının Karşılaştırılması

Örnek

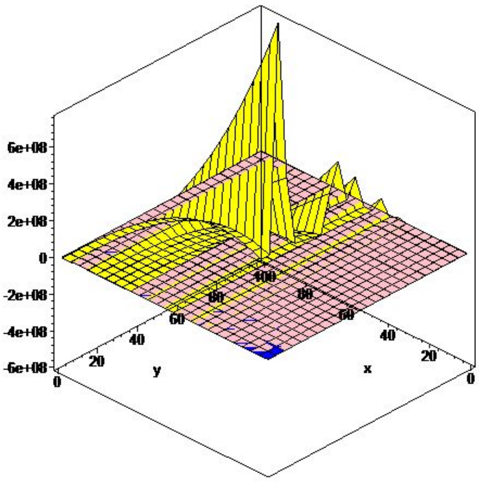
Şekil 5.1'de $n = 20$ için $(a_n) = (n)$, $(b_n) = 1$ ve $(c_m) = (m)$, $(d_m) = 1$ dizileri alınarak $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ (pembe) ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ (sarı) operatörlerinin $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.



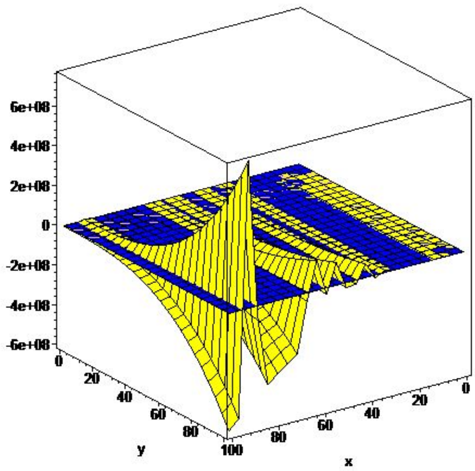
Şekil 5.1. $n = 20$ için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ fonksiyonuna yaklaşımının karşılaştırılması

Örnek

Aşağıdaki 5.2 ve 5.3 şekillerinde $(a_n) = (n)$, $(b_n) = \left(\sqrt{n+1}\right)$ ve $(c_m) = (m)$, $(d_m) = \left(\sqrt{m+1}\right)$ dizileri alınarak $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ (pembe) ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ (sarı) operatörlerinin $f(x,y) = \left(x - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{7}\right)^3$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.



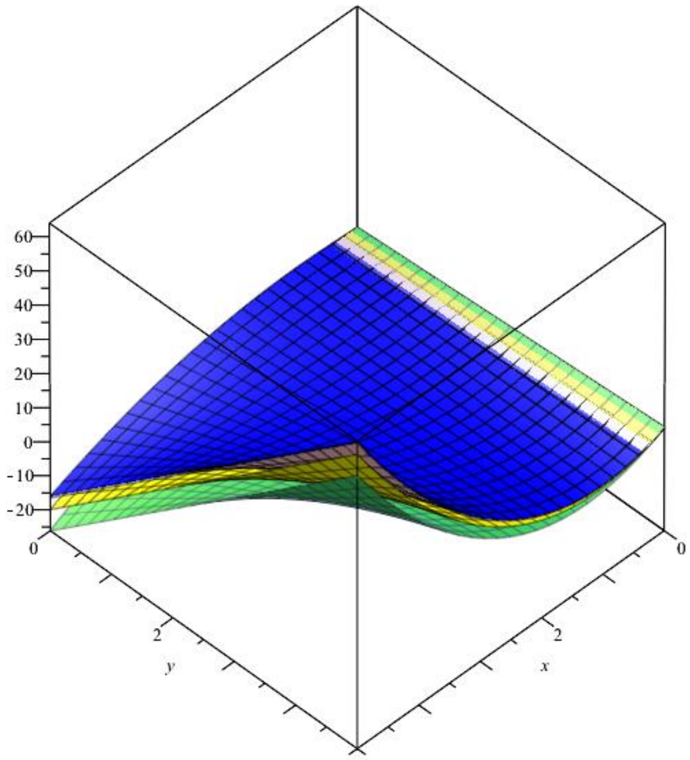
Şekil 5.2. $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin karşılaştırılması (şeklin üstten görünümü)



Şekil 5.3. $n = 20$ için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ ve $D_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin karşılaştırılması (şeklin alttan görünümü)

Örnek

Şekil 5.4'te $(a_n) = (n+1)$, $(b_n) = \left(\sqrt{n+10}\right)$ ve $(c_m) = (m+1)$, $(d_m) = \left(\sqrt{m+10}\right)$ dizileri alınarak $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $n = 5$ için "yeşil", $n = 10$ için "sarı" ve $n = 50$ için "pembe" ile $f(x,y) = (x-1)^2 (y-1)$ fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 5.4. $n = 5$, $n = 10$ ve $n = 50$ durumları için $GD_{n,m}^{[\beta_n,\beta_m]}$ operatörlerinin $f(x,y) = (x-1)^2 (y-1)$ fonksiyonuna yaklaşımı

6. AFİN FONKSİYONLARI KORUYAN LUPAŞ - SZÁSZ TOPLAMSAL-İNTEGRAL TİP OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayında yaklaşım ilk olarak periyotlu sınırlı salınımlı fonksiyonların Fourier serisi için Bojanic tarafından verilmiş [36] ve sınırlı salınımlı fonksiyonların Fourier-Legendre serisi için yaklaşımı Bojanic ve Vailleumier tarafından incelemiştir [37].

Herzog ve Hill [38], f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve x noktasında sıçrama süreksizliğine sahipse

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = \frac{1}{2}\left(f(x+)+f(x-)\right) \tag{6.1}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini ispatlamıştır. Özel olarak, f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyon olması durumunda ise Eş. 6.1 her $x \in (0,1)$ için sağlanır.

Cheng, f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı salınımlı olmak üzere Eş. 6.1 ifadesinde verilen sonuç için yaklaşım hızını total salınımlar dizisinin aritmetik ortalaması yardımıyla elde etmiştir [39].

