T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

$(2+1)$ BOYUTTA GRAVİTASYONEL DALGALAR

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Ocak 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

$(2+1)$ BOYUTTA GRAVİTASYONEL DALGALAR

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Ocak 2019

ANTALYA

T.C.

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$(2+1)$ BOYUTTA GRAVİTASYONEL DALGALAR

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

FİZİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Bu tez 24/01/2019 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf SUCU (Danışman)
Prof. Dr. Nuri ÜNAL
Prof. Dr. Mehmet CENKCİ
Doç. Dr. Devrim YAZICI
Doç. Dr. Özcan SERT

ÖZET

$(2+1)$ BOYUTTA GRAVİTASYONEL DALGALAR

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Danışman : Doç. Dr. Yusuf SUCU
Ocak 2019; 89 sayfa

Keşfedilmesi çok uzun zaman alan gravitasyonel dalgalar, Büyük Patlama'dan bu yana evrenin birçok sırrının açıklamasına katkıda bulunacağı düşüncesinden dolayı büyük bir öneme sahiptir. LIGO başta olmak üzere birçok deney grubunun (VIRGO, LISA, vb.) yaptığı çalışmaların yanı sıra, birçok teorik çalışma da bu dalgaların varlığının araştırılmasına katkı sağlamıştır. Bu dalgaların özelliklerinin araştırılması oldukça önemlidir çünkü kaynakları ile ilgili çok önemli bilgiler içerir. Ayrıca karanlık madde ve karanlık enerjiyi de açıklaması beklenen gravitasyonel dalgalar çeşitli alternatif teorilerin de ilgi odağı konumundadır. Bu bağlamda, bu tezde (2+1) boyutta alternatif gravitasyonel kuramlar çerçevesinde, yeni gravitasyonel dalga zeminleri ve bu zeminlerin spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 parçacık alanlarıyla etkileşimleri ve bu teoriler kapsamında gravitasyonel dalgaların kuasinormal frekansları incelenecektir.

ANAHTAR KELİMELER: Burulma, Dirac denklemi, Gravitasyonel dalga, Kuasinormal frekans, Spin-1, Spin-0, Teleparalel kütleçekim teorisi

JÜRİ: Doç. Dr. Yusuf SUCU

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Doç. Dr. Devrim YAZICI

Doç. Dr. Özcan SERT

ABSTRACT

GRAVITATIONAL WAVES IN $(2+1)$ DIMENSIONS

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

PhD Thesis, in Physics Department
Supervisor : Doç. Dr. Yusuf SUCU
January 2019; 89 pages

The gravitational waves, which have been remained undiscovered for a long time, are of great importance since it is thought that they contribute to the explanation of many secrets of the universe originating from Big Bang. As well as there are studies of many experimental research groups (VIRGO, LISA, etc.), especially the LIGO, many theoretical studies have contributed to the existence of these waves. It is very important to investigate the properties of these waves because these contain crucial information resources of gravitational waves. Besides, the gravitational waves, which are expected to explain dark matter and dark energy, are located in the focus of the various alternative theories. In this thesis, new gravitational wave backgrounds and their interactions with the field of the spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 particles are investigated in the (2+1) dimensional spacetimes within the framework of the alternative gravitational theories. Within the scope of these theories, the quasinormal frequencies of the gravitational waves are considered.

KEYWORDS: Gavitational wave, Quasinormal frequencies, Dirac equation, Teleparallel gravity, Spin-1, Torsion, Spin-0

COMMITTEE: Doç. Dr. Yusuf SUCU

Prof. Dr. Nuri ÜNAL

Prof. Dr. Mehmet CENKCİ

Doç. Dr. Devrim YAZICI

Doç. Dr. Özcan SERT

ÖNSÖZ

Gravitasyonel dalgaların keşfi, evren tarihinin karanlık dönemlerini aralamak için atılmış büyük bir adımdır. Bu dalgalar, madde ile etkileşime girmediği için güçlerinde kayıp olmadan evrende yayılarak günümüze kadar gelebilirler. Dolayısıyla evrenin ilk oluşum anındaki gravitasyonel dalgaların da hala uzayda dolaştığı ve Büyük Patlama hakkında bilgi vereceği tahmin ediliyor. Ayrıca kozmolojinin önemli araştırma konularından olan karanlık enerji ve karanlık maddeyi de açıklaması beklenen bu dalgaların, alternatif kütle çekim teorileri kapsamında, fermiyonik, skaler ve bozonik alanlarla etkileşimlerinin incelenmesi önemli katkılar sağlayacaktır.

Bu tezin belirlenmesi esnasında, bilgi ve yardımını esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Yusuf SUCU'ya, tez sürecinde bilgi ve önerileriyle katkıda bulunan sayın Dr. Ganim GEÇİM'e, tez yazma sürecimde maddi manevi her zaman yanımda olan değerli eşim Eren DOĞAN başta olmak üzere aileme, bu süreçte dostluklarının yanı sıra öneri ve yardımlarıyla katkıda bulunan sayın Dr. Esra KENDİR ve Dr. Atakan TEKGÜL'e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca, tez izleme komite üyeleri sayın Prof. Dr. Nuri ÜNAL ve Prof. Dr. Mehmet CENKCİ'ye değerli yorum ve katkıları için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
AKADEMİK BEYAN vii
SİMGELER VE KISALTMALAR viii
ŞEKİLLER DİZİNİ x
ÇİZELGELER DİZİNİ xi
1. GİRİŞ 1
2. KAYNAK TARAMASI 4
2.1. Gravitasyonel Dalga 4
2.2. Gravitasyonel Dalganın Polarizasyon Durumları 7
2.3. Gravitasyonel Dalganın Kuadrupol Doğası 8
2.3.1. Elektrik ve manyetik dipol 8
2.4. Gravitasyonel Dalgaların Kaynağı ve Tipleri 9
2.4.1. Sürekli gravitasyonel dalgalar 10
2.4.2. İnspiral gravitasyonel dalgalar 10
2.4.3. Patlama (burst) gravitasyonel dalgalar 10
2.4.4. Stokastik gravitasyonel dalgalar 10
2.5. Kuasinormal Modlar 10
2.6. Einstein-Hilbert Eylemi 11
2.7. Teleparalel Teori 12
2.7.1. Gravitasyon için bir ayar teorisi 13
2.7.2. Tutarlılık konuları 13

2.7.3. Gravitasyonel enerji-momentum yoğunluğu..... 14
2.8. (2+1) Boyutlu Uzay-Zamanda Relativistik Dalga Denklemleri 14
2.8.1. Klein-Gordon denklemi..... 14
2.8.2. Dirac denklemi..... 15
2.8.3. Spin-1 denklemi 16
3. MATERYAL VE METOT 17
3.1. (2+1) Boyutta Gravitasyonel Dalga Zemini..... 17
3.2. Heun Denklemleri 19
3.2.1. Genel Heun denklemi 19
3.2.2. Konfleunt Heun denklemi 19
3.2.3. Bikonfluent Heun denklemi..... 21
3.2.4. Double konfluent Heun denklemi 21
3.2.5. Trikonfluent Heun denklemi..... 21
3.3. Noether Teoremi 22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 23
4.1. (2+1) Boyutlu Gravitasyonel Alanın Fermiyonik Alanla Etkileşimi..... 23
4.2. (2+1) Boyutlu Gravitasyonel Alanın Fermiyonik Alanla Minimal Olmayan Etkileşimi 25
4.3. Teleparalel Kütleçekim Teorisindeki Burulma Skalerinin Hesaplanması 27
4.4. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın Teleparalel Kütleçekim Alanı İle Minimal Etkileşimi 28
4.5. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Olmayan Etkileşimi.. 30
4.6. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın F(T) Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Etkileşimi..... 32
4.6.1. F(T)= $\gamma\, T^2$ modeli 32
4.6.2. F(T)= $T + \gamma\, T^2$ modeli..... 34

4.7. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Skaler Alanın F(T) Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Etkileşimi..... 36

4.7.1. F(T)= $\gamma\, T^2$ modeli 36

4.7.2. F(T)= $T + \gamma\, T^2$ modeli 40

4.8. Kuasinormal Frekansların Hesaplanması 43

4.8.1. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-$\frac{1}{2}$ kuasinormal frekans hesabı 43

4.8.2. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-1 kuasinormal frekans hesabı 56

4.8.3. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-0 kuasinormal frekans hesabı 62

4.9. Gravitasyonel Dalgayla Moleküler Potansiyellerin Etkileşimi ve Kuasinormal Frekans Hesabı 69

4.9.1. Kratzer potansiyeli 69

4.9.2. Lennard-Jones potansiyeli 74

5. SONUÇLAR 78

6. KAYNAKLAR 81

ÖZGEÇMİŞ

AKADEMİK BEYAN

Doktora Tezi olarak sunduğum " $(2+1)$ Boyutta Gravitasyonel Dalgalar " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

24 / 01 / 2019

Semra GÜRTAŞ DOĞAN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

β^{μ}	Eğri uzay-zamanda Kemmer matrisleri
$e^{\mu}_{(i)}$	Üç ayaklar
g	Metrik tensörün determinantı
$g_{\mu\nu}$	Metrik tensör
$G_{\mu\nu}$	Einstein tensörü
$\Gamma^{\nu}_{\beta\mu}$	Christoffel sembolü
I	Birim matris
Φ	Skaler alan fonksiyonu
ψ	Dirac spinörü
Ψ	Spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik
R	Ricci skaleri
$R_{\mu\nu}$	Ricci tensörü
S	Klasik eylem fonksiyonu
d	Bir tek q nokta yük için dipol moment
L_{elec}, L_{many}	Güç yayınlanması (luminosity)
Γ_{μ}	Spin-1/2 için spin bağlantı katsayısı
Σ_{μ}	Spin-1 parçacığı için spin bağlantı katsayısı
η_{ij}	$(2+1)$ boyutlu düz uzay-zaman metrik tensörü
h_{ab}	Pertürbasyon terimi
η_{ab}	Düz uzay zaman metrik tensörü
σ^{μ}	$(2+1)$ boyutlu eğri uzay-zamanda Dirac matrisleri
$\overline{\sigma}^{\mu}$	Pauli matrisleri
$(\dot{})$	u'ya göre türev
$(')$	r'ye göre türev
z	Kırmızıya kayma
T	Burulma Skaleri

Kısaltmalar:

GD	Gravitasyonel dalgalar

TT	Enine-İzsiz (Transverse-Traceless)
KNM	Kuasinormal mod
KNF	Kuasinormal frekans
TKG	Topolojik kütleli gravitasyon
YKG	Yeni kütleli gravitasyon
DKP	Duffin-Kemmer-Petiau
PZD	Pulsar zamanlama dizisi
$LIGO$	Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory
$LISA$	Laser Interferometer Space Antenna

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Gravitasyonel dalganın polarizasyon durumları (Moore 2016)……8

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Metrik katsayıları A ve B için elde edilen değerler 43

Çizelge 4.2. Kuasinormal frekansların manyetik alanla değişimi 47

Çizelge 4.3. r'nin değerlerine karşılık kırmızıya kayma 48

Çizelge 4.4. Denklem (4.154)'te verilen metrik katsayıları ve I_2, H_2 ve HCl diatomik molekülleri için kuasinormal frekanslar 72

Çizelge 4.5. Denklem (4.155)'teki metrik katsayıları ve I_2, H_2 ve HCl diatomik molekülleri için kuasinormal frekanslar 74

1. GİRİŞ

Gravitasyonel dalgalar evrendeki en şiddetli ve en enerjik süreçlerden kaynaklanan uzay-zaman dokusunun titreşimleridir. Gravitasyonel dalgaların varlığı ilk olarak Einstein tarafından, 1916 yılında yayınladığı, Genel Görelilik teorisi ile ön görülmüştür (Einstein 1915). Buna göre; gravitasyonel dalgalar uzay-zaman eğriliğinde oluşan kırışıklığın(ripples) kaynağından dışarıya doğru yayılması veya hareketli bir kütlenin enerjisini ışıma yoluyla dışarı salması olarak tanımlanmaktadır. Gravitasyonel dalgalar, iki nötron yıldızının ya da iki karadeliğin etkileşmesi sonucu ya da süpernova veya gama ışını patlamaları sonucunda üretilirler. Gelişmekte olan detektörlerle bu dalga kaynaklarının tespiti, son dönemde ilgi odağı olmuştur (Sathyaprakash ve Schutz 2009; Schutz 1989). Öte yandan, gravitasyonel dalgaların varlığının dolaylı kanıtı, ilk olarak PSR 1913+16 çift pulsarın yörünge periyodunun zamanla değiştiğini gösteren çalışmadır (Taylor ve Weisberg 1982). Bu gözlem Einstein tarafından öne sürülen kütle çekimsel radyasyon fikrini desteklemekle kalmayıp evren hakkında bilmediğimiz birçok olaya açıklık getirmesi nedeniyle birçok deneysel yada gözlemsel çalışan araştırma grubunun dikkatini çekmiştir. Bu dalgaların gözlemlenebilmesi için yeryüzünde (LIGO, VIRGO, GEO vs.) (Abbott vd. 2009; Accadia vd. 2012; Gregory ve the LIGO Scientific Collaboration 2010; Lück ve Grote 2012; Willke vd. 2002) ve uzayda (LISA) tasarlanan interferometrik (Danzmann ve the LISA study team 1996) gözlem projeleri mevcuttur. Bu gözlem projeleri, gravitasyon dalgalarının madde ile nasıl etkileştiklerinin anlaşılması için yapılan kuramsal ve deneysel çalışmalara önemli bir motivasyon sağlamaktadır. Bu nedenle; gravitasyon dalgalarının madde ile olan etkileşimleri konusunda bir dizi öneri olsa da (Srivastava vd. 2003; Stephen vd. 2010) hem kuramsal açıdan hem de deneysel açıdan hala alınması gereken oldukça uzun bir yol gözükmektedir.

Einstein genel görelilik teorisine göre ışık hızıyla yayılan gravitasyonel dalgalar uzay-zaman eğriliğinin pertürbasyonu olarak da kabul edilmektedir. Gravitasyonel dalgalar madde ile zayıf bir şekilde etkileştikleri için kaynaklarından yeryüzüne kadar engellenmeden yayılırlar. Ancak, gravitasyonel dalgaların bu zayıf etkileşimleri, belirlenmelerini zorlaştırır. Bununla birlikte, kuramsal olarak alan denklemlerinde ortaya çıkan doğrusal olmayan (non-linear) etkileşme terimleri, birbiri içinden geçen iki gravitasyonel dalgalanın nasıl etkileştiğini betimler. Bu etkileşimin genel karakteristik özelliklerinin ortaya konması, ilerleyen gravitasyonel dalgaların birbiri içinden geçerken nasıl değiştiklerinin belirlenmesi açısından önemlidir. Bu etkileşimlerin zayıf olması nedeniyle yaklaşım metotları kullanılmaktadır (Chakrabarty 1999; Isaacson 1968).

Gravitasyonel dalgaları algılamak için önerilen en ilginç yöntem, karadeliğin varlığıyla ilişkili olan yöntemdir (Thorne 1997). Öte yandan, kuasinormal frekanslar (KNF), karadelik parametrelerine bağlıdır ve yıldız

kütleli karadeliklerin KNF'lerinin gravitasyonel dalga dedektörlerinin frekans band aralığında olmaları beklenmektedir. Dolayısıyla; bir karadelik tarafından yayılan gravitasyonel dalgalar, karadeliğin varlığını doğrudan tanımlanmasına yol açacak bir ipucu taşıyacaktır. Bunların yanı sıra; gravitasyonel dalgaların keşfi karanlık madde ve karanlık enerji gibi henüz bilmediğimiz kavramları açıklamada da yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Karanlık enerji problemi veya evrenin günümüzde niçin ivmelenerek genişlediği problemi en temel teorik çalışmalardan biridir. Bu ivmelenerek genişlemeyi açıklayacak alternatif kütleçekim teorilerini de test etmek için gravitasyonel dalgaların gözlemlerinden faydalanılmaktadır(Sopuerta ve Yunes 2011). Kuramsal bağlamda, $F(R)$ çekim teorisi evrenin günümüzdeki ivmelenmesini (Late-time inflation) karanlık enerjiye ihtiyaç duymadan açıklamak için kullanılan önemli bir genelleştirilmiş çekim teorisidir. Bu teori, eğriliğin yüksek mertebeden terimlerinin Einstein-Hilbert eylemine eklenmesiyle elde edilir (Ford 1997; Starobinsky 1980). $F(R)$ gravitasyon teorisi, yeni serbestlik derecesi içerir (Chiba 2003). Bu serbestlik derecesi, gravitasyonel dalgaların yeni modlarına karşılık gelir (Berry ve Gair 2011; Capozziello vd. 2008; Corda 2007, 2008a,b, 2009; Näf ve Jetzer 2011; Nojiri ve Odintsov 2003, 2004). Son dönemde yapılan çalışmalarda gravitasyonel dalgalar bu çekim teorisi kapsamında incelenmiştir (Geng 2012; Xiao-Ying ve Jian-Hua 2014; Yang vd. 2011). Evrenin ivmelenerek genişlemesini açıklamaya çalışan bir diğer önemli kuramsal çalışmada, fermiyonik ve bozonik alanların gravitasyonel alan ile minimal ve minimal olmayan etkileşmesi ele alınmaktadır. Fermiyonik alan, evrenin erken dönemindeki enflasyona neden olan hipotetik parçacık "inflaton" gibi davranırken günümüz evreninde ivmeli genişlemeye neden olduğu kabul edilen karanlık enerji gibi de davranmaktadır (de Souza ve Kremer 2011; Gecim vd. 2015; Gecim ve Sucu 2017; Saha 2001).

Einstein'in genel görelilik kuramı (2+1) boyutta yazıldığında, gravitasyonel serbestlik derecesi olmadığından gravitasyonel dalga çözümleri mevcut değildir (Bakas ve Sourdis 2011) ve dolayısıyla gravitasyon alanın etkileşme parçacığı olan graviton da söz konusu olmayacaktır (Barrow vd. 1986). Son zamanlarda bu sorunların giderilmesi için pek çok matematiksel ve fiziksel yaklaşımlar ortaya atılmaktadır. Bu yaklaşimlardan, topolojik kütleli gravitasyon (TKG) (Deser vd. 1982a,b) yaklaşımı, gravitasyonel Chern-Simons terimi ile negatif kozmolojik sabitli Einstein-Hilbert eylemini içermektedir. Yeni kütleli gravitasyon (YKG) teorisi ise kuadritik eğrilik terimi ve yüksek mertebeli türevleri içeren yaklaşımdır (Accioly vd. 2011; Bergshoeff vd. 2009a,b). TKG teorisinin aksine, YKG teorisi pariteyi korur, yani gravitonlar her iki helisite durumunda aynı kütleye sahip olur. Bu iki gravitasyon teorisinden kaynaklanan gravitasyonel dalgaların polarizasyon modlarının incelenmesi, üç boyutlu Minkowski uzayında ilerleyen farklı kutuplu kütleli graviton modlarının nasıl yayıldığını görmede ilk örnek olması bakımından önemlidir (Moon ve Myung 2012a). Gravitasyonel dalgalarının polarizasyon durumunun incelendiği diğer alternatif teori (modified) Chern-Simons gravitidir

(Moon ve Myung 2012a).

Bu tez çalışması kapsamında, (2+1) boyutta alternatif gravitasyonel kuramları çerçevesinde yeni gravitasyonel dalga zeminleri araştırılacak ve bu zeminlerin hem parçacık alanlarıyla hem de çeşitli moleküllerle etkileşimleri KNF'ler çerçevesinde incelenecektir. Ayrıca bununla birlikte, gravitasyonel dalga zeminlerinin kaynaklarının kararlı olup olmadıkları tartışılacaktır.

Tezin kaynak taraması bölümünde; gravitasyonel dalga ve gravitasyonel dalganın kuadrupol doğası, kaynak ve tiplerinin yanı sıra kuasinormal frekans, Einstein-Hilbert eylemi ve teleparalel kütleçekim teorisi hakkında bilgi verildi. Daha sonra (2+1) boyutlu relativistik dalga denklemlerinden spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 denklemleri ele alındı. Materyal ve metot bölümünde, (2+1) boyutta gravitasyonel dalga zemini, Noether teoremi ve Heun diferansiyel denklemlerinin tipleri ve onların genel çözümlerinin yanı sıra bazı özel durumlarda hangi fonksiyonlar cinsinden yazılabilecekleri gösterildi. Bulgular bölümünde ilk olarak gravitasyonel alanın fermiyonik alanla minimal ve minimal olmayan etkileşiminin yanı sıra gravitasyonel dalga zemininde, teleparalel kütleçekim teorisiyle minimal ve minimal olmayan etkileşimleri ve F(T) kuramının γT^2 ve $T + \gamma T^2$ modelleriyle minimal etkileşimleri ele alınarak buradan metrik ölçek çarpanları bulundu, belirlenen yeni metrikler spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 denklemleri için çözülerek kuasinormal frekanslar hesaplandı. Daha sonra gravitasyonel dalga zemininde, skaler alanın F(T) kuramının γT^2 ve $T + \gamma T^2$ modelleriyle minimal etkileşimleri incelendi. Noether simetrisi kullanılarak elde edilen metrik katsayıları yine spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 denklemleri için çözüldü ve kuasinormal frekanslar hesaplandı. Son olarak gravitasyonel dalganın moleküler potansiyeller (Kratzer ve Lennard-Jones potansiyeli) ile etkileşimi, daha önce elde edilen metrik katsayılarının bazı değerleri ve yeni önerilen metrik katsayıları Dirac alanı altında incelendi. Daha sonra elde edilen kuasinormal frekanslar kullanılarak gravitasyonel dalga zeminin kaynağının kararlı (stable) olma koşulları tartışıldı.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde gravitasyonel dalga ve gravitasyonel dalganın kuadrupol doğası, kaynak ve kaynak tiplerinin yanısıra kuasinormal frekans, Einstein- Hilbert eylemi teleparalel kütleçekim teorisi incelendi. Daha sonra (2+1) boyutlu relativistik dalga denklemlerinden spin-$\frac{1}{2}$, spin-1 ve spin-0 denklemleri ele alındı.

2.1. Gravitasyonel Dalga

Gravitasyonel dalga, ışık hızıyla ilerleyen, uzay-zaman eğriliğindeki dalgalanmalardır. Zayıf kütleçekim alanı yaklaşımında; uzay zamanın metriği son derece küçük bir pertürbasyon ile düz uzay-zaman metriğinden oluşur (Maggiore 2007; Misner vd. 1973)

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} \qquad h_{_{ab}} << 1. \tag{2.1}$$

Bu yaklaşım altında GR'nin lineerleştirilmiş hali elde edilir. Denklem (2.1)'deki gibi bir seçim, GR'nin genel koordinat değişmezliğini (invaryant) bozar. Bunun yerine bu eşitliği koruyan daha küçük bir dönüşüm kümesi vardır. Öncelikle, genel koordinat dönüşümü

$$x^a \longrightarrow x^{'a}(x)$$

şeklinde tanımlanır. Einstein alan denklemleri (kozmolojik sabitsiz), genel koordinat dönüşümleri altında değişmezdir. Yukarıdaki dönüşüm altında metrik tensör

$$g_{ab} = g^{'}_{ab} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{'a}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{'b}} g_{\mu\upsilon} \tag{2.2}$$

şeklinde dönüşür. Bu eşitlik alan denklemlerinin fiziksel yorumu değişmeksizin uygun bir koordinat seçmek konusunda özgür olduğumuzu söyler. Denklem (2.1)'in dönüşüm kümesini yazmak için

$$x^a \longrightarrow x^{'a}(x) + \varepsilon^a(x) \tag{2.3}$$

formunda bir ayar (gauge) düşünelim. Burada

$$|\varepsilon_{a,b}| << \ h_{_{ab}} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. O zaman Denklem (2.1), (2.2) ve (2.3) yardımıyla, uzay-zaman metriği;

$$\begin{aligned} g^{'}_{a\beta} &= (\delta^{\mu}_{a} - \frac{\partial \varepsilon^{\mu}}{\partial x'^{a}})(\delta^{\nu}_{\beta} - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}}{\partial x'^{\beta}})(\eta_{\mu\upsilon} + h_{\mu\upsilon}) \\ &= (\delta^{\mu}_{a} - \varepsilon^{\mu}_{,a})(\delta^{\nu}_{\beta} - \varepsilon^{\nu}_{,\beta})(\eta_{\mu\upsilon} + h_{\mu\upsilon}) \\ &= (\delta^{\mu}_{a}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{a}\varepsilon^{\nu}_{,\beta} - \varepsilon^{\mu}_{,a}\delta^{\nu}_{\beta} + \underbrace{\varepsilon^{\mu}_{,a}\varepsilon^{\nu}_{,\beta}}_{0})(\eta_{\mu\upsilon} + h_{\mu\upsilon}) + O(\varepsilon^{2}) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada, ε^2 ve $\varepsilon^a h_{ab}$ gibi terimler ihmal edilirse, $g^{'}_{a\beta}$,

$$\begin{aligned} g^{'}_{a\beta} &= \delta^{\mu}_{a}\delta^{\nu}_{\beta}\eta_{\mu\upsilon} + \delta^{\mu}_{a}\delta^{\nu}_{\beta}h_{\mu\upsilon} - \underbrace{\delta^{\mu}_{a}\eta_{\mu\upsilon}\varepsilon^{\nu}_{,\beta}}_{\varepsilon_{a,\beta}} - \underbrace{\eta_{\mu\upsilon}\varepsilon^{\mu}_{,a}\delta^{\nu}_{\beta}}_{\varepsilon_{\beta,a}}, \\ &= \eta_{a\beta} + h_{a\beta} - \varepsilon_{a,\beta} - \varepsilon_{\beta,a}, \\ g^{'}_{a\beta} &= g_{ab} - \varepsilon_{a,\beta} - \varepsilon_{\beta,a} \end{aligned}$$

biçiminde olur. O halde birden fazla $h_{a\beta}$ birbirine ε^{μ} içeren bir ayar dönüşümüyle dönüşebilirler ve aynı fiziksel sonucu verirler. ε^{μ}'nun seçim serbestliği Einstein alan denklemlerinin koordinat serbestliği anlamına gelir, yani uygun bir ε^{μ} seçiminde denklem kolaylaşır. O zaman, $h^{'}_{\mu\upsilon}$,

$$h^{'}_{\mu\upsilon} = h_{\mu\upsilon} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$$

şeklinde olur. Burada $h_{\mu\nu}$'nin izi $h = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$'dir. Lineerleştirilmiş versiyonda (elektrodinamikteki Lorentz ayarına benzer şekilde) ayar

$$\partial_{\nu}\overline{h_{\mu\upsilon}} = 0$$

olarak tanımlanır.

$$\overline{h_{\mu\upsilon}} = h_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h$$

ifadesi yardımıyla

$$\overline{h_{\mu\upsilon}}^{'} = h^{'}_{\mu\upsilon} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h^{'} \tag{2.5}$$

biçiminde elde edilir. Denklem (2.5)'e soldan ∂_{ν} uygulanırsa, $\partial_{\nu}\overline{h_{\mu\upsilon}}^{'}$,

$$\begin{aligned} \partial_{\nu}\overline{h_{\mu\upsilon}}^{'} &= \partial_{\nu}(h^{\mu\nu} - \partial^{\mu}\varepsilon^{\nu} - \partial^{\nu}\varepsilon^{\mu}) - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}h^{'}, \\ &= \partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \underbrace{\partial_{\nu}\partial^{\mu}\varepsilon^{\nu}}_{0} - \partial_{\nu}\partial^{\nu}\varepsilon^{\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}h^{'}, \\ &= \partial_{\nu}\left(\overline{h_{\mu\upsilon}} + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h\right) - \Box\varepsilon^{\mu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}h^{'}, \\ \partial_{\nu}\overline{h_{\mu\upsilon}}^{'} &= \partial_{\nu}\overline{h_{\mu\upsilon}} - \Box\varepsilon^{\mu} \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde elde edilir. $\partial_\nu \overline{h_{\mu\upsilon}}' = 0$ koşulunun sağlanması için $\partial_\nu \overline{h_{\mu\upsilon}} = f_\mu(x)$ tanımı yapılır. Dolayısıyla $\Box\varepsilon^\mu = f_\mu(x)$ olmalı. Burada $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\upsilon$ ve $h^\alpha_\mu = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\mu}$ şeklindedir. O zaman lineerleştirilmiş teori kapsamında Einstein alan denklemleri

$$\begin{aligned} G_{\mu\upsilon} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = 8\pi \mathrm{G}KT_{\mu\nu} \\ R_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\Box h_{\mu\upsilon} + \partial_\mu\partial_\upsilon h - \partial_\mu\partial_a h^\alpha_\nu - \partial_\nu\partial_a h^\alpha_\mu\right) \\ R &= \frac{1}{2}\left(\Box h - \partial_\mu\partial_\upsilon h^{\mu\nu}\right) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. O halde, Einstein alan denklemlerini zayıf alan $h^{\mu\nu}$ cinsinden

$$\begin{aligned} 8\pi \mathrm{G}KT_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(-\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h^{\alpha\beta}} - \partial_\mu\partial_a\overline{h^\alpha_\nu} - \partial_\nu\partial_a\overline{h^\alpha_\mu}\right), \\ &= \frac{1}{2}\left(-\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} + \underbrace{\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta\overline{h^{\alpha\beta}} - \partial_\mu\partial_a\eta_{\mu\nu}\overline{h^{\alpha\beta}} - \partial_\nu\partial_a\eta^{\alpha\beta}\overline{h_{\beta\mu}}}_{(**)}\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir (Maggiore 2007). Yukarıdaki Einstein alan denkleminde, D' Alembert operatörünün Green fonksiyonunu, $\Box_x G(x) = \delta^4(x-y)$ olarak tanımlanırsa ilgili çözüm

$$\varepsilon_\mu = \int dx^3 G(x-y)f_\mu(y)$$

şeklinde yazılır. Bu ayar sayesinde; (**) ifadesindeki üç terim yok olur. Böylece,

$$\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} = -\frac{16\pi \mathrm{G}}{c}T_{\mu\nu}$$

şeklinde $T_{\mu\nu}$ kaynaklı dalga denklemi elde edilir. $T_{\mu\nu} = 0$ (kaynak dışında) olduğundan, dalga denklemi,

$$\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} = 0$$

şeklinde olur. Böylece Denklem (2.6)'nın sırasıyla sol ve sağ tarafındaki $\Box\overline{h_{\mu\upsilon}}$ ve $\partial_\nu\overline{h_{\mu\upsilon}}$ ifadelerinin sıfır olmasından dolayı $\Box\varepsilon^\mu = 0$ olur. Dolayısıyla $\Box\ \varepsilon_{\mu\nu} = 0$'dır (burada $\varepsilon_{\mu\nu} = \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_p\varepsilon^p$ biçiminde tanımlanır. D'Alembert operatörü ($\Box$) ile ∂_μ komüt eder) $\Box\ \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ olması aynı denklemi karşılayan dört keyfi bağımsız fonksiyona bağlı $\varepsilon_{\mu\nu}$ fonksiyonlarını atabileceğimiz anlamına gelir. Yani $h_{\mu\upsilon}$ üzerinde dört koşul koyabilmek için ε^μ fonksiyonlarını seçebiliriz. Öncelikle ε^0 fonksiyonunu seçelim. Böylece $\overline{h} = 0$, yani izi sıfır olur. Dolayısıyla $\overline{h_{\mu\upsilon}} = h_{\mu\upsilon}$ elde edilir. Üç $\varepsilon^i(x)$ fonksiyonu şimdi $h^{0i}(x) = 0$ olacak şekilde seçilmiştir. $\partial_\upsilon\overline{h_{\mu\upsilon}} = 0$ şartında $\mu = 0$ yazılırsa $\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0$ olur. $h_{0i} = 0$ alınırsa, $\partial^0 h_{00} = 0$ olur. Yani h_{00} zamanla değişmez. Zamandan bağımsız h_{00} terimi; gravitasyonel etkileşimin "statik kısmına", yani gravitasyonel dalgayı üreten kaynağın Newton potansiyeline karşılık gelir. Gravitasyonel dalganın kendisi

zamana bağlı kısımdır. Gravitasyonel dalga söz konusu olduğu sürece $\partial^0 h_{00} = 0$'ın anlamı $h_{00} = 0$'dır. Böylece dört bileşeni $h_{\mu 0} = 0$ olarak ayarlandığından sadece h_{ij} uzaysal kısımlar kaldı. Lorentz koşulundan $\partial^i h_{ij} = 0$ olur. Ayrıca izlerin sıfır olma koşulundan $h^i_i = 0$ olur. Sonuç olarak

$$h^{0\mu} = 0, \; h^i_i = 0, \;\; \partial^i h_{ij} = 0 \tag{2.7}$$

koşulları elde edilir. Bu koşullar, TT ayar, (traverse traceless gauge) olarak bilinir. Bu durumda Lorentz ayarı sayesinde $h_{\mu\upsilon}$'nin 10 serbestlik derecesi 6' ya inmiş olur. $\Box\varepsilon^\mu = 0$ şartından da serbestlik derecesi 2' ye iner. Yalnız burada; TT ayarının kaynak dışında seçildiğine dikkat edelim. Kaynak içinde $\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} \neq 0$ olur. $\Box\varepsilon^\mu = 0$ hala geçerlidir ve $\Box\varepsilon_{\mu\nu} = 0$ şeklindedir. Ancak $\Box\overline{h_{\mu\upsilon}} \neq 0$ karşılayan $\overline{h_{\mu\upsilon}}$'nin herhangi bir bileşeni sıfırlanmaz (Maggiore 2007; Misner vd. 1973).

