DİSKRET ve SÜREKLİ MİNİMAKS PROBLEMLERİ - BİR DÜZGÜN OLMAYAN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Ahmet Zahid KÜÇÜK

Yüksek Lisans Tezi
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA 2001

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİSKRET ve SÜREKLİ MİNİMAKS PROBLEMLERİ - BİR DÜZGÜN OLMAYAN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

AHMET ZAHİD KÜÇÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİKANABİLİM DALI
ISPARTA 2001

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI ' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : .... Prof. Dr. Serpil Pehlivan

Üye : .... Prof. Dr. Agamali Agamaliyev

Üye : .... Prof. Dr. Bilender Paşaoğlu.

ONAY

Bu tez 29/06/2001 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

26./07./2001

S.D.Ü.FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Adı Soyadı : Prof. Dr. Orhan AYDEMİR

İmza :

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde sürekli fonksiyonların tanımı yapılarak maksimum ve minimumları ile ilgili bazı özellikler ispatları ile verilmiştir. Son olarak sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar incelenmiştir.

İkinci bölümde X, n-boyutlu vektör olmak üzere maksimum tipli $f(X)$ fonksiyonu için diskret minimaks problemi tanımlanmış ve örneklerle incelenmiştir. Ayrıca problem için bir geometrik yorum verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, $\varphi(X) = \max F(X,Y)$ şeklindeki sürekli fonksiyonun minimumunun bulunması problemi verilip, aynı fonksiyonun yöne göre doğrultu türevi incelenmiştir. Ayrıca minimaks problemi için gerekli şartlar incelenip geometrik yorum verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Minimaks problemi, Diskret minimaks problemi, Geometrik Yorum

ABSTRACT

This theis consist of three chapter.
In the first chapter defining continues functions we gave some properties concernet with their maximums and minumums with their proofs at the and of the chapter we examined continues the diferentiable fonctions.
In the second chapter in which X denotes n-dimentional vector, we defined discret minimax problems for maximum formed $f(X)$ function and this function was examined with its examples. Also a geometric interpolation was given for this problem.
In the third chapter has been given minumum of the continues function we examined directional diferentiable of this functions. In addition exemining necessary conditions for minimax problem a geometric model.

KEY WORDS : Minimax problem , Geometric interpolation , Discret Minimax problem.

ÖNSÖZ

Genel anlamda minimaks problemleri, uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan Diferensiyel Denklemlerin uygulamalarındandır. Diferensiyel Denklemler ise modern matematiğin temelini teşkil etmekte olup doğal bilimler, mühendislik bilimleri, ekonomi ve işletme bilimlerinin karmaşık problemlerinin analizi ve çözümü için gereklidir.

Bu çalışmada Diferensiyel Denklemler ve Analiz'in birlikte kullanıldığı ve ülkemizde fazlaca bahsi yapılmayan minimaks problemleri genel anlamda tanıtılarak incelenmiştir.

Bu çalışmayı hazırlamamda büyük yardımlarını gördüğüm, gerektiğinde tatilini bile esirgemeden bana bilgilerini sunan değerli hocam Prof. Dr. Agamali Agamaliyev'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu çalışmanın, konuyu ülkemizde daha detaylı inceleyecek araştırmacılara bir ön kaynak olarak yararlı olmasını dilerim.

SİMGELER (ve KISALTMALAR) DİZİNİ

E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\Omega \times G$	Ω ve G kümesinin kartezyen çarpımı
$o(X, g; \alpha)$	X in g ve α ya göre değişimi
$\|g\|$	g vektörünün normu
max	maksimum
min	minimum
sup	supremum
inf	infumum

1.YARDIMCI KAVRAMLAR

1.1. Sürekli Fonksiyonlar

Tanım. 1.1.1. $G \subset E^n$ kümesinde bir $F(X)$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve her $X \in G$ için $|X - X_0| < \delta$ iken $|F(X) - F(X_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı mevcut ise, $F(X)$ fonksiyonu X_0 noktasında süreklidir denir.

G kümesinin her noktasında sürekli olan $F(X)$ fonksiyonuna G kümesinde süreklidir denir.

Eğer $G \subset E^n$ sınırlı ve kapalı küme ise, sürekli $F(X)$ fonksiyonu bu küme üzerinde en büyük ve en küçük değerlerini alır.

Yani, $X_a, X_b \in G$ için $F(X_a) = \sup\limits_{X \in G} F(X)$ ve $F(X_b) = \inf\limits_{X \in G} F(X)$ dir.

Tanım.1.1.2. Her $\varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki her $X_a, X_b \in G$ için $|X_a - X_b| < \varepsilon$ iken $|F(X_a) - F(X_b)| < \varepsilon$ oluyorsa $F(X)$ fonksiyonuna G kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir.

Sınırlı ve kapalı $G \subset E^n$ kümesinde sürekli bir fonksiyon, aynı G kümesinde düzgün süreklidir.

Eğer, $F_i(X)$, $(i = 1,2,\ldots,r)$ fonksiyonu G kümesinde sürekli ise $\phi(X) = (F_1(X), F_2(X), \ldots, F_r(X))$ vektör fonksiyonu da G kümesinde süreklidir.

$F(X,Y)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Burada X ve Y,

$$X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \text{ ve } Y = (y_1, \ldots, y_m) \in G$$

şeklindedir.

$\Omega \times G = \{W = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in E^{n+m} \mid X = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega, Y = (y_1, \ldots, y_m) \in G\}$

şeklinde gösterelim. Eğer $F(W)$ fonksiyonu $\Omega \times G$ kümesinde sürekli ise $F(X,Y), X \in \Omega, Y \in G$ fonksiyonu X ile Y nin sürekli bir fonksiyonudur.

1.2.Sürekli Fonksiyonlar İçin Bazı Eşitlik ve Eşitsizlikler

Sınırlı ve kapalı $G \subset E^n$ kümesinde sürekli $F(X)$ fonksiyonunu göz önüne alalım ve aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerin doğruluğunu gösterelim.

I.

$$\max_{X \in G} F(X) = -\min_{X \in G}(-F(X)) \tag{1.2.1}$$

$$\min_{X \in G} F(X) = -\max_{X \in G}(-F(X)) \tag{1.2.2}$$

İspat:

Önce (1.2.1) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{X}$, $F(X)$ fonksiyonunun maksimum değer aldığı nokta ve X_0, $(-F(X))$ fonksiyonunun minimum değer aldığı nokta olsun. Bu taktirde,

$$\max_{X \in G} F(X) = F(\overline{X}) = -(-F(\overline{X})) \leq -\min_{X \in G}(-F(X)) \tag{1.2.1'}$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten; $(-F(X)) = F_1(X)$ ile gösterecek olursak, $F_1(X) \geq \min_{X \in G} F_1(X)$ yazabiliriz. Bu eşitsizliğinin her iki yanını (-1) ile çarparsak $-F_1(X) \leq -\min_{X \in G} F_1(X)$ eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$-\min_{X \in G}(-F(X)) = -(-F(X_0)) = F(X_0) \leq \max_{X \in G} F(X) \tag{1.2.1''}$$

eşitsizliği sağlanır.

$(1.2.1')$ ve $(1.2.1'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse ,

$$\max_{X \in G} F(X) = -\min_{X \in G}(-F(X))$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (1.2.2) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{X}$, $(-F(X))$ fonksiyonunun maksimum değer aldığı nokta ve X_0, $F(X)$ fonksiyonunun minimum değer aldığı nokta olsun. O zaman,

$$\min_{X\in G} F(X) = F(X_0) = -(-F(X_0)) \geq -\max_{X\in G}(-F(X)) \qquad (1.2.2')$$

eşitsizliği sağlanır.

Gerçekten; $(-F(X_0)) = F_1(X)$ ile gösterecek olursak, $F_1(X) \leq \max_{X\in G} F\ (X)$ yazarız.

Bu eşitsizliğinin her iki yanını (-1) ile çarparsak $-F_1(X) \geq -\max_{X\in G} F\ (X)$ eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$-\max_{X\in G}(-F(X)) = -\max_{X\in G} F_1(X) = -(F_1(\overline{X}\ )) = -(-F(\overline{X})) \geq \min_{X\in G} F(X) \qquad (1.2.2'')$$

eşitsizliği sağlanır.

$(1.2.2')$ ve $(1.2.2'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\min_{X\in G} F(X) = -\max_{X\in G}(-F(X))$$

eşitliği elde edilir.

II. $\lambda \geq 0$ olmak üzere,

$$\max_{X\in G} \lambda F(X) = \lambda \max_{X\in G} F(X) \qquad (1.2.3)$$

$$\min_{X\in G} \lambda F(X) = \lambda \min_{X\in G} F(X) \qquad (1.2.4)$$

dir.

İspat:

Önce (1.2.3) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$F(X)$'in maksimum değer aldığı nokta $\overline{X}$ olsun. Herhangi bir $Z \in G$ için,

$$F(Z) \leq \max_{X\in G} F(X) \Rightarrow \lambda F(Z) \leq \lambda \max_{X\in G} F(X)$$
$$\Rightarrow \max_{Z\in G}[\lambda F(Z)] = \max_{X\in G}[\lambda F(X)] \leq \lambda \max_{X\in G} F(X) \qquad (1.2.3')$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan,

$$\lambda \max_{X\in G} F(X) = \lambda F(\overline{X}) \le \max_{X\in G}[\lambda F(X)] \qquad (1.2.3'')$$

eşitsizliği sağlanır.