Lineer pozitif operatörler dizisi yardımıyla türevi sınırlı salınımlı olan fonksiyonlar için yaklaşım hızının elde edilmesi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Bu kısımda $l_{n,k}(x)$ ve $P_{n,k}(x)$ Eş. 2.2 ile verilen, sırasıyla Lupaş ve Szász taban fonksiyonları olmak üzere Eş. 2.3 ile verilen D_{a_n,b_n} operatörlerini afin fonksiyonları koruyacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$D^*_{a_n,b_n}(f;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)\, f(t)\, dt + l_{n,0}(x) f(0). \tag{6.2}$$

Bu operatörler dizisinin mutlak sürekli ve hemen her yerde sınırlı salınımlı türeve sahip fonksiyonlara yakınsama oranı hesaplanacaktır.

Bunun için öncelikle kullanılacak olan temel kavramları verelim. Temel kavramlar için Balcı [40], Nasibov [41] ve Natonson [42] eserlerine bakılabilir.

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ aralığının tüm parçalanmalarının kümesi olsun. f nin $[a,b]$ üzerindeki toplam salınımı

$$\bigvee_a^b(f) = \sup\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Eğer, $\bigvee\limits_a^b(f)$ sonlu ise f fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde sınırlı salınımlıdır denir.

$[a,b]$ üzerindeki sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı $BV[a,b]$ ile gösterilir. Fonksiyonların alışılmış toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre $BV[a,b]$ lineer bir uzaydır ve

$$\|f(x)\|_{BV} := |f(a)| + \bigvee_a^b(f)$$

ifadesi $BV[a,b]$ uzayında bir norm tanımlar ve $BV[a,b]$ uzayı $\|.\|_{BV}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Verilen her $\epsilon > 0$ ve $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ şartını sağlayan her sonlu ve ikişerli ayrık $\{(a_k,b_k) \subset [a,b] : k = 1,2,...,n\}$ aralık ailesi için

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)| < \epsilon$$

olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde mutlak süreklidir denir.

f fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde mutlak sürekli ise bu mutlak sürekli fonksiyonların kümesi $AC[a,b]$ ile gösterilir.

6.0.1. Tanım (Fonksiyonun Normali:)

$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ için aşağıdaki şeklinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun normali denir:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & , x = a \text{ veya } x = b \\ \frac{1}{2}\{f(x+)+f(x-)\} & , a < x < b \end{cases}$$

$f = f^*$ ise f fonksiyonu normalleştirilmiştir denir.

6.0.2. Teorem

$f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için aşağıdakiler denktir:

(a) $f \in AC[a, b]$,

(b) f hemen her yerde türevlenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L^1[a, b]$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

eşitliği vardır.

6.1. Türevi Sınırlı Salınımlı Fonksiyonlara Yaklaşım

Şimdiki bölümde, Eş. 6.2 ile verilen $D^*_{a_n,b_n}(f; x)$ operatörlerinin mutlak sürekli hemen her yerde türevi sınırlı salınımlı fonksiyonlara yakınsaklık oranını incelemek için gerekli lemmaları verelim.

6.1.1. Lemma

(a_n), (b_n) dizileri Eş. 2.1'deki şartları sağlayan, sınırsız artan pozitif reel sayı dizileri olmak üzere her $x \in [0, \infty)$ için $D^*_{a_n,b_n}$ operatörleri aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$D^*_{a_n,b_n}(e_0; x) = 1 \tag{6.3}$$

$$D^*_{a_n,b_n}(e_1; x) = x \tag{6.4}$$

$$D^*_{a_n,b_n}(e_2; x) = x^2 + 3\frac{b_n}{a_n}x \tag{6.5}$$

İspat

Eş. 6.2 ile verilen operatörlerin tanımını ve Pochhammer sembolünün özelliğini kullanarak;

$$D^*_{a_n,b_n}(e_0;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)\, e_0(t)\, dt + l_{n,0}(x)e_0(0)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}t}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{a_n}{b_n}dt + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}.1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\frac{\Gamma(k)}{(k-1)!} + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x} + 2^{-\frac{a_n}{b_n}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x} = 1$$

elde edilir.

$$D^*_{a_n,b_n}(e_1;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} P_{n,k-1}(t)\, e_1(t)\, dt + l_{n,0}(x)e_1(0)$$

$$= \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{a_n}{b_n}t}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}tdt$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\frac{b_n}{a_n.(k-1)!}\Gamma(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\frac{b_n}{a_n}k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_{k+1}}{2^{k+1}(k+1)!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}\frac{b_n}{a_n}(k+1) = x,$$

$$D^*_{a_n,b_n}(e_2;x)=\frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,k}(x)\int_0^{\infty}P_{n,k-1}(t)\,e_2(t)\,dt+l_{n,0}(x)e_2(0)$$

$$=\frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,k}(x)\int_0^{\infty}e^{-\frac{a_n}{b_n}t}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}t\right)^{k-1}}{(k-1)!}t^2dt$$

$$=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}l_{n,k}(x)\frac{1}{(k-1)!}\Gamma(k+2)$$

$$=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}k(k+1)$$

$$=\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}k^2+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}x\right)_k}{2^k k!}2^{-\frac{a_n}{b_n}x}k$$

$$=x^2+3\frac{b_n}{a_n}x.$$

Şimdi de yaklaşım derecesinin bulunmasında kullanılacak, olan $\left\{D^*_{a_n,b_n}\right\}$ operatörleri için 1. ve 2. momentlerini verelim.

Not 6: $\left\{D^*_{a_n,b_n}\right\}$ operatörleri ve her $x\in[0,\infty)$ için 1. moment,

$$\mu_{n,1}(x)=D^*_{a_n,b_n}((t-x);x)=D^*_{a_n,b_n}(t;x)+xD^*_{a_n,b_n}(1;x)=x-x=0,$$

şeklinde elde edilir. $\left\{D^*_{a_n,b_n}\right\}$ operatörleri için 2. moment:

$$\mu_{n,2}(x)=D^*_{a_n,b_n}\left((t-x)^2;x\right)$$

$$= D^*_{a_n,b_n}\left(t^2;x\right) - 2xD^*_{a_n,b_n}(t;x) + x^2 D^*_{a_n,b_n}(1;x) = x^2 + \frac{b_n}{a_n}3x - 2x.x + x^2 = 3x\frac{b_n}{a_n}$$

şeklindedir.