2.2. Gravitasyonel Dalganın Polarizasyon Durumları

Yukarıda (2.7) de verilen denklem takımının çözümü,
$h_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}(k^p)exp(ik_p x^p)$ şeklindedir. Burada $H_{\alpha\beta}$, polarizasyon tensörü, k^p dalga vektördür. Burada GD'nın z-ekseni yönünde ilerlediğini ve Lorentz ayarından dolayı bir null dalga vektörü olduğunu ve yayılma yönünün enine olduğunu farz ediyoruz ve $k^\alpha = (\omega, 0, 0, k)$, $\omega/k = c$ alıyoruz. TT ayar koşullarını karşılayan $H_{\alpha\beta}$'nin en genel formu (Kausar 2017)

$$H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H^+_{11} & H^\times_{12} & 0 \\ 0 & H^\times_{21} & -H^+_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

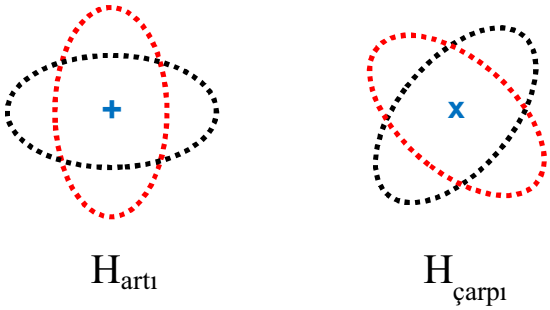
şeklinde iki polarizasyon durumunun lineer bir kombinasyonudur. Bu matris, H^+, "artı (plus)"

$$H_{artß} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve $H^\times$, " çarpı (cross)"

$$H_{arpß} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

polarizasyon durumlarını gösterir.



Şekil 2.1. Gravitasyonel dalganın polarizasyon durumları (Moore 2016)

2.3. Gravitasyonel Dalganın Kuadrupol Doğası

Gravitasyonel ışımanın doğasını anlamak için daha önceden elde edilmiş olan elektromanyetik ışımayı açıklayan yaklaşımlara benzer yaklaşımlar kullanılmaktadır. Bunun için öncelikle elektromanyetik teoride elektrik ve manyetik ışımanın nasıl olduğunu inceleyelim (Misner vd. 1973).

2.3.1. Elektrik ve manyetik dipol

Elektromanyetik teoride hareketli bir yük veya yüklerden gelen ışınımın baskın formu dipol ışınımdır. Bir tek q nokta yük için dipol moment '**d**' olsun.

$$\mathbf{d} = q\,\mathbf{x}(t)$$

şeklinde tanımlanır. $\overrightarrow{x}(t)$, q' nun koordinat sisteminin başlangıç noktasına göre konum vektörü olup, $\mathbf{d} = \overrightarrow{d}$ ve $\mathbf{x} = \overrightarrow{x}$ şeklinde kısaltılmıştır. Dipol momentin zamana göre ikinci değişimi,

$$\ddot{\mathbf{d}} = q\,\mathbf{a}(t)$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{a} = \overrightarrow{a}(t) = \ddot{\overrightarrow{x}}(t)$, yükün ivmesi olmak üzere; Larmor bağıntısı, bir nokta yük tarafından yayınlanan güç onun ivmesinin karesiyle orantılı olarak tanımlanır ve matematiksel olarak,

$$L_{elek} = q^2\,\mathbf{a}(t)^2 = \ddot{\mathbf{d}}^2$$

şeklinde ifade edilir. Elektromanyetik ışımanın diğer en güçlü türleri manyetik dipol moment ve elektrik quadrupol ışımalarıdır. Yükün dağılımının manyetik dipol ışımadan kaynaklanan güç yayınlanması (luminosity), manyetik dipolün (μ) ikinci türeviyle orantılıdır:

$$L_{many} \propto \ddot{\mu}.$$

Burada μ, yük dağılımı üzerinden

$$\overrightarrow{\mu} = \sum_{q_i} (q_i\text{'nin konumu}) \times (q_i\text{'den kaynaklanan akım})$$

şeklinde toplam ile verilir.
Şimdi elektrik ve manyetik dipol ışımanın gravitasyonel benzerini inceleyelim. m_A, durgun kütle ve $\mathbf{x}_A$, A parçacığının koordinat sisteminin başlangıç noktasına göre konumu olmak üzere elektrik dipol momentin gravitasyonel benzeri, kütle dipol momentinin (**d**), parçacıklarının dağılımı üzerinden

$$\mathbf{d} = \sum_A m_A \, \mathbf{x}_A$$

şeklinde toplam alınarak tanımlanır. Güç yayınlanması (luminosity) d'nin ikinci türeviyle orantılıydı. Öncelikle birinci türeve bakılacak olursa

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_A m_A \dot{\mathbf{x}}_A \equiv \mathbf{p}$$

sistemin momentumu (**p**) elde edilir. Yukarıdaki ifadenin ikinci türevi alındığında sıfır oluyorsa, toplam momentumun korunduğu görülür, yani herhangi bir kaynaktan kütle dipol ışıması yok anlamına gelir. Manyetik dipol momentin gravitasyonel benzeri ise

$$\overrightarrow{\mu} = \sum_A (A\text{'nın konumu}) \times (A\text{'dan kaynaklanan akım}) = \sum_A \mathbf{x}_A \times (m v_A) = \overrightarrow{J}$$

olarak tanımlanan toplam açısal momentumdur. Güç yayınlanması ikinci türevle orantılıydı. Yalıtılmış bir sistem için birinci türev açısal momentumun korunumuna karşılık geldiğinden, manyetik dipol ışınımın gravitasyonel benzeri yoktur. Bu durumda yalıtılmış bir sistemde kuadrupol etkisi başat etki olur. Ancak, bu etki de küresel simetrik madde dağılımı söz konusu olduğunda özdeş olarak sıfır olur (Misner vd. 1973).

2.4. Gravitasyonel Dalgaların Kaynağı ve Tipleri

İvmeli hareket yapan kütleli nesneler gravitasyonel dalga (GD) üretirler. Ancak burada üretilen dalgaların frekansları algılanamayacak kadar küçüktür. Dolayısıyla kütle ne kadar büyük olursa bu dalgaları da algılamak o kadar kolay olacaktır. Bu yüzden büyük kütlelere sahip karadelikler, nötron yıldızları, süpernovalar gibi astronomiksel nesneler gravitasyonel dalga kaynakları olarak ele alınmaktadırlar. Gravitasyonel dalgalar kaynakların özelliklerine göre dört ana grupta toplanır (Ligo-Caltech 2017).

2.4.1. Sürekli gravitasyonel dalgalar

Bu dalgalar, sabit ve oldukça iyi tanımlanmış bir frekansa sahip sistemler tarafından üretilir. Bunlar, birbiri etrafında dönen ikili yıldız ya da karadelik sistemleridir. Gravitasyonel dalgalarının frekansı neredeyse sabit olduğu için, bu dalgaların yaratacağı ses sürekli bir tını şeklindedir (Ligo-Caltech 2017).

2.4.2. İnspiral gravitasyonel dalgalar

Yoğun ve kompakt olan ve birbirleri etrafında dönen ikili sistemlerin (beyaz cüce yıldızlar, karadelikler, nötron yıldızları gibi) birleşmesi, binlerce yıl süren yaşam ömürlerinin son aşamasında söz konusu olur. Bu sistemler, yörüngesel enerjilerinin (çarpışmasını önleyen enerji) bir kısmını gravitasyonel dalgaları olarak yayarlar. Zaman geçtikçe, nesneler döndükçe ve bu enerjilerini kaybettikçe, birbirlerine daha da yaklaşırlar ve artık spiral sarılma kaçınılmaz hale gelir. İkili sistemin yörünge frekansı arttığı için bu dalgaların yaratacağı sesler bir "cıvıltı" şeklinde oluşur. (Ligo-Caltech 2017).

2.4.3. Patlama (burst) gravitasyonel dalgalar

Bu tipteki dalgalar, süpernova veya gama ışın patlamaları gibi bazı beklenmeyen veya bilinmeyen kaynaklardan üretilirler ancak bunların formunun öngörülmesi için bunları üreten sistemler hakkında yeterince ayrıntılı bilgi henüz mevcut değildir (Ligo-Caltech 2017).

2.4.4. Stokastik gravitasyonel dalgalar

Stokastik dalgalar evrenin erken zamanında oluşur. Bu nedenle, evrenin kökeni ve tarihi hakkında bilgi taşıyabilir. Bu gravitasyonel dalgaların yaratacağı ses sürekli bir gürültü şeklindedir (Ligo-Caltech 2017).

2.5. Kuasinormal Modlar

Kuasinormal modlar, kapalı sistemin normal modlarından farklıdır. Açık sistemler, enerji kaybederler ve genelde onları temsil eden Hamiltonyenler hermityen değildir. Açık sistemin pertürbasyonlarını karakterize eden kompleks frekanslara sahip bu modları araştırmak için birçok motivasyon kaynağı vardır. En önemlisi bu modların karadeliklerin paramatreleriyle (kütle, açısal momentum, yük) doğrudan ilişkili olmasıdır. Kuasinormal modlar reel ve sanal olmak üzere iki

kısımdan oluşur

$$\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}.$$

Kuasinormal modun reel kısmı ω_{Re}, titreşim hareketinin öz (poper) salınıma karşılık gelirken, sanal kısmı, ω_{Im}, sönümlenmeye veya soğurulmaya karşılık gelir. Salınımın $e^{-i\omega t} = e^{-i\omega_{Re}t}e^{\omega_{Im}t}$ gibi zamana bağlı olması durumunda, birinci kısım $(e^{-i\omega_{Re}t})$, periyodik hareketi, ikinci kısım $(e^{\omega_{Im}t})$, $(\omega_{Im} < 0)$ durumunda sönümlenmeyi ifade eder. Bu durumda periyodik hareket üstel olarak sönümlendiğinden, kaynağın titreşim hareketinin kararlı (stable) olduğunu söyler (Konoplya ve Zhidenko 2011), yani bu durum perturbasyonlar altında uzay-zaman zemininin kararlı olduğu anlamına gelir. Ancak $(\omega_{Im} > 0)$ ise periyodik hareket üstel olarak büyüdüğü için kararlı olmayan çözümleri ifade eder. KNM'lerin diğer önemli özelliği ise sanal kısım karadeliğin Hawking sıcaklığıyla (Kiefer 2004), reel kısmın ise karadelik alan kuantizasyonu ile ilişkilendirilebilmeleridir (Hod 1998; Horowitz ve Hubeny 2000; Kim 2006).

Kuasinormal modları belirlemek için, zaman-bölge evrimleri (Time-domain evolutions) (Dorband vd. 2006; Vishveshwara 1970), Frekans alanında doğrudan entegrasyon (Direct integration in the frequency domain)(Chandrasekhar ve Detweiler 1975), Ters potansiyel metodu (Inverse potential methods) (Blome ve Mashhoon 1984), WKB (Gal'tsov ve Matiukhin 1992; Iyer 1987; Iyer ve Will 1987; Konoplya 2003; Liang 2018; Schutz ve Will 1985; Ulhoa 2014), Faz-integral metodu (Phase-integral methods) (Andersson vd. 1993; Andersson ve Linnæus 1992; Fröman vd. 1992; Glampedakis ve Andersson 2003; Natario ve Schiappa 2004), Sürekli kesir metodu (Continued fraction methods) (Leaver 1985, 1992; Rostworowski 2007) ve Asimptotik iterasyon metodu (Cho vd. 2012, 2010; Özer ve Roy 2009) gibi nümerik metotların yanı sıra analitik çözümler de (Birmingham ve Mokhtari 2006; Cuadros-Melgar vd. 2013; Fiziev ve Staicova 2011; Myung ve Moon 2012; Siopsis 2009) kullanılmaktadır.

2.6. Einstein-Hilbert Eylemi

(2+1) boyutta Einstein-Hilbert eylem fonksiyonu

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa}\int d^3x\sqrt{-g}R$$

şeklinde tanımlanır. Eylemin, metrik tensöre göre varyasyonu alınıp sıfıra eşitlenirse hareket denklemi

$$\frac{\delta R}{\delta g^{ab}} + \frac{R}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ab}} = 0 \tag{2.8}$$

şeklinde bulunur. Burada Ricci skalerinin varyasyonu $\delta R = g^{ab}\delta R_{ab} + R_{ab}\delta g^{ab}$'dir ve Ricci tensörünün de varyasyonu

$$\delta R_{ab} = \nabla_c \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b \delta\Gamma^c_{ac}$$

$\sqrt{-g}$ ve g_{ab}'nin varyasyonları

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{cd}\delta g^{dc}$$
$$\delta g^{ab} = -g^{ac}g^{bd}\delta g_{dc}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler denklem (2.8)'de yazılırsa

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0$$

şeklinde Einstein alan denklemleri (vakumda) elde edilir.

2.7. Teleparalel Teori

Teleparalel teorinin genelleştirilmesinden elde edilen, $f(T)$ teorisi, karanlık enerjiye ihtiyaç duyulmadan evrenin mevcut genişlemesindeki hızlanmayı açıklamak için önerilmiştir (Einstein 1928, 1929, 1930; Hayashi ve Shirafuji 1979, 1981). $f(R)$ teorisine benzer şekilde, Teleparalel kütleçekim teorisi eyleminin genişletilmesiyle elde edilen $f(T)$ teorisi, burulma skaleri T 'nin yüksek mertebelerini de içerir. Burada f, burulma skaleri T 'nin türevlenebilir bir fonksiyonudur (Bamba vd. 2012; Jawad ve Rani 2015; Linder 2010; Rani vd. 2016; Sharif ve Rani 2014). Teleparalel teori, Einstein tarafından kütleçekimi ve elektromanyetizmayı birleştirmek için ilk kez tanıtılan teleparalel geometri üzerine inşa edilmiştir. Ayrıca, teleparalel geometride, Levi-Civita bağlantısı yerine Weitzenböck bağlantısı yer alır. Bu teorinin temeli, Weitzenböck bağlantısını tanımlamak için kullanılan, tetrad alanına dayanır. Genel Görelilik'te (GG), eğrilikle açıkladığımız kütleçekim etkileşimleri, Teleparalel teoride burulma kavramıyla açıklanır. Ayrıca Teleparalel teoride, kütleli cisimlerin izledikleri yörüngeler GG'de olduğu gibi jeodezik denklemlerle değil, elektromanyetizmadaki Lorentz kuvvet denklemlerine benzer kuvvet denklemleriyle betimlenir (Aldrovandi vd. 2004; Bergshoeff vd. 2009a).

$f(T)$ kütleçekim teorisi, çeşitli açılardan $f(R)$ kütleçekim teorisinden farklıdır. Birincisi, $f(R)$ teorisi ile karşılaştırıldığında, $f(T)$ teorisinin hareket denklemleri $f(R)$ teorisinde olduğu gibi dördüncü mertebeden değil ikinci mertebedendir. İkincisi, $f(T)$ teoride fazladan serbestlik dereceleri görünür (Li vd. 2011b). $f(T)$ teoride gravitasyonel dalga modu Genel Görelilik ile eşdeğerdir ve (2+1) boyutlu uzay-zaman için iki serbestlik derecesi vardır (Li vd. 2011a). $f(T)$ kütleçekim teorisinin de gravitasyonel dalga modları Genel Göreliliğe denktir

(Maluf 2013) ve post-Minkowskian sınırındaki gravitasyonel ışımaya katkıda bulunmaz. (Bamba vd. 2013). Ayrıca Einstein-Hilbert eylemi tarafından tanımlanan GG'te gravitasyonel alan denklemleri ile burulma skaleri T tarafından ifade edilen teleparalellik versiyonu, birbirinin aynısıdır. Bu eşdeğerliliğe rağmen; bu teoriyi incelemek için birçok motivasyon kaynağı vardır. Bunlardan bazıları aşağıda incelenecektir (Aldrovandi ve Pereira 2012).

2.7.1. Gravitasyon için bir ayar teorisi

Genel görelilik ile eşdeğer olmasına rağmen, gravitasyonun teleparalel teorisi tamamen farklı bir resim içerir. Teleparalel teoride, eğrilik torsiyonla, geometri kuvvet ile yer değişir. Bu farklılığın altında, ayar yapısı yatar: Teleparalelizm, gravitasyonun kaynağının, enerji momentumuma sahip olduğunu açıklayan uzay-zaman öteleme grubu için bir ayar teorisi olarak ortaya çıkmaktadır (Aldrovandi ve Pereira 2012).

2.7.2. Tutarlılık konuları

Bugün itibariyle, burulmadan kaynaklanan yeni bir fizik için deneysel kanıt yoktur. Bu, mikroskobik ve makroskobik seviyelerde geçerlidir. Mikroskobik seviyede, günümüz deneysel duyarlılığı, Einstein-Cartan teorisinin öngördüğü spin-torsiyon etkileşimi ile ilgili herhangi bir etkiyi tespit etmek için gerekli olanın çok altındadır. Makroskopik düzeyde ise, bir nötron yıldızı ilginç bir laboratuvar olurdu. Çünkü nötronların hizalanması makroskobik bir spin ve sonuç olarak bir torsion alanı üretir. Ancak, nötron yıldızlarının varlığı ve kararlılığı (stability), Genel Görelilik temelinde iyi anlaşılmaktadır. Daha sonra teleparalel bakış açısının mevcut deneysel veriler tarafından desteklendiğini söyleyebiliriz. Ayrıca, güneş sisteminin fiziği dahil, bilinen tüm çekimsel olgular, kuvvet olarak bükülme (contortion) ile birlikte, teleparalel kuvvet denklemi açısından tutarlı bir şekilde yeniden yorumlanabilir. Fenomenolojik tutarlılığa ek olarak, Teleparalel teori aynı zamanda sağlam bir kavramsal tutarlılık gösterir. Örneğin, Einstein-Cartan gibi modellerin kuplaj reçetesi, güçlü eşdeğerlik ilkesini ihlal eder ve elektromanyetik alanın etkileşimini tanımlamak için kullanıldığında, Maxwell teorisinin $U(1)$ gauge değişimini ihlal eder. Ancak, Teleparalel teorinin genel görelilik ile birleştirme reçetesi, güçlü eşdeğerlik ilkesinin aktif ve pasif versiyonları ile tutarlıdır ve elektromanyetik alanın kütleçekimsel etkileşimini tanımlamak için uygulandığında, Elektromanyetizmanın $U(1)$ gauge değişimini ihlal etmediği bulunmuştur. Bu değişmezlik fizik için çok büyük bir öneme sahip olduğundan, Teleparalel teorisi ile sağlanan torsiyon yorumlaması, iyi kurulmuş teorilerle tutarlı olması bakımından en doğalı olarak kabul edilebilir (Aldrovandi ve Pereira 2012).

2.7.3. Gravitasyonel enerji-momentum yoğunluğu

Tüm temel alanlar, iyi tanımlanmış yerel enerji-momentum yoğunluklarına sahiptir. Gravitasyonel alan için de aynı şey olması beklenir. Bununla birlikte, kütleçekim enerji momentum yoğunluğu için tensörel ifadenin GG bağlamında tanımlanamayacağı doğrudur. Bu imkansızlığın temel nedeni, kütleçekimi ve eylemsiz etkilerin teorinin spin bağlantısında karıştırılmış olması ve ayrıştırılamamasıdır. Örneğin, eğrilik gibi bazı nicelikler eylemsizlikten etkilenmese de, bazıları buna bağlı olarak ortaya çıkmaktadır. Kütleçekiminin enerji-momentum yoğunluğunun, hem kütleçekimden hem de diğer eylemsiz etkilerden bir katkı içermesi gerekir. Eylemsizlik etkisi, doğası gereği tensörel olmadığı için, bu teoride, kütleçekimsel alanın enerji momentum yoğunluğunu tanımlayan herhangi bir kompleks niceliğin her zaman tensörel olmayan bir nesne olarak ortaya çıkması şaşırtıcı değildir. Diğer yandan, Teleparalel teorideki eylemsizlik etkileri, bir Lorentz bağlantısı tarafından açıklanmış olarak kalırken, kütleçekimi, tetradın önemsiz bir özelliği olarak görünen bir öteleme ayar potansiyeli ile temsil edilmektedir. Bu teori doğal olarak kütleçekimini, eylemsizlik etkisinden ayırır. Sonuç olarak, eylemsizlikten kaynaklanan katkılar hariç, sadece kütleçekim için bir enerji momentum yoğunluğu yazmak mümkün hale gelir. Bu durumda bu nesneler gerçek bir tensördür, bu da çekimin, diğer herhangi bir doğa alanı gibi, bir tensörel enerji-momentum tanımına sahip olduğu anlamına gelir. Eylemsizlikle ilgili kısmın dahil olmadığı durumda toplam enerji-momentum yoğunluğunu temsil etmediğinden dolayı, bu enerji-momentum yoğunluğu gerçekten korunmaz ve sadece kovaryant olarak korunur. Tabii ki, genel durumda eylemsizlik, kütleçekim ve madde katkıları içeren toplam enerji momentum yoğunluğu, sıradan (ordinary) anlamda korunur. Aslında, gravitasyonel enerji-momentum yoğunluğu için tensörel bir ifade tanımlamanın imkansızlığı, kütleçekiminin bir özelliği değil, GG'in geometrik görüntüsünün bir özelliği olduğu söylenebilir (Aldrovandi ve Pereira 2012).

2.8. (2+1) Boyutlu Uzay-Zamanda Relativistik Dalga Denklemleri

Bu kısımda, tezde ele alınan gravitasyonel dalganın parçacıkla olan etkileşimini incelemek için kullanacağımız relativistik dalga denklemlerinin eğri uzay-zamandaki formları hakkında bilgi verilecektir.

2.8.1. Klein-Gordon denklemi

Klein-Gordon denklemi relativistik spin-0 parçacıklarını temsil eden dalga denklemidir ve m, skaler parçacığın kütlesi c, ışık hızı, p_μ parçacığın momentumu

ve Φ skaler parçacığı temsil eden dalga fonksiyonu olmak üzere;

$$p_\mu p^\mu \Phi = m^2 c^2 \Phi$$

şeklinde yazılır. Eğri uzay-zamanda spin-0 parçacıklarını temsil eden Klein-Gordon denklemi (Birrell ve Davies 1982)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \Phi(t, r, \theta) = \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi(t, r, \theta) \tag{2.9}$$

biçiminde elde edilir.

2.8.2. Dirac denklemi

$(2 + 1)$ boyutlu uzay-zamanda, Dirac denklemindeki Dirac spinörü iki bileşene sahiptir. Bu bileşenler pozitif ve negatif enerji özdeğerlerine veya zamanda ileri ve geri hareket eden parçacık ve anti-parçacık durumlarına karşılık gelir. Bu yüzden, Dirac cebiri Pauli matrisleri cinsinden tanımlanır. Düz uzay-zamanda Dirac matrisleri $\sigma^i = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2)$ şeklindedir ve $e^\mu_i(x)$ üç ayakları kullanılarak σ^i düz uzay-zaman Dirac matrisleri cinsinden

$$\sigma^\mu(x) = e^\mu_i(x) \sigma^i$$

şeklinde elde edilir. Burada $e^\mu_i(x)$ üç ayaklar, eğri uzay-zaman metriği, $g_{\mu\nu}$ ile düz uzay-zaman metriği, η_{ij} kullanılarak bulunur

$$g_{\mu\nu} = e^i_\mu e^j_\mu \eta_{ij}, \quad g^{\mu\nu} = e^\mu_i e^\nu_j \eta^{ij}. \tag{2.10}$$

Dirac matrislerinin, Pauli matrisleri cinsinden ifadesi

$$\sigma^0 = i\overline{\sigma}^2, \quad \sigma^1 = \overline{\sigma}^1, \quad \sigma^2 = \overline{\sigma}^3 \tag{2.11}$$

şeklinde verilir. ve $\eta^{ij} = (-1, 1, 1)$ olmak üzere, bu matrisler aralarındaki antikomütasyon ilişkisi $\sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\eta^{ij}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\mu, \nu = (0, 1, 2)$ eğri uzay-zaman indisleri, $i, j = (0, 1, 2)$ düz uzay-zaman indisleridir. Öte yandan $\Gamma^\nu_{\beta\mu}$, Christoffel sembolü

$$\Gamma^\nu_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\gamma} \left[\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\gamma} \right] \tag{2.12}$$

şeklinde olmak üzere, Γ_μ, spin bağlantı katsayısı, üç ayaklar, $e^\mu_i(x)$, metrik tensör, $g_{\mu\nu}$ ve Christoffel sembolü,$\Gamma^\nu_{\beta\mu}$, cinsinden

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{8} g_{\lambda\alpha} (e^i_{\nu,\mu} e^a_i - \Gamma^a_{\upsilon\mu}) \left[\sigma^\lambda, \sigma^\upsilon \right] \tag{2.13}$$

olarak tanımlanır. Böylece $(2+1)$ eğri uzay-zamandaki Dirac denklemi; m Dirac parçacığının kütlesi, c ışık hızı, $\hbar$ Planck sabiti, e, Dirac parçacığının yükü ve A_μ elektromanyetik potansiyel olmak üzere,

$$\left[\sigma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu + \frac{ieA_\mu}{c\hbar})\right]\Psi = -\frac{imc}{\hbar}\Psi \tag{2.14}$$

şeklinde bulunur (Sucu ve Unal 2007).

2.8.3. Spin-1 denklemi

Spin-1 vektör parçacıklarını temsil eden DKP denkleminde, Dirac cebirindeki gamma matrislerinin yerini, Kemmer cebirindeki beta matrisleri alır. β^μ, Dirac matrisleri cinsinden

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}\left(\sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu\right)$$

şeklinde ve spin-1 parçacığı için spin bağlantı katsayısı Σ_μ, spin-$1/2$ parçacığının spin bağlantı katsayısı cinsinden

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu$$

şeklinde tanımlamak üzere, (2+1) boyutlu uzay-zamanda spin-1 denklemi

$$\left[i\beta^\mu\left(\partial_\mu - \Sigma_\mu + \frac{ieA_\mu}{c\hbar}\right) - 2m\right]\Psi(x) = 0 \tag{2.15}$$

şeklinde elde edilir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, tez kapsamında kullanılacak olan $(2+1)$ boyutta gravitasyonel dalga zemini hakkında bilgi verildikten sonra bu zeminde, yukarıda verilen relativistik denklemlerin analitik çözümleri sonucu elde edilen Heun denklemleri ve Heun fonksiyonlarının diğer fonksiyonlar cinsinden yazılabilmesi için gerekli koşulların yanı sıra Noether simetrisi de incelenmektedir.