$(1.2.3')$ ve $(1.2.3'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\max_{X\in G} \lambda F(X) = \lambda \max_{X\in G} F(X)$$

elde edilir.

Şimdi de (1.2.4) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$F(X)$ in minimum değer aldığı nokta X_0 olsun. Herhangi bir $\mathrm{Z}\in G$ için,

$$\begin{aligned} &\min_{X\in G} F(X) \le F(\mathrm{Z}) \Rightarrow \lambda \min_{X\in G} F(X) \le \lambda F(\mathrm{Z}) \\ &\qquad \Rightarrow \lambda \min_{X\in G}[F(X)] \le \min_{\mathrm{Z}\in G}[\lambda F(\mathrm{Z})] = \min_{X\in G}[\lambda F(X)] \qquad (1.2.4') \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan,

$$\lambda \min_{X\in G} F(X) = \lambda F(X_0) \ge \min_{X\in G}[\lambda F(X)] \qquad (1.2.4'')$$

eşitsizliği sağlanır.

$(1.2.4')$ ve $(1.2.4'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\min_{X\in G} \lambda F(X) = \lambda \min_{X\in G} F(X)$$

eşitliği elde edilir.

III.

$$\max_{X\in G}[F(X)+c] = \max_{X\in G} F(X) + c \ , \ \text{(c sabit)} \qquad (1.2.5)$$

$$\min_{X\in G}[F(X)+c] = \min_{X\in G} F(X) + c \ , \ \text{(c sabit)} \qquad (1.2.6)$$

İspat:

Önce (1.2.5) eşitliğinin sağlandığını gösterelim. Herhangi bir $\mathrm{Z}\in G$ için

$$F(Z)\leq \max_{X\in G} F(X) \Rightarrow F(Z)+c \leq \max_{X\in G} F(X)+c$$
$$\Rightarrow \max_{Z\in G}[F(Z)+c] = \max_{X\in G}[F(X)+c] \leq \max_{X\in G} F(X)+c$$

Buradan,

$$\max_{X\in G}[F(X)+c] \leq \max_{X\in G} F(X)+c \qquad (1.2.5')$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\max_{X\in G} F(X)+c = F(\overline{X})+c \leq \max_{X\in G}[F(X)+c] \qquad (1.2.5'')$$

eşitliği sağlanır.

$(1.2.5')$ ve $(1.2.5'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse ,

$$\max_{X\in G}[F(X)+c] = \max_{X\in G} F(X)+c$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de (1.2.6) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Herhangi bir $Z\in G$ için

$$F(Z)\geq \min_{X\in G} F(X) \Rightarrow F(Z)+c \geq \min_{X\in G} F(X)+c$$
$$\Rightarrow \min_{Z\in G}[F(Z)+c] = \min_{X\in G}[F(X)+c] \geq \min_{X\in G} F(X)+c$$

dir. Buradan,

$$\min_{X\in G}[F(X)+c] \geq \min_{X\in G} F(X)+c \qquad (1.2.6')$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan ,

$$\min_{X\in G} F(X)+c = F(X_0)+c \geq \min_{X\in G}[F(X)+c] \qquad (1.2.6'')$$

eşitsizliği yazılır.

$(1.2.6')$ ve $(1.2.6'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\min_{X\in G}[F(X)+c] = \min_{X\in G} F(X)+c$$

eşitliği elde edilir.

IV. $$\left|\max_{X\in G} F(X)\right| \le \max_{X\in G}\left|F(X)\right| \tag{1.2.7}$$

$$\left|\min_{X\in G} F(X)\right| \le \max_{X\in G}\left|F(X)\right| \tag{1.2.8}$$

İspat:

Önce (1.2.7) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. $\overline{X}$, $F(X)$ fonksiyonunun maksimum değer aldığı nokta olsun. O halde,

$$\left|\max_{X\in G} F(X)\right| = \left|F(\overline{X})\right| \le \max_{X\in G}\left|F(X)\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece (1.2.7) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi (1.2.8) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için (1.2.2) ve (1.2.7) eşitsizliklerini göz önünde bulunduralım. O zaman,

$$\left|\min_{X\in G} F(X)\right| = \left|-\max_{X\in G}(-F(X))\right| = \left|\max_{X\in G}(-F(X))\right| \le \max_{X\in G}\left|-F(X)\right| \le \max_{X\in G}\left|F(X)\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan ,

$$\left|\min_{X\in G} F(X)\right| \le \max_{X\in G}\left|F(X)\right|$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

V. $$\max_{X\in G}\left[F_1(X)+F_2(X)\right] \le \max_{X\in G} F_1(X) + \max_{X\in G} F_2(X) \tag{1.2.9}$$

$$\max_{X\in G}\left[F_1(X)+F_2(X)\right] \ge \max_{X\in G} F_1(X) + \max_{X\in \phi} F_2(X) \tag{1.2.10}$$

$$\phi = \left\{X \in G \mid F_1(X) = \max_{Z\in G} F_1(Z)\right\}$$

İspat:

Önce (1.2.9) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $F_2(X)$'i sabit düşünelim. Yani $F_2(X) = c$ diyelim. O halde,

$$\max_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]=\max_{X\in G}[F_1(X)+c]\overset{(1.2.5)'ten}{=}\max_{X\in G}[F_1(X)]+c\le\max_{X\in G}F_1(X)+\max_{X\in G}F_2(X)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\max_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]\le\max_{X\in G}F_1(X)+\max_{X\in G}F_2(X)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (1.2.10) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $F_1(X)$ fonksiyonunun G kümesinde sabit olduğunu kabul edelim.

$$\max_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]\ge\max_{X\in\phi}[F_1(X)+F_2(X)]=\max_{X\in G}F_1(X)+\max_{X\in\phi}F_2(X)$$

eşitsizliği yazılır. Böylece,

$$\max_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]\ge\max_{X\in G}F_1(X)+\max_{X\in\phi}F_2(X)$$

eşitsizliği elde edilir.

Gerçekten de, burada $F_1(X)$ sabit tutulmuştur. $F_2(X)$ in ise sabit tutulmadığından maksimum değeri ϕ kümesi üzerinden alınır.

VI.

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]\ge\min_{X\in G}F_1(X)+\min_{X\in G}F_2(X) \qquad (1.2.11)$$

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]\le\min_{X\in G}F_1(X)+\min_{X\in\phi_1}F_2(X) \qquad (1.2.12)$$

$$\phi_1=\{X\in G \mid F_1(X)=\min_{Z\in G}F_1(\mathrm{Z})\}$$

İspat:

Önce (1.2.11) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $F_2(X)$'i sabit gibi düşünelim. Yani, $F_2(X)=c$ olsun. O halde,

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)]=\min_{X\in G}[F_1(X)+c]\overset{(1.2.6)'dan}{=}\min_{X\in G}[F_1(X)]+c\ge\min_{X\in G}F_1(X)+\min_{X\in G}F_2(X).$$

eşitsizliği yazılır. Buradan,

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)] \geq \min_{X\in G} F_1(X)+\min_{X\in G} F_2(X)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi (1.2.12) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $F_1(X)$ i sabit tutalım. O halde,

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)] \leq \min_{X\in \phi_1}[F_1(X)+F_2(X)] = \min_{X\in G} F_1(X)+\min_{X\in \phi_1} F_2(X)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\min_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)] \leq \min_{X\in G} F_1(X)+\min_{X\in \phi_1} F_2(X)$$

eşitsizliği elde edilir.

Gerçekten de, burada $F_1(X)$ sabit tutulmuştur. $F_2(X)$ ise sabit tutulmadığından minimum değeri ϕ_1 kümesi üzerinden alınır.

VII.

$$\left|\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\right| \leq \max_{X\in G}\left|F_1(X)-F_2(X)\right| \qquad (1.2.13)$$

$$\left|\min_{X\in G} F_1(X)-\min_{X\in G} F_2(X)\right| \leq \max_{X\in G}\left|F_1(X)-F_2(X)\right| \qquad (1.2.14)$$

İspat:

(1.2.14) eşitsizliğinin doğruluğu açıktır. O halde biz (1.2.13) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\max_{X\in G}[F_1(X)] = \max_{X\in G}[F_1(X)+F_2(X)-F_2(X)] \leq \max_{X\in G}[F_1(X)-F_2(X)]+\max_{X\in G}[F_2(X)]$$

olduğundan bu eşitsizliğin her iki tarafına $-\max_{X\in G}[F_2(X)]$ ifadesini ekleyelim. O zaman,

$$\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X) \leq \max_{X\in G}[F_1(X)-F_2(X)]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin sağ yanındaki ifadenin yerine, ondan daha büyük olan $\max\limits_{X\in G}|F_1(X)-F_2(X)|$ ifadesi yazılırsa,

$$\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\leq \max_{X\in G}|F_1(X)-F_2(X)| \qquad (1.2.13')$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\max_{X\in G}[F_2(X)]=\max_{X\in G}[F_2(X)+F_1(X)-F_1(X)]\leq \max_{X\in G}[F_2(X)-F_1(X)]+\max_{X\in G}[F_1(X)]$$

ifadesinden

$$\max_{X\in G}[F_2(X)]\leq \max_{X\in G}[F_2(X)-F_1(X)]+\max_{X\in G}[F_1(X)]$$

eşitsizliği çıkarılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafına $-\max\limits_{X\in G}[F_1(X)]$ ifadesini ekleyelim. O zaman,

$$\max_{X\in G} F_2(X)-\max_{X\in G} F_1(X)\leq \max_{X\in G}[F_2(X)-F_1(X)]$$

eşitsizliği elde edilir. Elde edilen bu son eşitsizliğin sağ tarafındaki ifadenin yerine, ondan daha büyük olan $\max\limits_{X\in G}|F_2(X)-F_1(X)|$ ifadesi yazılarak,

$$\max_{X\in G} F_2(X)-\max_{X\in G} F_1(X)\leq \max_{X\in G}|F_2(X)-F_1(X)|$$

$$-\left[\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\right]\leq \max_{X\in G}|F_2(X)-F_1(X)|$$

$$\left[\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\right]\geq -\max_{X\in G}|F_2(X)-F_1(X)| \qquad (1.2.13'')$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi $(1.2.13')$ ve $(1.2.13'')$ eşitsizlikleri aşağıdaki gibi birleştirilirse,

$$-\max_{X\in G}|F_1(X)-F_2(X)|\leq \max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\leq \max_{X\in G}|F_1(X)-F_2(X)|$$

$$\left|\max_{X\in G} F_1(X)-\max_{X\in G} F_2(X)\right|\leq \max_{X\in G}|F_1(X)-F_2(X)|$$

eşitsizliği elde edilir.

Belirtilmelidir ki, bu son eşitsizliğe geçilirken $-a \le x \le a \Rightarrow |x| \le a$ özelliği kullanılmıştır.

VIII. $$\left|\min_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} F_i(X) - \min_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} K_i(X)\right| \le \max_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} |F_i(X) - K_i(X)| \qquad (1.2.15)$$

İspat:

$\beta_1(X) = \max_{i\in[0,N]} F_i(X)$ ve $\beta_2(X) = \max_{i\in[0,N]} K_i(X)$ olsun. O zaman,

$$\left|\min_{X\in G}\beta_1(X) - \min_{X\in G}\beta_2(X)\right| \overset{(1.2.14)'ten}{\le} \max_{X\in G}|\beta_1(X) - \beta_2(X)| = \max_{X\in G}\left|\max_{i\in[0,N]} F_i(X) - \max_{i\in[0,N]} K_i(X)\right|$$

$$\overset{(1.2.13)'ten}{\le} \max_{X\in G}\max_{i\in[0,N]}|F_i(X) - K_i(X)|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\left|\min_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} F_i(X) - \min_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} K_i(X)\right| \le \max_{X\in G}\max_{i\in[0,N]} |F_i(X) - K_i(X)|$$

eşitsizliği elde edilir.

IX. $$\left(\max_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = \max_{X\in G}(F(X))^2 \qquad (1.2.16)$$

$$\left(\min_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = \min_{X\in G}(F(X))^2 \qquad (1.2.17)$$

İspat:

Önce (1.2.16) eşitsizliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\left(\max_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = |F(\overline{X})|^2 \le \max_{X\in G}(F(X))^2 \qquad (1.2.16')$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan,

$$(F(X))^2 = (|F(X)|)^2 \le \left(\max_{Z\in G}|F(Z)|\right)^2$$

$$\max_{X\in G}(F(X))^2 \le \left(\max_{Z\in G}|F(X)|\right)^2 \qquad (1.2.16'')$$

eşitsizliği elde edilir.

$(1.2.16')$ ve $(1.2.16'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\left(\max_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = \max_{X\in G}(F(X))^2$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi de (1.2.17) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

$$\left(\min_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = |F(X_0)|^2 \ge \min_{X\in G}(F(X))^2 \qquad (1.2.17')$$

eşitsizliği sağlanır.

Diğer taraftan,

$$(F(X))^2 = (|F(X)|)^2 \ge \left(\min_{Z\in G}|F(Z)|\right)^2$$

$$\min_{X\in G}|F(X)|^2 \ge \left(\min_{X\in G}|F(X)|\right)^2 \qquad (1.2.17'')$$

eşitsizliği bulunur.

$(1.2.17')$ ve $(1.2.17'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\left(\min_{X\in G}|F(X)|\right)^2 = \min_{X\in G}(F(X))^2$$

eşitsizliği elde edilir.

X. G kümesi, $G = \bigcup_{k=1}^{r} G_k$ şeklinde gösterilirse aşağıdaki eşitlikler doğru olur.

$$\max_{X\in G} F(X) = \max_{k\in[1;r]} \sup_{X\in G_k} F(X) \qquad (1.2.18)$$

$$\min_{X\in G} F(X) = \min_{k\in[1;r]} \inf_{X\in G_k} F(X) \tag{1.2.19}$$

İspat:

Önce (1.2.18) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için $\overline{X}$, $F(X)$ fonksiyonunun maksimum değer aldığı nokta olsun. O halde,

$$\max_{X\in G} F(X) = F(\overline{X}) \le \sup_{X\in G} F(X) \le \max_{k\in[1;r]} \sup_{X\in G_k} F(X)$$

$$\max_{X\in G} F(X) \le \max_{k\in[1;r]} \sup_{X\in G_k} F(X) \tag{1.2.18'}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan,

$$\max_{X\in G} F(X) \ge \sup_{X\in G_k} F(X)$$

ve buradan

$$\max_{X\in G} F(X) \ge \max_{k\in[1;r]} \sup_{X\in G_k} F(X) \tag{1.2.18''}$$

eşitsizliği bulunur.

$(1.2.18')$ ve $(1.2.18'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\max_{X\in G} F(X) = \max_{k\in[1;r]} \sup_{X\in G_k} F(X)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (1.2.19) eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. Bunun için X_0, $F(X)$ fonksiyonunun minimum değer aldığı nokta olsun. O halde,

$$\min_{X\in G} F(X) = F(X_0) \ge \inf_{X\in G} F(X) \ge \min_{k\in[1;r]} \inf_{X\in G_k} F(X)$$

$$\min_{X\in G} F(X) \ge \min_{k\in[1;r]} \inf_{X\in G_k} F(X) \tag{1.2.19'}$$

eşitsizliği bulunur.

Diğer taraftan,

$$\min_{X\in G} F(X) \le \inf_{X\in G_k} F(X)$$

ve buradan

$$\min_{X\in G} F(X) \le \min_{k\in[1;r]} \inf_{X\in G_k} F(X) \qquad (1.2.19'')$$

eşitsizliği elde edilir.

$(1.2.19')$ ve $(1.2.19'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\min_{X\in G} F(X) = \min_{k\in[1;r]} \inf_{X\in G_k} F(X)$$

eşitliği elde edilir.

XI. Farz edelim ki $F(t)$, $[c,d]$ kapalı aralığında sürekli fonksiyondur. O zaman aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\max_{c\le t\le d} F(t) = \max_{-d\le z\le -c} F(-z),$$

$$\max_{c\le t\le d} F(t) = \max_{\alpha\le z\le\beta} F\left(c + \frac{d-c}{\beta-\alpha}.(z-\alpha)\right) \qquad (1.2.20)$$

İspat:

$t_0 \in [c,d]$ ve $z_0 \in [\alpha,\beta]$ için,

$$z_0 = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{d-c}.(t_0 - c)$$

$$F(t_0) = F\left(c + \frac{d-c}{\beta-\alpha}.(z_0-\alpha)\right) \le \max_{\alpha\le z\le\beta} F\left(c + \frac{d-c}{\beta-\alpha}.(z-\alpha)\right)$$

$t_0 \in [c,d]$ için

$$\max_{c\le t\le d} F(t) \le \max_{\alpha\le z\le\beta} F\left(c + \frac{d-c}{\beta-\alpha}.(z-\alpha)\right) \qquad (1.2.20')$$

eşitsizliği elde edilir.

$\bar{t} \in [c,d]$ ve $\bar{z} \in [\alpha, \beta]$ için ,

$$\bar{t} = F\left(c + \frac{d-c}{\beta - \alpha}.(\bar{z} - \alpha)\right)$$

$$F\left(c + \frac{d-c}{\beta - \alpha}.(\bar{z} - \alpha)\right) = F(\bar{t}) \leq \max_{c \leq t \leq d} F(t)$$

$$\max_{\alpha \leq z \leq \beta} F\left(c + \frac{d-c}{\beta - \alpha}.(z - \alpha)\right) \leq \max_{c \leq t \leq d} F(t) \qquad (1.2.20'')$$

eşitsizliği elde edilir. $(1.2.20')$ ve $(1.2.20'')$ eşitsizlikleri birleştirilirse (1.2.20) eşitliği elde edilir.