Not 7: Not 6'yı dikkate alarak sabit bir $x \in [0,\infty)$ ve $\gamma = 0,1,2,...$ değerleri için $\mu_{n,\gamma}(x)$ momentleri için

$$\mu_{n,\gamma}(x) = D^*_{a_n,b_n}\left((t-x)^\gamma;x\right) \leq O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{[(\gamma+1)/2]}$$

eşitsizliğini verebiliriz. Ayrıca

$$D^*_{a_n,b_n}\left(|\mu_{n,\gamma}(x)|;x\right) = \left(D^*_{a_n,b_n}\left((t-x)^{2\gamma};x\right)\right)^{1/2} \leq O\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\gamma/2}.$$

Şimdi, Korovkin teoremini verelim.

6.1.2. Teorem

$D^*_{a_n,b_n}(f;x)$ ile verilen operatörlerin her bir $f \in C_B[0,\infty)$ fonksiyonlarına $x \in [0,a] \subset [0,\infty)\,, a > 0$ elemanları için yakınsaması düzgündür. Yani

$$\lim_{n\to\infty} D^*_{a_n,b_n}(f;x) = f(x)$$

sağlanır.

Şimdi ise $D^*_{a_n,b_n}$ operatörlerinin mutlak sürekli hemen her yerde türevi sınırlı salınımlı fonksiyonlara yaklaşım hızını inceleyelim.

$\gamma \geq 0$ için $DBV_\gamma(0,\infty)$ f, $(0,\infty)$ da tanımlı ve mutlak sürekli, f' türevi $(0,\infty)$ da var ve bu aralığın alt aralıklarında sınırlı salınımlı ve M sabit olmak üzere $|f(t)| \leq Mt^\gamma$, $t \to \infty$, şartını sağlayan fonksiyonların kümesi olsun. $f \in DBV_\gamma(0,\infty)$ fonksiyonları her $a > 0$ için g fonksiyonları $(0,\infty)$ sonlu her alt aralığında sınırlı salınımlı olduğunda

$$f(x) = \int_a^x g(t)dt + f(a),$$

gösterimine sahiptir.

$(0,\infty)$ un her sonlu alt aralığında sınırlı salınıma sahip olan f' fonksiyonu ve bir $x \in (0,\infty)$ için

$$(f')_x(t) = \begin{cases} f'(t) - f'(x-), & 0 \leq t < x \\ 0, & t = x \\ f'(t) - f'(x+), & x < t < \infty. \end{cases} \tag{6.6}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca $\bigvee_a^b((f')_x)$ de $(f')_x$ nin $[a,b]$ deki total salınımını göstersin. $D^*_{a_n,b_n}(f;x)$ operatörlerinin tanımından yararlanarak bu operatörleri aşağıdaki şekilde yeniden düzenleyebiliriz:

$$D^*_{a_n,b_n}(f;x) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\int_0^\infty P_{n,k-1}(t)\, f(t)\, dt + l_{n,0}(x)f(0)$$

$$= \int_0^\infty K_n(x,t)\, f(t)\, dt, \tag{6.7}$$

ve $K_n(x,t)$ burada,

$$K_n(x,t) = \frac{a_n}{b_n}\sum_{k=1}^{\infty} l_{n,k}(x)\, P_{n,k-1}(t) + l^*_{n,0}(x)\,\delta(t)$$

şeklinde tanımlı ve

$$K_n(x,0) = 0$$

özelliğini sağlayan çekirdek fonksiyonudur ve $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonunu gösterir. Eğer $\beta_n(x,s) = \int_0^s K_n(x,t)\, dt$, alırsak

$$\beta_n(x,\infty) = \int_0^\infty K_n(x,t)\, dt = 1$$

elde ederiz.

6.1.3. Lemma

Her $0 < x < \infty$ için,

$$(a)\ \beta_n(x,t) = \int_0^t K_n(x,u)du \leq \left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)(x-t)^{-2}, 0 \leq t < x,$$

ve

$$(b)\ 1-\beta_n(x,t) \leq \left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)(t-x)^{-2}, x < t < \infty,$$

İspat

Eş. 6.7 gösterimini ve Not 6'yı kullanarak kolaylıkla

$$\beta_n(x,t) = \int_0^t K_n(x,u)du \leq \int_0^t \left(\frac{x-u}{x-t}\right)^2 K_n(x,u)du$$

$$= \frac{1}{(x-t)^2}\int_0^t K_n(x,u)(u-x)^2 dt \leq \mu_{n,2}(x)\,(x-t)^{-2}, 0 \leq t < x,$$

olduğu görülür. Benzer olarak da

$$1-\beta_n(x,t) = \int_t^\infty K_n(x,u)du \leq \int_t^\infty \left(\frac{x-u}{t-x}\right)^2 K_n(x,u)du$$

$$= \frac{1}{(t-x)^2}\int_t^\infty (x-u)^2 K_n(x,u)du \leq (t-x)^{-2}\mu_{n,2}(x),$$

olarak bulunur.

Şimdi de mutlak sürekli türevi sınırlı salınımlı fonksiyonlara operatörlerin yaklaşım derecesi için asıl teoremi verelim.

6.1.4. Teorem

$f \in DBV_\gamma(0,\infty)$, $\gamma \in \mathbb{N}$ olsun. O halde her $x \in (0,\infty)$ ve yeterince büyük n değerleri için

$$\left|(D^*_{a_n,b_n}f)(x)-f(x)\right|\leq\left(\frac{|f'(x+)-f'(x-)|}{2}+|f'(x+)|\right)\left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)^{1/2}$$

$$+\left(\sum_{v=1}^{[\sqrt{n}]}\bigvee_{x-x/\sqrt{v}}^{x+x/\sqrt{v}}((f')_x)+\frac{1}{x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x)\right|\right)\left(3\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$+\frac{x}{\sqrt{n}}\bigvee_{x-x/\sqrt{n}}^{x+x/\sqrt{n}}((f')_x)+c_{\gamma,x} \tag{6.8}$$

sağlanır ve burada $c_{\gamma,x}=2^{\gamma}M\sup_{n\in\mathbb{N}}\sqrt{D^*_{a_n,b_n}\left((e_1-xe_0)^{2\gamma};x\right)}$ şeklindedir.