3.1. (2+1) Boyutta Gravitasyonel Dalga Zemini

$(2+1)$ boyutlu Einstein gravitasyon teorisi kapsamında elde edilen dalga zemininin metriği

$$dS^2 = -A(u,r)du^2 + 2B(r)dudr + r^2 d\theta^2 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Zhang vd. 2014) ve $A(u,r)$ ve $B(r)$ katsayılarının açık biçimleri aşağıdaki şekildedir

$$\begin{aligned} A(u,r) &= \frac{1}{2r}\left(\frac{d(1+2d)kLr^3}{6d^2+5d-1} + 2r^{\frac{1}{2d}}G(u)\right) \\ B(r) &= r^{\frac{\left(\frac{1}{2}-d\right)}{d(1+2d)}} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Yukaridaki katsayılarda yer alan $G(u)$, u'nun keyfi bir fonksiyon, L , sıfırdan büyük bir parametre, $d \in \mathbb{R}$ ve $k = -1, 0, 1$: $k = \pm 1$ durumu soğuran veya parlayan yıldızları temsil eder ve metrik kaynağının dinamik uzay-zamanını tanımlar; $k = 0$ için $G(u) = 0$ kaynaksız durumu dairesel simetrik pure gravitasyonel dalgaları tanımlar. Ayrıca, $d = \frac{1}{2}$, k'nın üç durumunun tamamı için, çözümlerin Minkowskian için dejenere olduğu özel bir noktadır (Zhang vd. 2014). Tezin bundan sonraki kısımlarında; $A(u,r) = A$, $B(r) = B$ olarak kısaltmaları yapılacaktır. Denklem (3.1)'de verilen gravitasyonel dalga metriğinden, metrik tensör

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A & B & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

ve onun tersi

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} & 0 \\ B^{-1} & AB^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan bu ifadeler ve Denklem (2.10) kullanıldığında üç ayaklar (triat)

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad e^1_{(0)} = 0, \\ e^1_{(1)} &= \frac{\sqrt{A}}{B}, \quad e^2_{(2)} = \frac{1}{r}, \quad e^0_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

olarak yazılır. σ^μ Dirac matrislerinin, Pauli matrisleri cinsinden ifadeleri $\sigma^\mu = i\overline{\sigma}^2, \overline{\sigma}^1, \overline{\sigma}^3$ olur. Denklem (2.11) kullanılarak Dirac matrisleri yeniden düzenlenirse

$$\sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(i\overline{\sigma}^2 + \overline{\sigma}^1\right), \quad \sigma^1 = \frac{\sqrt{A}}{B}\overline{\sigma}^1, \quad \sigma^2 = \frac{1}{r}\overline{\sigma}^3 \tag{3.3}$$

şeklinde olur. $\dot{A} = \dfrac{\partial A}{\partial u}$ ve $A' = \dfrac{\partial A}{\partial r}$ olmak üzere Denklem (2.12) kullanılarak sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{A'}{2B}, \quad \Gamma^0_{22} = -\frac{r}{B} \\ \Gamma^1_{00} &= \frac{-\dot{A}B + AA'}{2B^2} \\ \Gamma^1_{01} &= -\frac{A'}{2B}, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{B'}{B} \\ \Gamma^1_{22} &= -\frac{rA}{B^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\sigma = (i\overline{\sigma}^2 + \overline{\sigma}^1)$ olmak üzere, Denklem (2.13) kullanılarak bu gravitasyonel dalga zemini için Spin bağlantı bileşenleri,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \left(\frac{A'}{4B} - \frac{\dot{A}}{4A}\right)\sigma\overline{\sigma}^1, \\ \Gamma_1 &= -\frac{A'}{4A}\sigma\overline{\sigma}^1, \\ \Gamma_2 &= \frac{\sqrt{A}}{2B}\overline{\sigma}^3\overline{\sigma}^1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde elde edilir. Ricci skaleri, R,

$$R = \frac{rBA'' - rB'A' + 2BA' - 2AB'}{rB^3} \tag{3.5}$$

ve Ricci tensörünün kontraksiyonu, $R^{ab} = g^{a\mu}g^{b\nu}R_{\mu\nu}$ olmak üzere; $R_{ab}R^{ab}$ çarpımı,

$$\begin{aligned} R_{ab}R^{ab} &= \frac{2B'^2A^2}{r^2B^6} - \frac{B'\dot{A}}{r^2B^4} + \frac{A''^2}{2B^4} + \frac{B'A}{rB^5}\left(\frac{rB'A' - rBA' - 3BA'}{rB}\right) \\ &+ \frac{A''A'}{B^4}\left(\frac{B - rB'}{rB}\right) + \frac{A'^2}{B^4}\left(\frac{r^2B'^2 - 2rB'B + 3B^2}{2r^2B^2}\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak hesaplanır.

3.2. Heun Denklemleri

Lineer ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Heun sınıfı, dört tekil noktasına sahip bir Fuchs denklemi olan Heun denklemleri tarafından üretilir (Ronveaux 1995). Heun denklemleri; konfluent Heun, genel Heun, bikonfluent Heun , doubly konfluent Heun ve trikonfluent Heun olmak üzere beş denklemden oluşur.

3.2.1. Genel Heun denklemi

Genel Heun denklemi

$$\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x-1} + \frac{\xi}{x-a}\right)\frac{d\Re(x)}{dx} + \left(\frac{\alpha\beta x - q}{x(x-1)(x-a)}\right)\Re(x) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Burada parametreler arasında $\delta + \gamma + \xi = \alpha + \beta + 1$ biçiminde bir bağıntı vardır. Genel Heun denklemi $x = 0, 1, a$ ve ∞ olmak üzere dört düzgün tekil noktaya sahiptir. Denklemin polinom çözümü $\Re(x) = H_G(a, q, \alpha, \gamma, \delta, x)$ genel Heun fonksiyonu olmak üzere, polinom olma koşulu; n, bir tamsayı olmak üzere,

$$\alpha = -n$$

şeklinde tanımlanır (Ronveaux 1995).
Eğer, $\alpha = 1$ ve $q = \alpha\beta$ veya $\alpha = q = 0$ veya $\xi = 0$ ve $q = a\alpha\beta$ ise, bu denklem hipergeometrik denklemlere indirgenir. Ayrıca $\gamma = \delta = \xi = \frac{1}{2}$ olursa Lame denklemleri elde edilir.

3.2.2. Konfleunt Heun denklemi

Konfluent denklemlerin çözümlerinde, denklemlerin düzgün sonlu bir tekil noktası ile $x = \infty$ düzgün tekil noktasının sonsuzda düzgün olmayan bir

tekilliğe yol açması sonucu ortaya çıkar. Böylece denklemlerin parametre sayısı bir azalırken, sonsuzdaki tekilliğin derecesi bir artar. Konfluent Heun denklemi

$$\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} + \left(\alpha + \frac{1+\beta}{x} + \frac{1+\epsilon}{x-1}\right)\frac{d\Re(x)}{dx} + \left(\frac{\mu x - \nu}{x(x-1)}\right)\Re(x) = 0 \qquad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. μ ve ν

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2\gamma + (\epsilon + 2 + \beta)\alpha}{2}, \\ \nu &= \frac{(1+\beta)(\alpha - \epsilon) - \beta - 2\eta}{2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Yukarıdaki denklemi incelersek $x = 0, 1$ noktalarında düzgün, $x = \infty$ noktasında düzgün olmayan tekil noktası vardır. Bu denklemin polinom çözümü konfluent Heun fonksiyonu $\Re(x) = H_C(\alpha, \beta, \epsilon, \gamma, \eta, x)$ olmak üzere, polinom olma koşulu; n bir pozitif tamsayı olmak üzere,

$$\gamma = -\alpha\left(n + \frac{\beta + \epsilon + 2}{2}\right) \qquad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır (Ronveaux 1995). Eğer, $\alpha = 0$ ve $\gamma = 0$ olursa, konfluent Heun fonksiyonları, $({}_2F_1)$ hipergeometrik fonksiyonları cinsinden yazılabilir.
Denklem (3.7)'de $\alpha = 0$ durumu ele alınırsa, bu denklemin $x = 0$ civarındaki çözümü

$$\Re(x) = c_1 H_C\left(0, \beta, \epsilon, \gamma, \eta, x\right) + c_2 x^{-\beta} H_C\left(0, -\beta, \epsilon, \gamma, \eta, x\right)$$

şeklindeki konfluent Heun fonksiyounudur. Ayrıca H_C'yi yine konfluent Heun fonksiyonları cinsinden (Kazakov 2006; Kwon vd. 2011; Moon ve Myung 2012b)

$$\begin{aligned} H_C\left(0, \beta, \epsilon, \gamma, \eta, x\right) &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon+\zeta)\Gamma(\beta-\zeta)} H_C\left(0, \epsilon, \beta, -\gamma, \eta+\gamma, 1-x\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\epsilon)}{\Gamma(1+\epsilon+\xi)\Gamma(\beta-\xi)}(1-x)^{-\beta} H_C\left(0, -\epsilon, \beta, -\gamma, \eta+\gamma, 1-x\right) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve ζ ve ξ,

$$\begin{aligned} \zeta^2 + (1-\beta-\epsilon)\zeta - \upsilon - \beta - \epsilon + \frac{\gamma}{2} &= 0, \\ \xi^2 + (1-\beta+\epsilon)\xi - \upsilon - \beta(\epsilon+1) + \frac{\gamma}{2} &= 0. \end{aligned}$$

şeklindeki denklemlerin ortak çözümüyle belirlenirler.

3.2.3. Bikonfluent Heun denklemi

Bikonfluent Heun denklemi, $x \rightarrow \dfrac{x}{b}$ dönüşümünden sonra $x = 1$'deki düzgün tekil noktası $x = \infty$'daki düzgün tekil noktaya taşınıp aynı zamanda $a \rightarrow \infty$ ve $b \rightarrow 0$ limitinde

$$\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} + \left(\tfrac{1+\alpha}{x} - \beta - 2x\right)\frac{d\Re(x)}{dx} + \left(\gamma - \alpha - 2 - \tfrac{1}{2x}[\delta + (1+\alpha)\beta]\right)\Re(x) = 0$$

şeklindeki bikonfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin, $x = 0$'da düzgün tekil ve $x = \infty$'da düzgün olmayan tekil noktası olmak üzere iki adet tekil noktası vardır. Bikonfluent Heun denkleminin polinom çözümü $\Re(x) = H_B(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ bikonfluent Heun fonksiyonu olmak üzere, polinom olma koşulu, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$\gamma = 2(n+1) + \alpha \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\delta = 0$ veya $\beta = \delta = 0$ ve $\alpha \neq -n$ ise bikonfluent Heun fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar (${}_1F_1$) cinsinden yazılabilir (Ronveaux 1995).

3.2.4. Double konfluent Heun denklemi

Double konfluent Heun denklemi

$$x^2\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} + \left(-x^2 + cx + t\right)\frac{d\Re(x)}{dx} + (-\alpha x + \lambda)\,\Re(x) = 0$$

şeklinde olup, denklemin polinom çözümü $\Re(x) = H_D(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x)$ şeklinde Double konfluent Heun fonksiyonları cinsindendir. Burada $x \in \mathbb{C}$, α ve c, $x = 0$ ve $x = \infty$ 'da bulunan düzgün olmayan tekilliklerdeki çözümlerin davranışını tanımlayan yerel parametrelerdir. t ise dönme noktalarının yerini belirleyen bir ölçeklendirme parametresidir. λ parametresi, yardımcı parametre olarak adlandırılır. Double konfluent Heun fonksiyonlarının polinom olma şartı (Slavyanov ve Lay 2000), n, negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$\alpha = -n \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır (Ronveaux 1995).

3.2.5. Trikonfluent Heun denklemi

Trikonfluent Heun denklemi

$$\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} - \left(3x^2 - \gamma\right)\frac{d\Re(x)}{dx} + (\alpha + \beta x - 3x)\,\Re(x) = 0$$

şeklinde tanımlanır. Sadece $x = \infty$'da düzensiz tekil noktası bulunur. Denklemin polinom çözümü $H_T(\alpha, \beta, \gamma, x)$ şeklindeki trikonfluent Heun fonksiyonları olup polinom olma şartı, n, negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$\beta = 3(n+1)$$

biçiminde tanımlanır (Ronveaux 1995).

3.3. Noether Teoremi

Noether teoremi, bir sistemin sahip olduğu simetrilerle korunum yasaları arasındaki ilişkiyi açıklar (Noether 1918). Bu teorem, farklı simetri türleri altında eylemin değişmezlik koşulları ve hareket sabitleri arasındaki ilişkiyi belirler. Ayrıca korunum yasalarının aslında uzay-zamanın öteleme ve dönme simetrilerinin bir sonucu olduğunu söyler. Yani, enerjinin korunumu zaman ötelemesi altında eylem fonksiyonunun değişmez (invaryant) kalmasının bir sonucuyken, lineer momentumun korunumu, uzay ötelemesi altında eylem fonksiyonunun değişmezliğinin bir sonucudur ve açısal momentumun korunumu, uzaysal dönmeler altında eylem fonksiyonunun değişmez kalmasından ileri gelir (Goldstein 1980). Şimdi Noether teoremini verelim:

Konfigurasyon uzayı, Q'nun bir manifold olduğunu varsayarak başlıyoruz. Bir çift konfigürasyon ve genelleştirilmiş hız olarak alınan sistemin fiziksel durumu, teğet demeti (tangent bundle) TQ'daki bir nokta ile temsil edilir. Yani, $x \in Q$'da teğet uzayı için T_x yazılırken, TQ, (x, τ) noktasına sahip ve $x \in Q$, $\tau \in T_x$'dir. Q üzerinde, q koordinat sisteminden kaynaklı, TQ üzerindeki doğal koordinatları düşünelim, yani $(q, \dot{q}) \equiv (q_i, (\dot{q})^i)$. Q üzerindeki vektör alanı

$$\chi = \chi^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i}$$

ve χ' in TQ üzerindeki taşınmışı (lift), $\tilde{\chi}$,

$$\tilde{\chi} = \chi^i(q)\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial \chi^i(q)}{\partial q^j}\dot{q^j}\frac{\partial}{\partial \dot{q^i}}$$

şeklinde tanımlanır. χ^i, q'ya bağlı, $\dot{q^i}$ bağlı değildir. Lagranjiyenin $\tilde{\chi}$ boyunca Lie türevi yok olursa, yani,

$$\pounds_{\tilde{\chi}} L = \chi^i(q)\frac{\partial L}{\partial q^i} + \frac{\partial \chi^i(q)}{\partial q^j}\dot{q^j}\frac{\partial L}{\partial \dot{q^i}} = 0 \tag{3.11}$$

şeklinde sıfıra eşitse, Lagranjiyenin betimlediği sistem korunan niceliklere sahiptir denir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. (2+1) Boyutlu Gravitasyonel Alanın Fermiyonik Alanla Etkileşimi

Daha önce tanımladığımız Denklem (3.1)'deki metrikte bulunan $A(u,r)$ ve $B(r)$ metrik katsayılarını belirleyeceğiz. Bunun için ilk olarak eğri uzay-zamanda Dirac parçacıklarını (fermiyonlarını) temsil eden Lagranjiyeni tanımlayarak başlayalım. m, Dirac parçacığının kütlesi, $D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$ kovaryant türev, $\Psi = \overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik, $V(\Psi)$, fermiyonların birbiriyle etkileşimini temsil eden potansiyel ve σ^μ, eğri uzay-zamanda Dirac matrisi olmak üzere, Lagranjiyen;

$$L_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^\mu D_\mu\psi - \left(\overline{D_\mu\,\psi}\right)\sigma^\mu\psi - m\Psi\right]$$

şeklinde yazılır. Gravitasyonel alanla fermiyonik alan arasındaki minimal etkileşimi betimleyen eylem fonksiyonu

$$S = \int \sqrt{|g|}d^3x\left\{R + \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\,\sigma^\mu D_\mu\psi - (\overline{D_\mu\,\psi})\sigma^\mu\psi\right] - m\Psi - V(\Psi)\right\} \tag{4.1}$$

biçiminde ifade edilir. R, Ricci skaleri olup Denklem (3.5)'teki ifadesi Denklem (4.1) de yazılır ve $A(u,r) = A, B(r) = B$ ve $\sigma = (i\overline{\sigma}^2 + \overline{\sigma}^1)$ şeklindeki kısaltmalardan sonra integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= \frac{A'}{B} - \frac{2AB'}{B^2} + \frac{irB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] \\ &- rB\left(m\Psi + V(\Psi)\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. $(\dot{})$, u'ya ve $(')$ r'ye bağlı türevler olmak üzere Euler-Lagrange hareket denklemleri ve kısıtlama denklemi

$$\frac{\partial L}{\partial A} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{A'}\right) - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{A}}\right) = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial B'}\right) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial\psi'}\right) = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\overline{\psi}} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\overline{\psi}}}\right) - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial L}{\partial\overline{\psi}'}\right) = 0, \tag{4.5}$$

$$\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} - L = 0 \tag{4.6}$$

olarak yazılır. Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler Lagrange hareket denklemleri ve kısıtlama denkleminin açık formu da

$$-\frac{B'}{B^2}-\frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]-\frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi'-\overline{\psi}'\sigma^1\psi\right]=0, \tag{4.7}$$

$$\frac{A'}{B^2}+\frac{ir}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]-r\left(m\Psi+V(\Psi)\right)=0, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{irB}{\sqrt{A}}\dot{\overline{\psi}}\sigma+ir\sqrt{A}\overline{\psi}'\sigma^1+\frac{i\sqrt{A}}{2}\overline{\psi}\sigma^1-\frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma+\frac{irA'}{4\sqrt{A}}\overline{\psi}\sigma^1\\ -\;&rB(m\overline{\psi}+\frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi})=0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{irB}{\sqrt{A}}\sigma\dot{\psi}-ir\sqrt{A}\sigma^1\psi'-\frac{i\sqrt{A}}{2}\sigma^1\psi+\frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\psi-\frac{irA'}{4\sqrt{A}}\sigma^1\psi\\ -\;&rB(m\psi+\frac{dV(\Psi)}{d\overline{\Psi}}\psi)=0,\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$rB(m\Psi+V(\Psi))=0 \tag{4.11}$$

olarak yazılır. Lagranjiyen fonksiyonu, A'nin u'ya bağlı türevini içermediği için Denklem (4.2) de verilen hareket denkleminin üçüncü terimi kaybolur. Denklem (4.9) sağdan ψ ile ve (4.10) da soldan $\bar{\psi}$ ile çarpıp taraf tarafa topladıktan sonra, Denklem (4.11)'den de $m\overline{\psi}=-\dfrac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi}$ ve $m\psi=-\dfrac{dV(\Psi)}{d\overline{\psi}}\psi$ eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]-ir\sqrt{A}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi'-\overline{\psi}'\sigma^1\psi\right]=0 \tag{4.12}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.11), Denklem (4.8)'de de yerine yazılırsa

$$\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]=\frac{2i\sqrt{A}A'}{rB^2} \tag{4.13}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Ayrıca, Denklem (4.13), Denklem (4.12) de yerine yazarsak

$$\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi'-\overline{\psi}'\sigma^1\psi\right]=\frac{2iA'}{rB\sqrt{A}} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Son olarak Denklem (4.14) ve (4.13), Denklem (4.7) de yerine yazılırsa

$$\frac{A'}{A}-\frac{B'}{B}=0 \tag{4.15}$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem için, A_0 keyfi sabit olmak üzere; $A = A_0 B$ gibi bir çözüm bulunur. Böylece A ve B için,

$$A = A_0 e^{\lambda r^2}, \qquad B = e^{\lambda r^2} \tag{4.16}$$

ya da

$$A = A_0 \frac{1}{r^2}, \qquad B = \frac{1}{r^2} \tag{4.17}$$

çözümleri elde edilir.

4.2. (2+1) Boyutlu Gravitasyonel Alanın Fermiyonik Alanla Minimal Olmayan Etkileşimi

Gravitasyonel alanla fermiyonik alan arasındaki minimal olmayan etkileşmeyi betimleyen çiftlenim için sistemin eylem fonksiyonu; $D_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu$ kovaryant türevi, ψ ve $\overline{\psi} = \psi^\dagger i\sigma^2$ spinor alan ve onun eşleniği, R, Ricci skaleri, $\Psi = \overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik, m Dirac parçacığının kütlesi, $V(\Psi)$ fermiyonların birbiriyle etkileşimini temsil eden potansiyel ve σ^μ eğri uzay-zamandaki Dirac matrisi ve $F(\Psi)$, çiftlenim fonksiyonu olmak üzere,

$$S = \int \sqrt{|g|} d^3x \left\{ F(\Psi)R + \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\,\sigma^\mu D_\mu \psi - (\overline{D}_\mu\,\overline{\psi})\sigma^\mu \psi\right] - m\Psi - V(\Psi) \right\}, \tag{4.18}$$

şeklinde tanımlanır. Basitlik için $\Psi = \Psi(u)$ şeklinde sadece u' nun fonksiyonu olarak alıyoruz. Denklem (3.1)'deki gravitasyonel dalga metriği ve bu metrikten hesaplanan Denklem (3.5)'teki Ricci skaleri ve Denklem (3.3)'teki Dirac matrisleri, Denklem (4.18) de verilen eylem fonksiyonunda yerine yazılır ve integral alınırsa sistemi temsil eden Lagranjiyen fonksiyonu

$$L = -\frac{rB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] + \frac{F(\Psi)A'}{B} - \frac{2F(\Psi)AB'}{B^2} - rB\left(m\Psi + V(\Psi)\right) \tag{4.19}$$

şeklinde bulunur. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, adjoint Dirac denklemi, Dirac denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\frac{rB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] + \frac{F(\Psi)B'}{B^2} = 0 \tag{4.20}$$

$$\frac{F(\Psi)A'}{B^2} - \frac{r}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - r\left(m\Psi + V(\Psi)\right) = 0 \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} &\frac{rB}{\sqrt{A}}\dot{\overline{\psi}}\sigma + \frac{\partial F(\Psi)}{\partial\Psi}\frac{A'}{B}\overline{\psi} - \frac{2\partial F(\Psi)}{\partial\Psi}\frac{AB'}{B^2}\overline{\psi} - rB(m\overline{\psi} + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi}) \\ -\ &\frac{rB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma = 0, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$- \quad \frac{rB}{\sqrt{A}}\sigma\dot{\psi} + \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{A'}{B}\psi - \frac{2\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{AB'}{B^2}\psi - rB(m\psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\Psi)$$
$$+ \quad \frac{rB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\overline{\psi} = 0 \tag{4.23}$$

$$rB(m\Psi + V(\Psi)) = 0 \tag{4.24}$$

olarak elde edilirler. Denklem (4.24), denklem (4.21) de yerine yazılır ve $\frac{B}{2A}$ ile çarpılırsa

$$\frac{rB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] = \frac{F(\Psi)A'}{2BA} \tag{4.25}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Denklem (4.25), Denklem (4.20) de yerine yazılırsa

$$\frac{F(\Psi)A'}{2BA} + \frac{F(\Psi)B'}{B^2} = 0 \tag{4.26}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Yukarıdaki ifade düzenlenir ve $\frac{A'}{A} + \frac{2B'}{B} = 0$, ifadesinin her iki tarafının integrali alınırsa; $a_0(u)$, u'nun bir fonksiyonu olmak üzere;

$$A = a_0(u)e^{2r^2}, \qquad B = e^{r^2} \tag{4.27}$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.22) sağdan ψ ile Denklem (4.23) de soldan $\overline{\psi}$ ile çarpılıp taraf tarafa toplandıktan sonra bulunan ifade de Denklem (4.24) yerine yazıldıktan sonra $\frac{1}{4A}$ ile çarpılırsa

$$-\frac{rB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] + \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{A'}{2AB}\Psi - \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{B'}{B^2}\Psi = 0 \tag{4.28}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Şimdi Denklem (4.25) Denklem (4.28) de yazıldıktan sonra $2B$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$-\frac{A'}{A}F(\Psi) + \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\Psi\frac{A'}{A} - 2\frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\Psi\frac{B'}{B} = 0 \tag{4.29}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.29), $\frac{A'}{A} = -\frac{2B'}{B}$ yardımıyla

$$2\frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\Psi - F(\Psi) = 0$$

şeklindeki denklem bulunur. C_1, sabit olmak üzere;

$$F(\Psi) = C_1\sqrt{\Psi}$$

şeklinde bir çözüm bulunur. Denklem (4.22) ve (4.23) te verilen ifadeler

$$\dot{\overline{\psi}} - \frac{\dot{A}}{4A}\overline{\psi} + \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{A'\sqrt{A}}{rB^2}\overline{\psi}\sigma - \frac{2\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{B'A^{3/2}}{rB^3}\overline{\psi}\sigma = 0 \tag{4.30}$$

$$\dot{\psi} - \frac{\dot{A}}{4A}\psi - \frac{\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{A'\sqrt{A}}{rB^2}\sigma\psi + \frac{2\partial F(\Psi)}{\partial \Psi}\frac{B'A^{3/2}}{rB^3}\sigma\psi = 0 \tag{4.31}$$

biçiminde düzenlendikten sonra; Denklem (4.30)'u sağdan ψ, Denklem (4.31) de soldan $\overline{\psi}$ ile çarpıldıktan sonra, bunlar taraf tarafa da toplanırsa

$$\dot{\Psi} - \frac{\dot{A}}{2A}\Psi = 0,$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.27) de bulunan $A = a_0(u)e^{2r^2}$ ifadesi yukarıda yerine yazılırsa denklemin çözümü,

$$\Psi = C_2\sqrt{a_0(u)}$$

şeklinde bulunur.

4.3. Teleparalel Kütleçekim Teorisindeki Burulma Skalerinin Hesaplanması

Denklem (3.1) de verilen üç boyutta gravitasyonel dalga metriği zemininde burulma skalerini hesaplayalım. Burulma skaleri

$$T = S_p{}^{\mu\upsilon}T^p{}_{\mu\upsilon} \tag{4.32}$$

şeklinde tanımlanır. $S_p{}^{\mu\upsilon}$, skew simetrik tensör olmak üzere;

$$S_p{}^{\mu\upsilon} = \frac{1}{4}[T^{\mu\upsilon}{}_p - T^{\upsilon\mu}{}_p + T_p{}^{\mu\upsilon}] + \frac{1}{2}[\delta^\mu_p T^{\beta\upsilon}{}_\beta - \delta^\upsilon_p T^{\beta\mu}{}_\beta] \tag{4.33}$$

şeklinde tanımlanır. $T^p{}_{\mu\upsilon}$ ise Weitzenböck burulma tensörüdür ve

$$T^p{}_{\mu\upsilon} = e^p_{(i)}(\partial_\mu e^{(i)}_\upsilon - \partial_\upsilon e^{(i)}_\mu) \tag{4.34}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki üç ayaklar (triad), $e^p_{(i)}$, Denklem (3.1) de verilen metrik zemininde Denklem (2.10) yardımıyla

$$\begin{aligned} e^0_{(0)} &= \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad e^1_{(0)} = 0, \\ e^1_{(1)} &= \frac{\sqrt{A}}{B}, \quad e^2_{(2)} = \frac{1}{r}, \quad e^0_{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{A}} \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Böylece sıfırdan farklı Weitzenböck burulma tensör bileşenleri

$$\begin{aligned} T^1{}_{01} &= -T^1{}_{10} = -\frac{\dot{A}}{2A}, \\ T^0{}_{10} &= -T^0{}_{01} = \frac{A'}{2A}, \\ T^2{}_{12} &= T^2{}_{21} = \frac{1}{r} \end{aligned} \tag{4.35}$$

olarak bulunur. Denklem (4.35)'te verilen ifadelere indis yükseltme ve alçaltma işlemleri uygulanarak

$$\begin{aligned} T_0^{\ 10} &= -T_0^{01} = \frac{A'}{2B^2} - \frac{\dot{A}}{2BA}, \\ T_1^{\ 01} &= -T_1^{\ 10} = \frac{A'}{2BA}, \\ T_2^{\ 20} &= -T_2^{\ 02} = -\frac{1}{B}, \\ T_2^{\ 21} &= -T_2^{\ 12} = -\frac{A}{rB^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

ve

$$\begin{aligned} T^{00}_{\ 0} &= -T^{01}_{\ 1} = \frac{A'}{2BA}, \\ T^{01}_{\ 0} &= \frac{A'}{2B^2}, \\ T^{10}_{\ 1} &= -T^{11}_{\ 1} = \frac{\dot{A}}{2BA}, \\ T^{11}_{\ 0} &= \frac{\dot{A}}{2B}, \quad T^{20}_{\ 2} = \frac{1}{rB}, \\ T^{21}_{\ 2} &= \frac{A}{rB^2}, \quad T^{22}_{\ 1} = -\frac{1}{r^3} \end{aligned} \tag{4.37}$$

şeklinde elde edilir. Denklem (4.36) ve (4.37) yardımıyla sıfırdan farklı skew simetrik tensör bileşenleri ve Denklem (4.33) yardımıyla

$$\begin{aligned} S_1^{\ 01} &= -S_1^{\ 10} = -\frac{1}{2rB}, \\ S_0^{\ 01} &= -S_0^{\ 10} = \frac{A}{2rB^2}, \\ S_2^{\ 21} &= -S_2^{\ 12} = \frac{A'}{4B^2} - \frac{\dot{A}}{4BA} \end{aligned} \tag{4.38}$$

biçiminde bulunur. Son olarak Denklem (4.35) ve (4.38)'deki ifadeler, Denklem (4.32) de yazılırsa burulma skaleri

$$T = \frac{\dot{A}}{rBA} - \frac{A'}{rB^2} \tag{4.39}$$

şeklinde elde edilir.