1.3.Sürekli Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

Lemma.1.3.1. Farz edelim ki $F(X)$ fonksiyonu $\Omega' \subset E^n$ açık kümesinde süreklidir ve sürekli birinci mertebeden kısmi türevlere sahiptir. O zaman herhangi bir $X \in \Omega'$ ve $g \in E^n, \|g\| = 1$ için ve yeteri kadar küçük α için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$F(X + \alpha g) = F(X) + \alpha\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X}, g\right) + o(X, g; \alpha)$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F(X)}{\partial x_n}\right)$$

Burada $o(X, g; \alpha)$, g ye göre düzgün yakınsaktır ve aşağıdaki şartı sağlar.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(X, g; \alpha)}{\alpha} = 0$$

İspat:

Belirlenmiş X ve g değerleri için,

$$h(\alpha) = F(X + \alpha g) \qquad (1.3.1)$$

olsun. Tek değişkenli $h(\alpha)$ fonksiyonu $\alpha = 0$ noktası civarında sürekli türeve sahiptir. O halde,

$$h'(\alpha)=\left(\frac{\partial F(X+\alpha g)}{\partial X},g\right) \tag{1.3.2}$$

yazılabilir. $h(\alpha)$ için *Newton-Leibnitz* formülünü yazalım.

$$h(\alpha)=h(0)+\int_0^{\alpha} h'(t)dt. \tag{1.3.3}$$

Bu formülü de aşağıdaki gibi yazalım.

$$h(\alpha)=h(0)+\alpha h'(0)+\int_0^{\alpha}[h'(t)-h'(0)]dt \tag{1.3.4}$$

(1.3.4), (1.3.2), (1.3.1) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$F(X+\alpha g)=F(X)+\alpha\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X},g\right)+\int_0^{\alpha}\left(\frac{\partial F(X+tg)}{\partial X}-\frac{\partial F(X)}{\partial X},g\right)dt$$

eşitliği elde edilir.

Burada belirtelim ki,

$$o(X,g;\alpha)=\int_0^{\alpha}\left(\frac{\partial F(X+tg)}{\partial X}-\frac{\partial F(X)}{\partial X},g\right)dt$$

dir. Lemma.1.3.1 in ispatının tam olabilmesi için eşitliğin $g,\|g\|=1$ yönüne göre doğru olduğunu da göstermeliyiz. Yani,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(X,g;\alpha)}{\alpha}=0$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu ise aşağıdaki eşitlikten açıkça görülür.

$$|o(X,g;\alpha)|\le\|\alpha\|\max_{t\in[-|\alpha|,|\alpha|]}\left\|\frac{\partial F(X+tg)}{\partial X}-\frac{\partial F(X)}{\partial X}\right\|$$

Böylece Lemma.1.3.1 ispat edilmiştir.

Farz edelim ki $X \in \Omega'$ ve $X + tg \in \Omega'$, $t \in [0, \alpha]$, $\alpha > 0$ olsun. (1.3.3) eşitliği ve integralin ortalama değer teoremine göre, herhangi bir τ, $0 < \tau < \alpha$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$h(\alpha) = h(0) + \alpha h'(\tau) \qquad (1.3.5)$$

(1.3.1) , (1.3.2) , ve (1.3.5)'ten aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$F(X + \alpha g) = F(X) + \alpha\left(\frac{\partial F(X + \tau g)}{\partial X}, g\right)$$

Eğer $M \subset \Omega'$ sınırlı kapalı küme ise öyle $\alpha_0 > 0$ sayısı vardır ki , tüm $\alpha \in [0, \alpha_0]$ için

$$F(X + \alpha g) = F(X) + \alpha\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X}, g\right) + o(X, g; \alpha)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{o(X, g; \alpha)}{\alpha} = 0$ olup, yakınsaklık $X \in M$ ve $g \in E^n, \|g\| = 1$ değişkenlerine göre düzgündür.

Eğer tüm $g \in E^n, \|g\| = 1$ için

$$F(X + \alpha g) = F(X) + \alpha(g, V(X)) + o(X, g; \alpha) \qquad (1.3.6)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(X, g; \alpha)}{\alpha} = 0$$

şartını sağlayan bir $V(X)$ vektörü varsa, o zaman $F(X)$ fonksiyonu $X \in \Omega'$ noktasında diferensiyellenebilirdir.

Tanım.1.3.1. Eğer $F(X)$ fonksiyonu Ω' kümesinin her noktasında diferensiyellenebilirse ve (1.3.6) şeklinde olan $V(X)$ vektör fonksiyonu Ω' kümesinde sürekli ise $F(X)$ fonksiyonuna *sürekli diferensiyellenebilirdir* denir.

Şimdi sürekli diferensiyellenebilir fonksiyon için aşağıdaki yeter şartı verelim.

Lemma.1.3.2. Farz edelim ki tüm $X \in \Omega'$ ve $g \in E_n, \|g\| = 1$ için aşağıdaki ilişki sağlanır.

$$\frac{\partial F(X)}{\partial g} \overset{d.f}{=} \lim_{\alpha \to +0} \frac{F(X+\alpha g)-F(X)}{\alpha} = (g, V(X)) \qquad (1.3.7)$$

Ayrıca $V(X)$ vektör fonksiyonu Ω' kümesinde süreklidir.

O zaman $F(X)$ fonksiyonu Ω' kümesinde sürekli diferensiyellenebilirdir.

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = V(X)$$

İspat:

Belirlenmiş her $g, \|g\| = 1$ ve $X_0 \in \Omega'$ için tek değişkenli

$$h(\alpha) = F(X_0 + \alpha g) \qquad (1.3.8)$$

fonksiyonunu alalım.

$X \in \Omega'$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki, $X_0 + \alpha g \in \Omega'$, $\alpha \in (-\delta, \delta)$ dır.

Gösterelim ki, $h(\alpha)$ fonksiyonu $(-\delta, \delta)$ aralığında sürekli türeve sahiptir.

Gerçekten de (3.7)'ye göre

$$\lim_{\beta \to +0} \frac{1}{\beta}[h(\alpha+\beta)-h(\alpha)] = \lim_{\beta \to +0} \frac{1}{\beta}[F((X_0+\alpha g)+\beta g)-F(X_0+\alpha g)]$$

$$= (g, V(X_0+\alpha g))$$

ve böylece

$$\lim_{\beta \to +0} \frac{1}{\beta}[h(\alpha+\beta)-h(\alpha)] = (g, V(X_0+\alpha g)) \qquad (1.3.9)$$

eşitliği bulunur.

Diğer taraftan ,

$$\lim_{\beta\to -0}\frac{h(\alpha+\beta)-h(\alpha)}{\beta}=-\lim_{\beta\to -0}\frac{F((X_0+\alpha g)+(-\beta)(-g))-F(X_0+\alpha g)}{-\beta}$$

$$=-\lim_{\gamma\to +0}\frac{F((X_0+\alpha g)+\gamma(-g))-F(X_0+\alpha g)}{\gamma}$$

$$=-(-g,V(X_0+\alpha g))$$

$$=(g,V(X_0+\alpha g))$$

olduğundan aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\lim_{\beta\to -0}\frac{h(\alpha+\beta)-h(\alpha)}{\beta} = (g,V(X_0+\alpha g)) \qquad (1.3.10)$$

Böylece, $h(\alpha)$ fonksiyonu $(-\delta,\delta)$ aralığının herhangi bir noktasında sol ve sağ türeve sahiptir ve bu türevler eşittir.

Demek ki, $h(\alpha)$ fonksiyonu $(-\delta,\delta)$ aralığının herhangi bir noktasında adi türeve sahiptir ve bu türev aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$h'(\alpha)=(g,V(X_0+\alpha g)) \qquad (1.3.11)$$

$V(X)$ vektör fonksiyonu Ω' kümesinde süreklidir. O halde $h'(\alpha)$, $(-\delta,\delta)$ aralığında *süreklidir* denilebilir.

$h(\alpha)$ için *Newton-Leibnitz* formülünü tekrar yazalım.

$$h(\alpha)=h(0)+\int_0^\alpha h'(t)dt=h(0)+\alpha h'(0)+\int_0^\alpha[h'(t)-h'(0)]dt$$

(1.3.8) ve (1.3.11)'i göz önüne alırsak

$$F(X_0+\alpha g)=F(X_0)+\alpha(g,V(X_0))+o(X_0,g;\alpha) \qquad (1.3.12)$$

$$o(X_0,g;\alpha)=\int_0^\alpha(g,V(X_0+tg)-V(X_0))dt$$

eşitsizliği yazılır. $\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(X_0,g;\alpha)}{\alpha}=0$ şeklindedir.

Buradan $F(X)$ fonksiyonunun her $X_0 \in \Omega'$ noktasında diferensiyellenebilir olduğu görülür. $V(X)$ fonksiyonunun sürekliliğinden $F(X)$ fonksiyonunun Ω' kümesinde sürekli diferensiyellenebilir olduğunu söyleyebiliriz.

(1.3.12) eşitliğinden,

$$\frac{\partial F(X_0)}{\partial X} = V(X_0)$$

eşitliğini yazarız. Böylece Lemma ispat edilmiş olur.