İspat

Eş. 6.2 ile verilen operatörlerin tanımı ve Eş. 6.7 gösteriminden yararlanarak

$$D^*_{a_n,b_n}(f;x)-f(x)=\int_0^{\infty}K_n(x,t)\left(f(t)-f(x)\right)dt$$

$$=\int_0^{\infty}K_n(x,t)\left(\int_x^t f'(u)du\right)dt \tag{6.9}$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca $f'(u)\in DBV_{\gamma}(0,\infty)$ fonksiyonu

$$f'(u)=\frac{f'(x+)+f'(x-)}{2}+(f')_x(u)+\frac{f'(x+)+f'(x-)}{2}sgn(u-x)$$

$$+\left[f'(x)-\frac{f'(x+)+f'(x-)}{2}\right]\delta_x(u) \tag{6.10}$$

eşitliğini sağlar. Burada $\delta_x(u)$ fonksiyonu

$$\delta_x(u) = \begin{cases} 1, & u = x \\ 0, & u \neq x \end{cases}$$

ile tanımlanan karakteristik fonksiyondur ve işaret fonksiyonu $sgn(u) = \begin{cases} 1, & u > 0 \\ 0, & u = 0 \\ -1, & u < 0 \end{cases}$ ile verilen fonksiyondur. Eş. 6.10, Eş. 6.9'da uygulanırsa,

$$D^*_{a_n,b_n}(f;x) - f(x) = \int_0^\infty \left(\int_x^t f'(u)du \right) K_n(x,t)dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^t \left(\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} + (f')_x(u) \right) du \right) K_n(x,t)dt$$

$$+ \int_0^\infty \left(\int_x^t \left(\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} sgn(u-x) \right) du \right) K_n(x,t)dt$$

$$+ \int_0^\infty \left(\int_x^t \left[f'(x) - \frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \right] \delta_x(u)du \right) K_n(x,t)dt$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \tag{6.11}$$

olsun. Yani buradaki integrallere sırasıyla I_1, I_2 ve I_3 diyelim. Öncelikle I_3 integralini hesaplayalım. Burada karakteristik fonksiyonun özelliğinden $\int_x^t \delta_x(u)du = 0$ olduğunu kullanarak I_3 integralini

$$I_3 = \int_0^\infty \left(\int_x^t \left[f'(x) - \frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \right] \delta_x(u)du \right) K_n(x,t)dt = 0$$

şeklinde hesaplayabiliriz.

Şimdi I_2 integraline bakalım.

$$|I_2| = \left| \int_0^\infty \left(\int_x^t \frac{f'(x+) - f'(x-)}{2} sgn(u-x) du \right) K_n(x,t) dt \right|$$

$$= \left| \frac{f'(x+) - f'(x-)}{2} \right| D^*_{a_n,b_n}(|t-x|, x)$$

elde edilir. Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarak ve Not 6'yı dikkate alarak

$$|I_2| \leq \frac{|f'(x+) - f'(x-)|}{2} \left(D^*_{a_n,b_n}((t-x)^2, x) \right)^{1/2} = \frac{|f'(x+) - f'(x-)|}{2} \sqrt{\mu_{n,2}(x)}$$

elde edilir. I_1 integralini hesaplamak için ise

$$I_1 = \int_0^\infty \left(\int_x^t \left(\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} + (f')_x(u) \right) du \right) K_n(x,t) dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_x^t \left(\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \right) du \right) K_n(x,t) dt + \int_0^\infty \left(\int_x^t (f')_x(u) du \right) K_n(x,t) dt$$

$$= I_{11} + I_{12}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$I_{11} = \int_0^\infty \left(\int_x^t \left(\frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \right) du \right) K_n(x,t) dt$$

$$= \frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \int_0^\infty \left(\int_x^t du \right) K_n(x,t) dt = \frac{f'(x+) + f'(x-)}{2} \mu_{n,1}(x) = 0$$

elde edilir. Buraya kadar bulduklarımızı Eş. 6.11'de yerine yazarsak

$$|D_{a_n,b_n}(f;x) - f(x)| \leq \frac{|f'(x+) - f'(x-)|}{2} \sqrt{3x \frac{b_n}{a_n}} + |I_{12}| \tag{6.12}$$

elde ederiz. Burada son olarak I_{12} yi hesaplarsak teoremin ispatını tamamlamış olacağız. Bunun için

$$I_{12} = \int_0^x \left(\int_x^t (f')_x(u)du \right) K_n(x,t)dt + \int_x^{2x} \left(\int_x^t (f')_x(u)du \right) K_n(x,t)dt$$

$$+ \int_{2x}^{\infty} \left(\int_x^t (f')_x(u)du \right) K_n(x,t)dt = A(f',x) + B(f',x) + C(f',x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $A(f',x)$, $B(f',x)$ ve $C(f',x)$ genelleştirilmiş integrallerdir. $d_t\beta_n(x,t) = \frac{d}{dt}\int_0^t K_n(x,t)dt$ olduğunu kullanarak ve kısmi integrasyondan faydalanarak

$$|A(f',x)| = \int_0^x |(f')_x(t)|\, \beta_n(x,t)dt$$

$$= \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} |(f')_x(t)|\, \beta_n(x,t)dt + \int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x} |(f')_x(t)|\, \beta_n(x,t)dt = I_{A1} + I_{A2}$$

yazabiliriz. $(f')_x$ tanımı ve $(f')_x(x) = 0$ olmasından

$$I_{A1} = \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} |(f')_x(t) - (f')_x(x)|\, \beta_n(x,t)dt$$

elde edilir. Şimdi $(f')_x$ in,

$$|(f')_x(t)| = |(f')_x(t) - (f')_x(x)| \le \bigvee_t^x ((f')_x) \tag{6.13}$$

özelliği ve Lemma 6.1.3. (a) maddesinden,

$$I_{A1} \le \left(3x\frac{b_n}{a_n}\right) \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} \bigvee_t^x ((f')_x)\, \frac{dt}{(x-t)^2},$$

yazılır. Burada $t = x - x/u$ alırsak

$$I_{A1} \le \left(3x\frac{b_n}{a_n}\right) \int_0^{x-\frac{x}{\sqrt{n}}} \left(\bigvee_t^x (f')_x\right) \frac{1}{(x-t)^2}dt$$

$$= \left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)\int_0^{\sqrt{n}}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{u}}^{x}(f')_x\right)\frac{du}{x}$$