4.4. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın Teleparalel Kütleçekim Alanı İle Minimal Etkileşimi

(2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga zemininde, fermiyonik alanın teleparalel kütleçekim alanıyla minimal etkileşimini betimleyen sistemin eylem fonksiyonu;

$|e| = det(e^{\alpha}_{\mu}) = \sqrt{|g|}$ olup, g, metrik tensörün determinantı, $D_{\mu} = \partial_{\mu} - \Gamma_{\mu}$ kovaryant türevi, ψ ve $\overline{\psi} = \psi^{\dagger} i\sigma^{2}$ spinor alan ve onun eşleniği, $\Psi = \overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik, m Dirac parçacığının kütlesi, $V(\Psi)$ fermiyonların birbiriyle etkileşimini temsil eden potansiyel ve σ^{μ} eğri uzay-zamandaki Dirac matrisi ve T ise Denklem (4.39) da elde edilen burulma skaleri olmak üzere,

$$S = \int d^{3}x\, |e| \left\{ T + \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\,\sigma^{\mu} D_{\mu}\psi - (\overline{D}_{\mu}\,\overline{\psi})\sigma^{\mu}\psi\right] - m\Psi - V(\Psi) \right\} \tag{4.40}$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (3.1)'deki gravitasyonel dalga metriği ve bu metrikten hesaplanan (4.39) da elde edilen burulma skaleri ve Denklem (3.3)'teki Dirac matrisleri, Denklem (4.40)'ta yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu,

$$\begin{aligned} L &= \frac{irB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^{1}\psi' - \overline{\psi}'\sigma^{1}\psi\right] - \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B}\right) \\ &- rB\left(m\Psi + V(\Psi)\right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, adjoint Dirac denklemi, Dirac denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] + \frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma^{1}\psi' - \overline{\psi}'\sigma^{1}\psi\right] + \frac{B'}{B^{2}} = 0, \tag{4.41}$$

$$\frac{ir}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - r(m\Psi + V(\Psi)) + \frac{A'}{B^{2}} = 0 \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{irB}{\sqrt{A}}\dot{\overline{\psi}}\sigma + ir\sqrt{A}\overline{\psi}'\sigma^{1} - rB(m\overline{\psi} + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi}) + \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma\frac{i\sqrt{A}}{2}\overline{\psi}\sigma^{1} \\ &+ \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\overline{\psi}\sigma^{1} = 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} &\frac{irB}{\sqrt{A}}\sigma\dot{\psi} - ir\sqrt{A}\sigma^{1}\psi' - rB(m\psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\psi) - \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\psi - \frac{i\sqrt{A}}{2}\sigma^{1}\psi \\ &- \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\sigma^{1}\psi = 0, \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$rB(m\Psi + V(\Psi)) = 0 \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilirler. Denklem (4.43)'ü sağdan ψ, Denklem (4.44)'ü de soldan $\overline{\psi}$ ile çarpılarak, taraf tarafa toplandıktan sonra, Denklem (4.45) yardımıyla

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - ir\sqrt{A}\left[\overline{\psi}\sigma^{1}\psi' - \overline{\psi}'\sigma^{1}\psi\right] - 2rB\left(m\Psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\Psi\right) = 0 \tag{4.46}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Denklem (4.45), Denklem (4.42) de yazılırsa

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]=-\frac{2A'}{B} \tag{4.47}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bulunan bu ifade ve Denklem (4.45), Denklem (4.46) da yazılırsa

$$-\frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\psi'-\overline{\psi}'\sigma\psi\right]=\frac{A'}{2AB} \tag{4.48}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Son olarak Denklem (4.47) ve (4.48) de verilen ifadeler, Denklem (4.41) de yerine yazılırsa

$$\left(\frac{A'}{AB}-\frac{B'}{B^2}\right)=0 \tag{4.49}$$

şeklindeki denklem bulunur. Bu ifade daha önce elde edilen Denklem (4.15)'teki çözümle aynıdır.

4.5. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Olmayan Etkileşimi

(2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga zemininde, fermiyonik alanın teleparalel kütleçekim alanıyla minimal olmayan etkileşimini betimleyen sistemin eylem fonksiyonunu; $|e|=det(e_\mu^\alpha)=\sqrt{|g|}$ olup g metrik tensörün determinantı, $D_\mu=\partial_\mu-\Gamma_\mu$ kovaryant türevi, ψ ve $\overline{\psi}=\psi^\dagger i\sigma^2$ spinor alan ve onun eşleniği, $\Psi=\overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik, m Dirac parçacığının kütlesi, $V(\Psi)$ fermiyonların birbiriyle etkileşimini temsil eden potansiyel ve σ^μ eğri uzay-zamandaki Dirac matrisi, $F(\Psi)$ çiftlenim fonksiyonu ve T ise Denklem (4.39) da elde edilen burulma skaleri olmak üzere,

$$S=\int d^3x\,|e|\left\{F(\Psi)T+\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\,\sigma^\mu D_\mu\psi-(\overline{D}_{\,\mu}\,\overline{\psi})\sigma^\mu\psi\right]-m\Psi-V(\Psi)\right\} \tag{4.50}$$

biçiminde tanımlanır. Denklem (3.1)'deki gravitasyonel dalga metriği ve bu metrikten hesaplanan (4.39) da elde edilen burulma skaleri ve Denklem (3.3)'teki Dirac matrisleri, Denklem (4.50) de yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu

$$\begin{aligned}L &= \frac{irB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]-\frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi'-\overline{\psi}'\sigma^1\psi\right]-\left(\frac{\dot{A}}{A}-\frac{A'}{B}\right)F(\Psi)\\ &- rB\left(m\Psi+V(\Psi)\right)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, adjoint Dirac denklemi, Dirac denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$- \frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] - \frac{1}{A}\frac{dF(\Psi)}{d\Psi}\dot{\Psi} - \frac{B'}{B^2}F(\Psi)$$
$$+ \frac{1}{B}\frac{dF(\Psi)}{d\Psi}\Psi' = 0, \tag{4.51}$$
$$\frac{ir}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - r(m\Psi + V(\Psi)) + \frac{A'}{B^2}F(\Psi) = 0 \tag{4.52}$$

$$- \frac{irB\dot{\overline{\psi}}}{\sqrt{A}}\sigma + ir\sqrt{A}\overline{\psi}'\sigma^1 - rB(m\overline{\psi} + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi}) + \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma\frac{i\sqrt{A}}{2}\overline{\psi}\sigma^1$$
$$+ \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\overline{\psi}\sigma^1 + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B}\right)F(\Psi)\overline{\psi} = 0 \tag{4.53}$$

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\sigma\dot{\Psi} - ir\sqrt{A}\sigma^1\psi' - rB(m\psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\psi) - \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\psi - \frac{i\sqrt{A}}{2}\sigma^1\psi$$
$$- \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\sigma^1\psi + \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B}\right)F(\Psi)\psi = 0, \tag{4.54}$$
$$rB(m\Psi + V(\Psi)) = 0 \tag{4.55}$$

şeklinde elde edilirler. Denklem (4.53) sağdan ψ, Denklem (4.54)'te soldan $\overline{\psi}$ ile çarpılarak taraf tarafa toplandıktan sonra Denklem (4.55) yardımıyla

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - ir\sqrt{A}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] + 2\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B}\right)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi}\Psi$$
$$- 2rB(m\Psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\Psi) = 0 \tag{4.56}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem (4.55), Denklem (4.52) de yazılırsa

$$\frac{irB}{\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] = -\frac{2A'}{B}F(\Psi) = 0 \tag{4.57}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Bulunan bu ifade ve Denklem(4.55), Denklem (4.56) da yazılırsa

$$-\frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\psi' - \overline{\psi}'\sigma\psi\right] = \frac{A'}{2AB}F(\Psi) - \left(\frac{\dot{A}}{2A^2} - \frac{A'}{2AB}\right)\frac{dF(\Psi)}{d\Psi}\Psi = 0 \tag{4.58}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Son olarak Denklem (4.57) ve (4.58) de verilen ifadeler, Denklem (4.51) de yerine yazılırsa

$$\left[\left(\frac{\dot{A}}{2A^2}-\frac{A'}{2AB}\right)\Psi-\frac{1}{A}\dot{\Psi}+\frac{1}{B}\Psi'\right]\frac{dF(\Psi)}{d\Psi}+\left(\frac{A'}{AB}-\frac{B'}{B^2}\right)F(\Psi)=0 \quad (4.59)$$

biçimindeki denklem elde edilir. ψ_0 keyfi sabit ve $\Psi=\Psi(u,r)$, u ve r' nin bir fonksiyonu ve $F(\Psi)=e^{c\Psi}$ olmak üzere; Denklem (4.59)'u sağlayan çözümler,

$$A = \frac{1}{r^c},\ B=\frac{1}{r^{c+1}}, \quad (4.60)$$

$$\Psi = -\frac{2}{c^2}+r^{-\frac{c}{2}}\psi_0(ln(r)+u) \quad \text{burada, } c>0 \quad (4.61)$$

ve

$$A = e^{cr^2},\ B=e^{cr^2}, \quad \text{burada, c keyfi bir sabit} \quad (4.62)$$
$$\Psi = (r+u)e^{\frac{cr^2}{2}}$$

şeklinde elde edilirler.

4.6. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Fermiyonik Alanın F(T) Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Etkileşimi

(2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga zemininde fermiyonik alanın $F(T)$ kütleçekim alanı ile minimal etkileşimini betimleyen sistemin eylem fonksiyonu; $|e|=det(e^\alpha_\mu)=\sqrt{|g|}$ olup, g, metrik tensörün determinantı, $D_\mu=\partial_\mu-\Gamma_\mu$ kovaryant türevi, ψ ve $\overline{\psi}=\psi^\dagger i\sigma^2$ spinor alan ve onun eşleniği, $\Psi=\overline{\psi}\psi$ spinor alanın bilineer formu ile tanımlanan skaler nicelik, m, Dirac parçacığının kütlesi, $V(\Psi)$, fermiyonların birbiriyle etkileşimini temsil eden potansiyel ve σ^μ eğri uzay-zamandaki Dirac matrisi olmak üzere,

$$S=\int d^3x\,|e|\left\{F(T)+\frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\,\sigma^\mu D_\mu\psi-(\overline{D}_\mu\,\overline{\psi})\sigma^\mu\psi\right]-m\Psi-V(\Psi)\right\} \quad (4.63)$$

şeklinde tanımlanır. $F(T)$, sırasıyla γT^2 ve $T+\gamma T^2$ modelleri için incelenecektir.

4.6.1. F(T)= $\gamma\,T^2$ modeli

Bu modelde γ, keyfi bir sabittir. Denklem (4.39)'daki burulma skaleri, T yardımıyla, $F(T)$,

$$F(T)=\gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{r^2B^2A^2}-\frac{2\dot{A}A'}{r^2B^3A}+\frac{A'^2}{r^2B^4}\right) \quad (4.64)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade Denklem (4.63)'te yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu

$$\begin{aligned} L &= \frac{irB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] - rB\left(m\Psi + V(\Psi)\right) \\ &+ \gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{A'^2}{rB^3}\right) \end{aligned} \tag{4.65}$$

şeklinde bulunur. $\dot{A}' = \dfrac{\partial^2 A}{\partial u \partial r}$ olmak üzere, bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, adjoint Dirac denklemi, Dirac denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\begin{aligned} &\frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] + \frac{2\gamma\dot{A}^2}{rBA^3} - \frac{2\gamma\ddot{A}}{rBA^2} + \frac{2\gamma A'}{r^2B^3} \\ &+ \frac{4\gamma\dot{A}'}{rB^2A} - \frac{2\gamma A'\dot{A}}{rB^2A^2} - \frac{2\gamma A''}{rB^3} - \frac{2\gamma\dot{A}}{r^2B^2A} - \frac{4\gamma\dot{A}B'}{rB^3A} + \frac{6\gamma A'B'}{rB^4} = 0 \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\frac{ir}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - r(m\Psi + V(\Psi)) - \frac{\gamma\dot{A}^2}{rB^2A^2} - \frac{3\gamma\dot{A}^2}{rB^4} + \frac{4\gamma A'\dot{A}}{rB^3A} = 0 \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned} &\frac{-irB}{\sqrt{A(r,u)}}\dot{\overline{\psi}}\sigma + ir\sqrt{A}\overline{\psi}'\sigma^1 - rB(m\overline{\psi} + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi}) + \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma + \frac{i\sqrt{A}}{2}\overline{\psi}\sigma^1 \\ &+ \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\overline{\psi}\sigma^1 = 0 \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} &\frac{irB}{\sqrt{A(r,u)}}\sigma\dot{\Psi} - ir\sqrt{A}\sigma^1\psi' - rB(m\psi + \frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\psi) - \frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\psi - \frac{i\sqrt{A}}{2}\sigma^1\psi \\ &- \frac{irA'}{4\sqrt{A}}\sigma^1\psi = 0 \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{A'^2}{rB^3}\right) + rB(m\Psi + V(\Psi)) = 0 \tag{4.70}$$

şeklinde elde edilirler. Denklem (4.67), $\dfrac{B}{2A}$ ile çarpılıp, Denklem (4.70)'te yerine yazıldıktan sonra

$$\frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] = -\frac{\gamma\dot{A}A'}{rB^2A^2} - \frac{\gamma A'^2}{rB^3A} \tag{4.71}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem (4.68)'i sağdan ψ, Denklem (4.69) da soldan $\overline{\psi}$ ile çarpıldıktan sonra taraf tarafa toplanır ve Denklem (4.71) yardımıyla

$$\frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] = \frac{4\gamma\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{4\gamma A'^2}{rB^3} \tag{4.72}$$

şeklindeki denklem bulunur. Elde edilen (4.68) ve (4.72) denklemleri, Denklem (4.66) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} - & \frac{2\gamma A'^2}{rB^3A} + \frac{2\gamma\dot{A}^2}{rBA^3} - \frac{2\gamma\ddot{A}}{rBA^2} + \frac{4\gamma\dot{A}'}{rB^2A} - \frac{2\gamma A''}{rB^3} - \frac{2\gamma\dot{A}}{r^2B^2A} - \frac{4\gamma\dot{A}B'}{rB^3A} \\ + & \frac{6\gamma A'B'}{rB^4} + \frac{2\gamma A'}{r^2B^3} = 0 \end{aligned} \tag{4.73}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklemi sağlayan çözüm, γ, keyfi bir sabit ve $q \geq 0$ olmak üzere;

$$A = r^{-3q-2}, \quad B = r^{-2q-2} \tag{4.74}$$

olarak elde edilir.

4.6.2. F(T)= $T + \gamma\, T^2$ modeli

Bu modelde γ, keyfi bir sabittir. Denklem (4.39)'daki burulma skaleri, T yardımıyla, $F(T)$,

$$F(T) = \frac{\dot{A}}{rBA} - \frac{A'}{rB^2} + \gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{r^2B^2A^2} - \frac{2\dot{A}A'}{r^2B^3A} + \frac{A'^2}{r^2B^4}\right) \tag{4.75}$$

biçiminde elde edilir. Bu ifade Denklem (4.63)'te yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu

$$\begin{aligned} L &= \frac{irB}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B} \\ &- rB\left(m\Psi + V(\overline{\psi}\psi)\right) + \gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{A'^2}{rB^3}\right) \end{aligned} \tag{4.76}$$

şeklinde bulunur. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, adjoint Dirac denklemi, Dirac denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\begin{aligned} & \frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi} - \dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right] - \frac{ir}{4\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi' - \overline{\psi}'\sigma^1\psi\right] + \frac{2\gamma\dot{A}^2}{rBA^3} + \frac{4\gamma\dot{A}'}{rB^2A} + \frac{6\gamma A'B'}{rB^4} \\ - & \frac{2\gamma A'\dot{A}}{rB^2A^2} - \frac{2\gamma\dot{A}}{r^2B^2A} - \frac{4\gamma\dot{A}B'}{rB^3A} - \frac{B'}{B^2} - \frac{2\gamma\ddot{A}}{rBA^2} + \frac{2\gamma A'}{r^2B^3} - \frac{2\gamma A''}{rB^3} = 0, \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\frac{ir}{2\sqrt{A}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]-r(m\Psi+V(\Psi))+\frac{A'}{B^2}-\frac{\gamma\dot{A}^2}{rB^2A^2}+\frac{3\gamma\dot{A}^2}{rB^4}+\frac{4\gamma A'\dot{A}}{rB^3A}=0, \tag{4.78}$$

$$\frac{-irB}{\sqrt{A(r,u)}}\dot{\overline{\psi}}\sigma+ir\sqrt{A}\overline{\psi}'\sigma^1-rB(m\overline{\psi}+\frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\overline{\psi})+\frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\overline{\psi}\sigma\frac{irA'}{4\sqrt{A}}\overline{\psi}\sigma^1$$
$$+\quad\frac{i\sqrt{A}}{2}\overline{\psi}\sigma^1=0, \tag{4.79}$$

$$\frac{irB}{\sqrt{A(r,u)}}\sigma\dot{\Psi}-ir\sqrt{A}\sigma^1\psi'-rB(m\psi+\frac{dV(\Psi)}{d\Psi}\psi)-\frac{irB\dot{A}}{4A^{3/2}}\sigma\psi-\frac{irA'}{4\sqrt{A}}\sigma^1\psi$$
$$-\quad\frac{i\sqrt{A}}{2}\sigma^1\psi=0, \tag{4.80}$$

$$\gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2}-\frac{2\dot{A}A'}{rB^2A}+\frac{A'^2}{rB^3}\right)+rB(m\Psi+V(\Psi))=0 \tag{4.81}$$

olarak elde edilirler. Denklem (4.78), $\dfrac{B}{2A}$ ile çarpılıp denklem (4.81) de yerine yazıldıktan sonra

$$\frac{irB}{4A^{3/2}}\left[\overline{\psi}\sigma\dot{\psi}-\dot{\overline{\psi}}\sigma\psi\right]=-\frac{\gamma\dot{A}A'}{rB^2A^2}-\frac{\gamma A'^2}{rB^3A}-\frac{A'}{2AB} \tag{4.82}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.79)'u sağdan ψ, Denklem (4.80) de soldan $\overline{\psi}$ ile çarpıldıktan sonra taraf tarafa toplanır ve Denklem (4.81) yardımıyla

$$\frac{ir\sqrt{A}}{2}\left[\overline{\psi}\sigma^1\psi'-\overline{\psi}'\sigma^1\psi\right]=\frac{4\gamma\dot{A}A'}{rB^2A}+\frac{4\gamma A'^2}{rB^3}-\frac{2A'}{B} \tag{4.83}$$

biçimindeki denklem bulunur. Elde edilen Denklem (4.82) ve (4.83), Denklem (4.77) de yerine yazılırsa

$$-\quad\frac{2\gamma A'^2}{rB^3A}+\frac{A'}{AB}+\frac{2\gamma\dot{A}^2}{rBA^3}-\frac{2\gamma\ddot{A}}{rBA^2}-\frac{2\gamma\dot{A}}{r^2B^2A}+\frac{4\gamma\dot{A}'}{rB^2A}-\frac{4\gamma\dot{A}B'}{rB^3A}+\frac{6\gamma A'B'}{rB^4}$$
$$-\quad\frac{2\gamma A''}{rB^3}\frac{2\gamma A'}{r^2B^3}-\frac{B'}{B}=0 \tag{4.84}$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Bu denklemi sağlayan çözümler, ℓ, keyfi bir sabit olmak üzere;

$$A=e^{\ell r^2},\quad B=e^{\frac{\ell r^2}{2}}\quad\text{ve}\quad\gamma=\frac{1}{4\ell} \tag{4.85}$$

ya da

$$A=r^{\ell},\quad B=r^{\frac{\ell-2}{2}}\quad\text{ve}\quad\gamma=\frac{1}{2\ell} \tag{4.86}$$

şeklinde bulunur.

4.7. (2+1) Boyuttaki Gravitasyonel Dalga Metriği Zemininde Skaler Alanın F(T) Teleparalel Kütleçekim Alanı ile Minimal Etkileşimi

(2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga zemininde, skaler alanın teleparalel kütleçekim alanıyla minimal etkileşimini betimleyen sistemin eylem fonksiyonu; $|e| = det(e^{\alpha}_{\mu}) = \sqrt{|g|} = rB$ olup, g, metrik tensörün determinantı, ϕ skaler alanı ve $U(\phi)$ ise skaler alanı temsil eden potansiyel fonksiyon ve m, skaler parçacığın kütlesi olmak üzere,

$$S = \int d^3x\,|e| \left\{ F(T) + \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)\right] - m^2\phi - U(\phi) \right\}, \tag{4.87}$$

şeklinde tanımlanır. $F(T)$, sırasıyla γT^2 ve $T + \gamma T^2$ modelleri için incelenecektir.

4.7.1. F(T)= $\gamma\, T^2$ modeli

Denklem (4.64), yukarıda verilen eylem fonksiyonunda yerine yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu

$$L = \frac{rA}{2B}\phi'^2 + \gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{A'^2}{rB^3}\right) - rB\left(m^2\phi + U(\phi)\right) \tag{4.88}$$

biçiminde elde edilir. Basitlik için alan $\phi(r)$, sadece r'nin bir fonksiyonu olarak seçildi. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, spin-0 denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\begin{aligned} - & \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A^2} + \frac{2\dot{A}^2\gamma}{rBA^3} + \frac{6A'B'\gamma}{rB^4} + \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2A} + \frac{r\phi'^2}{2B} - \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2A} - \frac{A''\gamma}{rB^3} + \frac{2A'\gamma}{r^2B^3} \\ - & \frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3A} - \frac{\ddot{A}\gamma}{rBA^2} = 0 \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$-\frac{\dot{A}^2\gamma}{rB^2A^2} - \frac{4\dot{A}A'\gamma}{rB^3A} - \frac{3A'^2\gamma}{rB^4} - \frac{rA}{2B^2}\phi''^2 - r\left(m^2\phi + U(\phi)\right) = 0 \tag{4.90}$$

$$-\frac{rA\phi''}{B} - \left(\frac{A}{B} + \frac{rA'}{B} - \frac{rAB'}{B^2}\right)\phi' - rBm^2\phi + rBU(\phi) = 0 \tag{4.91}$$

$$-\frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A} - \frac{rA}{2B}\phi''^2 + \frac{A'^2\gamma}{rB^3} + rBm^2\phi + rBU(\phi) = 0, \tag{4.92}$$

şeklinde elde edilirler. Bu denklemlerin çözülebilmesi için $(m^2\phi + U(\phi))$'nin bilinmesi gerekmektedir. Bu nedenle Noether Simetrisi yaklaşımı kullanarak

belirleyeceğiz. Teğet konfigürasyon uzayının koordinatları $(A,\ \dot{A},\ A',\ B,\ \phi,\ \phi')$ ile temsil edilir. Vektör alanı

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial A}+\dot{C}_0\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial \dot{A}}{C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial A'}\\ &+ C_1\left(A,B,\phi\right)\frac{\partial}{\partial B}+C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial \phi}+{C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial \phi'}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\dot{C}_0\left(A,\ B,\ \phi\right)$, ${C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right)$ ve ${C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right)$ için

$$\begin{aligned}\dot{C}_0\left(A,\ B,\ \phi\right) &= \dot{A}\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}+\dot{\phi}\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi},\\ {C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right) &= A'\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}+B'\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B}+\phi'\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi}\\ {C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right) &= A'\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}+B'\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B}+\phi'\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi}\end{aligned}$$

şeklindeki kısaltmalar yapılmıştır. Denklem (3.11) de verilen Noether simetri koşulundan, $\pounds_X L=0$, $\dot{A}^2, {\phi'}^2,\ {A'}^2, \dot{A}A',\ \dot{A}\dot{\phi},\ A'\dot{\phi},\ \dot{A}\phi',\ \dot{A}B',\ A'B', A'\phi',\ B'\phi'$ katsayılarının sıfır olması gerekir. Bu durumda

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi}=0, \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B}=0, \tag{4.94}$$

$$\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B}=0, \tag{4.95}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}-\frac{C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{A}-\frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2}=0, \tag{4.96}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}-\frac{C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2A}-\frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{B}=0, \tag{4.97}$$

$$\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi}+\frac{C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2A}-\frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{B}=0, \tag{4.98}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}-\frac{3C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2B}=0, \tag{4.99}$$

$$rA\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A}+\frac{2\gamma}{rB^2}\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi}=0 \tag{4.100}$$

ve son olarak

$$C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)r\left(m^2\phi+U(\phi)\right)+C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)rB\left(m^2+\frac{dU(\phi))}{d\phi}\right)=0 \tag{4.101}$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem (4.120), Denklem (4.97) de yazılırsa

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{3C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2A} = 0 \tag{4.102}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$C_0\left(A,\ B,\ \phi\right) \ = \ N_0 A^{3/2}$$

biçiminde bulunur. Elde edilen bu ifade yardımıyla

$$C_1\left(A,\ B,\ \phi\right) \ = \ N_1 B A^{1/2}$$

çözümü bulunur. Elde edilen bu iki ifade Denklem (4.98) de yazılırsa

$$\frac{\partial C_2\left(A, B, \phi\right)}{\partial \phi} = 0$$

şeklinde bulunur. Daha önce elde edilen Denklem (4.95) ve (4.100) dikkate alınırsa

$$C_2\left(A,\ B,\ \phi\right) = 0$$

şeklinde elde edilir. Böylece Denklem (4.101)'dan $m^2\phi + U(\phi) = 0$ olduğu görülmektedir. Bulunan bu ifade Denklem (4.90), (4.91) ve (4.92) de yerine yazıldıktan sonra Denklem (4.90) ve (4.92)'yi taraf tarafa toplarsak

$$\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B} = 0 \tag{4.103}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Bu denklemin u' ya göre türevini alırsak

$$\frac{\ddot{A}}{A} = \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A}'}{B} \tag{4.104}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem (4.103)'ün r'ye göre türevi alınırsa

$$\frac{\dot{A}'}{A} = \frac{A''}{B} - \frac{A'B'}{B^2}$$

şeklindeki denklem bulunur. Şimdi Denklem (4.89) ve Denklem (4.90) taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} + \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A} - \frac{2\ddot{A}\gamma}{rBA} + \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2} - \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2} - \frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3} - \frac{2A''A}{rB^3} + \frac{2AA'\gamma}{r^2B^3} \\ + \ & \frac{6A'B'A\gamma}{rB^4} - \frac{3A'^2\gamma}{rB^3} = 0 \end{aligned} \tag{4.105}$$

denklemi elde edilir. Denklem (4.89)'dan, Denklem (4.92)'yi çıkarırsak

$$- \frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} + \frac{A'^2\gamma}{rB^3} + \frac{2\ddot{A}\gamma}{rBA} - \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2} + \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2} + \frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3} + \frac{2A''A}{rB^3} - \frac{2AA'\gamma}{r^2B^3} - \frac{6A'B'A\gamma}{rB^4} = 0 \tag{4.106}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Daha önce elde ettiğimiz Denklem (4.103) ve (4.104), Denklem (4.105)'te yerine yazar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$-\frac{2A'^2\gamma}{rB^3} = 0 \tag{4.107}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Aynı şekilde Denklem (4.103) ve (4.104)'ü, Denklem (4.106) da yazarsak ve gerekli düzenlemelerden sonra

$$A'' - \frac{A'^2}{2A} = 0 \tag{4.108}$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Denklem (4.103), (4.107) ve (4.108)'in ortak çözümünden

$$A'' + \frac{\dot{A}}{A} = 0$$

şeklindeki denklem bulunur. Bu denklemin çözümü

$$A = C_1\frac{r(2-r)}{2(1-u)}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade Denklem (4.103)'te yazılırsa, C_1 sabit olmak üzere;

$$B = C_1(1-r)$$

çözümü bulunur. Elde edilen A ve B, Denklem (4.91) de yazılırsa

$$\phi(r) = C_1\frac{1}{4}ln(\frac{r}{r-2} + \frac{1}{2r})$$

şeklindeki çözüm bulunur. Elde edilen bu metrik katsayıları için, Denklem (3.6)'te verilen Ricci tensörunun kontraksiyonu, ($R_{ab}R^{ab}$), sonlu olmalıdır. Ancak $R_{ab}R^{ab}$, Ricci tensörunun kontraksiyonu sonlu olmadığı için buradan elde edilen çözüm gravitasyonel dalga metriğini temsil edemez.