Lemma.1.3.3. Farz edelim ki $F(X)$ fonksiyonu $\Omega' \subset E_n$ açık kümesinde süreklidir ve sürekli l mertebeden kısmi türevlere sahiptir. O zaman $X = (x_1,...,x_n)$ ve $g = (g_1, g_2,..., g_n)$, $\|g\| = 1$ olmak üzere yeteri kadar küçük α lar için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$F(X + \alpha g) = F(X) + \sum_{k=1}^{l} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\partial^k F(X)}{\partial g^k} + o(X, g; \alpha^l)$$

$$\frac{\partial^k F(X)}{\partial g^k} = \sum_{j_1, j_2,..., j_k = 1}^{n} \frac{\partial^k F(X)}{\partial X_{j_1},..., \partial X_{j_k}} g_{j_1},..., g_{j_k}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{o(X, g; \alpha^l)}{\alpha^l} = 0$$

İspat:

$$h(\alpha) = F(X + \alpha g) \qquad (1.3.13)$$

Yukarıdaki $h(\alpha)$ tek değişkenli fonksiyonu $X = 0$ noktası civarında $l.$ mertebeden sürekli türevlere sahiptir. Buna göre yeteri kadar küçük α lar için *Maclauren* formülü doğrudur.

$$h(\alpha) = h(0) + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\alpha^k}{k!} h^{(k)}(0) + R_l(\alpha) \qquad (1.3.14)$$

$R_l(\alpha)$ nın kalan terimleri aşağıdaki gibidir.

$$R_l(\alpha)=\frac{\alpha^l}{l!}h^{(l)}(\tau), 0<|\tau|<|\alpha| \tag{1.3.15}$$

$$R_l(\alpha)=\frac{1}{(l-1)!}\int_0^\alpha(\alpha-t)^{l-1}h^{(l)}(t)dt$$

$$R_l(\alpha)=\frac{\alpha^l}{l!}h^l(0)+o(X,g;\alpha^l)$$

$$o(X,g;\alpha^l)=\frac{1}{(l-1)!}\int_0^\alpha(\alpha-\tau)^{l-1}\left[h^l(t)-h^l(0)\right]dt \tag{1.3.16}$$

yazarsak (1.3.14)'e göre

$$h(\alpha)=h_0+\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}h^{(k)}(0)+o(X,g;\alpha^l) \tag{1.3.17}$$

yazabiliriz.

Şimdi (1.3.13)'e dayanarak aşağıdaki formülleri yazalım.

$$h'(0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F(X)}{\partial X_j}g_j=\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X},g\right)\overset{df}{=}\frac{\partial F(X)}{\partial g},$$

$$h''(0)=\sum_{j_1,j_2=1}^{n}\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_{j_1}\partial X_{j_2}}g_{j_1}g_{j_2}\overset{df}{=}\frac{\partial^2 F(X)}{\partial g^2},$$

....

$$h^{(l)}(0)=\sum_{j_1,j_2,\dots,j_l=1}^{n}\frac{\partial^l F(X)}{\partial X_{j_1}\dots\partial X_{j_l}}g_{j_1}\dots g_{j_l}\overset{df}{=}\frac{\partial^l F(X)}{\partial g^l}$$

Bu formülleri (1.3.17)'de dikkate alırsak

$$F(X+\alpha g)=F(X)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\partial^k}{k!}\frac{\partial^k F(X)}{\partial g^k}+o(X,g;\alpha^l)$$

eşitliğini yazabiliriz.

Şimdi g ye göre düzgünlüğü gösterelim.

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(X,g;\alpha^l)}{\alpha^l}=0 \tag{1.3.18}$$

$$\left|o\left(X,g;\alpha^{l}\right)\right| \le \frac{|\alpha|^{l}}{l!} \max_{t\in[-|\alpha|,|\alpha|]} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_l=1} \left| \frac{\alpha^{l} F(X+tg)}{\partial X_{j_1}\ldots\partial X_{j_l}} - \frac{\alpha^{l} F(X)}{\partial X_{j_1}\ldots\partial X_{j_l}} \right|$$

$F(X)$ fonksiyonunun Ω' kümesinde tüm l. mertebeden kısmi türevlerinin sürekliliğinden (1.3.18)'i yazarız.

Böylece Lemma ispat edilmiştir.

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X^2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_1} \cdots \dfrac{\partial^2 F(X)}{\partial X_1 \partial X_n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_1} \cdots \dfrac{\partial^2 F(X)}{\partial X_n \partial X_n} \end{pmatrix}$$

olduğundan,

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial g^2} = \sum_{j_1,j_2}^{n} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial X_{j_1} \partial X_{j_2}} g_{j_1} g_{j_2} = \left(\frac{\partial^2 F(X)}{\partial X^2} g, g \right) \qquad (1.3.19)$$

eşitliği doğrudur.

Farz edelim ki, $X \in \Omega'$ ve $X + \gamma g \in \Omega', \gamma \in [0,\alpha]$ olsun.(1.3.14)'te $l = 2$ yazarsak (1.3.15) ve (1.3.19) eşitliklerine göre

$$F(X+\alpha g) = F(X) + \alpha\left(\frac{\partial F(X)}{\partial X}, g\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial^2 F(X+\tau g)}{\partial X^2} g, g\right),$$

$$0 < \tau < \alpha$$

bulunur.

2. DİSKRET MİNİMAKS PROBLEMLERİ

2.1.Problemin Tanımlanması:

$f_i(X)$, $I = \{0,1,...,N\}$, $i \in I$ ve $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ olmak üzere tüm n-boyutlu E^n uzayında tanımlı fonksiyonlardır.

$$\mu = \inf_{\{X\}} \max_{i \in I} f_i(X)$$

ile gösterelim. O zaman, öyle X^* noktasının bulunması gerekir ki,

$$\max_{i \in I} f_i(X^*) = \mu$$

olsun.

$$\varphi(X) = \max_{i \in I} f_i(X)$$

şeklinde gösterelim. Bu taktirde verilen problem $\varphi(X)$ fonksiyonunun E^n de minimumunun bulunması problemine dönüşür ve μ aşağıdaki şekilde olur.

$$\mu = \inf_{X \in E^n} \varphi(X)$$

Şimdi biz buna bağlı olarak, maksimum tipli $\varphi(X)$ fonksiyonunun bazı özelliklerini verelim.

Genel olarak $\varphi(X)$ fonksiyonunun X e göre türevi yoktur. Bazı koşullar altında $\varphi(X)$ fonksiyonunun her yönde doğrultu türevi vardır.

$\varphi(X)$ fonksiyonunun stasionar noktalarının bulunması için ardışık yaklaşım metodunu kullanmak daha faydalıdır.

Bu bölümde, $\varphi(X)$ fonksiyonunun minimumunun olabilmesi için gerekli şartlar gösterilecek ve geometrik interpolasyonu verilecektir.

2.2. Maksimum Tipli Fonksiyonların Bazı Özellikleri:

$I = \{0,1,..., N\}$, $i \in I$, $X \in E^n$ olmak üzere $f_i(X)$ fonksiyonları için

$$\varphi(X) = \max_{i \in I} f_i(X)$$

şeklindeki $\varphi(X)$ fonksiyonlarının bazı özelliklerini belirleyelim.

Lemma.2.2.1. Eğer tüm $f_i(X), i \in I$ fonksiyonları X_0 noktasında sürekli ise maksimum tipli $\varphi(X)$ fonksiyonu da X_0 noktasında süreklidir.

İspat:

$f_i(X)$ fonksiyonu X_0 noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır ki $|X - X_0| < \delta$ olduğunda $|f_i(X) - f_i(X_0)| < \varepsilon$ olur. Buna göre,

$$|\varphi(X) - \varphi(X_0)| = \left| \max_{i \in I} f_i(X) - \max_{i \in I} f_i(X_0) \right| \leq \max_{i \in I} \left| f_i(X) - f_i(X_0) \right| < \varepsilon$$

elde edilir.

Böylece $\varphi(X)$ fonksiyonu X_0 noktasında süreklidir.

Lemma.2.2.2. Eğer tüm $f_i(X), i \in I$ fonksiyonları E^n de sürekli ve herhangi bir $X_0 \in E^n$ noktasında

$$\mathrm{M}(X_0) = \{X \in E^n : \varphi(X) \leq \varphi(X_0)\}$$

kümesi sınırlı ise, o zaman öyle X^* noktası vardır ki $\varphi(X)$ fonksiyonu bu noktada minimum değerini alır.

İspat:

Lemma.2.2.1. e göre $\varphi(X)$ E^n de süreklidir. Buradan anlaşılır ki $\mathrm{M}(X_0)$ kümesi kapalıdır. Ayrıca $\mathrm{M}(X_0)$ sınırlı bir küme olduğundan öyle X_0 noktası vardır ki ,

$$\varphi(X^*) = \min_{X \in M(X_0)} \varphi(X)$$

tir. Belirtelim ki ,

$$\min_{X \in M(X_0)} \varphi(X) = \inf_{X \in E^n} \varphi(X)$$

tir. Yukarıdaki iki eşitlik birleştirilirse,

$$\varphi(X^*) = \inf_{X \in E^n} \varphi(X)$$

elde edilir. Böylece eşitlik ispat edilmiş olur.

Lemma.2.2.3. $\Omega \subset E^n$ herhangi bir konveks küme olsun. Eğer tüm $f_i(X), i \in I$ fonksiyonları Ω kümesinde konveks ise $\varphi(X)$ fonksiyonu da Ω kümesinde konvekstir.