$$\leq \left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\int_{\nu}^{\nu+1}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{u}}^{x}(f')_x\right)du = \left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{\nu}}^{x}(f')_x\right)$$

elde edilir. $\beta_n(x,t) \leq 1$ olmasını ve Eş. 6.13'ü kullanarak

$$I_{A2} \leq \int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}\left(\bigvee_{t}^{x}(f')_x\right)dt \leq \left(\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}(f')_x\right)\int_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}dt = \frac{x}{\sqrt{n}}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}(f')_x\right)$$

bulunur. Burada I_{A1} ve I_{A2} yi yerine yazarsak

$$|A(f',x)| \leq \left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{\nu}}^{x}(f')_x\right) + \frac{x}{\sqrt{n}}\left(\bigvee_{x-\frac{x}{\sqrt{n}}}^{x}(f')_x\right),$$

bulunur. Şimdi $B(f',x)$ integralini hesaplayalım;

$$|B(f',x)| = \left|\int_x^{2x}\left(\int_x^t (f')_x(u)du\right)K_n(x,t)dt\right|$$

$$= \left|\int_x^{2x}\left(\int_x^t (f')_x(u)du\right)d_t\left(1-\beta_n(x,t)\right)\right|$$

$$\leq \left|\int_x^{2x}(f')_x(u)du\right|\left|1-\beta_n(x,2x)\right| + \int_x^{2x}\left|(f')_x(t)\right|\left|1-\beta_n(x,t)\right|dt = I_{B1}+I_{B2}$$

elde edilir. Burada Lemma 6.1.3. (b)'den

$$I_{B1} \leq \left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\frac{1}{x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x)\right|$$

yazabiliriz.

$$I_{B2}=\int_{x}^{2x}\left|(f')_x(t)\right|(1-\beta_n(x,t))\,dt=\left(\int_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}+\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}\right)\left|(f')_x(t)\right|(1-\beta_n(x,t))\,dt$$

$$=I_{B2i}+I_{B2ii}$$

ve I_{B2i} de $1-\beta_n(x,t)\leq 1$ olmasından yararlanarak,

$$I_{B2i}=\int_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}\left|(f')_x(t)\right|(1-\beta_n(x,t))\,dt\leq\frac{x}{\sqrt{n}}\left(\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x\right)$$

elde edilir. I_{B2ii} yi hesaplamak için Lemma 6.1.3. (b)'den

$$I_{B2ii}=\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}\left|(f')_x(t)\right|(1-\beta_n(x,t))\,dt\leq\left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\left(\bigvee_{x}^{t}(f')_x\right)dt$$

bulunur ve burada $t=x+\frac{x}{u}$ alırsak

$$I_{B2ii}\leq\left(3x\frac{b_n}{a_n}\right)\int_{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}^{2x}(t-x)^{-2}\bigvee_{x}^{t}((f')_x)\leq\left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\left(\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x\right)$$

elde edilir. O halde

$$|B(f',x)|\leq\left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\frac{1}{x}\left|f(2x)-f(x)-xf'(x)\right|$$

$$+\frac{x}{\sqrt{n}}\left(\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x\right)+\left(3\frac{b_n}{a_n}\right)\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{n}]}\left(\bigvee_{x}^{x+\frac{x}{\sqrt{n}}}(f')_x\right)$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi ise son integrali hesaplayalım.

$$|C(f',x)|=\left|\int_{2x}^{\infty}\left(\int_{x}^{t}(f')_x(u)du\right)K_n(x,t)dt\right|$$

$$= \left| \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left(f(t) - f(x) - (t-x) f'(x+) \right) dt \right|$$

$$\leq \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left| f(t) - f(x) \right| dt + \left| f'(x+) \right| \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left| t - x \right| dt$$

$$\leq \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left| f(t) \right| dt + \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left| f(x) \right| dt + \left| f'(x+) \right| \left(D^{*}_{a_n,b_n} \left((t-x)^2 ; x \right) \right)^{1/2}$$

$$\leq \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) M t^{\gamma} dt + \left| f(x) \right| \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) dt + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x)$$

için $t \leq 2(t-x)$ ve $t \geq 2x$ için $x \leq t - x$ olmasından ve Not 6'dan;

$$\left| C(f',x) \right| \leq M \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) t^{\gamma} dt + \left| f(x) \right| \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) dt + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x)$$

$$\leq M \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left(2(t-x) \right)^{\gamma} dt + \left| f(x) \right| \int_{2x}^{\infty} \frac{(t-x)^2}{x^2} K_n(x,t) dt + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x)$$

$$= M 2^{\gamma} \int_{2x}^{\infty} K_n(x,t) \left(t - x \right)^{\gamma} dt + \frac{\left| f(x) \right|}{x^2} \int_{2x}^{\infty} (t-x)^2 K_n(x,t) dt + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x)$$

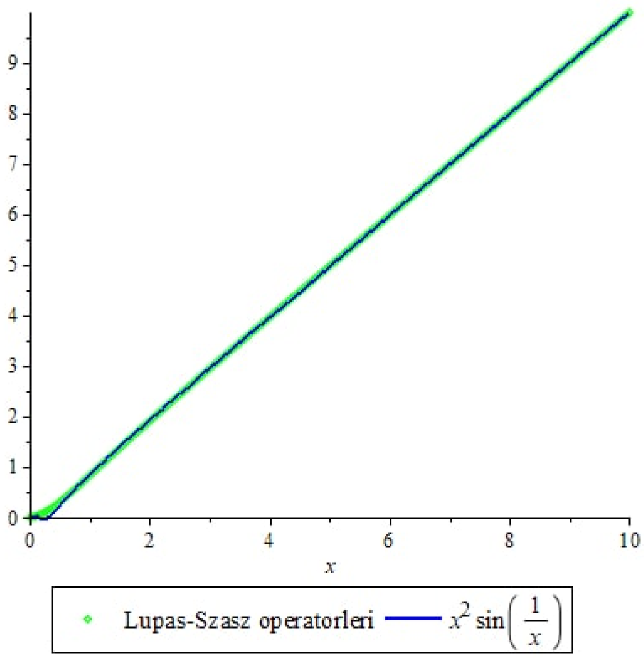
$$\leq c_{\gamma,x} + \frac{\left| f(x) \right|}{x^2} \mu_{n,2}(x) + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x) \leq c_{\gamma,x} + \frac{\left| f(x) \right|}{x^2} \mu_{n,2}(x) + \left| f'(x+) \right| \mu_{n,2}^{1/2}(x)$$

elde edilir. Burada $c_{\gamma,x} = 2^{\gamma} M \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{D^{*}_{a_n,b_n}\left((e_1 - xe_0)^{2\gamma}; x\right)}$ dır. $A(f',x)$, $B(f',x)$ ve $C(f',x)$ yi ve Eş. 6.12 ile beraber göz önüne aldığımızda Eş. 6.8 elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

6.2. Örnekler

Örnek

Şekil 6.1'de, $n = 20$ için $(a_n) = (n)$ ve $(b_n) = (\ln n)$ dizileri alınarak $D^*_{a_n,b_n}$ operatörlerinin (yeşil) $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ her yerde türevlenebilir ve kapalı alt aralıklarda her $x > 0$ için sınırlı salınıma sahip fonksiyona (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.