4.7.2. F(T)= $T + \gamma\, T^2$ modeli

Denklem (4.75)'te verilen ifade Denklem (4.87)'deki eylem fonsiyonunda yazılır ve integral alınırsa Lagranjiyen fonksiyonu

$$L = \frac{rA}{2B}\phi''^2 + \gamma\left(\frac{\dot{A}^2}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'}{rB^2A} + \frac{A'^2}{rB^3}\right) + \frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B} - rB\left(m^2\phi + U(\phi)\right) \quad (4.109)$$

şeklinde elde edilir. Alan, $\phi(r)$, sadece r'nin fonksiyonudur. Bu Lagranjiyen fonksiyonundan sırasıyla Denklem (4.2 - 4.6) da verilen Euler lagrange denklemleri, spin-0 denklemi ve Hamilton kısıtlama denklemi

$$\begin{aligned} &- \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A^2} + \frac{2\dot{A}^2\gamma}{rBA^3} + \frac{6A'B'\gamma}{rB^4} + \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2A} + \frac{r\phi''^2}{2B} - \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2A} - \frac{2A''\gamma}{rB^3} + \frac{2A'\gamma}{r^2B^3} \\ &- \frac{B'}{B^2} - \frac{2\ddot{A}\gamma}{rBA^2}\frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3A} = 0, \end{aligned} \quad (4.110)$$

$$- \frac{\dot{A}^2\gamma}{rB^2A^2} + \frac{4\dot{A}A'\gamma}{rB^3A} - \frac{3A'^2\gamma}{rB^4} - \frac{rA\phi''^2}{2B^2} + \frac{A'}{B^2} - r\left(m^2\phi + U(\phi)\right) = 0 \quad (4.111)$$

$$-\frac{rA\phi''}{B} - \left(\frac{A}{B} + \frac{rA'}{B} - \frac{rAB'}{B^2}\right)\phi' - rBm^2\phi + rBU(\phi)) = 0 \quad (4.112)$$

$$-\frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} - \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A} - \frac{rA}{2B}\phi''^2 + \frac{A'^2\gamma}{rB^3} + rBm^2\phi + rBU(\phi) = 0 \quad (4.113)$$

şeklinde elde edilirler. Bu denklemlerin çözülebilmesi için $(m^2\phi + U(\phi))$'nin bilinmesi gerekmektedir. Yine aynı şekilde Noether Simetrisi yaklaşımı kullanılacaktır. Teğet konfigürasyon uzayının koordinatları $(A,\ \dot{A},\ A',\ B,\ \phi,\ \phi')$ ile temsil edilir. Vektör alanı

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial A} + \dot{C}_0\left(A, B, \phi\right)\frac{\partial}{\partial \dot{A}} + {C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial A'} \\ &+ C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial B} + C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial \phi} + {C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right)\frac{\partial}{\partial \phi'} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\dot{C}_0\left(A,\ B,\ \phi\right)$, ${C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right)$ ve ${C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right)$ için

$$\begin{aligned} \dot{C}_0\left(A,\ B,\ \phi\right) &= \dot{A}\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} + \dot{\phi}\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} \\ {C_0}'\left(A,\ B,\ \phi\right) &= A'\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} + B'\,\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B} + \phi'\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} \\ {C_2}'\left(A,\ B,\ \phi\right) &= A'\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} + B'\,\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial B} + \phi'\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} \end{aligned}$$

şeklindeki kısaltmalar kullanılmıştır. Denklem (3.11) de verilen Noether simetri koşulundan, $\pounds_X L = 0$, $\dot{A}^2, \phi'^2, A'^2,\ \dot{A}A',\ \dot{A}\dot{\phi},\ A'\dot{\phi},\ \dot{A}\phi',\ \dot{A}B',\ A'B', A'\phi',\ B'\phi'$ katsayılarının sıfir olması gerekir. Bu durumda

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} = 0, \tag{4.114}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} - \frac{rC_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2} = 0, \tag{4.115}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{C_1\left(A,B,\phi\right)}{B} + \frac{\gamma C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2A} = 0, \tag{4.116}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{A} - \frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2B} = 0, \tag{4.117}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{A} + \frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)A}{B} = 0, \tag{4.118}$$

$$\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} - \frac{C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{B} = 0, \tag{4.119}$$

$$\frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{3\gamma C_1\left(A,\ B,\ \phi\right)}{2B} = 0, \tag{4.120}$$

$$A\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} - \frac{\partial C_0\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial \phi} = 0 \tag{4.121}$$

ve son olarak

$$C_1\left(A,\ B,\ \phi\right) r\left(m^2\phi + U(\phi)\right) + C_2\left(A,\ B,\ \phi\right) rB\left(m^2 + \frac{dU(\phi))}{d\phi}\right) = 0 \tag{4.122}$$

eşitlikleri elde edilir. Denklem (4.114) ve (4.115)'ten $C_0\left(A, B, \phi\right) = 0$ olduğu görülmektedir. Denklem (4.118)'den $C_1\left(A,\ B,\ \phi\right) = 0$ olduğu görülmektedir. Denklem (4.121)'den ise

$$\frac{\partial C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)}{\partial A} = 0$$

şeklinde elde edilir. Böylece $C_2\left(A,\ B,\ \phi\right)$ sadece B'nin bir fonksiyonudur. Denklem (4.122)'den $m^2 + \dfrac{dU(\phi)}{d\phi} = 0$ elde edilir. Bulunan bu ifade Denklem (4.111), (4.112) ve (4.113)'te yazıldıktan sonra Denklem (4.111) ve (4.113) taraf tarafa toplanırsa

$$\frac{\dot{A}}{A} - \frac{A'}{B} + \frac{rB}{2\gamma} = 0 \tag{4.123}$$

şeklindeki denklem bulunur. Denklem (4.123)'ün u'ya göre türevi alınırsa

$$\frac{\ddot{A}}{A} = \frac{\dot{A}^2}{A^2} + \frac{\dot{A}'}{B} \tag{4.124}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem (4.110) ve (4.111) taraf tarafa toplanırsa

$$- \frac{AB'}{B^2} + \frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} + \frac{2\dot{A}A'\gamma}{rB^2A} - \frac{2\ddot{A}\gamma}{rBA} - \frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3} - \frac{2A''A}{rB^3} + \frac{2AA'\gamma}{r^2B^3} - \frac{3A'^2\gamma}{rB^3} + \frac{6A'B'A\gamma}{rB^4} + \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2} - \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2} + \frac{A'}{B} = 0 \tag{4.125}$$

biçimindeki denklem elde edilir. Denklem (4.110)'dan Denklem (4.113)'ü çıkarırsak

$$- \frac{AB'}{B^2} + \frac{\dot{A}^2\gamma}{rBA^2} - \frac{A'^2\gamma}{rB^3} - \frac{2\ddot{A}\gamma}{rBA} + \frac{4\dot{A}'\gamma}{rB^2} - \frac{4\dot{A}B'\gamma}{rB^3} - \frac{2A''A}{rB^3} + \frac{2AA'\gamma}{r^2B^3} - \frac{2\dot{A}\gamma}{r^2B^2} + \frac{6A'B'A\gamma}{rB^4} = 0 \tag{4.126}$$

şeklindeki denklem elde edilir. Denklem (4.123) ve (4.124) de elde edilen ifadeler Denklem (4.125)'te yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{2A'}{B} - \frac{2AA'\gamma}{rB^3} - \frac{rB}{4\gamma} = 0 \tag{4.127}$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Aynı biçimde Denklem (4.123) ve (4.124), Denklem (4.126) da yerlerine yazıldıktan sonra

$$\frac{B'}{B^3} + \frac{r}{4A\gamma^2} = 0 \tag{4.128}$$

şeklindeki denklem bulunur. Elde edilen Denklem (4.127) ve (4.128)'in ortak çözümünden

$$\frac{2A'}{A} - \frac{2A'\gamma}{rB} + \frac{\gamma B'}{B} = 0$$

biçimindeki denklem elde edilir. Bu denklemi sağlayan ve $(R_{ab}R^{ab})$, Ricci tensörünün kontraksiyonunu sonlu yapan $A,\ B$ ve γ katsayılar, yani gravitasyonel dalga çözümü veren katsayılar, aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 4.1. Metrik katsayıları A ve B için elde edilen değerler

	A	B	γ	
$i)$	$\frac{1}{r^{k-1}}$	$\frac{2(k-1)}{r^k(2k^2+k-2)}$	$\frac{1}{k+1}$	$k \geq 2$
$ii)$	$\frac{1}{r^{k-1}}$	$\frac{2(k-1)}{r^k k(2k-1)}$	$\frac{1}{k}$	$k \geq 2$
$iii)$	$\frac{1}{r^{k+1}}$	$\frac{2(k+1)}{r^{k+2}k(2k+1)}$	$\frac{1}{k-1}$	$k \geq 2$
$iv)$	$\frac{1}{r^{k+1}}$	$\frac{2(k+1)}{r^{k+2}(k+4)}$	$k+1$	$k \geq 0$
$v)$	r^{k+1}	$\frac{2r^k(k+1)}{k(2k^2+2k+1)}$	$\frac{1}{k^2}$	$k \leq -2$

Bu değerler Denklem (4.112) de verilen spin-0 denkleminde yerine yazılırsa, C_0 ve C_1 keyfi sabitler olmak üzere; $\phi(r) = C_0 + \frac{C_1}{r}$ şeklinde elde edilir.

4.8. Kuasinormal Frekansların Hesaplanması

4.8.1. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-$\frac{1}{2}$ kuasinormal frekans hesabı

Denklem (2.14)'te verilen Dirac denkleminde, Denklem (3.4) de verilen spin bağlantı bileşenleri ve Denklem (3.3)'teki Dirac matrisleri yerine yazılır ve düzenlenirse ($A_\mu = 0$ için)

$$\left[\frac{\sigma}{\sqrt{A}}\left(\partial_u - \left(\frac{A'}{4B} - \frac{\dot{A}}{4A}\right)\sigma\overline{\sigma}^1\right) + \frac{1}{r}\overline{\sigma}^3\left(\partial_\theta - \frac{\sqrt{A}}{2B}\overline{\sigma}^3\overline{\sigma}^1\right)\right. \\ \left. + \frac{\sqrt{A}}{B}\overline{\sigma}^1\left(\partial_r + \frac{A'}{4A}\sigma\overline{\sigma}^1\right) + imI\right]\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix} \tag{4.129}$$

biçiminde olur. Pauli matrisleri

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},$$
$$\sigma^3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

olmak üzere; Denklem (4.129) da yerine yazılır ve $\psi_1 = \psi_1(u, r, \theta)$ ve $\psi_2 = \psi_2(u, r, \theta)$ biçimindeki kısaltmalardan sonra

$$\left(\frac{\sqrt{A}}{B}\partial_r + \frac{\sqrt{A}}{2rB} + \frac{A'}{4\sqrt{A}B}\right)\psi_1 + \left(-\frac{\partial_\theta}{r} + im\right)\psi_2 = 0, \tag{4.130}$$

$$\left(\frac{\sqrt{A}}{B}\partial_r + \frac{2}{\sqrt{A}}\partial_u + \frac{\sqrt{A}}{2rB}\right)\psi_2 + \left(\frac{\partial_\theta}{r} + im\right)\psi_1 = 0 \tag{4.131}$$

şeklinde birinci mertebeden iki tane denklem çifti elde edilir.
Şimdi A ve B katsayılarının özel değerleri için kuasinormal frekansları hesaplayalım.

1) Denklem (3.2) de verilen metrik katsayılarında $G(u) = 0$ alınır ve $d = \dfrac{1}{2}$ için bu ifadeler yeniden düzenlenirse

$$A = \frac{r^2 kL}{6}, \tag{4.132}$$

$$B = 1 \tag{4.133}$$

şeklinde olur. ∂_u ve ∂_θ killing vektörlerdir ve ∂_r ile komüt ederler. Bu da denklemde değişkenlerine ayırma yöntemini kullanmamıza izin verir. Böylece dalga fonksiyonu $\psi_1(u, r, \theta) = e^{-i\omega u + i\kappa\theta} R_1(r)$ ve $\psi_2(u, r, \theta) = e^{-i\omega u + i\kappa\theta} R_2(r)$ şeklinde olur. Buradan Denklem (4.130) ve (4.131)'in en sade hali

$$\left(\sqrt{A}\frac{d}{dr} + \frac{A'}{4\sqrt{A}} + \frac{\sqrt{A}}{2r}\right) R_1(r) + \left(-\frac{i\kappa}{r} + im\right) R_2(r) = 0, \tag{4.134}$$

$$\left(\sqrt{A}\frac{d}{dr} - \frac{2i\omega}{\sqrt{A}} + \frac{\sqrt{A}}{2r}\right) R_2(r) + \left(\frac{i\kappa}{r} + im\right) R_1(r) = 0 \tag{4.135}$$

şeklindeki denklemlerdir. Bu çiftlenimli denklemlerde, ilk denklemden $R_2(r)$ fonksiyonu çekilip, ikinci denklemde yerine yazıldıktan sonra

$$\rho = -\frac{\kappa}{mr}$$

değişken değişimi yapılır ve

$$R_1(r) = e^{\frac{m\rho\left(6i\omega + \sqrt{6kL\kappa^2 - 36\omega^2}\right)}{kL\kappa}} \rho^{\frac{3kL + \sqrt{kL\,(kL - 96m^2)}}{4kL}} T_1(\rho)$$

dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{d^2T_1(\rho)}{d\rho^2}+\left(\frac{2m\sqrt{-36\omega^2+6kL\kappa^2}}{kL\kappa}+\frac{\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{2kL\rho}+\frac{1}{\rho(1-\rho)}\right)\frac{dT_1(\rho)}{d\rho}$$
$$\left(\frac{m\sqrt{-36\omega^2+6kL\kappa^2}\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{2k^2L^2\kappa\rho}+\frac{12im\omega(\rho+1)-kL\kappa}{4kL\kappa\rho(\rho-1)}\right.$$
$$\left.-\frac{m\sqrt{-36\omega^2+6kL\kappa^2}}{kL\kappa\rho(\rho-1)}-\frac{\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{4kL\rho(\rho-1)}\right)T_1(\rho)=0$$

şeklinde konfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, N_1 ve N_2, keyfi sabitler olmak üzere;

$$T_1(\rho)=N_1H_C\left(\frac{2m\sqrt{-36\omega^2+6kL\kappa^2}}{kL\kappa},\frac{\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{2kL},-2,\frac{3im\omega}{kL\kappa},\frac{3(\kappa kL+4im\omega}{4\kappa kL}),\rho\right)$$
$$+\rho^{-\frac{\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{2kL}}N_2H_C\left(\frac{2m\sqrt{-36\omega^2+6kL\kappa^2}}{kL\kappa},-\frac{\sqrt{kL(kL-96m^2)}}{2kL},-2,\frac{3im\omega}{kL\kappa},\frac{3(\kappa kL+4im\omega)}{4\kappa kL},\rho\right)$$

şeklindeki konfluent Heun fonksiyonudur. Burada $\rho\rightarrow\infty$'daki çözümü için, $N_1=0$ olur ve Heun fonksiyonlarının Denklem (3.8) de verilen polinom olma şartı kullanılarak kuasinormal frekans, $\epsilon=\dfrac{4\sqrt{6}mc}{\hbar}$ olmak üzere;

$$\omega=\pm i\frac{\sqrt{6kL}\kappa c\left(4n+\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{kL}}\right)}{6\sqrt{1-\left(4n+\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{kL}}\right)^2}} \tag{4.136}$$

biçiminde elde edilir. $k=1$ durumunda, yukarıdaki denklemde, $\sqrt{1-\dfrac{\epsilon^2}{L}}$ şeklinde verilen köklü ifade $\dfrac{\epsilon^2}{L}\gg 1$ olduğu durumda, $i\dfrac{\epsilon}{\sqrt{L}}$ haline gelir. Buradan açıkça kuasinormal frekans ifadesi hem reel hem de sanal kısım içerir ve fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder. Ancak $k=-1$ durumunda sadece sanal kısım içerir.

Denklem (3.1) de verilen gravitasyonel dalga zemininde ve sabit manyetik alan ($A_2=\dfrac{eB_0r}{2c\hbar}$) etkisindeki Dirac parçacığı,

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{2r}\right)\varphi_1(r)+\left(-\frac{i\kappa}{r}+im-\frac{ieB_0}{2\hbar c}\right)\frac{\sqrt{6kL}}{rkL}\varphi_2(r)=0$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{12i\tilde{\omega}}{kLr^2}\right)\varphi_2(r)+\left(\frac{i\kappa}{r}+im+\frac{ieB_0}{2\hbar c}\right)\frac{\sqrt{6kL}}{rkL}\varphi_1(r)=0$$

şeklindeki iki çiftlenimli denklem ile temsil edilir. $\Psi_1(u,r,\theta)$ ve $\Psi_2(u,r,\theta)$ değişkenlerine ayrılma yöntemi kullanılarak

$$\begin{pmatrix}\Psi_1(u,r,\theta)\\ \Psi_2(u,r,\theta)\end{pmatrix}=e^{-i\tilde{\omega}u+i\kappa\theta}\frac{1}{\sqrt{r}}\begin{pmatrix}\varphi_1(r)\\ \varphi_2(r)\end{pmatrix}$$

şeklinde yazıldıktan sonra $\varrho=-\dfrac{2\kappa\hbar c}{(2mc^2+eB_0)r}$ değişken değişimi ve

$$\varphi_1(\varrho)=e^{\left(\frac{3i\tilde{\omega}}{\hbar c^2\kappa kL}-\frac{\tilde{\alpha}}{2}\right)\varrho}\varrho^{\frac{1}{4}+\frac{\tilde{\beta}}{2}}\tilde{\varphi}_1(\varrho)$$

dönüşümü yapıldıktan sonra, bu çiftlenimli denklem takımından

$$\frac{d^2\tilde{\varphi}_1(\varrho)}{d\varrho^2}+\left(\tilde{\alpha}+\frac{\tilde{\beta}+1}{\varrho}+\frac{1+\tilde{\gamma}}{(\varrho-1)}\right)\frac{d\tilde{\varphi}_1(\varrho)}{d\varrho}+\left(\frac{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}{2\varrho}-\frac{2(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})+1}{4\varrho(\varrho-1)}-\frac{\xi}{\hbar\varrho}+\frac{i\xi\omega(\varrho+1)}{2\kappa eB_0\varrho(\varrho-1)}\right)\tilde{\varphi}_1(\varrho)=0$$

biçiminde Konfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin konfluent Heun fonksiyonları cinsinden çözümü, $\tilde{C}_1$ ve $\tilde{C}_2$ keyfi sabitler ve

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} &= \frac{(2mc^2+eB_0)\sqrt{-36\tilde{\omega}^2+6kL\kappa^2c^2}}{c^2\hbar kL\kappa},\\
\tilde{\beta} &= \frac{\sqrt{1-\frac{96m^2c^2}{kL\hbar^2}+\frac{24e^2{B_0}^2}{kLc^2\hbar^2}}}{2},\\
\tilde{\gamma} &= \frac{\xi(i\tilde{\omega}\hbar+2eB_0\kappa)}{2\hbar eB_0\kappa},\\
\tilde{\gamma} &= -2,\\
\tilde{\eta} &= \frac{(3\hbar-4\xi)eB_0\kappa+2i\xi\tilde{\omega}\hbar}{4\hbar\kappa eB_0},\\
\xi &= \frac{3eB_0(2mc^2+eB_0)}{kL\hbar^2c^2}
\end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere;

$$\tilde{\varphi}_1(\varrho)=\tilde{C}_1H_C\left(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\gamma},\tilde{\eta},\varrho\right)+\varrho^{-\tilde{\beta}}\tilde{C}_2H_C\left(\tilde{\alpha},-\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\gamma},\tilde{\eta},\varrho\right)$$

olarak elde edilir. Burada $\varrho\to\infty$'daki çözümde $\tilde{C}_1=0$ olur ve konfluent Heun fonksiyonlarının Denklem (3.8) de verilen polinom olma şartı kullanılarak KNF

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega} &= -i\frac{2eB_0\kappa}{\hbar(4(2n+\tilde{\beta})^2-1)}\\
&\pm \frac{\kappa\sqrt{6(2n+\tilde{\beta})(-24e^2{B_0}^2+\hbar^2c^2kL(4(2n+\tilde{\beta})^2-1))}}{3\hbar(4(2n+\tilde{\beta})^2-1)}
\end{aligned}\qquad (4.137)$$

olarak bulunur. $k = \pm 1$ durumları için bu KNF çözümünü inceleyelim. Öncelikle $k = 1$ durumunda $\tilde{\beta}$ değeri yani $\frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{L} + \frac{24e^2{B_0}^2}{c^2\hbar^2 L}}$ ifadesinde $\frac{\epsilon^2}{L} \gg 1 + \frac{24e^2{B_0}^2}{c^2\hbar^2 L}$ olduğundan $i\frac{\epsilon}{2\sqrt{L}}$ olur. Böylece KNF, hem reel hem de sanal kısmı içerir. Ancak $k = -1$ durumunda KNF ifadesi sadece sanal kısmı içerir yani pure sanaldır (pure imaginary).
Bu çizelgede $\kappa = \frac{1}{2},\ k = 1, L = 10^{-38}\frac{1}{m^2}$ ve $n = 1$ değerleri için manyetik alanın değişimine karşılık KNF'ler verilmiştir.

Çizelge 4.2. Kuasinormal frekansların manyetik alanla değişimi

$B_0(T)$	$Im(\tilde{\omega})(Hz)$	$Re(\tilde{\omega}) \times 10^{-11}\ (Hz)$
10^{-14}	$-7.902184963 \times 10^{-9}$	0.6123724359
10^{-13}	$-7.902184963 \times 10^{-8}$	0.6123724359
10^{-12}	$-7.902184963 \times 10^{-7}$	0.6123724359
10^{-11}	$-7.902184963 \times 10^{-6}$	0.6123724359
10^{-10}	$-7.902184963 \times 10^{-5}$	0.6123724359
10^{-9}	$-7.902184963 \times 10^{-4}$	0.6123724359
10^{-8}	$-7.902184963 \times 10^{-3}$	0.6123724359
10^{-7}	$-7.902184963 \times 10^{-2}$	0.6123724359
10^{-6}	$-7.902184963 \times 10^{-1}$	0.6123724359
10^{-5}	-7.902184963	0.6123724359
10^{-4}	-7.902184963×10	0.6123724359
10^{-3}	$-7.902184963 \times 10^{2}$	0.6123724359
10^{-2}	$-7.902184963 \times 10^{3}$	0.6123724359
10^{-1}	$-7.902184963 \times 10^{4}$	0.6123724359

Burada gravitasyonel dalgaları tespit etmek için kullanılan Pulsar zamanlama dizisinin (Pulsar Timing Arrays) (PZD) duyarlılığı $10^{-9}Hz \leq f \leq 10^{-6}Hz$ aralığındadır (Moore 2015). Ayrıca PZD'ye göre Dünya ve pulsar arasındaki uzaklık (ℓ_{P-D})(1 kpc = $3.1 \times 10^{19}m$) olmalıdır (Deng ve Finn 2011). Burada $L = 10^{-38}\frac{1}{m^2}$ olarak belirlediğimizde ℓ_{P-D}, L cinsinden $\ell_{P-D} = \frac{1}{\sqrt{L}}$ şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca Çizelge 4.2'de verilen ilk dört değer PZD'nin duyarlılığı arasındadır.

Ayrıca çizelgedeki frekans değerlerinden ve gravitasyonel dalga metriğinin ışıksal durumundan ($dS^2 = 0$), $\lambda_o = \dfrac{c}{\omega}$ ve $\lambda_e = \dfrac{\lambda_o}{1+z}$, c, ışık hızı, ω frekans olmak üzere; kırmızıya kayma (z),

$$z = \sqrt{\frac{B}{A}} - 1 = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}$$

şeklinde elde edilir (Misner vd. 1973).

Çizelge 4.2'de verilen frekans ifadesinin reel kısmı için kaynağın gözlemlenen dalgaboyu, $\lambda_o = 4.9 \times 10^{19} m$ olarak elde edilir. Burada $A = \dfrac{r^2 kL}{6}$ ve $B = 1$ değerleri yerine yazılırsa

$$z = \sqrt{\frac{6}{r^2 kL}} - 1$$

elde edilir. Pulsar-Dünya arası uzaklık $L = 10^{-38} \frac{1}{m^2}$, ve $k = 1$'dir. Dünyanın radyasyon kaynağıyla olan uzaklığını gösteren r'nin bazı değerleri (Abdo vd. 2010) için hesaplanan kırmızıya kayma, z ve kaynaktan salınan ışığın dalgaboyu, λ_e değerleri Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3. r'nin değerlerine karşılık kırmızıya kayma

$L(1/m^2)$	$r(m)$	z	λ_e
3.1×10^{-38}	1.17×10^{19}	0.19	4.11×10^{19}
	1.10×10^{19}	0.26	3.88×10^{19}
	0.88×10^{19}	0.56	3.14×10^{19}
	0.77×10^{19}	0.81	2.71×10^{19}

Çizelgede verilen değerler, gözlemsel $z = 0.18^{+0.08}_{-0.07}$ (Smith ve Thrane 2018) ve $z < 0.04$ (Messenger vd. 2014) değerleriyle karşılaştırıldığında yakın değerler elde edildiği görülür. Ayrıca $\lambda_o = 4.9 \times 10^{19} m$ ile çizelgede verilen λ_e'yi karşılaştırırsak, $\lambda_o > \lambda_e$ kaynağın bizden uzaklaştığını gösterir. Bu durum deney sonuçlarıyla uyumludur.

2) Denklem (4.16) da verilen

$$A = A_0 e^{\lambda r^2}, \qquad B = e^{\lambda r^2}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135) yazılırsa

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\lambda r\sqrt{A_0}}{2}+\frac{\sqrt{A_0}}{2r}\right)R_1(r)+e^{\frac{\lambda r^2}{2}}\left(\frac{-i\kappa}{r}+im\right)R_2(r)=0 \quad (4.138)$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{2i\omega}{\sqrt{A_0}}+\frac{\sqrt{A_0}}{2r}\right)R_2(r)+e^{\frac{\lambda r^2}{2}}\left(\frac{i\kappa}{r}+im\right)R_1(r)=0 \quad (4.139)$$

olacak şekilde iki tane birinci mertebe denklem çifti elde edilir. Denklem (4.138)'den $R_1(r)$ çekilip, Denklem (4.139) da yerine yazıldıktan sonra elde edilen ikinci mertebe denklemde $e^{\lambda r^2}=1+\lambda r^2+\frac{\lambda^2 r^4}{2}$ yaklaşımının yanı sıra

$$R_2(r)=r^{\sqrt{c}-\frac{1}{2}}e^{\frac{r\left(\lambda^2 r\sqrt{\gamma}A_0+8i\omega\sqrt{\gamma}+\lambda^2 rA_0\gamma-8i\omega\lambda\right)}{8\sqrt{\gamma}A_0}}T(r)$$

dönüşümü ve $\rho=4i\gamma^{\frac{1}{4}}\lambda^{-\frac{1}{2}}\,r$ değişken değişimi yapılırsa, $d=\lambda^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{4}}$, $\gamma=8c+1$, $c=\dfrac{\kappa^2}{C_0}$ ve $m=0$ olmak üzere;

$$\frac{d^2T(\rho)}{d\rho^2}+\left(\frac{2\sqrt{c}+1}{\rho}-\frac{4d^3\omega}{\lambda^2A_0\gamma^{\frac{3}{2}}}-2\rho\right)\frac{dT(\rho)}{d\rho}$$
$$+\left(\frac{-2\gamma^2\lambda+2d^2\gamma(2c-1)+32\lambda c^{3/2}(1-4c)-\frac{\frac{2\omega(2\gamma d\lambda-2\sqrt{c}-1)}{\gamma^{3/2}\lambda^2A_0}}{\rho}}{\gamma^2\lambda}\right)T(\rho)=0$$

şeklinde bikonfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$T(\rho)=C_1H_B\left(2\sqrt{c},\ \frac{4d^3\omega}{\lambda^2A_0\gamma^{\frac{3}{2}}},\ \frac{-32\lambda\gamma^{\frac{3}{2}}-128\lambda\gamma^{\frac{5}{2}}+2\sqrt{c}\gamma^2\lambda+4\gamma d^2(c-\frac{1}{2})}{\gamma^2\lambda},\right.$$
$$\left.-\frac{4\omega(-1+d^3(2\sqrt{c}+1)-2\sqrt{c}-2\lambda d\gamma)}{\lambda^2A_0\gamma^{\frac{3}{2}}},\rho\right)$$
$$+C_2\rho^{-2\sqrt{c}}H_B\left(2\sqrt{c},\ \frac{4d^3\omega}{\lambda^2A_0\gamma^{\frac{3}{2}}},\ \frac{-32\lambda\gamma^{\frac{3}{2}}-128\lambda\gamma^{\frac{5}{2}}+2\sqrt{c}\gamma^2\lambda+4\gamma d^2(c-\frac{1}{2})}{\gamma^2\lambda},\right.$$
$$\left.-\frac{4\omega(-1+d^3(2\sqrt{c}+1)-2\sqrt{c}-2\lambda d\gamma)}{\lambda^2A_0\gamma^{\frac{3}{2}}},\rho\right)$$

olacak biçimde elde edilir. $\rho\to\infty$ iken $C_1=0$ olmalıdır. Bikonfluent Heun fonksiyonlarının Denklem (3.9) da verilen polinom olma şartından kuasinormal frekans;

$$\omega=-i\frac{A_0\sqrt{c\lambda(16\lambda c^{\frac{3}{2}}(4c+1)+\lambda\sqrt{c}(1-2\gamma^2)+\gamma d^2(1-2c)+\lambda\gamma^2(n+1))}}{4cd},$$

olarak elde edilir. Burada fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $\lambda > 0$, $A_0 > 0$ ve $\kappa > 0$ şartları için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

3) Denklem (4.17)'de verilen

$$A = A_0 \frac{1}{r^2}, \qquad B = \frac{1}{r^2}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135) yazılırsa

$$\left(\frac{d}{dr}\right) R_1(r) + \frac{1}{r\sqrt{A_0}} \left(\frac{-i\kappa}{r} + im\right) R_2(r) = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{2i\omega}{A_0} + \frac{1}{2r}\right) R_2(r) + \frac{1}{r\sqrt{A_0}} \left(\frac{i\kappa}{r} + im\right) R_1(r) = 0,$$

şeklinde elde edilir. İkinci denklemden $R_1(r)$ çekilip, ilk denklemde yerine yazılır ve $b = \kappa\sqrt{\frac{1}{A_0}}$, $d = \frac{2i\omega}{A_0}$ olmak üzere;

$$\frac{d^2R_2(r)}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{2b}{r^2} - d\right) \frac{dR_2(r)}{dr} + \left(-\frac{b}{r^3} + \frac{16db - 1}{16r^2} - \frac{5d}{4r}\right) R_2(r) = 0$$

şeklinde double konfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin double Heun fonksiyonları cinsinden çözümü

$$\begin{aligned} R_2(r) &= R_0 e^{rd} H_D\left(-4\sqrt{2db}, \frac{12\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}} - db + 48d^2b^2}{4dc}, \frac{6\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}}}{db}, \frac{db - 48d^2b^2 + 12\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}}}{4db}, \frac{\sqrt{2db}r - 2b}{\sqrt{2db}r + 2b}\right) \\ &+ R_1 e^{\frac{2b}{r}} H_D\left(4\sqrt{2db}, \frac{12\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}} - db + 48d^2b^2}{4dc}, \frac{6\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}}}{db}, \frac{db - 48d^2b^2 + 12\sqrt{2}(db)^{\frac{3}{2}}}{4db}, \frac{\sqrt{2db}r - 2b}{\sqrt{2db}r + 2b}\right), \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Denklem (3.10) da verilen double konfluent Heun fonksiyonlarının polinom olma şartından kuasinormal frekans

$$\omega = \pm\frac{in^2 A_0^{3/2}}{64\kappa}$$

biçiminde elde edilir. Burada $A_0 > 0$ (metriğin işaretinin değişmemesi için) olması şartıyla κ'nın işaretinin (-) olması durumunda artılı çözüm, κ'nın işaretin (+)'lı olması durumunda eksili çözüm alınır. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, bu koşullar için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

4) Denklem (4.60)'ta verilen

$$A = \frac{1}{r^c},\ B = \frac{1}{r^{c+1}}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135)'teki denklem çifti yazıldıktan sonra, $\Psi_2(r) = r^{-\frac{c}{8}+i\omega}P_2(r)$ dönüşümü ve $y = \dfrac{2\kappa}{c+2}r^{\frac{-c-2}{2}}$ değişken değişimi yapılırsa

$$y^2\frac{dP_2(y)^2}{dy^2} + y\frac{dP_2(y)}{dy} - \left(y^2 + \frac{(8i\omega - 4 - 3c)^2}{16(c+2)^2}\right)P_2(y) = 0$$

şeklindeki modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, Z_0, Z_1 keyfi sabitler, $p = \dfrac{8i\omega + 4 + c}{4(c+2)}$ ve $m = 0$ olmak üzere;

$$P_2(y) = Z_0K_p(y) + Z_1I_p(y)$$

modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. Burada $y \to \infty$ iken $I_p(y)$ ıraksar. Bu yüzden $Z_1 = 0$ olur ve

$$P_2(y) = Z_0K_p(y)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. $y \to 0$'da

$$K_p(y) \approx Z_0\frac{1}{2}\Gamma(p)(\frac{y}{2})^{-p}, \quad \mathbb{R}e(p) > 0 \tag{4.140}$$

şeklinde olur (Abramowitz ve Stegun 1972). $p = n$ kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -i\frac{(4n-1)c + 4(2n-1)}{8}$$

biçiminde elde edilir. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

5) Denklem (4.62) de verilen

$$A = e^{cr^2},\ B = e^{cr^2}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135) yazılır ve bu iki denklemin ortak çözümünden sonra

$$R_2(r) = r^{\frac{1}{2}+\kappa}e^{\frac{(cr^2 + 8i\omega r) + \sqrt{9 + 8\kappa^2}r^2c^2 + 24ir\omega c}{8}}G(r)$$

dönüşümü yapılırsa ($m = 0$)

$$-4ir^2\frac{d^2R_2(r)}{dr^2} + 2r^2(ir - 4\omega)\frac{dR_2(r)}{dr} + \Big(4i\kappa^2 e^{cr^2} - 4r\omega(cr^2+1) \\ -i(5r^2c + 2r^2c - 1)\Big) R_2(r) = 0$$

şeklindeki bikonfluent Heun denklemi elde edilir. Burada $e^{cr^2} = 1 + cr^2 + \frac{1}{2}c^2r^4$ yaklaşımı altındaki çözümünün bikonfluent Heun fonksiyonları (H_B) cinsinden ifadesi, C_a ve C_b keyfi sabitler ve

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\kappa, \\ \beta &= \frac{12\omega c}{(c^2(9+8\kappa^2))^{3/4}}, \\ \gamma &= \frac{-54 - 12\kappa^2 + 32\kappa^4 - 32c^2\omega^2\kappa^2}{c^2(9+8\kappa^2))^{3/2}}, \\ \delta &= \frac{4\omega}{c^2(9+8\kappa^2))^{1/4}}, \\ \epsilon &= -\frac{1}{2}i(c^2(9+8\kappa^2))^{1/4} \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$G(r) = C_a H_B\left(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon r\right) + C_b r^{-\alpha} H_B\left(-\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon r\right)$$

biçiminde elde edilir. Burada $r \longrightarrow \infty$'daki çözümde $C_a = 0$ olur. H_B fonksiyonlarının Denklem (3.9) da verilen polinom olma şartı kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(9+8\kappa^2)(2c\kappa^2 - 3c - c\sqrt{(9+8\kappa^2)}(-\kappa + n + 1))}}{4\kappa} \tag{4.141}$$

şeklinde elde edilir. Burada fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c > 0$ durumunda bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

Çizelge 4.1'de verilen metrik katsayıları için kuasinormal frekansları hesaplayalım.

6) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k^2 + k - 2)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135) yazıldıktan sonra bu iki denklem çiftinden elde edilen ikinci mertebe denkleme

$R_2(r) = r^{-\frac{k+5}{8}-\frac{1}{4}+\frac{2i\omega(k-1)}{2k^2+k-2}}T(r)$ dönüşümü ve $\rho = \dfrac{4\kappa(k-1)r^{\frac{-k-1}{2}}}{(k+1)((2k^2+k-2))}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{d^2T(\rho)}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dT(\rho)}{d\rho}-\Bigg(\frac{32i\omega(k-1)(k+5)(2k^2+k-2)+16\rho^2(-k-1)^2(2k^2+k-2)^2}{16\rho^2(-k-1)^2(2k^2+k-2)^2}$$

$$+\frac{-64i\omega(k-1)(2k^2+k-2)-256\omega^2(k-1)^2+(-16-4k+(k+5)^2)(2k^2+k-2)^2}{16\rho^2(-k-1)^2(2k^2+k-2)^2}\Bigg)T(\rho)=0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ($m=0$)

$$T(\rho) = Z_aK_\alpha(\rho)+Z_bI_\alpha(\rho)$$

modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden bulunur. Burada $\rho \to \infty$ iken $I_\alpha(\rho)$ ıraksadığından $Z_b = 0$'dir. Böylece

$$T(\rho) = Z_aK_\alpha(\rho) \tag{4.142}$$

çözümü elde edilir. Burada denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{i(2k^2+k-2)(4n(k+1)-(k+3))}{16(k-1)}$$

olarak bulunur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

7) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k-1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.134) ve (4.135) yazıldıktan sonra, bu iki denklem çiftinden elde edilen ikinci mertebe denkleme $R_2(r) = r^{\frac{-2k^3-13k^2+7^k+16i\omega(k-1)}{8k(2k-1)}}F(r)$ dönüşümü ve $\varrho = \dfrac{4(k-1)\kappa r^{\frac{-k-1}{2}}}{k(2k-1)(k+1)}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\frac{d^2F(\varrho)}{d\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{dF(\varrho)}{d\varrho}-\Bigg(\frac{-32i\omega k(-k-3)(k-1)(2k-1)+16\varrho^2k^2(-k-1)^2(2k-1)^2}{16k^2(2k-1)^2(-k-1)^2\varrho^2}$$

$$+\frac{-256\omega^2(k-1)^2+(-k-3)^2(2k-1)^2k^2}{16k^2(2k-1)^2(-k-1)^2\varrho^2}\Bigg)F(\varrho)=0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin çözümü $m=0$, F_0 ve F_1 keyfi sabitler olmak üzere; modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden

$$F(\varrho) = F_0K_\beta(\varrho)+F_1I_\beta(\varrho)$$

biçiminde elde edilir. Burada $\varrho \to \infty$ iken $I_\beta(\varrho)$ ıraksadığından $F_1 = 0$'dir. Böylece

$$F(\varrho) = F_0 K_\beta(\varrho) \tag{4.143}$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{ik(2k-1)(4n(k+1)-(k+3))}{16(k-1)},$$

şeklinde bulunur. Burada fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

8) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k+1}},\ B = \frac{2(k+1)}{r^{k+2}(2k+1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden, Denklem (4.134) ve (4.135) yazıldıktan sonra bu denklem çiftinden elde edilen ikinci mertebe denkleme $R_2(r) = r^{\frac{-2k^3-19k^2-9k+16i\omega(k+1)}{8k(2k+1)}} Y(r)$ dönüşümü ve $z = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{-\frac{k+3}{2}}}{k(k+3)(2k+1)}$ değişken değişimi uygulandıktan sonra

$$\frac{d^2Y(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dY(z)}{dz} - \frac{k^2(-k-5)^2(2k+1)^2 - 32i\omega k(-k-5)(k+1)(2k+1)}{16z^2(-k-3)(2k+1)^2k^2}$$
$$+ \frac{-256(k+1)^2\omega^2 + 16z^2(-k-3)^2k^2(2k+1)^2}{16z^2(-k-3)(2k+1)^2k^2}Y(z) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $(m = 0)$

$$Y(z) = y_0 K_\gamma(z) + y_1 I_\gamma(z)$$

modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden bulunur. Burada $z \to \infty$ iken $I_\gamma(z)$ ıraksadığından $y_1 = 0$'dir. Böylece

$$Y(z) = y_0 K_\gamma(z)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140) de verilen bağıntı kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{ik(2k+1)(4n(k+3)-(k+5))}{16(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

9) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k+1}},\ B = \frac{2(k+1)}{r^{k+2}(k+4)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden, Denklem (4.134) ve (4.135) yazıldıktan sonra, bu denklem çiftinden elde edilen ikinci mertebe denkleme, $R_2(r) = r^{\frac{-(k+9)(k+4)+16i\omega(k+1)}{8(k+4)}} H(r)$ dönüşümü ve $y = \frac{4(k+1)\kappa r^{\frac{-k-3}{2}}}{(k+4)(k+3)}$ değişken değişimi yapılırsa ($m = 0$)

$$\frac{d^2H(y)}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dH(y)}{dy} - \frac{(k+4)^2(k^2(16y^2+1)5(2k+5)+48y^2(2k+3))}{16y^2(k+3)^2(k+4)^2}$$
$$+ \frac{256(k+1)^2\omega^2 - 32i\omega(k+5)(k+4)(k+1)}{16y^2(k+3)^2(k+4)^2} H(y) = 0$$

olacak biçimde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden

$$H(y) = h_0 K_\mu(y) + h_1 I_\mu(y)$$

olarak elde edilir. Burada $y \to \infty$ iken $I_\mu(y)$ ıraksadığından $h_1 = 0$'dir. Böylece

$$H(y) = h_0 K_\mu(y)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140)'deki ifade yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{i(k+4)(4n(k+3)-(k+5))}{16(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 0$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

10) Çizelge 4.1'den

$$A = r^{k+1},\ B = \frac{2r^k(k+1)}{k(2k^2+2k+1)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden, Denklem (4.134) ve (4.135) yazıldıktan sonra, bu iki denklem çiftinden elde edilen ikinci mertebe denkleme,

$R_2(r) = r^{\frac{k(k-7)(2k^2+2k+1)+16i\omega(k+1)}{8k(2k^2+2k+1)}} \boldsymbol{P}(r)$ dönüşümü ve $\tau = \dfrac{4(k+1)\kappa r^{\frac{k-1}{2}}}{k(k-1)(2k^2+2k+1)}$ değişken değişimi yapılırsa ($m=0$)

$$\frac{d^2\boldsymbol{P}(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d\boldsymbol{P}(\tau)}{d\tau} + \Bigg(\frac{256(k+1)^2\omega^2 - 32i\omega(k+1)(k-3)k(2k^2+2k+1)}{16\tau^2k^2(k-1)^2(2k^2+2k+1)^2}$$

$$- \frac{16\tau^2(k-1)^2k^2(2k^2+2k+1)^2 + (k-3)^2k^2(2k^2+2k+1)^2}{16k^2\tau^2(k+3)^2(k+4)^2} \Bigg) \boldsymbol{P}(\tau) = 0$$

olacak biçimde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden

$$\boldsymbol{P}(\tau) = p_0 K_\lambda(\tau) + p_1 I_\lambda(\tau)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tau \to \infty$ iken $I_\lambda(\tau)$ ıraksadığından $p_1 = 0$'dir. Böylece

$$\boldsymbol{P}(\tau) = h_0 K_\lambda(\tau)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140)'deki ifade yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = \frac{ik(2k^2+2k+1)(4n(k-1)-(k-3))}{16(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \leq -2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

4.8.2. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-1 kuasinormal frekans hesabı

Denklem (3.1) de verilen gravitasyonel dalga zemininde, Denklem (2.15)'te verilen (2+1) boyuttaki spin-1 denkleminde yazılırsa

$$\Bigg(\frac{1}{\sqrt{A}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_0 - \frac{1}{\sqrt{A}} \left(-\frac{\dot{A}}{4A} + \frac{A'}{4B} \right) \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \frac{\sqrt{A}}{B} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \partial_1 + \frac{A'\sqrt{A}}{4BA} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \partial_2$$
$$+ \frac{\sqrt{A}}{2rB} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 2im \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Bigg) \begin{pmatrix} \Psi_1(u,r,\theta) \\ \Psi_0(u,r,\theta) \\ \Psi_0(u,r,\theta) \\ \Psi_{-1}(u,r,\theta) \end{pmatrix} = 0$$

olacak biçimde elde edilir. ∂_u ve ∂_θ killing vektörlerdir ve ∂_r ile komüt ederler. Bu yüzden denklemde değişkenlerine ayırma yöntemini kullanabiliriz. Böylece dalga fonksiyonunu

$$\begin{pmatrix} \Psi_1(u,r,\theta) \\ \Psi_0(u,r,\theta) \\ \Psi_{-1}(u,r,\theta) \end{pmatrix} = e^{-i\omega u + i\kappa\theta} \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_0(r) \\ R_{-1}(r) \end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Denklemlere gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{A'}{2A} + \frac{1}{r}\right) R_0(r) + \frac{B}{\sqrt{A}}\left(-\frac{i\kappa}{r} + im\right) R_{-1}(r) = 0, \tag{4.144}$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{A'}{2A} - \frac{\dot{A}B}{A^2} + \frac{1}{r} - \frac{2i\omega B}{A}\right) R_0(r) + \frac{B}{\sqrt{A}}\left(\frac{i\kappa}{r} + im\right) R_1(r) = 0, \tag{4.145}$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{2i\omega B}{A}\right) R_{-1}(r) + \frac{2imB}{\sqrt{A}} R_0(r) + \left(\frac{d}{dr} + \frac{A'}{A}\right) R_1(r) = 0 \tag{4.146}$$

şeklinde elde edilirler. Denklem (4.144)'ten $R_{-1}(r)$, Denklem (4.145)'ten de $R_1(r)$ çekilip, Denklem (4.146) da yerine yazıldıktan sonra elde edilen ikinci mertebe denklemi, A ve B katsayılarının özel değerleri için inceleyelim.

1) Denklem (4.60)'ta verilen

$$A = \frac{1}{r^c},\ B = \frac{1}{r^{c+1}},$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra; ikinci mertebe denkleme, $R_0(r) = r^{-\frac{3}{2}+i\omega}T(r)$ dönüşümü ve $\rho = \dfrac{2\kappa r^{-\frac{k}{2}-1}}{k+2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $(m=0)$

$$\frac{d^2T(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dT(\rho)}{d\rho} - \frac{1+(2i\omega-k)^2+\rho^2(k+2)^2}{(k+2)^2\rho^2}T(\rho) = 0$$

modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, Y_0, Y_1 keyfi sabitler ve $\upsilon = \dfrac{\sqrt{1+(2i\omega-k)^2}}{(k+2)}$ olmak üzere;

$$T(\rho) = Y_0 K_\upsilon(\rho) + Y_1 I_\upsilon(\rho)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $\rho \to \infty$ iken $I_\upsilon(\rho)$ ıraksar. Bu yüzden $Y_1 = 0$ olur ve

$$T(\rho) = Y_0 K_\upsilon(\rho)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{ik - \sqrt{1 - n^2(k+2)^2}}{2}$$

şeklinde bulunur. Burada vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k > 0$ ve $n > 0$ için bu gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

2) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k^2+k-2)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra elde edilen ikinci mertebe denkleme de $R_0(r) = r^{-\frac{3(2k^2+k-2)+4i\omega(k-1)}{2(2k^2+k-2)}} F(r)$ dönüşümü ve $\varrho = \dfrac{4\kappa(k-1)r^{-\frac{k+1}{2}}}{(2k^2+k-2)(-k-1)}$ değişken değişimi yapılırsa ($m = 0$)

$$\frac{d^2F(\varrho)}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dF(\varrho)}{d\varrho} - \frac{(\varrho^2(k+1)^2 - k^2 + 2(k-1))(2k^2+k-2)^2}{(2k^2+k-2)^2(k+1)^2\varrho^2}F(\varrho)$$
$$- \frac{16\omega^2(k-1)^2 - 8i\omega(k-1)^2(2k^2+k-2)}{(2k^2+k-2)^2(k+1)^2\varrho^2}F(\varrho) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü f_0, f_1 keyfi sabitler ve

$$\epsilon = \frac{\sqrt{8i\omega(-2k^2-k+2+2i\omega)(k-1)^2 + (k^2-2k+2)(2k^2+k-2)^2}}{(k+1)(2k-1)(2k^2+k-2)}$$

olmak üzere;

$$F(\varrho) = f_0 K_\epsilon(\varrho) + f_1 I_\epsilon(\varrho)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $\varrho \to \infty$ iken $I_\epsilon(\varrho)$ ıraksar. Bu yüzden $f_1 = 0$ olur ve

$$F(\varrho) = f_0 K_\epsilon(\varrho)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{i(k-1) + \sqrt{1 - n^2(k+1)^2}(2k^2+k+2)}{4(k-1)}$$

şeklinde bulunur. Burada vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

3) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k-1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra elde edilen ikinci mertebe denkleme de $R_0(r) = r^{\frac{k(-16k+3)+4i\omega(k-1)}{2k(k-1)}} R(r)$ dönüşümü ve $x = \dfrac{4\kappa(k-1)r^{-\frac{k+1}{2}}}{k(2k^2+k-1)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\frac{d^2R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR(x)}{dx} - \frac{(x^2k^2(2k^2+k-1)^2 + k^2(k^2-2k+2)(2k-1)^2}{(2k-1)^2(k+1)^2k^2x^2}R(x)$$

$$+ \frac{8i\omega k(k-1)^2(2k-1) + 16\omega^2(k-1)^2}{(2k-1)^2(k+1)^2k^2x^2}R(x) = 0$$

modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, c_0, c_1 keyfi sabitler ve

$$\eta = \frac{\sqrt{8i\omega(-2k^2+k+2i\omega)(k-1)^2 + k^2(k^2-2k+2)(2k-1)^2}}{k(k+1)(2k-1)}$$

olmak üzere;

$$R(x) = c_0K_\eta(x) + c_1I_\eta(x)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $x \to \infty$ iken $I_\eta(x)$ ıraksar. Bu yüzden $c_1 = 0$ olur ve böylece

$$R(x) = c_0K_\eta(x)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{i(k-1) + \sqrt{1-n^2(k+1)^2}k(2k-1)}{4(k-1)}$$

şeklinde bulunur. Burada vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

4) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k+1}},\ B = \frac{2(k+1)}{r^{k+2}(2k+1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra elde edilen ikinci mertebe denkleme de

$R_0(r) = r^{\frac{3k(-2k+1)+4i\omega(k+1)}{2k(k+1)}}G(r)$ dönüşümü ve $z = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{-\frac{k+3}{2}}}{k(2k^2+7k+3)}$ değişken değişimi yapılırsa ($m=0$)

$$\frac{d^2G(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dG(z)}{dz}-\frac{(z^2k^2(2k^2+7k+3)^2+k^2(k^2+2k+2)(2k+1)^2}{(2k+1)^2(k+3)^2k^2z^2}G(z)$$

$$+\quad\frac{8i\omega k(k+1)^2(2k+1)+16\omega^2(k+1)^2}{(2k+1)^2(k+3)^2k^2z^2}G(z)=0$$

modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, N_0, N_1 keyfi sabitler ve

$$\lambda=\frac{\sqrt{8i\omega(2k^2+k-2i\omega)(k+1)^2-k^2(2k^2+k+2)(2k+1)^2}}{k(k+3)(2k+1)}$$

olmak üzere;

$$G(z)=N_0K_\lambda(z)+N_1I_\lambda(z)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $z\to\infty$ iken $I_\lambda(z)$ ıraksar. Bu yüzden $N_1=0$ olur ve böylece

$$G(z)=N_0K_\lambda(z)$$

biçimindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega=-\frac{i(k+1)+\sqrt{(-n(k+3)-1)(n(k+3)+1)}k(2k+1)}{4(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Burada vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF $k\geq 2$ ve $n>0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olğunu gösterir.

5) Çizelge 4.1'den

$$A=\frac{1}{r^{k+1}},\ B=\frac{2(k+1)}{r^{k+2}(k+4)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra elde edilen ikinci mertebe denkleme de

$R_0(r) = r^{\frac{-3(k+4)+4i\omega(k+1)}{2(k+4)}}Q(r)$ dönüşümü ve $y = \dfrac{8\kappa(k+1)r^{-\frac{k+3}{2}}}{(k+3)(k+4)}$ değişken değişimi yapılırsa ($m=0$)

$$\frac{d^2Q(y)}{dy^2}+\frac{1}{y}\frac{dQ(y)}{dy}-\frac{(y^2(k^2+7k+12)^2+4(k^2+2k+2)(k+4)^2}{(k+4)^2(k+3)^2y^2}Q(y)$$

$$-\quad\frac{32i\omega(-k-4+2i\omega)(k+1)^2}{(k+4)^2(k+3)^2y^2}Q(y)=0$$

modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, U_0, U_1 keyfi sabitler ve

$$\beta = \frac{\sqrt{8i\omega(-k-4+2i\omega)(k+1)^2+(k^2+2k+2)(k+4)^2}}{(k+3)(k+4)}$$

olmak üzere;

$$Q(y) = U_0 K_\beta(y) + U_1 I_\beta(y)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $y \to \infty$ iken $I_\lambda(z)$ ıraksar. Bu yüzden $U_1 = 0$ olur ve böylece

$$Q(y) = U_0 K_\beta(y)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega_{1,2} = -\frac{i(k+1) \mp \frac{\sqrt{(-n(k+3)-2)(n(k+3)-2)}}{2}(k+4)}{4(k+1)}$$

şeklinde elde edilir. Burada vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 0$ ve $n > 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

6) Çizelge 4.1'den

$$A = r^{k+1},\ B = \frac{2r^k(k+1)}{k(2k^2+2k+1)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.144), (4.145) ve (4.146) yazılıp düzenlendikten sonra elde edilen ikinci mertebe denkleme de $R_0(r) = r^{\frac{-3k(2k+1)(4i\omega-3)k+4i\omega}{2k(2k^2+2+k)}} P(r)$ dönüşümü ve $\tau = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{-\frac{k-1}{2}}}{k(2k^3-k^2-1)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\frac{d^2P(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dP(\tau)}{d\tau} - \frac{-16\omega^2(k+1)^2+k^2(k^2+2k+2)(2k^2+k+1)^2}{k^2(2k^2+k+1)^2(k-1)^2\tau^2}P(\tau)$$
$$- \frac{8i\omega(k(2k^2+k+1))\omega(k+1)^2(\tau^2k^2(2k^2+k+1)^2(k-1)^2}{k^2(2k^2+k+1)^2(k-1)^2\tau^2}P(\tau) = 0$$

modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, b_0, b_1 keyfi sabitler ve

$$\alpha = \frac{\sqrt{8i\omega((2k^3+k^2+k)+2i\omega)(k+1)^2+k^2(k^2+2k+2)(2k^2+k+1)^2}}{k(k-1)(2k^2+k+1)}$$

olmak üzere;

$$P(\tau) = b_0 K_\alpha(\tau) + b_1 I_\alpha(\tau)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $\tau \to \infty$ iken $I_\alpha(\tau)$ ıraksar. Bu yüzden $b_1 = 0$ olur ve böylece

$$P(\tau) = b_0 K_\alpha(\tau)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = \frac{i(k+1) - \sqrt{1 - n^2(k-1)^2}k(2k^2+k+1)}{4(k+1)}$$

olarak elde edilir. Vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \leq -2$ ve $n > 0$ şartları için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

4.8.3. (2+1) boyuttaki gravitasyonel dalga metriği zemininde spin-0 kuasinormal frekans hesabı

Denklem (3.1) de verilen $(2+1)$ boyutta gravitasyonel dalga metriği için Denklem (2.9)'daki Klein-Gordon denklemine $\phi(u,r,\theta) = e^{-i\omega u}e^{i\kappa\theta}R(r)$ şeklindeki değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanırsa

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{2B'}{B} - \frac{2i\omega B}{A}\right)\frac{d}{dr} + \frac{i\omega B'}{A} - \frac{B^2}{A}\left(\frac{\kappa + m^2r^2}{r^2}\right)\right)R(r) = 0 \quad (4.147)$$

olacak biçimde elde edilir. Şimdi A ve B metrik katsayılarının açık formu kullanılarak KNF'leri hesaplayalım.

1) Denklem (4.60)'ta verilen

$$A = \frac{1}{r^c},\ B = \frac{1}{r^{c+1}}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazıldıktan sonra $R(r) = r^{-i\omega - \frac{c+1}{2}}T(r)$ dönüşümü ve $\rho = \dfrac{2\kappa r^{-\frac{c}{2}-1}}{c+2}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{(c+1)^2 + \rho^2(c+2)^2 - 4\omega^2}{(c+2)^2\rho^2}\right)T(\rho) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde elde edilir. Bu denklemin çözümü, T_0 ve T_1 keyfi sabitler olmak üzere; modifiye Bessel fonksiyonları cinsinden

$$T(\rho) = T_0 K_\eta(\rho) + T_1 I_\eta(\rho)$$

şeklinde elde edilir. $\rho \to \infty$ iken $I_\eta(\rho)$ ıraksadığından $T_1 = 0$'dir. Böylece

$$T(\rho) = T_0 K_\eta(\rho)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140)'deki ifade yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(c+1-n(c+2))(c+1+n(c+2))}}{2}$$

olarak elde edilir. Skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $c > 0$ ve $n \geq 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

2) Denklem (4.62) de verilen

$$A = e^{cr^2},\ B = e^{cr^2}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazılırsa $(m = 0)$

$$\left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}c(\omega^2) - \kappa^2}{4\varrho c\sqrt{\kappa^2+2}} + \frac{3-4\kappa^2}{16\varrho^2}\right)\psi(\varrho) = 0$$

şeklinde Whittakker denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü olan Whittaker fonksiyonu, $W_{\lambda,\mu}(r)$, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$W_{\lambda,\mu}(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{\mu+\frac{1}{2}}{}_1F_1\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda,\ 1+2\mu,\ \rho\right) \tag{4.148}$$

şeklinde tanımlanır (Greiner 2000). Bu ifade yardımıyla

$$\psi(\varrho) = e^{-\frac{\varrho}{2}}\rho^{\frac{\sqrt{1+4\kappa^2}+2}{4}}{}_1F_1\left(\frac{c\sqrt{\kappa^2+2}(2+\sqrt{1+4\kappa^2})+\sqrt{2}(\kappa^2c-\omega^2-c)}{4\sqrt{\kappa^2+2c}},\ \frac{2+\sqrt{1+4\kappa^2}}{2},\ \varrho\right)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Hipergeometrik fonksiyonların polinom olma şartı kullanılarak, kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{8c(\sqrt{\kappa^2+2}(2+4n+\sqrt{1+4\kappa^2})+\sqrt{2}(\kappa^2-1))}}{2}$$

biçiminde bulunur. Burada skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $c < 0$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

3) Denklem (4.86) da verilen

$$A = r^\ell, \quad B = r^{\frac{\ell-2}{2}}$$

metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazılırsa

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{i(2\omega r^{-\frac{\ell}{2}}+1)}{r}\frac{d}{dr}+\frac{i\omega\hbar r^{-\frac{\ell}{2}+2}(\ell-2\hbar)-2(\kappa^2\hbar^2+m^2r^2)}{2r^4\hbar}\right)R(r)=0,$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu denklem $\ell = 1,2,4$ değerleri için çözülebilmektedir. $\ell=1$ için $y=\dfrac{2\kappa}{r}$ değişken değişimi ve

$$R(y)=e^{-\frac{i\omega\sqrt{2\kappa y}}{\kappa}-\frac{y}{2}}y^{\frac{\hbar+\sqrt{\hbar^2+4m^2}}{2\hbar}}F(y),$$

dönüşümü yapıldıktan sonra

$$\left(y\frac{d^2}{dy^2}+\left(\frac{\hbar+\sqrt{\hbar^2+4m^2}}{\hbar}-y\right)\frac{d}{dy}-\frac{\kappa(\hbar+\sqrt{\hbar^2+4m^2})-\omega^2\hbar}{2\kappa\hbar}\right)F(y)=0,$$

şeklinde Kummer denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü Kummer fonksiyonları cinsinden, f_0 ve f_1 keyfi sabitler,

$$a=\frac{\kappa\sqrt{\hbar^2+4m^2}+\hbar(\kappa-\omega^2)}{2\kappa\hbar},\quad b=\frac{\hbar+\sqrt{\hbar^2+4m^2}}{\hbar}$$

olmak üzere;

$$F(y)=f_0M(a,b,y)+f_1U(a,b,y)$$

şeklinde bulunur. a bir tamsayı olmak zorunda değildir (Seaborn 1991). Burada tamsayı olmadığı durum için kuasinormal frekansı hesaplayacağız. $y\to 0$'da $f_1=0$'dır. Böylece

$$F(y)=f_0M(a,b,y)$$

çözümü elde edilir. Burada $y\to\infty$'da

$$M(a,b,y)\approx\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}e^y y^{a-b} \tag{4.149}$$

şeklinde elde edilir. (Abramowitz ve Stegun 1972; Cruz vd. 2016). Denklem (4.149) da verilen ifade yardımıyla, $a=-n$ koşulu kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega=-\frac{\sqrt{\hbar\kappa[\hbar(n+1)+\sqrt{\hbar^2+4m^2}]}}{\hbar}$$

olacak biçimde elde edilir. Skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF $\kappa>0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu

gösterir.

(4.147)'te verilen Klein-Gordon denklemi, $\ell = 2$ çözümü için
$R(r) = e^{-\frac{i\omega}{r}} r^{-\frac{1}{2}} G(\rho)$ dönüşümü ve $\rho = \dfrac{\sqrt{\kappa^2 - \omega^2}}{r}$ değişken değişimi yapılırsa

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{4\hbar^2\rho^2 + \hbar^2 + 4m^2}{4\hbar^2\rho} \right) G(\rho) = 0,$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, g_0, g_1 keyfi sabitler ve $b = \dfrac{\hbar^2 + 4m^2}{2\hbar}$ olmak üzere;

$$G(\rho) = g_0 K_b(\rho) + g_1 I_b(\rho),$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin "ω" içermediği görülmektedir. Dolayısıyla kuasinormal frekans elde edilememektedir.