İspat:

$X_1, X_2 \in \Omega$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. $f_i(X)$ konveks olduğuna göre,

$$f_i(\alpha.X_1 + (1-\alpha).X_2) \leq \alpha.f_i(X_1) + (1-\alpha).f_i(X_2) \leq$$

$$\leq \alpha.\varphi(X_1) + (1-\alpha).\varphi(X_2) \qquad (2.2.1)$$

dir. Bu eşitsizlik tüm $i \in I$ için doğrudur. Şimdi,

$$\varphi(\alpha.X_1 + (1-\alpha).X_2) \leq \alpha.\varphi(X_1) + (1-\alpha).\varphi(X_2) \qquad (2.2.2)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermemiz gereklidir.

$$\varphi(\alpha.X_1 + (1-\alpha).X_2) = \max f_i(\ \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2\ ) \leq$$

$$\leq \max[f_i(\alpha X_1) + f_i(1-\alpha)X_2] \leq$$

$$\leq \max[f_i(\alpha X_1)] + \max[f_i(1-\alpha)X_2] \leq$$

$$\leq \alpha\varphi(X_1) + (1-\alpha)\varphi(X_2)$$

Böylece $\varphi(X)$ in de Ω kümesinde konveks olduğu gösterilmiş oldu.

Verilmiş bir X için *R(X)* indeksler kümesi

$$\mathrm{R}(X) = \{i \in I : f_i(X) = \varphi(X)\ \}$$

şeklindedir. Böylece R(X) e öyle i indeksleri dahildir ki $f_i(X)$, $\varphi(X)$ e eşit olup maksimum değerini alır.

Lemma.2.2.4. Eğer $f_i(X), i \in \mathrm{I}$ fonksiyonu X_0 noktasında sürekli ise öyle $\alpha_0 > 0$ değeri vardır ki $\alpha \in [0, \alpha_0]$ ve $g \in E_n, \|g\| = 1$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\varphi(X_0 + \alpha.g) = \max_{i \in I} f_i(X_0 + \alpha.g) = \max_{i \in R(X_0)} f_i(X_0 + \alpha.g) \qquad (2.2.3)$$

İspat:

$R(X_0) \neq I$ durumuna bakmak yeterlidir.

$$\beta = \varphi(X_0) - \max_{i \in R(X_0)} f_i(X_0)$$

olsun. $\beta > 0$ olmak üzere X_0 noktasında $f_i(X)$, $i \in I$ fonksiyonunun sürekliliğine göre öyle $\alpha_0 > 0$ vardır ki tüm $g \in E_n, \|g\| = 1$ ve $\alpha \in [0, \alpha_0]$ olduğunda

$$f_i(X_0 + \alpha.g) \geq \varphi(X_0) - \frac{1}{3}\beta \qquad , \quad i \in R(X_0)$$

$$f_i(X_0 + \alpha.g) \leq \varphi(X_0) - \frac{2}{3}\beta \qquad , \quad i \notin R(X_0)$$

bulunur. Buradan (2.2.3) eşitliğinin doğru olduğu açıkça görülür. Böylece Lemma.2.2.4 ispat edilmiş olur.

Tanım.2.2.1. Eğer $\lim\limits_{\alpha \to +0} \dfrac{\varphi(X_0 + \alpha.g) - \varphi(X_0)}{\alpha}$ sonlu limiti varsa, $\varphi(X)$ fonksiyonunun X_0 noktasında $g \in E_n, \|g\| = 1$ yönünde doğrultu türevi vardır denir. Bu limite $\varphi(X)$ fonksiyonunun X_0 noktasında g yönünde doğrultu türevi denir ve $\dfrac{\partial \varphi(X_0)}{\partial g}$ şeklinde gösterilir.

Teorem.2.2.1. Farz edelim ki $f_i(X), i \in I$ fonksiyonu X_0 noktasının herhangi $S_\delta(X_0)$ komşuluğunda sürekli diferensiyellenebilendir.

$$S_\delta(X_0) = \{X : \|X - X_0\| < \delta\} \quad , \quad \delta > 0 .$$

O zaman $\varphi(X)$ fonksiyonunun X_0 noktasında her g yönünde doğrultu türevi vardır.

$$\frac{\partial \varphi(X_0)}{\partial g} = \max_{i \in R(X_0)} \left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X}, g \right) \qquad (2.2.4)$$

(Yukarıdaki eşitliğin sağındaki parantez ifadenin skaler çarpımını ifade etmektedir.)

İspat:

$i \in I$, $\alpha \in (0, \delta)$ ve $g \in E_n, \|g\| = 1$ için

$$f_i(X_0 + \alpha.g) = f_i(X_0) + \alpha\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X}, g \right) + o_i(g; \alpha) \qquad (2.2.5)$$

Burada $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{o_i(g, \alpha)}{\alpha} = 0$ şeklindedir.

Lemma.2.2.4.e göre öyle $0<\alpha_0<\delta$ vardır ki $\alpha\in(0,\alpha_0)$ için

$$\varphi(X_0+\alpha.g)=\max_{i\in R(X_0)}\left\{f_i(X_0)+\alpha\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X},g\right)+o_i(g;\alpha)\right\}\le$$

$$\le\varphi(X_0)+\alpha\max_{i\in R(X_0)}\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X},g\right)+\max_{i\in I}o_i(g;\alpha)$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi (1.2.10) olarak verilen aşağıdaki eşitsizlikleri ele alarak,

$$\max_{i\in I}(\beta_i+\gamma_i)\ge\max_{i\in I}\beta_i+\max_{i\in R}\gamma_i \qquad (2.2.6)$$

$R=\{i:\beta_i=\max_{k\in I}\beta_k\}$ olmak üzere (2.2.5) dikkate alınırsa,

$$\varphi(X_0+\alpha.g)\ge\varphi(X_0)+\max_{i\in R(X_0)}\left\{\alpha\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X},g\right)+o_i(g;\alpha)\right\}\ge$$

$$\ge\varphi(X_0)+\alpha\max_{i\in R(X_0)}\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X},g\right)+\min_{i\in I}o_i(g;\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $\alpha\in(0,\alpha)$ ve $g,\|g\|=1$ için,

$$\min_{i\in I}o_i(g;\alpha)\le\varphi(X_0+\alpha.g)-\varphi(X_0)-\alpha\max_{i\in R(X_0)}\left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X},g\right)\le\max_{i\in I}o_i(g;\alpha)$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizliğin $\alpha>0$ kısmını alıp $\alpha\to+0$ için limit uygulanırsa istenilen elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitlik ispat edilmiş olur.

$$\varphi(X_0+\alpha.g)=\varphi(X_0)+\alpha\frac{\partial\varphi(X_0)}{\partial g}+o(g;\alpha) \qquad (2.2.7)$$

Burada $\lim_{\alpha\to+0}\dfrac{o(g,\alpha)}{\alpha}=0$ şeklindedir.

Örnek.2.2.1: $f_0(x)=\sin x$, $f_1(x)=\cos x$

$$\varphi(X)=\max\{\sin x,\cos x\}$$

olsun. $\varphi(X)$ periyodu 2π olan bir fonksiyon olur. $x\in[0,2\pi]$ dir.

Önce belirtelim ki,

$$R(X)=\begin{cases}\{1\} \;, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right) \quad veya \quad x\in\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right] \\ \{0,1\} \;, & x=\dfrac{\pi}{4} \quad veya \quad x=\dfrac{5\pi}{4} \\ \{0\} \;, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right)\end{cases}$$

şeklindedir. $\varphi(X)$ fonksiyonu süreklidir ama diferensiyellenebilir değildir. Aynı zamanda $\varphi(X)$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$ noktalarında g=(+1) ve g=(-1) yönlerinde doğrultu türevine sahiptir.

Örneğin, $x=\frac{\pi}{4}$ noktasını ele alalım. g=(-1) olduğunda (2.2.4) e dayanarak

$$\frac{\partial\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\partial g}=\max_{i\in R(\frac{\pi}{4})}\left(\frac{df_i\left(\frac{\pi}{4}\right)}{dx},g\right)=\max\left\{-\cos\frac{\pi}{4},\sin\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur. Benzer şekilde $x=\frac{\pi}{4}$ ve g=(+1) alınırsa ,

$$\frac{\partial\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\partial g}=\max_{i\in R(\frac{\pi}{4})}\left(\frac{df_i\left(\frac{\pi}{4}\right)}{dx},g\right)=\max\left\{\cos\frac{\pi}{4},-\sin\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur. Belirtelim ki, $x=\frac{\pi}{4}$ noktasında $\varphi(X)$ fonksiyonu her iki yönde artandır.

Kolaylıkla görülebilir ki genel olarak g=(+1), g=(-1) için

$$\frac{\partial\varphi(X)}{\partial g}=\begin{cases}-g.\sin x \;, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right) \quad veya \quad x\in\left(\dfrac{5\pi}{4},2\pi\right]; \\ \max\left\{g.\cos x,\; -g.\sin x\right\} \;, & x=\dfrac{\pi}{4} \quad veya \quad x=\dfrac{5\pi}{4}; \\ g.\cos x \;, & x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right).\end{cases}$$

şeklindedir.

Şimdi bu kısımda (2.2.7) eşitliğinin genel haline bakalım.