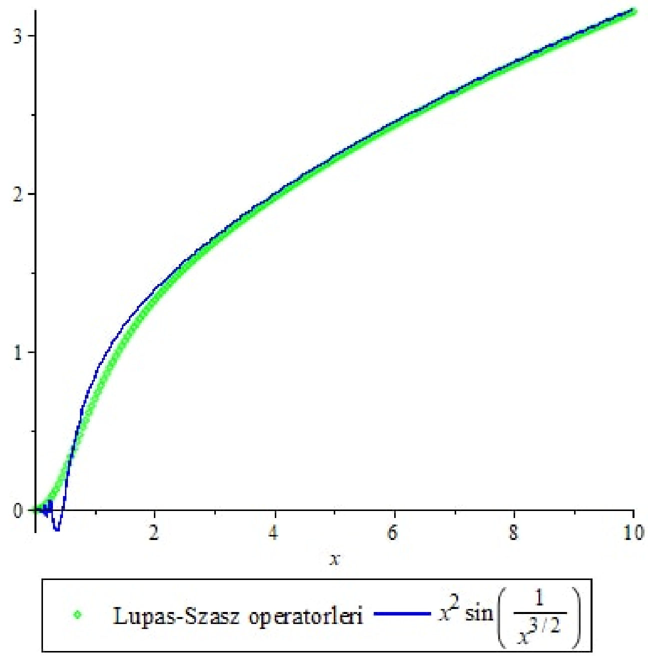
Şekil 6.1. $D^*_{a_n,b_n}$ nin her yerde türevlenebilir, kapalı alt aralıkta sınırlı salınıma sahip fonksiyona yaklaşımı

Örnek

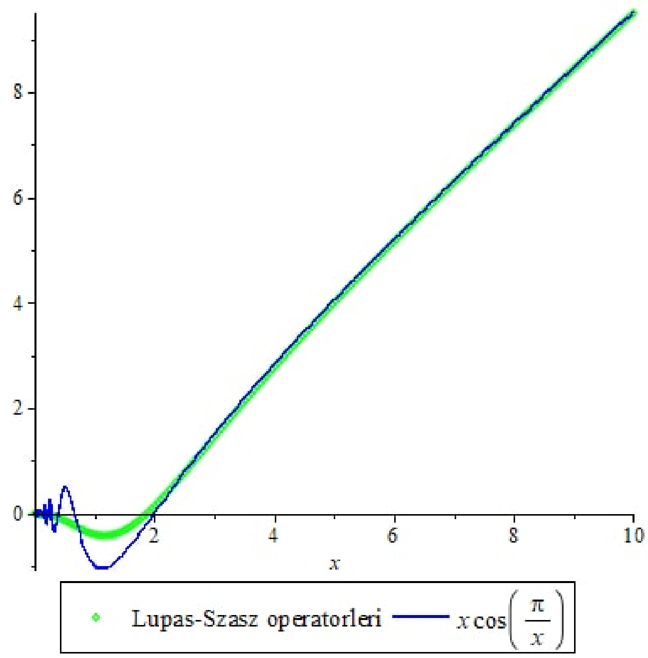
Şekil 6.2'de $n = 20$ için $(a_n) = (n)$ ve $(b_n) = (\ln n)$ dizileri alınarak $D^*_{a_n,b_n}$ operatörlerinin (yeşil) $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ türevli ve sınırlı salınımlı fakat türev fonksiyonu sınırsız fonksiyona (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.

Örnek

Şekil 6.3'te, $n = 20$ için $(a_n) = (n)$ ve $(b_n) = (\ln n)$ dizileri alınarak $D^*_{a_n,b_n}$ operatörlerinin (yeşil) $f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ sürekli fakat sınırlı salınımlı olmayan fonksiyonuna (mavi) yaklaşımı gösterilmiştir.



Şekil 6.2. Türevli ve sınırlı salınımlı fakat türev fonksiyonu sınırsız fonksiyona yaklaşım



Şekil 6.3. Sürekli fakat sınırlı salınımlı olmayan fonksiyona yaklaşım

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Operatör dizilerinin genelleştirilmesi ve farklı yöntemlerin kullanılması yoluyla çeşitli özelliklere sahip fonksiyonlara yakınsamada en iyi oranın verilmesi problemi yaklaşım teorinin önemli bir problemidir. Bu çalışmada (a_n) ve (b_n) sonsuz dizileri yardımıyla ve Szász-Lupaş taban fonksiyonlarını kullanılarak yeni bir toplamsal-integral tip operatör tanımlandı ve farklı fonksiyon uzaylarında yaklaşım özellikleri elde edildi.

Tezin her bir bölümünde farklı bir genel tip operatör tanımlanmış olup, bu operatörlerin bazılarının özel durumları literatürde yer almaktadır. Dolayısıyla bulunan sonuçlar literatürde bir kısmı mevcut olan operatörlere ilişkin sonuçları kapsayan orjinal sonuçlardır. Böylece elde ettiğimiz yaklaşım hata oranları seçtiğimiz dizilere bağlı olarak mevcut sonuçlardan daha iyidir ve seçilen dizilere bağlı olarak daha küçüktür. Bu durum yakınsaklık oranlarının görsel olarak verildiği grafiklerde görülebilir.