(4.147)'te verilen Klein-Gordon denklemi, $\ell = 4$ çözümü için

$$R(r) = e^{\dfrac{i(8\omega\hbar + 2\pi r^2(\hbar\sqrt{\hbar^2 + 4m^2}))}{r^2\hbar}} r^{\dfrac{-\hbar + \sqrt{\hbar^2 + 4m^2}}{2\hbar}} T(r)$$

dönüşümü ve $z = \dfrac{i\omega}{r^2}$ değişken değiştirilmesi yapıldıktan sonra

$$\left[z\frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{2\hbar + \sqrt{\hbar^2 + 4m^2}}{2\hbar} - z \right) \frac{d}{dz} + \frac{2\omega\hbar + \omega\sqrt{\hbar^2 + 4m^2} - i\kappa^2\hbar}{4\omega\hbar} \right] T(z) = 0$$

şeklinde Kummer denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, T_0 ve T_1 keyfi sabit olup

$$\mu = \frac{-\omega\sqrt{\hbar^2 + 4m^2} + \hbar(-2\omega + i\kappa^2)}{4\omega^2\hbar} \quad \text{ve} \quad \nu = \frac{\sqrt{\hbar^2 + 4m^2} + 2\hbar}{2\hbar}$$

olmak üzere;

$$T(z) = T_0 M(\mu, \nu, z) + T_1 U(\mu, \nu, z)$$

şeklinde Kummer fonksiyonları cinsinden elde edilir. $y \to 0$'da $T_1 = 0$'dır. Böylece

$$F(y) = f_0 M(a, b, y)$$

biçimindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.149)'deki ifade yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = \frac{i\hbar\kappa^2}{\sqrt{\hbar^2 + 4m^2} + 2\hbar(2n + 1)}$$

şeklinde bulunur. $\omega = \omega_{Re} + i\omega_{im}$ olması durumunda $(\omega_{im} < 0)$ olmalıdır. Ancak $\kappa > 0$ ve $n > 0$ olduğundan dolayı skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, bu şartlar için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olmadığını gösterir.

4) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k^2+k-2)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazıldıktan sonra $R(r) = r^{\frac{-2k^3-k^2+2k+4i\omega(k-1)}{2(2k^2+k-2)}}\Re(r)$ dönüşümü ve $x = \dfrac{4\kappa(k-1)r^{\frac{-k-1}{2}}}{(k+1)(2k^2+k-2)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\frac{d^2\Re(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\Re(x)}{dx} - \frac{-16\omega^2(k-1)^2 + \left(x^2(k+1)^2+k^2\right)(2k^2+k-2)^2}{x^2(2k+1)^2(2k^2+k-2)^2}\Re(x) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, z_a, z_b keyfi sabitler ve

$$\nu = \frac{\sqrt{k^2(2k^2+k-2)^2 - 16\omega^2(k-1)^2}}{(k+1)(2k^2+k-2)}$$

olmak üzere;

$$\Re(x) = z_a K_\nu(x) + z_b I_\nu(x)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. Burada $x \to \infty$ iken $I_\nu(x)$ ıraksar. Bu yüzden $z_b = 0$ olur ve

$$\Re(x) = z_a K_\nu(x)$$

çözümü elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(k-n(k+1))(k+n(k+1))}(2k^2+k-2)}{4(k-1)}$$

şeklinde bulunur. Burada skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

5) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k-1}},\ B = \frac{2(k-1)}{r^k(2k-1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazıldıktan sonra $R(r) = r^{\frac{k^2(1-2k)+4i\omega(k-1)}{2k(2k-1)}} H(r)$ dönüşümü ve $z = \dfrac{4\kappa(k-1)r^{\frac{-k-1}{2}}}{k(2k^2+k-1)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dH(z)}{dz} - \frac{-16\omega^2(k-1)^2 + z^2k^2(2k^2+k-1)^2 + k^4(2k-1)^2}{z^2(2k-1)^2(k+1)^2}H(z) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü H_0, H_1 keyfi sabitler ve

$$\vartheta = \frac{\sqrt{k^4(2k-1)^2 - 16\omega^2(k-1)^2}}{k(k-1)(2k-1)}$$

olmak üzere;

$$H(z) = H_0K_\vartheta(z) + H_1I_\vartheta(z)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $z \to \infty$ iken $I_\vartheta(z)$ ıraksar. Bu yüzden $H_1 = 0$ olur ve

$$H(z) = H_0K_\vartheta(z)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(k-n(k+1))(k+n(k+1))}(2k-1)k}{4(k-1)},$$

şeklinde bulunur. Skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

6) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k+1}},\ B = \frac{2(k+1)}{r^{k+2}(2k+1)k}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazıldıktan sonra $R(r) = r^{\frac{-k^2(2k+5)-2k+4i\omega(k+1)}{2k(2k+1)}} F(r)$ dönüşümü ve $\rho = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{\frac{-k-3}{2}}}{k(2k^2+7k+3)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{-16\omega^2(k-1)^2+\left(\rho^2(k+3)^2+(k+2)^2\right)k^2(2k+1)^2}{\rho^2k^2(2k+1)^2(k+3)^2}\right)F(\rho) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, F_0, F_1 keyfi sabitler ve

$$\xi = \frac{\sqrt{k^2(k+2)^2(2k+1)^2 - 16\omega^2(k+1)^2}}{k(2k+1)(k+3)}$$

olmak üzere;

$$F(\rho) = F_0 K_\xi(\rho) + F_1 I_\xi(\rho)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $\rho \to \infty$ iken $I_\xi(\rho)$ ıraksar. Bu yüzden $F_1 = 0$ olur ve

$$F(\rho) = F_0 K_\xi(\rho)$$

biçimindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(k+2-n(k+3))(k+2+n(k+3))}(2k+1)k}{4(k+1)}$$

olacak biçimde bulunur. Burada skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

7) Çizelge 4.1'den

$$A = \frac{1}{r^{k+1}},\ B = \frac{2(k+1)}{r^{k+2}(k+4)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147) yazıldıktan sonra $R(r) = r^{\frac{-(k+2)(k+4)+4i\omega(k+1)}{2(k+4)}} W(r)$ dönüşümü ve $\tau = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{\frac{-k-3}{2}}}{(k+4)(k+3)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau} - \frac{\tau^2(k+4)^2(k+3)^2 + (k^2+4\omega(k+1)+6k+8)\,(k^2+4\omega(k-1)+6k+8)}{\tau^2(k+3)^2(k+4)^2}\right) W(\tau) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, w_0, w_1 keyfi sabitler ve

$$\eta = \frac{\sqrt{(k+4)^2(k+2)^2 - 16\omega^2(k+1)^2}}{(k+4)(k+3)}$$

olmak üzere;

$$W(\tau) = w_0 K_\eta(\tau) + w_1 I_\eta(\tau)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. $\tau \to \infty$ iken $I_\eta(\tau)$ ıraksar. Bu yüzden $w_1 = 0$ olur ve

$$W(\tau) = w_0 K_\eta(\tau),$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(k+2-n(k+3))(k+2+n(k+3))}(k+4)}{4(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \geq 0$ ve $n > 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

8) Çizelge 4.1'den

$$A = r^{k+1},\ B = \frac{2r^k(k+1)}{k(2k^2+2k+1)}$$

şeklinde verilen metrik katsayıları cinsinden Denklem (4.147)' yazıldıktan sonra $R(r) = r^{\frac{k^2(2k^2+2k+1)+4i\omega(k+1)}{2k(2k^2+2k+1)}}T(r)$ dönüşümü ve $\varsigma = \dfrac{4\kappa(k+1)r^{\frac{k-1}{2}}}{(2k^4-k^2-k)}$ değişken değişimi yapılırsa $(m=0)$

$$\left(\frac{d^2}{d\varsigma^2} + \frac{1}{\varsigma}\frac{d}{d\varsigma} - \frac{-16\omega^2(k+1)^2+\varsigma^2k^2(2k^3-k-1)^2+k^4(2k^2+2k+1)^2}{\varsigma^2k^2(k-1)^2(2k^2+2k+1)^2}\right)T(\varsigma) = 0$$

şeklinde modifiye Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü, C_0, C_1 keyfi sabitler ve

$$a = \frac{\sqrt{k^4(2k^2+2k+1)^2 - 16\omega^2(k+1)^2}}{k(k-1)(2k^2+2k+1)}$$

olmak üzere;

$$T(\varsigma) = C_0K_a(\varsigma) + C_1I_a(\varsigma)$$

şeklinde modifiye Bessel fonsiyonları cinsinden elde edilir. Burada $\varsigma \to \infty$ iken $I_a(\varsigma)$ ıraksar. Bu yüzden $C_1 = 0$ olur ve

$$T(\varsigma) = C_0K_a(\varsigma)$$

şeklindeki çözüm elde edilir. Denklem (4.140) kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{\sqrt{(n-k(n+1))(-n+k(n-1))}(2k^2+2k+1)k}{4(k+1)}$$

şeklinde bulunur. Skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $k \leq 2$ ve $n > 0$ için gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

4.9. Gravitasyonel Dalgayla Moleküler Potansiyellerin Etkileşimi ve Kuasinormal Frekans Hesabı

4.9.1. Kratzer potansiyeli

Diatomik molekülün çekirdekleri arasındaki titreşimleri tanımlamak için önerilen Kratzer potansiyeli; (Kratzer 1920), D_e, ayrılma enerjisi ve ξ çekirdekler

arası denge mesafesi olmak üzere,

$$V(r) = -2D_e\left(\frac{\xi}{r} - \frac{\xi^2}{2r^2}\right) \tag{4.150}$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (4.150) de verilen Kratzer potansiyeli Denklem (2.14)'te verilen Dirac denkleminde yerine yazılır ve

$$\begin{pmatrix}\Psi_1(u,r,\theta)\\ \Psi_2(u,r,\theta)\end{pmatrix} = \frac{e^{-i\omega u + i\kappa\theta}}{\sqrt{r}}\begin{pmatrix}\phi_1(r)\\ \phi_2(r)\end{pmatrix}$$

değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılırsa

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{A'}{2A}\right)\phi_1(r) + \left(-\frac{i\kappa}{r} + \frac{imc}{\hbar}\right)\frac{B}{A}\phi_2(r) = 0, \tag{4.151}$$

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{2i\omega B}{A} - \frac{4iD_eB}{c\hbar A}\left(\frac{\xi}{r} - \frac{\xi^2}{2r^2}\right)\right]\phi_2(r) + \left(\frac{i\kappa}{r} + \frac{imc}{\hbar}\right)\frac{B}{A}\phi_1(r) = 0 \tag{4.152}$$

şeklinde iki tane çiftlenimli denklem elde edilir. Bu iki denklemden

$$\begin{aligned}&\left[\frac{d^2}{dr^2} - \left(\frac{(8i\xi D_e(\xi-2r)e + 8i\omega r^3\hbar)B^2 + 4AB'c\hbar r^3}{4ABc\hbar r^3}\frac{(-Ar^2 - 4A'r^3)B}{4ABr^3}\right)\frac{d}{dr}\right.\\ &- \left(\frac{4\kappa^2B^3}{4ABr^3} - \frac{(-4i\xi D_e(\xi+2r)e + 12i\omega r^2\hbar)B^2 + 2AB'r^2c\hbar}{4ABr^3c\hbar}\right.\\ &\left.\left. - \frac{(-2Ar^2 - Ar)B}{4ABr^3}\right)\right]\phi_2(r) = 0\end{aligned} \tag{4.153}$$

biçimindeki ikinci mertebe denklem elde edilir. Şimdi A ve B metrik katsayılarının bazı değerleri için Denklem (4.153)'ün çözümlerini inceleyelim.

Öncelikle Denklem (3.6)'te verilen Ricci tensörünün kontraksiyonunda tekillik oluşturmayacak şekilde seçilen metrik katsayıları; α ve β keyfi sabitler olmak üzere,

$$A = \frac{(1-r)\alpha}{r^2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{\beta}{r^2} \tag{4.154}$$

şeklinde bulunur. Bu metrik katsayıları Denklem (4.153)'te yazdıktan sonra, $\rho = -\dfrac{1}{r}$ değişken değiştirmesi ve

$$\phi_2(\rho) = e^{\left(\frac{e\beta\xi^2D_e}{\alpha c\hbar} + \frac{\lambda}{2}\right)\rho}(\rho-1)^\gamma\rho^{\frac{3}{2}}\chi(\rho)$$

dönüşümü yapılırsa ($m = 0$ için)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\lambda + \frac{1+\delta}{\rho} + \frac{1+\gamma}{\rho-1}\right)\frac{d}{dr} - \frac{\gamma(\lambda+2)}{2(\rho-2)} - \frac{((2i\omega\beta + 3c\alpha)\rho + c\alpha(1+\delta))\,\lambda}{2c\alpha\rho(\rho-1)}\right.$$

$$\left. - \frac{\gamma + \delta(\rho-1)}{\rho(\rho-1)} - \frac{2\xi\beta^2\omega D_e(\xi+2)e}{c^2\hbar\alpha^2\rho(\rho\rho-1)}\right)\chi(\rho) = 0$$

konfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin konfluent Heun fonksiyonları cinsinden çözümü, N_0 ve N_1 normalizasyon sabitleri ve

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{2\beta\sqrt{-\xi^4 D_e e^2 + \alpha\kappa^2 c^2\hbar^2}}{\alpha c\hbar}, \\
\delta &= \frac{c\alpha + 2i\beta\omega}{c\alpha}, \\
\gamma &= \frac{2i\beta(\xi e D_e(\xi+2) + \omega\hbar)}{c\hbar\alpha}, \\
\upsilon &= -\frac{(-2\xi^3 D_e^2 e^2(\xi+2) + c^2\hbar^2\alpha\kappa^2)\beta + i\xi^2 e D_e c\hbar\alpha}{c^2\hbar^2\alpha^2}, \\
\eta &= \frac{(2i\beta c\alpha\omega + 4\beta^2\omega^2 + c^2\alpha^2)\hbar - 8\xi\beta^2\omega e D_e}{2\hbar c^2\alpha^2}
\end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\chi(\rho) = N_0 H_C\left(\lambda, \delta, \gamma, \upsilon, \eta, \rho\right) + N_1\rho^{-\delta} H_C\left(\lambda, -\delta, \gamma, \upsilon, \eta, \rho\right)$$

biçiminde elde edilir. $\rho \to \infty$'daki çözümde $N_0 = 0$ olur. konfluent Heun fonksiyonlarının Denklem (3.8) de verilen polinom olma koşulu kullanılarak kuasinormal frekans

$$\omega = i\frac{2ie\xi(\xi+2)D_e\beta\lambda + 2\eta c\hbar\alpha + c\hbar\lambda\alpha(2(n+1)+\alpha)}{4\lambda\beta\hbar}$$

olarak bulunur. Burada I_2, H_2 ve HCl diatomik moleküllerin ayrılma enerjisi, D_e, (Bransden ve Joachain 1982), çekirdekler arası denge mesafesi, ξ, ve α ve β parametrelerinin bir kaç değeri için kuasinormal frekanslar Çizelge 4.4'te verilmiştir. Burada $n = 1$, $\kappa = \frac{3}{2}$'dir.

Çizelge 4.4. Denklem (4.154)'te verilen metrik katsayıları ve I_2, H_2 ve HCl diatomik molekülleri için kuasinormal frekanslar

Molekül	α	β	$\xi(m)$	$D_e(eV)$	ω
I_2	10^{-4}	10^{-2}	10^{-10}	1.56	$-0.38\times10^{-13}-3.7\times10^{5}i$
	10^{-8}	10^{-2}			$-0.38\times10^{-13}-1.12\times10^{4}i$
	10^{-15}	10^{-3}			$-0.38\times10^{-12}-3.6i$
H_2	10^{-4}	10^{-2}	10^{-10}	4.75	$-0.115\times10^{-12}-3.7\times10^{5}i$
	10^{-8}	10^{-2}			$-0.115\times10^{-12}-1.12\times10^{4}i$
	10^{-15}	10^{-3}			$-0.115\times10^{-12}-3.6i$
HCl	10^{-4}	10^{-2}	10^{-10}	4.62	$-0.112\times10^{-12}-3.7\times10^{5}i$
	10^{-8}	10^{-2}			$-0.112\times10^{-12}-1.12\times10^{4}i$
	10^{-15}	10^{-3}			$-0.112\times10^{-12}-3.6i$

Çizelge 4.4'ten de görüldüğü gibi α ve β parametreleri değiştirildiğinde, KNF'nin sanal kısımları aynıyken, reel kısımları değişmektedir. Ayrılma enerjisi en küçük olan I_2 molekülünün reel kısmı en büyük, HCl molekülünün reel kısmı en küçüktür.

İkinci olarak, Denklem (4.60)'ta verilen metrik katsayıları; $c=2$ için, α ve β sıfırdan büyük keyfi sabitler olmak üzere,

$$A=\frac{\alpha}{r^2} \quad \text{ve} \quad B=\frac{\beta}{r^3} \tag{4.155}$$

olacak şekilde elde edilir. Bu ifadeleri denklem (4.153)'te yazdıktan sonra,

$$\phi(r)=r^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{(-2ar+b+i\pi r^2 f)s+2abr-d-b}{2r^2 s}}\varphi(r)$$

dönüşümü ve $\varrho=-\dfrac{i\sqrt{s}}{r}$, değişken değişiminin ardından,

$$\begin{aligned} a &= \frac{2ieD_e\xi\beta}{\alpha c\hbar}, \\ b &= \frac{2ieD_e\xi^2\beta}{\alpha c\hbar}, \\ d &= \frac{\kappa^2\beta^2}{\alpha^2}, \\ f &= \frac{i\tilde{\omega}\beta}{\alpha c}, \\ s &= \sqrt{d+b^2} \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$\left[\frac{d^2}{d\varrho^2}+\left(\frac{2(f+1)}{\varrho}+\frac{2iba}{s^{\frac{3}{2}}}-2\varrho\right)\frac{d}{d\varrho}+\left(-1-2f+\frac{bs^2(2f-1)+ad^2}{s^3}\right.\right. \tag{4.156}$$

$$\left.\left.-\frac{4ia(sf-(1+f)b)}{2\varrho s^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\varphi(\varrho)=0$$

şeklindeki bikonfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin, $m=0$ için çözümü, $\tilde{N}_1$, $\tilde{N}_2$ normalizasyon sabitleri ve

$$\begin{aligned}\zeta &= -(1+2f),\\ \mu &= -\frac{2iab}{s^{3/2}},\\ \nu &= \frac{2s^2+b(2f-1)s^2+a^2d}{s^{3/2}},\\ \upsilon &= \frac{4iaf}{\sqrt{s}}\end{aligned}$$

olmak üzere; bikonfluent Heun fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$\varphi(\varrho)=\varrho^{-2f-1}\tilde{N}_1H_B\left(\zeta,\ \mu,\nu,\upsilon,\ \varrho\right)+\tilde{N}_2H_B\left(-\zeta,\mu,\nu,\upsilon,\ \varrho\right)$$

olacak şekilde elde edilir. Burada $\varrho\to\infty$'daki çözümde $\tilde{N}_2=0$ olur. Bikonfluent Heun fonksiyonlarının Denklem (3.9) da verilen polinom olma koşulu kullanılarak kuasinormal frekans

$$\tilde{\omega}=-\frac{i\alpha c\left(-s^3(1+2n)-bs^2+a^2d\right)}{2s^2\beta(s-b)}$$

olarak elde edilir. Aynı şekilde I_2, H_2 ve HCl diatomik moleküllerin ayrılma enerjisi, D_e, çekirdekler arası denge mesafesi, ξ, ve α ve β parametrelerinin değerlerine karşılık gelen kuasinormal frekanslar Çizelge 4.5'teki gibidir. Burada $n=1$, $\kappa=\dfrac{3}{2}$'dir.

Çizelge 4.5. Denklem (4.155)'teki metrik katsayıları ve I_2, H_2 ve HCl diatomik molekülleri için kuasinormal frekanslar

Molekül	α	β	$\xi(m)$	$D_e(eV)$	$\tilde{\omega}$
	10^{-2}	10^2			$-7.6\times10^{-4}-1.5\times10^{4}i$
I_2	10^{-4}	10^4	10^{-10}	1.56	$-7.6\times10^{-4}-1.5i$
	10^{-6}	10^6			$-7.6\times10^{-4}-1.5\times10^{-4}i$
	10^{-2}	10^2			$-2.3\times10^{-3}-1.5\times10^{4}i$
H_2	10^{-4}	10^4	10^{-10}	4.75	$-2.3\times10^{-3}-1.5i$
	10^{-6}	10^6			$-2.3\times10^{-3}-1.5\times10^{-4}i$
	10^{-2}	10^2			$-2.24\times10^{-3}-1.5\times10^{4}i$
HCl	10^{-4}	10^4	10^{-10}	4.62	$-2.24\times10^{-3}-1.5i$
	10^{-6}	10^6			$-2.24\times10^{-3}-1.5\times10^{-4}i$

Çizelge 4.5'te ise yine KNF'nin sanal kısımları aynıyken, reel kısımları değişmektedir. Ancak ayrılma enerjisi en büyük olan H_2 molekülünün reel kısmı en küçük, I_2 molekülünün reel kısmı en büyüktür.

4.9.2. Lennard-Jones potansiyeli

Bağlı olmayan iki atom veya molekülün etkileşiminin potansiyel enerjisini, atomlar veya moleküller arası mesafenin bir fonksiyonu olarak ifade eden bu potansiyel; $V(r)$ iki atom veya molekül arasındaki potansiyel, α iki parçacık arasındaki potansiyelin sıfır olduğu uzaklık, ε potansiyel kuyusunun derinliği ve r parçacıklar arasındaki mesafe olmak üzere,

$$V(r)=4\varepsilon\left[\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{12}-\left(\frac{\alpha}{r}\right)^{6}\right] \tag{4.157}$$

şeklinde önerilmiştir (Jones 1924). Denklem (4.157), denklem (2.14)'te verilen Dirac denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{A'}{2A}\right)\varphi_1(r)(r)+\left(-\frac{i\kappa}{r}+\frac{imc}{\hbar}\right)\frac{B}{A}\varphi_2(r)=0$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{2i\omega B}{A}-\frac{8ie\varepsilon B}{c\hbar A}\left(\frac{\alpha^{12}}{r^{12}}-\frac{\alpha^{6}}{r^{6}}\right)\right)\varphi_2(r)+\left(\frac{i\kappa}{r}+\frac{imc}{\hbar}\right)\frac{B}{A}\varphi_1(r)=0$$

şeklinde iki tane çiftlenimli denklem elde edilir. $\Psi_1(u,r,\theta)$ ve $\Psi_2(u,r,\theta)$ değişkenlerine ayırma yöntemi kullanılarak

$$\begin{pmatrix}\Psi_1(u,r,\theta)\\ \Psi_2(u,r,\theta)\end{pmatrix}=\frac{e^{-i\omega u+i\kappa\theta}}{\sqrt{r}}\begin{pmatrix}\varphi_1(r)\\ \varphi_2(r)\end{pmatrix}$$

şeklinde yazıldıktan sonra; bu iki denklemden

$$\frac{d^2\varphi_1(r)}{dr^2} - \left[\frac{(2i\omega c\hbar r^{12} + 8ie\varepsilon\alpha^6(\alpha^6 - r^6))B^2 - (A + rA')c\hbar Br^{11}}{r^{12}c\hbar BA}\frac{AB'r^{12}}{r^{12}c\hbar BA}\right]\frac{d\varphi_1(r)}{dr}$$
$$+\left[-\frac{4ic\hbar\kappa^2AB^3r^{10}}{4r^{12}c\hbar BA^2} + \frac{4iA'B^2(\omega c\hbar r^{12} + 4e\varepsilon\alpha^6(\alpha^2 - r^6)) - 2ir^{12}c\hbar A'B'A}{4r^{12}c\hbar BA^2}\right. \quad (4.158)$$
$$\left. + \frac{c\hbar Br^{11}(2iA''Ar + 2AA' - rA'^2)}{4r^{12}c\hbar BA^2}\right]\varphi_1(r) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebe denklem elde edilir. Şimdi A ve B metrik katsayılarının bazı değerleri için Denklem (4.158)'i inceleyelim.

Öncelikle Denklem (4.60)'ta verilen metrik katsayıları; $c = 4$ için, f ve d sıfırdan büyük keyfi sabitler olmak üzere,

$$A = \frac{f}{r^4}, B = \frac{d}{r^5} \quad (4.159)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeler Denklem (4.158) de yazıldıktan sonra $\varrho = -\dfrac{6^{1/2}\alpha^6 x}{3cfhr^6}$ değişken değişimi ve $\varphi_1(\varrho) = \varrho^{-\frac{1}{4}}\chi(\varrho)$ dönüşümü uygulanırsa, $x = \sqrt{e\varepsilon dchf}$ olmak üzere;

$$\frac{d^2\chi(\varrho)}{d\varrho^2} + \left(\frac{1}{6\varrho} - 2\varrho + \frac{id\omega}{3f\varrho} - \frac{2x\sqrt{3}}{3c\hbar f}(-\frac{1}{3} + i)\right)\frac{d\chi(\varrho)}{d\varrho} + \left(\frac{(1+i)\kappa^2 dx\sqrt{3}}{5184\varrho\alpha^6 e\varepsilon f}\right)\chi(\varrho) = 0$$

şeklinde bikonfleunt Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü bikonfluent Heun fonksiyonları cinsinden

$$\chi(\varrho) = Z_1 H_B\left(\frac{i(2d\omega + 5if)}{6f}, \frac{2\sqrt{3}(1-i)x}{3c\hbar f}, \frac{7f + 2id\omega}{6f},\right.$$
$$\left. -\frac{\sqrt{3}x(286e((1-i)f + 2(1+i)\omega d)\alpha^6\varepsilon + (1+i)f\kappa^2 cd\hbar)}{2592ce\hbar\alpha^6 f^2\varepsilon}, \varrho\right)$$
$$+ Z_2\varrho^{-\frac{i(2d\omega+5if)}{6f}} H_B\left(\frac{i(2d\omega + 5if)}{6f}, \frac{2\sqrt{3}(1-i)x}{3c\hbar f}, \frac{7f + 2id\omega}{6f},\right.$$
$$\left. -\frac{\sqrt{3}x(286e((1-i)f + 2(1+i)\omega d)\alpha^6\varepsilon + (1+i)f\kappa^2 cd\hbar)}{2592ce\hbar\alpha^6 f^2\varepsilon}, \varrho\right)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\varrho \to \infty$'daki çözümde $Z_1 = 0$ olur. Denklem (3.9) da verilen bikonfluent Heun fonksiyonlarının polinom olma koşulu yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -\frac{if(5 + 6n)}{2d}$$

şeklinde elde edilir. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, sadece metrik parametrelerine bağlı olup, $f > 0$ ve $d > 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

İkinci olarak, Denklem (3.6) da verilen Ricci tensörünün kontraksiyonunda tekillik oluşturmayacak şekilde seçilen metrik katsayıları; ϑ ve $\tilde{\vartheta}$ sıfırdan büyük katsayılar olmak üzere,

$$A = \frac{\vartheta}{r^{10}}, B = \tilde{\vartheta} r \tag{4.160}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler Denklem (4.158) de yazılır ve $y = \dfrac{\sqrt{6p}r^6}{6}$ değişken değişimi ve

$$\varphi_1(y) = y^{-\frac{i(11i-16x\alpha^6)}{12}} e^{-y^2-\frac{4yx\sqrt{6}}{3\sqrt{ip}}} F(y)$$

dönüşümü uygulanırsa, $p = \dfrac{i\omega\tilde{\vartheta}}{\vartheta}$ ve $x = \dfrac{e\xi\tilde{\vartheta}\alpha^6}{\hbar c\vartheta}$ olmak üzere;

$$\frac{d^2F(y)}{dy^2} + \left(-\frac{2}{3y} + 2y - \frac{4ix\alpha^6}{y} + \frac{4ix\sqrt{6}}{3\sqrt{ip}}\right)\frac{dF(y)}{dy} + \left(-\frac{ix\sqrt{6}}{y\sqrt{ip}} + \frac{11}{16y^2} - \frac{i\kappa^2\tilde{\vartheta}^2}{6p\vartheta} + \frac{ix\alpha^6}{y^2} - \frac{3}{2}\right)F(y) = 0$$

biconfleut Heun denklemi şeklinde elde edilir. Bu denklemin bikonfluent Heun fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$F(y) = y^{-\frac{1+8ix^6}{6}}\tilde{F}_0 H_B\left(-\frac{1+8ix^6}{6}, \frac{4x\sqrt{6ip}}{3ip}, \frac{p\vartheta(-11+8ix\alpha^6)-i\kappa^2\tilde{\vartheta}^2}{6p\vartheta}, -\frac{2i\sqrt{6x(8x\alpha^6+5i)}}{\sqrt{iy}}, y\right) + \tilde{F}_1 H_B\left(\frac{1+8ix^6}{6}, \frac{4x\sqrt{6ip}}{3ip}, \frac{p\vartheta(-11+8ix\alpha^6)-i\kappa^2\tilde{\vartheta}^2}{6p\vartheta}, -\frac{2i\sqrt{6x(8x\alpha^6+5i)}}{\sqrt{iy}}, y\right)$$

biçiminde elde edilir. Bu fonksiyonun $y \to \infty$'daki çözümü için $\tilde{F}_1 = 0$ olur. Denklem (3.9) da verilen bikonfluent Heun fonksiyonlarının polinom olma koşulu yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -i\frac{4x\alpha^6\tilde{\vartheta}\kappa^2}{64x^2\alpha^{12}+(6n+11)^2} - \frac{\tilde{\vartheta}\kappa^2(6n+11)}{128x^2\alpha^{12}+2(6n+11)^2}$$

şeklinde reel ve sanal kısımdan oluşur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, $x > 0,\ \alpha > 0$ ve $\tilde{\vartheta} > 0$ için bize gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

Üçüncü olarak, yine Denklem (3.6) da verilen Ricci tensörünün kontraksiyonunda tekillik oluşturmayacak şekilde metrik katsayıları; σ ve $\tilde{\sigma}$ sıfırdan büyük keyfi sabitler olmak üzere,

$$A = \sigma r^2, B = \tilde{\sigma} r \tag{4.161}$$

şeklinde seçilebir. Bu elde edilen metrik katsayıları Denklem (4.158) de yazılır ve $x = -\dfrac{\sqrt{6}\alpha^6 \check{\nu}}{c\hbar r^6}$ değişken değişimi ve $\varphi_1(x) = x^{\frac{2(1-i\omega)+\varsigma}{12}} G(x)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\varsigma = \sqrt{\sigma^2 + 4(\kappa^2 \tilde{\sigma}^2 \sigma - \omega^2 \tilde{\sigma}^2 + i\omega\tilde{\sigma}\sigma)}$$

ve

$$\check{\nu} = \sqrt{\tilde{\sigma} e \xi c \hbar \sigma}$$

olmak üzere;

$$\frac{d^2G(x)}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - 2x - \frac{\varsigma}{6x} + \frac{2\check{\nu}\sqrt{3}}{3c\hbar}(i-1)\right)\frac{dG(x)}{dx} + \left(\frac{6\hbar c(1+2i\omega-\varsigma)}{36c\hbar} + \frac{2\check{\nu}\sqrt{3}(1+2i\omega-\varsigma)(1-i)}{36xc\hbar}\right)G(x) = 0$$

şeklinde bikonfluent Heun denklemi elde edilir. Bu denklemin bikonfluent Heun fonksiyonları cinsinden ifadesi

$$\begin{aligned} G(x) &= \tilde{G}_0 H_B\left(\frac{\varsigma}{6}, \frac{2\check{\nu}(1-i)\sqrt{3}}{3\hbar c}, \frac{13+2i\omega}{6}, -\frac{\check{\nu}\sqrt{3}(7(1-i)+2\omega(1+i))}{9\hbar c}, x\right) \\ &+ x^{-\frac{\varsigma}{6}}\tilde{G}_1 H_B\left(-\frac{\varsigma}{6}, \frac{2\check{\nu}(1-i)\sqrt{3}}{3\hbar c}, \frac{13+2i\omega}{6}, -\frac{\check{\nu}\sqrt{3}(7(1-i)+2\omega(1+i))}{9\hbar c}, x\right) \end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Bu fonksiyonun $x \to \infty$'daki çözümü için $\tilde{G}_0 = 0$ olur. Denklem (3.9) da verilen bikonfluent Heun fonksiyonlarının polinom olma koşulu yardımıyla kuasinormal frekans

$$\omega = -i\frac{6n(6n-1) - \kappa^2}{12n}$$

şeklinde bulunur. Fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen bu KNF, metrik ve potansiyel parametrelerinden bağımsız olup, gravitasyonel dalga zemini kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

5. SONUÇLAR

Bu tezde (2+1) boyutta alternatif kütleçekimi kuramları çerçevesinde yeni gravitasyonel dalga zeminleri, bu zeminlerin parçacık alanlarıyla ve moleküler potansiyeller ile etkişimlerinin yanı sıra gravitasyonel dalgaların KNF'leri incelendi.