Farz edelim ki $f_i(X)$, $i \in I$, $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonları süreklidir ve X_0 noktasının $\delta > 0$ için $S_\delta(X_0)$ komşuluğu dahil *l.* mertebeden sürekli kısmi türevine sahiptir. Belirtelim ki herhangi bir $\alpha \in (0,\delta)$ ve $g=(g_1,g_2,...,g_n), \|g\|=1$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$f_i(X_0+\alpha.g)=f_i(X_0)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}.\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}+o_i(g;\alpha^l) \qquad (2.2.8)$$

$$\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}=\sum_{j_1,j_2,...,j_k=1}^{n}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial X_{j_1}...\partial X_{j_k}}g_{j_1}...g_{j_k}$$

ve $\lim\limits_{\alpha\to+0}\dfrac{o_i(g,\alpha^l)}{\alpha^l}=0$ olduğunu kabul edersek ,

$$\frac{\partial^0 f_i(X)}{\partial g^0}=f_i(X), \quad i\in I \ ;$$

$$R_0(X,g)=[0,N]$$

$$R_k(X,g)=\left\{i: i\in R_{k-1}(X,g), \frac{\partial^{k-1}f_i(X)}{\partial g^{k-1}}=\max_{j\in R_{k-1}(X,g)}\frac{\partial^{k-1}f_j(X)}{\partial g^{k-1}}\right\}, k\in[1,l]$$

Öyle ki; $R_0(X,g)$ X ve g ye bağlı değildir, $R_1(X,g)$ ise g ye bağlı değildir. Yani

$$R_0(X,g)=R_0 \quad , R_1(X,g)=R(X)$$

şeklindedir. Açıkça görülür ki $R_0\supset R(X)\supset R_2(X,g)\supset ...$ şeklindedir.

Teorem2.2.2. Farz edelim ki $f_i(X), i\in I$ fonksiyonları sürekli ve X_0 noktasının $S_\delta(X_0)$ komşuluğu dahil olmak üzere *l.* mertebeden kısmi türevleri mevcut olsun. O zaman maksimum tipli $\varphi(X)$ fonksiyonunun X_0 noktası civarında $g, \|g\|=1$ yönünde aşağıdaki şekilde ayrışımı doğrudur.

$$\varphi(X_0+\alpha.g)=\varphi(X)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k\varphi(X_0)}{\partial g^k}+o_i(g;\alpha^l)$$

$$\frac{\partial^k\varphi(X_0)}{\partial g^k}=\max_{i\in R_k(X_0,g)}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o_i(g,\alpha)}{\alpha}=0.$$

İspat: (2.2.8) eşitliğinde, her iki tarafa maksimum uygulayarak,

$$\varphi(X_0+\alpha.g)\le\varphi(X_0)+\max_{i\in R(X_0)}\left\{\ \sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k\varphi(X_0)}{\partial g^k}\ \right\}+\max_{i\in R_0}o_i(g;\alpha^l)\qquad(2.2.9)$$

eşitsizliği elde edilebilir.

En küçük $\alpha_1>0,\ \ \alpha_1\le\alpha_0$ sayısı vardır ki $\alpha\in(0,\alpha_1)$ için

$$\max_{i\in R(X_0)}\left\{\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}=\max_{i\in R(X_0)}\left\{\frac{\alpha}{1!}\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial g}+\sum_{k=2}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}$$

$$=\max_{i\in R_2(X_0,g)}\left\{\frac{\alpha}{1!}\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial g}+\sum_{k=2}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}$$

$$=\frac{\alpha}{1!}\max_{i\in R(X_0)}\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial g}+\max_{i\in R_2(X_0,g)}\left\{\sum_{k=2}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}$$

yazılır.

Benzer şekilde devam ederek $\alpha_{l-1}>0,\ \ \alpha_{l-1}\le\alpha_{l-2}$ bulunur ki $\alpha\in(0,\alpha_{l-1})$ için,

$$\max_{i\in R(X_0)}\left\{\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}=\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\max_{i\in R_k(X_0,g)}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}$$

yazılır.

Bu son eşitlik (2.2.9) da yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\varphi(X_0+\alpha.g)\ \le\ \varphi(X_0)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\max_{i\in R_k(X_0,g)}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}+\max_{i\in R_0}o_i(g;\alpha^l)$$

Diğer taraftan (2.2.6) yı dikkate alırsak,

$$\varphi(X_0+\alpha.g)\ \ge\ \varphi(X_0)+\max_{i\in R(X_0)}\left\{\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}\right\}+\min_{i\in R_0}o_i(g;\alpha^l)\ge$$

$$\ge\ \varphi(X_0)+\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\max_{i\in R_k(X_0,g)}\frac{\partial^k f_i(X_0)}{\partial g^k}+\min_{i\in R_0}o_i(g;\alpha^l)$$

bulunur. Böylece $\alpha\in(0,\alpha_{l-1})$ ve her $g,\|g\|=1$ için

$$\min_{i\in R_0} o_i(g;\alpha^l) \le \varphi(X_0+\alpha.g)-\varphi(X_0)-\left\{\sum_{k=1}^{l}\frac{\alpha^k}{k!}\frac{\partial^k\varphi(X_0)}{\partial g^k}\right\} \le \max_{i\in R_0} o_i(g;\alpha^l)$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Teorem ispatlanmıştır.

2.3. Minimaks İçin Gerekli Şartlar:

Farz edelim ki $f_i(X)$, $i \in I$ fonksiyonları E^n de sürekli diferensiyellenebilir ve herhangi X_0 için

$$M(X_0)=\{X \in E_n : \varphi(X) \le \varphi(X_0)\}$$

kümesi sınırlı olsun.

$$\varphi(X)= \max_{i\in I} f_i(X)$$

şeklinde.

Teorem.2.3.1. X^* noktasının $\varphi(X)$ fonksiyonunun minimumu olması için gerek ve yeter şart

$$\inf_{\|g\|=1} \max_{i\in R(X^*)} \left(\frac{\partial f_i(X_0)}{\partial X}, g\right) \ge 0 \qquad (2.3.1)$$

eşitsizliğinin veya

$$\inf_{\|g\|=1} \frac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g} \ge 0 \qquad (2.3.2)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat:

Gereklilik :

Farz edelim ki $X^*, \varphi(X)$ fonksiyonunun minimum noktası olsun, ama (2.3.2) eşitsizliğini sağlamasın. O zaman öyle $g_1 \in E^n, \|g_1\|=1$ vektörü vardır ki

$$\frac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g_1} = -\alpha_1 < 0 \qquad (2.3.3)$$

dır. (2.2.7) eşitliğine göre

$$\varphi\left(X^* + \frac{\alpha}{\|X_0 - X^*\|}(X_0 - X^*)\right) - \varphi(X^*) \le$$

$$\le \left(1 - \frac{\alpha}{\|X_0 - X^*\|}\right)\varphi(X^*) + \frac{\alpha}{\|X_0 - X^*\|}\varphi(X_0) - \varphi(X^*) = \frac{\alpha}{\|X_0 - X^*\|}\left(\varphi(X_0) - \varphi(X^*)\right)$$

olup, buradan da,

$$\frac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g_1} \le \frac{\varphi(X_0) - \varphi(X^*)}{\|X_0 - X^*\|} < 0$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ise (2.3.2) ile çelişir. Böylece teorem ispat edilmiş olur. (2.3.1) ve (2.3.2) eşitsizliğini sağlayan X^* noktasına maksimum tipli $\varphi(X)$ fonksiyonunun E^n de *stasionar noktası* denir.

2.4. Minimaks Problemleri İçin (2.3.1) Gerekli Koşulunun Geometrik Yorumu

Minimaks için gerekli şart olan (2.3.1) e geometrik model verelim. Bunun için verilmiş $X \in E^n$ için aşağıdaki kümeyi oluşturalım.

$$H(X) = \left\{Z \in E^n : Z = \frac{\partial f_i(X)}{\partial X},\ \ i \in R(X)\right\}.$$

$H(X)$ konveks kümesinin örtüsünü $L(X)$ ile gösterelim ve aşağıdaki şekilde belirtelim.

$$L(X) = \left\{Z = \sum_{i \in R(X)} \alpha_i \frac{\partial f_i(X)}{\partial X}\ :\ \alpha_i \ge 0\ ,\ \sum_{i \in R(X)} \alpha_i = 1\right\} \qquad (2.4.1)$$

Ayrıca $L(X)$ konveks kümesi sınırlı ve kapalıdır.

Teorem.2.4.1. $$0 \in L(X^*) \qquad (2.4.2)$$

ifadesi (2.3.1) eşitsizliği ile denktir.

İspat:

Önce (2.3.1) eşitsizliğinden (2.4.2) ifadesinin elde edildiğini gösterelim. Bunun için $0 \notin L(X^*)$ olduğunu farz edelim. O zaman *Ayrılma teoremi*'ne göre öyle $g_0, \|g_0\| = 1$ vektörü ve $\alpha > 0$ değeri bulunur ki, tüm $Z \in L(X^*)$ için

$$\varphi(X^* + \alpha.g_1) = \varphi(X^*) + \alpha\frac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g_1} + o(g_1;\alpha_1) \qquad (2.3.4)$$

eşitsizliği yazılır. Yeteri kadar küçük $\alpha_1 > 0$ değeri için aşağıdaki ilişki yazılabilir.

$$|o(g_1, \alpha_1)| \leq \frac{\alpha}{2}\alpha_1$$

O zaman (2.3.3) ve (2.3.4) eşitsizlikleri birlikte ele alınırsa,

$$\varphi(X^* + \alpha_1.g_1) \;\leq\; \varphi(X^*) - \frac{\alpha}{2}\alpha_1$$

elde edilir. Bu ise X^* noktasının $\varphi(X)$ fonksiyonunun minimumu olması ile çelişir.