Szász tipi operatörlerin Jain genelleştirmeleri literatürde önemli bir yer tutar. Tezde tanımlamış olduğumuz genel Lupaş-Szász taban fonksiyonları kullanılarak tanımlanan toplamsal-integral tip operatörlerin Jain genelleştirilmesi ve bunların yaklaşım özellikleri verilerek bu sonuçlar iki boyutlu uzaylara genelleştirildi.

Sürekli fonksiyonlardan daha geniş bir küme olan Bögel sürekli fonksiyonlar uzayında yaklaşımı incelemek için iki değişkenli genelleştirilmiş Jain tip operatörlerin GBS operatörleri tanımlandı. Bögel sürekli fonksiyonlara karma süreklilik modülü cinsinden yaklaşım derecesi ve Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için yakınsaklık derecesine ilişkin teoremler verildi. Böylece sürekli fonksiyonlardan daha geniş bir küme olan Bögel sürekli fonksiyonlara bir genişletme elde edildi.

Elde edilen sonuçlar farklı taban fonksiyonları cinsinden tanımlanarak benzer yaklaşım operatörleri için çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Hacısalihoğlu, H., Hacıyev, A. (1995). *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara,1-20.

2. Bernstein, S. N., (1943). On the domains of convergence of polinomials (in Russian). *Izvestiya Akademii Nauk Seriya Matematicheskaya*, 7, 49-88.

3. Lupaş, A. (1995). *The approximation by some positive linear operators.* In Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory, Akademie Verlag, Berlin, 201-229.

4. Agratini, O. (1999). On a sequence of linear and positive operators. *Facta Univarsitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 14, 41-48.

5. Agratini, O. (2013). Bivariate positive operators in polynomial weighted spaces. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 2013(2013), 47-56.

6. Erençin, A., Taşdelen, F. (2007). On a family of linear and positive operators in weighted spaces. *JIPAM. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 8(2), 1-7.

7. Erençin, A., Taşdelen, F. (2009). On certain Kantorovich type operators. *Fasciculi Mathematici*, 41, 65-71.

8. Govil, N. K., Gupta and V., Soybaş, D. (2013). Certain new classes of Durrmeyer type operators. *Applied Mathematics and Computation*, 225, 195-203.

9. Jain, G. (1972). Approximation of functions by a new class of linear operators. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 13(3), 271-276.

10. Jain, G. C., Pethe, S. P. (1977). On the generalization of Bernstein and Szász Mirakjan operators. *Nanta Mathematica*, 10, 185-193.

11. Pethe, S. P., Jain, G. C. (1972). Approximation of Functions by a Bernstein-Type Operator, *Canadian Mathematical Bulletin* , 15(4), 551-557.

12. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the space of continous functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.)*, 90, 961-964.

13. Agratini, O. (2000). On the rate of convergence of a positive approximation process. *Nihonkai Mathematical Journal*, 11, 47-56.

14. Altomare, F., Campiti, M. (1994). Korovkin-type approximation theory and its applications. *de Gruyter Studies in Mathematics*, Berlin, Boston: De Gruyter. 218-373.

15. Anastassiou, G. A., Gal, S. G. (2000). *Approximation Theory: Moduli of continuity and global smoothness preservation*, Boston: Birkhäuser,1-81.

16. Butzer, P. L., Berens, H. (1967). *Semi-Groups of Operators and Approximation*, New York: Springer, 157-225.

17. Gupta, V., Agarwal, R. P. (2014). *Convergence Estimates in Approximation Theory*, New York: Springer, 68-69.

18. Özarslan, M. A., Duman, O. (2010). Local approximation behavior of modified SMK operators, *Miskolc Mathematical Notes*, 11(1),87-89.

19. Lenze, B. (1988). On Lipschitz-type maximal functions and their smoothness spaces, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Indagationes Mathematicae*, 50(1), 53-63.

20. Ispir, N., Atakut, Ç. (2002). Approximation by modified Szász-Mirakjan operators on weighted spaces. *Proceedings Indian Academy of Science Mathematical Sciences*, 112(4), 571-578.

21. Gupta, V., Greubel, G. C. (2015). Moment estimations of new Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators. *Applied Mathematics and Computation*, 271, 540-547.

22. Wang, Z.X., Guo, D.R.(1989).*Special Functions*, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 296-335.

23. Volkov, V.I. (1957). On the convergence of sequences of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables,*Russian Doklady Akademii Nauk, SSSR (N.S.)*, 115, 17-19.

24. Bögel, K. (1934). Mehrdimensionale differentiation von funtionen mehrerer veränderlicher. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 170, 197-217.

25. Bögel, K. (1935). Über die mehrdimensionale differentiation, Integration und Beschränkte Variation. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 173, 5-29.

26. Badea, C., Badea, I. and Gonska, H. H. (1986). A test function theorem and approximation by pseudo polynomials. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 34, 53-64.

27. Badea, C., Cottin, C. (1990). Korovkin-type theorems for generalized boolean sum operators. *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Approximation Theory, Kecskemet (Hungary)*, 58, 51-68.

28. Barbosu, D. (2003). GBS operators of Schurer-Stancu type. *Annals of the University of Craiova - Mathematics and Computer Science Series*, 30(2), 34-39.

29. Barbosu, D., Barbosu, M. (2002). On the sequence of GBS operators of Stancu-type. *Buletinul de Ştiinţ al Universitatea din Baia Mare Seria B. Fascicola Matematică - Informatică*, 18(1), 1-6.

30. Miclaus, D. (2013). On the GBS Bernstein-Stancu's type operators, *Creative Mathematics and Informatics*, 22(1), 73-80.

31. Pop, O. T. (2007). Approximation of B-differentiable functions by GBS operators, *Analele Universităţii din Oradea - Fascicola Matematică*, XIV, 15-31.

32. Pop, O.T., Barbosu, D. (2008). GBS operators of Durrmeyer-Stancu type, *Miskolc Mathematical Notes*, 9(1), 53-60.

33. Agrawal, P. N., Ispir, N. (2016). Degree of approximation for bivariate Cholodowsky-Szász-Charlier type operators. *Results in Mathematics*, 69(3), 369-385.

34. Bögel, K. (1962). Über die mehrdimensionale differentiation. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 65, 45-71.

35. Badea, I. (1973). Modulus of continuity in Bögel sense and some applications for approximation by a Bernstein-type operator. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Seria Matematics-Mechanics,(Romanian)*, 18(2), 69-78.