Tezde ilk önce (2+1) boyutlu gravitasyonel dalganın fermiyonik alanla minimal ve minimal olmayan etkileşimleri ele alındı. Buradan belli koşullar altında metrik katsayıları elde edildi. Daha sonra (2+1) boyutlu gravitasyonel dalga metriği zemininde fermiyonik alanın F(T) Teleparalel kütleçekim teorisi ile mininal ve minimal olmayan etkileşimleri F(T)=γT^2 ve F(T)=$T^2 + \gamma T^2$ üs yasası modelleri (power law model) için incelendi ve metrik katsayıları bulundu. Bu metrik katsayılarının gravitasyonel dalgayı temsil etmesi için belli koşullar altında Ricci tensörünün kontraksiyonunda, $(R_{ab}R^{ab})$, tekillik oluşturmayan çözümleri ele alındı. Daha sonra bu katsayılar kullanılarak KNF'ler hesaplandı.

Öncelikle Denklem (4.132) ve (4.133)'te verilen metrik katsayıları için Denklem (4.136) da verilen manyetik alan yokken hesaplanan KNF çözümü, $k = 1$ durumunda hem sanal hem de reel kısmı içerirken, $k = -1$ durumu için sadece sanal kısım içerir. Denklem (4.137)'deki manyetik alan varlığında ise aynı şekilde k=1 durumunda yine sanal ve reel kısmı içerirken, $k = -1$ durumunda pure sanal kısım içerir. Burada $k = -1$ durumunda elde edilen sanal kısım $L = 10^{-38}\dfrac{1}{m^2}$, $n = 1$, $\kappa = \dfrac{1}{2}$ değerleri için manyetik alan varken yada olmadığı durum için aynı değeri verir. Yani, manyetik alanın değişimi $k = -1$ durumunda değişiklik yapmaz. Ancak $k = 1$ durumunda ise yukarıda verilen benzer L, n ve κ değerleri için reel kısım aynıyken, manyetik alanın değişimi sanal kısmın değişimine neden olmaktadır. Çizelge 4.2'den de görüldüğü gibi manyetik alan arttıkça sanal kısmın mutlak değeri artmaktadır. Ayrıca Burada kırmızıya kaymayı (z), Dünyanın radyasyon kaynağıyla olan uzaklığını gösteren r'nin bazı değerleri için hesapladık. Bulunan ifadenin gözlemsel değerlere yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca kaynağın gözlemlenen dalga boyu $\lambda_o = 4.9 \times 10^{19} m$, ile Çizelge 4.3'te verilen kaynaktan salınan ısığın dalgaboyu λ_e değerleri ile karşılastırıldığında $\lambda_o > \lambda_e$ olup kaynağın bizden uzaklaştığını göstermektedir ve bu durum deneysel sonuçlarla uyumludur. Daha sonra Denklem (4.16) da verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $\lambda > 0$, $A_0 > 0$ ve $\kappa > 0$ koşulları altında ve Denklem (4.60)'ta ve Denklem (4.62) de verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c > 0$ koşulu altında bize gravitasyonel dalga zemininin kararlı olduğunu ifade eder. Denklem (4.17) de verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $A_0 > 0$ ve $\kappa > 0$ olduğu durumda gravitasyonel dalga zemininin kararlı olduğunu gösterir. Çizelge 4.1'de verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın

gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF'ler, bu çizelgede verilen k'nın koşullarının yanı sıra $n > 0$ durumu için gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu gösterir.

Daha sonra fermiyonik alan ve skaler alan etkileşimlerinden elde edilen metrik katsayıları için spin-1 denklemi çözülerek, KNF'ler elde edildi. Denklem (4.60)'ta elde edilen metrik katsayıları için vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $k > 0$ ve $n > 0$ koşulları altında bize gravitasyonel dalga zemininin kararlı olduğunu ifade eder. Çizelge 4.1'de verilen metrik katsayıları için vektör alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF'ler, çizelgedeki metrik katsayılarına karşılık gelen k'nın koşullarının yanı sıra $n > 0$ olduğu durumda gravitasyonel dalga zemininin kararlı olduğunu gösterir. Devamında, (2+1) boyutta gravitasyonel dalga metriği zemininde skaler alanın $F(T)$ Teleparalel kütleçekim teorisi ile mininal etkileşimi F(T)=γT^2 ve F(T)=$T^2 + \gamma T^2$ modelleri için incelendi. Buradan elde edilen, Euler-Lagrange hareket denklemleri Noether simetrisi yaklaşımı kullanılarak çözüldü ve metrik katsayıları elde edildi ve ardından KNF'ler bulundu. Denklem (4.60)'taki metrik katsayıları için skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c > 0$ ve $n \geq 0$ koşulunda ve Denklem (4.62) de verilen metrik katsayıları için skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c < 0$ ve $n > 0$ koşulunda gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olğunu gösterir. Ardından Denklem (4.86) da verilen metrik katsayıları için, skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $\kappa > 0$ şartı altında gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu ifade eder. Daha sonra Denklem (4.149) da verilen metrik katsayıları $\ell = 2$ ve $\ell = 4$ değerleri için çözülmüştür. İlk değer için KNF çözümü elde edilemedi. İkinci değer de ise skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $\kappa > 0$ ve $n > 0$ koşulları altında incelendiğinde gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu gösterir. Çizelge 4.1'de verilen metrik katsayıları için skaler alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF'ler, çizelgedeki k'ya konulan şartların yanında $n > 0$ olduğu durumda gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu ifade eder.

Son olarak, gravitasyonel dalga ile moleküler potansiyellerin etkileşimi incelenmiştir. Bunun için öncelikle Kratzer potansiyeli ele alınarak kuasinormal frekanslar farklı metrik katsayıları kullanılarak hesaplanmıştır. Bu kuasinormal frekanslar ayrılma enerjisi, D_e, çekirdekler arası denge mesafesi, ξ, ve metrik katsayılarını içermektedir. Çizelge 4.1 ve 4.4'ten I_2, H_2 ve HCl diatomik molekülleri için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu gösterir. Lennard-Jones potansiyeli için KNF çözümleri incendiğinde ise, Denklem (4.60)'ta verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $c = 4$ için sadece metrik parametrelerine bağlı olup, bu parametreler sıfırdan büyük olduğu için $(f > 0, \quad d > 0)$

gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu ifade eder. Daha sonra Denklem (4.160)'ta verilen metrik katsayıları için fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, $x > 0$, $\alpha > 0$ ve $\tilde{\vartheta} > 0$ olduğu durumda bize gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu gösterir. Ardından, Denklem (4.161) de verilen metrik katsayıları kullanılarak fermiyonik alanın gravitasyonel alan ile etkileşiminden elde edilen KNF, metrik ve potansiyel parametrelerinden bağımsız olup, $n > 0$ olduğundan bu gravitasyonel dalga zemininin kaynağının kararlı olduğunu gösterir. Ayrıca, burada elde edilen frekansların günümüz dedektörlerinin ölçtükleri frekanslarla aynı mertebede olması; bize bu moleküllerin, gravitasyonel dalga zeminiyle etkileşebildiklerini göstermektedir.

6. KAYNAKLAR

Abbott, B. P. et al., 2009. LIGO: The laser interferometer gravitational-wave observatory. *Rept. Prog. Phys.*, 72(7): 076901–076926.

Abdo, A. A. et al., 2010. The First Fermi Large Area Telescope Catalog of Gamma-ray Pulsars. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 187(2): 460–544.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A., 1972. Handbook of Mathematical Functions (without numerical tables). NBS, 10 ed. 512 p.

Accadia, T. et al., 2012. Virgo: a laser interferometer to detect gravitational waves. *J. Instrum.*, 7(3): P03012–P03136.

Accioly, A., Helayël-Neto, J., Scatena, E., Morais, J., Turcati, R. and Pereira-Dias, B., 2011. Some interesting features of new massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 28(22): 225008–21.

Aldrovandi, R. and Pereira, J. G., 2012. Fundamental Theories of Physics vol. 173 Teleparallel Gravity: An Introduction. Springer, 2013 ed. 214 p.

Aldrovandi, R., Pereira, J. G. and Vu, K. H., 2004. Selected topics in teleparallel gravity. *Braz. J. Phys.*, 34(4A): 1374–1380.

Andersson, N., Araujo, M. E. and Schutz, B. F., 1993. The phase-integral method and black hole normal modes. *Class. Quant. Grav*, 10(4): 735–755.

Andersson, N. and Linnæus, S., 1992. Quasinormal modes of a Schwarzschild black hole: Improved phase-integral treatment. *Phys. Rev. D*, 46(10): 4179–4187.

Bakas, I. and Sourdis, C., 2011. Homogeneous vacua of (generalized) new massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 28(1): 015012–015032.

Bamba, K., Capozziello, S. and De Laurentis, M., 2013. No further gravitational wave modes in f(T) gravity. *Phys. Lett. B*, 727(1): 194 – 198.

Bamba, K., Myrzakulov, R., Nojiri, S. and Odintsov, S. D., 2012. Reconstruction of f(T) gravity: Rip cosmology, finite-time future singularities and thermodynamics. *Phys. Rev. D*, 85(10): 104036–104051.

Barrow, J. D., Burd, A. B. and Lancaster, D., 1986. Three-dimensional classical spacetimes. *Class. Quant. Grav.*, 3(4): 551–567.

Bergshoeff, E. A., Hohm, O. and Townsend, P., 2009a. Massive gravity in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 102(20): 201301–201305.

Bergshoeff, E. A., Hohm, O. and Townsend, P., 2009b. More on massive 3d gravity. *Phys. Rev. D*, 79(12): 124042–124055.

Berry, C. P. L. and Gair, J. R., 2011. Linearized f(R) gravity: gravitational radiation and solar system tests. *Phys. Rev. D*, 83(10): 104022–104041.

Birmingham, D. and Mokhtari, S., 2006. Exact gravitational quasinormal frequencies of topological black holes. *Phys. Rev. D*, 74(8): 084026–084033.

Birrell, N. D. and Davies, P. C. W., 1982. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press. 349 p.

Blome, H. J. and Mashhoon, B., 1984. Quasi-normal oscillations of a schwarzschild black hole. *Phys. Lett. A*, 100(5): 231 – 234.

Bransden, B. and Joachain, C., 1982. Physics of Atoms and Molecules. Longman Publishing Group. 694 p.

Capozziello, S., Corda, C. and De Laurentis, M. F., 2008. Massive gravitational waves from f(R) theories of gravity: Potential detection with LISA. *Phys. Lett. B*, 669(5): 255 – 259.

Chakrabarty, I., 1999. Gravitational waves: an introduction. arXiv:physics /9908041.

Chandrasekhar, S. and Detweiler, S., 1975. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci.*, 344(1639): 441–452.

Chiba, T., 2003. 1/R gravity and scalar - tensor gravity. *Phys. Lett. B*, 575(1): 1–3.

Cho, H., Cornell, A., Doukas, J., Huang, T. and Naylor, W., 2012. A new approach to black hole quasinormal modes: a review of the asymptotic iteration method. *Adv. Math. Phys.*, 2012: 281705–281747.

Cho, H. T., Cornell, A. S., Doukas, J. and Naylor, W., 2010. Black hole quasinormal modes using the asymptotic iteration method. *Class. Quant. Grav*, 27(15): 155004–155016.

Corda, C., 2007. The production of matter from curvature in a particular linearized high order theory of gravity and the longitudinal response function of interferometers. *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, 2007(4): 009–28.

Corda, C., 2008a. Massive gravitational waves from the R^2 theory of gravity: Production and response of interferometers. *Int. J. Mod. Phys. A*, 23(10): 1521–1535.

Corda, C., 2008b. Primordial production of massive relic gravitational waves from a weak modification of general relativity. *Astropart. Phys.*, 30(4): 209 – 215.

Corda, C., 2009. Massive relic gravitational waves from f(R) theories of gravity: production and potential detection. *Eur. Phys. J. C*, 65(1): 257–265.

Cruz, M., Gonzalez-Espinoza, M., Saavedra, J. and Vargas-Arancibia, D., 2016. Scalar perturbations of two-dimensional Horava–Lifshitz black holes. *Eur. Phys. J. C*, 76(2): 75–83.

Cuadros-Melgar, B., de Oliveira, J. and Pellicer, C. E., 2013. Quasinormal modes and thermodynamical aspects of the 3D Lifshitz black hole. *J. Phys.: Conference Series*, 453(1): 012025–012033.

Danzmann, K. and the LISA study team, 1996. LISA: laser interferometer space antenna for gravitational wave measurements. *Class. Quant. Grav.*, 13(11A): A247–A250.

de Souza, R. C. and Kremer, G. M., 2011. Cosmic expansion from boson and fermion fields. *Class. Quant. Grav.*, 28(12): 125006–125020.

Deng, X. and Finn, L. S., 2011. Pulsar timing array observations of gravitational wave source timing parallax. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 414(1): 50–58.

Deser, S., Jackiw, R. and Templeton, S., 1982a. Three-dimensional massive gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 48(15): 975–978.

Deser, S., Jackiw, R. and Templeton, S., 1982b. Topologically massive gauge theories. *Annals Phys.*, 140(1-2): 372–411.

Dorband, E. N., Berti, E., Diener, P., Schnetter, E. and Tiglio, M., 2006. Numerical study of the quasinormal mode excitation of Kerr black holes. *Phys. Rev. D*, 74(8): 084028–084046.

Einstein, A., 1915. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*: 844–847.

Einstein, A., 1928. Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl*, 17: 224–227.

Einstein, A., 1929. Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegrÃ$\frac{1}{4}$ndete einheitliche Feldtheorie. *Math. Ann.*, 102: 685–697.

Einstein, A., 1930. Zur theorie der räume mit riemann metrik und fernparallelismus. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl*, 19: 401–402.

Fiziev, P. and Staicova, D., 2011. Application of the confluent Heun functions for finding the quasinormal modes of nonrotating black holes. *Phys. Rev.D*, 84(12): 127502–127507.

Ford, L., 1997. Quantum field theory in curved spacetime. *arXiv:gr-qc/9707062*.

Fröman, N., Fröman, P., Andersson, N. and Hökback, A., 1992. Black-hole normal modes: phase-integral treatment. *Phys. Rev. D*, 45(8): 2609–2616.

Gal'tsov, D. V. and Matiukhin, A. A., 1992. Matrix WKB method for black hole normal modes and quasibound states. *Class. Quant. Grav*, 9(9): 2039–2055.

Gecim, G., Kucukakca, Y. and Sucu, Y., 2015. Noether gauge symmetry of Dirac field in (2 + 1) dimensional gravity. *Adv. High. Energy. Phys.*, 2015: 567395–567402.

Gecim, G. and Sucu, Y., 2017. Dirac field as a source of the inflation in 2+1 dimensional Teleparallel gravity. *Adv. High Energy Phys.*, 2017: 2056131–2056140.

Geng, C. Q., 2012. Gravitational waves inviable modified gravity theories. *J. Phys.: Conference Series*, 384(1): 012030–012037.

Glampedakis, K. and Andersson, N., 2003. 'Quick and dirty' methods for studying black-hole resonances. *Class. Quant. Grav*, 20(15): 3441–3463.

Goldstein, H., 1980. Classical Mechanics. Addison-Wesley series in physics. Addison-Wesley Pub. Co, 2d ed. 691 p.

Gregory, M. H. and the LIGO Scientific Collaboration, 2010. Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors. *Class. Quant. Grav.*, 27(8): 084006–084018.

Greiner, W., 2000. Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations. Springer, 3rd ed. 424 p.

Hayashi, K. and Shirafuji, T., 1979. New general relativity. *Phys. Rev. D*, 19(12): 3524–3553.

Hayashi, K. and Shirafuji, T., 1981. Addendum to "New general relativity". *Phys. Rev. D*, 24(12): 3312–3314.

Hod, S., 1998. Bohr's correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes. *Phys. Rev. Lett.*, 81(20): 4293–4296.

Horowitz, G. T. and Hubeny, V. E., 2000. Quasinormal modes of AdS black holes and the approach to thermal equilibrium. *Phys. Rev. D*, 62(2): 024027–024038.

Isaacson, R. A., 1968. Gravitational radiation in the limit of high frequency. i. the linear approximation and geometrical optics. *Phys. Rev.*, 166(5): 1263–1271.

Iyer, S., 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes. *Phys. Rev. D*, 35(12): 3632–3636.

Iyer, S. and Will, C., 1987. Black-hole normal modes: A WKB approach. I. Foundations and application of a higher-order WKB analysis of potential-barrier scattering. *Phys. Rev. D*, 35(12): 3621–3631.

Jawad, A. and Rani, S., 2015. Dynamical instability of shear-free collapsing star in extended teleparallel gravity. *Eur. Phys. J. C*, 75(11): 548–557.

Jones, J. E., 1924. On the determination of molecular fields.-II. From the equation of state of a gas. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 106(738): 463–477.

Kausar, H. R., 2017. Polarization states of gravitational waves in modified theories. *Int. J. Mod. Phys. D*, 26(5): 1741010–1741016.

Kazakov, A. Y., 2006. The central two-point connection problem for the reduced confluent Heun equation. *J. Phys. A Math. Gen.*, 39(10): 2339–2348.

Kiefer, C., 2004. Hawking temperature from quasi-normal modes. *Class. Quant. Grav.*., 21(17): L123–L127.

Kim, S., 2006. Quasinormal modes of black holes and dissipative open systems. *J. Korean Phys. Soc.*, 49(2): 764–772.

Konoplya, R. A., 2003. Quasinormal behavior of the D-dimensional Schwarzschild black hole and the higher order WKB approach. *Phys. Rev. D*, 68(2): 024018–024026.

Konoplya, R. A. and Zhidenko, A., 2011. Quasinormal modes of black holes: from astrophysics to string theory. *Rev. Mod. Phys.*, 83(3): 793–836.

Kratzer, A., 1920. Die ultraroten rotationsspektren der halogenwasserstoffe. *Z. Physik*, 3(5): 289–307.

Kwon, Y., Nam, S., Park, J. D. and Yi, S. H., 2011. Quasi-normal modes for new type black holes in new massive gravity. *Class. Quant. Grav.*, 28(14): 145006–145024.

Leaver, E. W., 1985. An analytic representation for the quasi normal modes of Kerr black holes. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A402(1823): 285–298.

Leaver, E. W., 1992. Remarks on the continued-fraction method for computing black-hole quasinormal frequencies and modes. *Phys. Rev. D*, 45(12): 4713–4716.

Li, M., Miao, R. X. and Miao, Y. G., 2011a. Degrees of freedom of f(T) gravity. *JHEP*, 2011(7): 108–122.

Li, B., Sotiriou, T. P. and Barrow, J. D., 2011b. f(T) gravity and local Lorentz invariance. *Phys. Rev. D*, 83(6): 064035–064040.

Liang, J., 2018. Quasinormal Modes of a Noncommutative-Geometry-Inspired Schwarzschild Black Hole. *Chin. Phys. Lett.*, 35(1): 010401–010405.

Ligo-Caltech, 2017. Sources and types of gravitational waves. . https://www.ligo.caltech.edu/page/gw-sources. [Son erişim tarihi: 24.05.2018].

Linder, E. V., 2010. Einstein's other gravity and the acceleration of the Universe. *Phys. Rev. D*, 81(12): 127301–127304.

Lück, H. and Grote, H., 2012. Advanced Gravitational Wave Detectors-GEO 600. 700 p.

Maggiore, M., 2007. Gravitational Waves: Volume 1: Theory and Experiments. Oxford University Press, USA. 569 p.

Maluf, J. W., 2013. The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen Phys.*, 525(5): 339–357.

Messenger, C., Takami, K., Gossan, S., Rezzolla, L. and Sathyaprakash, B. S., 2014. Source Redshifts from Gravitational-Wave Observations of Binary Neutron Star Mergers. *Phys. Rev.*, X4(4): 041004–041016.

Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A. and John Wheeler, K. T., 1973. Gravitation. Physics Series. W. H. Freeman, first edition ed. 1304 p.

Moon, T. and Myung, Y. S., 2012a. Polarization modes of gravitational waves in three-dimensional massive gravities. *Phys. Rev. D*, 85(2): 027501–027505.

Moon, T. and Myung, Y. S., 2012b. Quasinormal frequencies and thermodynamic quantities for the Lifshitz black holes. *Phys. Rev. D*, 86(2): 024006–024017.

Moore, C. J., 2015. The sensitivity of pulsar timing arrays. In J. Phys.: Conference Series. vol. 610, pp. 012018–012025.

Moore, C. J., 2016. Gravitational waves: understanding black holes. Ph.D. thesis, Cambridge University, England. 259 p.

Myung, Y. and Moon, T., 2012. Quasinormal frequencies and thermodynamic quantities for the Lifshitz black holes. *Phys. Rev. D*, 86(2): 024006–024017.

Näf, J. and Jetzer, P., 2011. Gravitational radiation in quadratic f(R) gravity. *Phys. Rev. D*, 84(2): 024027–024034.

Natario, J. and Schiappa, R., 2004. On the classification of asymptotic quasinormal frequencies for d-dimensional black holes and quantum gravity. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 8(6): 1001–1131.

Noether, E., 1918. Invariant Variation Problems. *Gott. Nachr.*, 1918(3): 235–257.

Nojiri, S. and Odintsov, S., 2003. Modified gravity with negative and positive powers of curvature: Unification of inflation and cosmic acceleration. *Phys. Rev. D*, 68(12): 123512–123522.

Nojiri, S. and Odintsov, S., 2004. Modified gravity with ln R terms and cosmic acceleration. *Gen. Rel. Grav.*, 36(8): 1765–1780.

Özer, O. and Roy, P., 2009. The asymptotic iteration method applied to certain quasinormal modes and non Hermitian systems. *Cent. Eur. J. Phys*, 7(4): 747–752.

Rani, S., Jawad, A. and Amin, M. B., 2016. Charged Noncommutative Wormhole Solutions via Power-Law f(T) Models. *Commun. Theor. Phys.*, 66(4): 411–422.

Ronveaux, A., 1995. Heun's Differential Equations. Oxford University Press. 384 p.

Rostworowski, A., 2007. Quasinormal frequencies of d-dimensional Schwarzschild black holes: evaluation via continued fraction method. *Acta Phys. Polon. B*, 38(1): 81–89.

Saha, B., 2001. Spinor field in Bianchi type I universe: regular solutions. *Phys. Rev. D*, 64(12): 123501–123516.

Sathyaprakash, B. S. and Schutz, B. F., 2009. Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves. *Living. Rev. Relativ.*, 12(1): 2–141.

Schutz, B. F., 1989. Gravitational wave sources and their detectability. *Class. Quant. Grav.*, 6(12): 1761–1780.

Schutz, B. F. and Will, C. M., 1985. Black hole normal modes - A semianalytic approach. *Astrophys. J.*, 291(2): L33–L36.

Seaborn, J. B., 1991. Hypergeometric Functions and Their Applications. Springer-Verlag. 250 p.

Sharif, M. and Rani, S., 2014. Dynamical instability of spherical collapse in f(T) gravity. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 440(3): 2255–2264.

Siopsis, G., 2009. Analytic calculation of quasi-normal modes, Papantonopoulos, Eleftherios (Ed.), Springer Berlin Heidelberg, vol. 769. 471-508 pp.

Slavyanov, S. Y. and Lay, W., 2000. Special Functions: A Unified Theory Based On Singularities. Oxford University Press, USA. 312 p.

Smith, R. and Thrane, E., 2018. Optimal Search for an Astrophysical Gravitational-Wave Background. *Phys. Rev.*, X8(2): 021019–021037.

Sopuerta, C. F. and Yunes, N., 2011. Cosmology, Quantum Vacuum and Zeta Functions: In Honor of Emilio Elizalde. Springer Berlin Heidelberg. 382 p.

Srivastava, Y., Widom, A. and Pizzella, G., 2003. Electronic enhancements in the detection of gravitational waves by metallic antennae. *arXiv preprint gr-qc/0302024*.

Starobinsky, A., 1980. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys. Lett. B*, 91(1): 99–102.

Stephen, J. M., Wegter-McNelly, K. and Chiao Raymond, Y., 2010. Do mirrors for gravitational waves exist? *Physica. E Low. Dimens. Syst. Nanostruct.*, 42(3): 234 – 255.

Sucu, Y. and Unal, N., 2007. Exact solution of Dirac equation in 2+1 dimensional gravity. *J. Math. Phys.*, 48(5): 052503–052512.

Taylor, J. and Weisberg, J., 1982. New test of general relativity: gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16. *Astrophys. J.; (United States)*, 253(2): 908–920.

Thorne, K. S., 1997. Probing black holes and relativistic stars with gravitational waves. arXiv:gr-qc/9706079.

Ulhoa, S. C., 2014. On the Quasinormal Modes for Gravitational Perturbations of the Bardeen Black Hole. *Braz. J. Phys.*, 44(4): 380–384.

Vishveshwara, C. V., 1970. Scattering of gravitational radiation by a Schwarzschild blackhole. *Nature*, 227(5261): 936–938.

Willke, B. et al., 2002. The GEO 600 gravitational wave detector. *Class. Quant. Grav.*, 19(7): 1377–1387.

Xiao-Ying, Z. and Jian-Hua, H., 2014. Gravitational waves in f(R) gravity. *Chin. Phys. Lett.*, 31(9): 099801–099804.

Yang, L., Lee, C. and Geng, C., 2011. Gravitational waves in viable f(R) models. *JCAP*, 1108(8): 029–045.

Zhang, H., Liu, D. and Li, X., 2014. Black holes and gravitational waves in three-dimensional f(R) gravity. *Phys. Rev. D*, 90(12): 124051–124056.

ÖZGEÇMİŞ

Semra GÜRTAŞ DOĞAN
semragurtas@yahoo.com

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Doktora 2013-2019	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bölümü, Antalya
Yüksek Lisans 2009-2013	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Bölümü, Antalya
Lisans 2004-2008	Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya

ESERLER

Ulusal hakemli dergilerde yayımlanan makaleler

1. Dernek M., **Doğan Gürtaş S.**, Sucu Y., Ünal N. (2018). Relativistic quantum mechanical spin-1 wave equation in $2+1$ dimensional spacetime. Turk. J. Phys. $42.5 : 509-526$. doi:$10.3906/fiz-1801-8$.

Uluslararası ve Ulusal konferanslardaki bildiri ve poster çalışmaları

1. 13th Regioanal Conference on Mathematical Physics, Antalya, 27-31 October 2010.
2. 7th International Balkan Summer School on Nucleer Physics, Adrasan-Antalya, 15-22 September 2010.
3. Sayılar Kuramı Çalıştayı, Nesin Matematik köyü, Şirince-İzmir, 18-27 Ocak 2010.
4. Uzay ve Zaman Çalıştayı, Nesin Matematik köyü, Şirince-İzmir, 19-23 Mayıs 2010.

5. Feza Gürsey Kuantum Alan Kuramı Kış Okulu, İstanbul, 03-08 Şubat 2014.

6. Gürtaş Semra, Sucu Yusuf. (2014). (2+1) Boyutta Robertson Walker (RW) İçin Dirac Denklemi'nin Çözümü, Turkish Physical Society, 31st International Physics Congress (poster presentation), Bodrum.

7. Doğan Gürtaş Semra, Sucu Yusuf. (2017). Dirac Alanında (2+1) Boyutta Lifshitz Karadeliği'nin Kuasinormal Modları (z=3) Adım Fizik Günleri 6, (poster sunumu), Burhaniye, Balıkesir.

8. Doğan Gürtaş Semra, Sucu Yusuf. (2017). Dirac Quasınormal Modes Of Lifshitz Black Hole In (2+1) Dimensional (z=0). Turkish Physical Society, 33rd International Physics Congress (poster presentation), Bodrum.