36. Bojanic, R. (1979). An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation *Publications de l'Institut Mathématique (Belgrade)*, 26 (40), 57-60.

37. Bojanic, R., Vuilleumier, M. (1981). On the rate of convergence of Fourier-Legendre series of functions of bounded variation. *Journal of Approximation Theory*, 31(1), 67-79.

38. Herzog, F., Hill, J. D. (1946). The Bernstein polynomials for discontinuous functions, *American Journal of Mathematics*, 68, 109-124.

39. Cheng, F.(1983). On the rate of convergence of Bernstein polynomials of functions of bounded variation, *Journal of Approximation Theory*, 39(3), 259-274.

40. Balcı, M.(2009) *Reel Analiz*, Ankara: Balcı Yayınları, 141.

41. Nasibov, F. H.(2013) *Reel değişkenli fonksiyonlar teorisi* , Ankara: Nobel Yayıncılık.

42. Natanson, I. P. (1964). *Theory of functions of a real variable*, New York: Frederick Ungar Publishing Company, 204-270.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	MANAV, Nesibe
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	29/03/1988 Muğla
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0 534 496 32 33
e-mail	:	nmanav@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Doktora	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	2013
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi/Matematik Eğt.	2010
Lise	Ortaca Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Artvin Çoruh Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2011-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Ispir, N., Manav, N. (2014). Approximation by the bivariate complex Baskakov-Stancu operators. *Communications Series A1: Mathematics and Statistics*, 63(2), 23-39.

2. Manav, N. and İspir, N. (2016). Approximation by blending type operators based on Szász-Lupaş basis functions. *General Mathematics*, 24(1/2), 105-119.

3. Ispir, N., Manav, N. (2018). Approximation by the summation integral type operators based on Lupaş-Szász basis functions. *Journal of Sciences and Arts*, 4(45), 853-868.

4. Manav, N. and İspir, N. (2019). Degree of approximation of genuine Lupaş-Durrmeyer operators. *Tbilisi Mathematical Journal*, 12(2), 119-135.
5. Manav, N. and İspir, N. (2021). Summation-integral type operators based on Lupaş-Jain functions. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 45(2), 309-322.

Uluslararası Bildiriler

1. Ispir, N., Manav, N. (2016, 26-29 May). Approximantion by blending type operators based on Lupaş-Szász Functions. *The 12th International Conference on Approximation Theory and its Applications-ICATA*, Sibiu, Romania.
2. Manav, N. (2017, 17 July). Approximation by GBS operators of Lupaş-Durrmeyer type based on Jain function. Lucian Blaga University of Sibiu, Romania.
3. Manav, N. (2017, 1-4 August). Blending type approximation by summation-integral type operators based on Lupaş-Jain functions. *Young Researchers in Mathematics-2017*, University of Kent, Canterbury, UK.
4. Manav, N. (2017, 10 August). An Introduction to Approximation Theory. National University of Ireland Galway, Ireland.
5. Manav, N., Ispir, N., (2017, 14-18 August). Summation-Integral Type Operators Based on Lupaş-Jain Functions. *The 11th Congress of International Society for Analysis, its Applications and Computations (ISAAC)*, Växjö, Sweden.

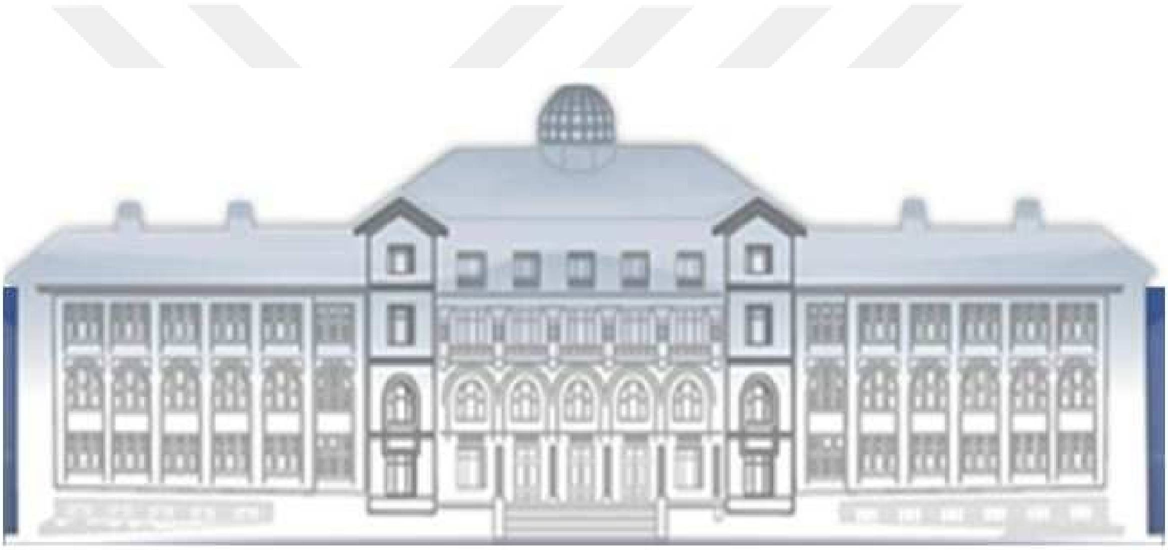
Ulusal Bildiriler

1. Ispir, N., Manav, N.(2015, 11-12 Haziran). Durrmeyer-Tip Operatörler ile Yaklaşım. *10. Ankara Matematik Günleri*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
2. Manav, N. (2017, 25 Mayıs). Lupaş-Jain Tabanlı Durrmeyer Operatörleri ile Ağırlıklı Yaklaşım. *12. Ankara Matematik Günleri*, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
3. Manav, N. (2018, 27-28 Nisan). Lupaş-Jain Tabanlı Öz-Operatörlerle Yaklaşım. *13. Ankara Matematik Günleri*, TOBB ETÜ, Ankara.
4. Manav, N. (2018, 12-15 Eylül). Lupaş-Szász Tabanlı Operatörlerle Yaklaşım. *31. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Erzincan.

Hobiler

Teknoloji: Office, Word, Excel, Scientific, Maple, Latex, C++, Web.

Spor: Koşu, Yüzme, Savunma Sporları, Rugby, Eşli Danslar.



GAZİ GELECEKTİR...