Yeterlilik :

Farz edelim ki $\varphi(X)$ fonksiyonu X^* noktasında konveks fonksiyon olsun ve (2.3.2) eşitsizliği sağlansın. O halde X^* noktasının E^n de $\varphi(X)$ fonksiyonunun minimumu olduğunu göstermek gerekir.

Aksini farz edelim. Yani X^*, $\varphi(X)$ in minimumu olmasın. O zaman öyle bir X_0 noktası vardır ki $\varphi(X_0) < \varphi(X^*)$ dır. $\varphi(X)$ konveks olduğundan $\alpha \in [0,1]$ için

$$\varphi(X^* + \alpha.(X_0 - X^*)) = \varphi((1-\alpha).X^* + \alpha.X_0) \leq$$

$$\leq (1-\alpha).\varphi(X^*) + \alpha.\varphi(X_0) \qquad (2.3.5)$$

$$g_1 = \frac{X_0 - X^*}{\|X_0 - X^*\|} \;,\; \|g\| = 1$$

ve $\dfrac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g_1}$ türevini

$$\frac{\partial\varphi(X^*)}{\partial g_1} = \lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha}\left[\varphi\left(X^* + \frac{\alpha}{\|X_0 - X^*\|}(X_0 - X^*)\right) - \varphi(X^*)\right]$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.5) e göre $0 < \alpha < \|X_0 - X^*\|$ olur. O halde

$$\left(Z, g_0\right) \le -\alpha < 0$$

olur.

$H(X^*) \subset L(X^*)$ olduğundan son eşitsizlikten faydalanarak

$$\max \left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial X}, g_0 \right) \le -\alpha < 0$$

yazarız. Bu ise (2.3.1) eşitsizliği ile çelişir.

Şimdi de (2.4.2) ifadesinden (2.3.1) eşitsizliğinin bulunduğunu gösterelim. Bunun için aksini farz edelim. Yani (2.3.1) eşitsizliği sağlanmasın. O zaman $g_0, \|g_0\| = 1$ ve $\alpha > 0$ değerlerine karşılık tüm $i \in R(X^*)$ için

$$\left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial X}, g_0 \right) \le -\alpha < 0 \qquad (2.4.3)$$

yazılır.

$\forall \; Z \in L(X^*)$ vektörünü ele alalım. (2.4.3) eşitsizliğinden ve $L(X^*)$ kümesinin tanımından faydalanarak,

$$(Z, g_0) = \left(\sum_{i \in R(X^*)} \alpha_i \frac{\partial f_i(X^*)}{\partial X}, g_0 \right)$$

$$= \sum_{i \in R(X^*)} \alpha_i \left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial X}, g_0 \right) \le -\alpha . \sum_{i \in R(X^*)} \alpha_i = -\alpha < 0$$

$(Z, g_0) < 0$ eşitsizliği elde edilir. O zaman Z=0 noktası $L(X^*)$ a ait olmaz. Bu ise (2.4.2) ile çelişir.

Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Sonuç.2.4.1. $\varphi(X)$ fonksiyonunun X^* noktasında minimuma sahip olması için gerek ve yeter şart,

$$0 \in L(X^*)$$

olmasıdır.

Gerçekten de (2.4.2) şartı, sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonun minimumu için klasik gerekli şartın genelleştirilmesidir. Bu halde,

$$\varphi(X) = f_0(X)$$

olur. $H(X)$ ve $L(X)$ kümeleri tek $\left\{\frac{\partial f_0(X)}{\partial X}\right\}$ noktasından oluşmaktadır. Bazen

$$\frac{\partial f_0(X^*)}{\partial X} = 0 \qquad (2.4.4.)$$

şeklinde gösterilir.

Belirlenen her $g \in E^n$ için, X elemanına ait bir fonksiyon oluşturalım.

$$\chi(g) = \max_{i \in R(X)} \left(\frac{\partial f_i(X)}{\partial X}, g \right).$$

Maksimum fonksiyonun bilinen özelliklerine göre $\chi(g)$ tüm E^n uzayında sürekli konveks fonksiyondur. Ayrıca bellidir ki herhangi bir $\lambda \geq 0$ için

$$\chi(\lambda.g) = \lambda.\chi(g) \qquad (2.4.5)$$

dir.

$$S^0 = \{g \in E_n : \|g\| = 1\}$$

olmak üzere $g \in S^0$ olduğunda $\chi(g)$ fonksiyonuna alalım. S^0 sınırlı konveks küme olduğundan $\chi(g)$, S^0 da minimum değer alır. Buradan (2.3.1) eşitsizliğinin sol tarafındaki infumumu alarak eşitsizliği aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\min_{\|g\|=1} \max_{i \in R(X^*)} \left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial X}, g \right) \geq 0 \qquad (2.3.1')$$

Lemma.2.4.1. Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\chi(g) = \max_{Z \in L(X)} (Z, g) \qquad (2.4.6)$$

Burada kullanılan *L(X)*, (2.4.1) ile verilen kümedir.

İspat:

$$\chi(g) = \max_{Z \in H(X)} (Z, g)$$

olduğu bellidir. $H(X) \subset L(X)$ olduğuna göre

$$\max_{Z \in H(X)} (Z, g) \le \max_{Z \in L(X)} (Z, g)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\chi(g) \le \max_{Z \in L(X)} (Z, g) \qquad (2.4.7)$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan $\forall Z' \in L(X)$ aşağıdaki gibi verilebilir.

$$Z' = \sum_{i \in R(X)} \alpha_i' Z_i \quad ; \; Z_i \in H(X) \; ; \; \alpha_i' \ge 0 \; ; \; \sum_{i \in R(X)} \alpha_i' = 1.$$

Buna göre,

$$(Z', g) = \sum_{i \in R(X)} \alpha_i' (Z_i, g) \le \max_{Z \in H(X)} (Z, g). \sum_{i \in R(X)} \alpha_i' = \max_{Z \in H(X)} (Z, g)$$

olur. Öyle ki bu eşitsizlik $\forall Z' \in L(X)$ için doğrudur. O zaman,

$$\max_{Z \in L(X)} (Z, g) \le \max_{Z \in H(X)} (Z, g) \qquad (2.4.8)$$

sağlanır. Buradan,

$$\max_{Z \in L(X)} (Z, g) \le \chi(g) \qquad (2.4.8')$$

bulunur. $(2.4.8)$ ve $(2.4.8')$ eşitsizlikleri birleştirilirse,

$$\chi(g) = \max_{Z \in L(X)} (Z, g)$$

eşitliği elde edilir. Böylece Lemma.2.4.1. ispat edilmiş olur.

Şimdi bu kısımda,

$$\psi(X) = \min_{\|g\|=1} \max_{i \in R(X)} \left(\frac{\partial f_i(X)}{\partial X}, g \right)$$

fonksiyonunu ele alalım. $\psi(X)$ fonksiyonunun yardımıyla minimaks için gerekli şart aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\psi(X^*) \ge 0 \qquad (2.4.9)$$

Farz edelim ki $\chi(X, g) = \chi(g)$ olsun. Lemma.2.3.1. e dayanılarak

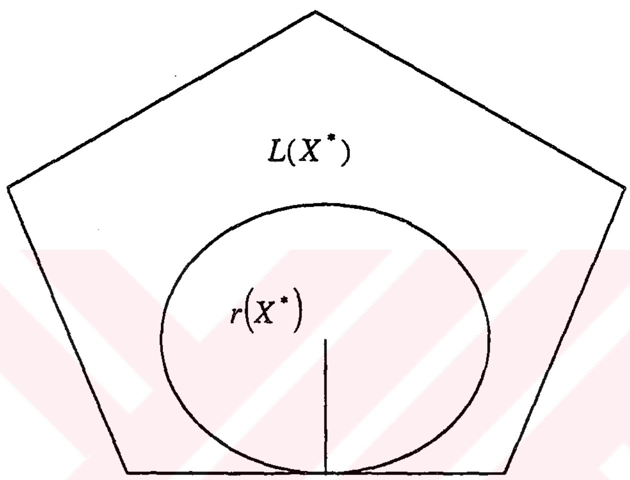
$$\psi(X) = \min_{\|g\|=1} \chi(X, g) = \min_{\|g\|=1} \max_{Z \in L(X)} (Z, g) \qquad (2.4.10)$$

eşitliği sağlanır.

Lemma.2.4.2. Eğer X^*, maksimum tipli $\varphi(X)$ fonksiyonunun stasionar noktası ise yani $\varphi(X^*) \geq 0$ ise

$$\varphi(X^*) = r(X^*)$$

olur. Burada $r(X^*)$, $L(X^*)$ şeklinde yazılabilen merkezi koordinat başlangıcında olan kürenin *maksimum yarıçapıdır.*



(Şekil.2.1)

İspat: $\bar{S}_\delta$ ile merkezi koordinat başlangıcında olan $\delta \geq 0$ yarıçaplı küreyi belirleyelim.

$$\bar{S}_\delta = \{Z \in E_n : \|Z\| \leq \delta\}$$

Eğer $\bar{S}_\delta \subset L(X^*)$ ise herhangi bir $g, \|g\| = 1$ için

$$S = \max_{Z \in \bar{S}_\delta}(Z, g) \leq \max_{Z \in L(X^*)}(Z, g)$$

tir. Bu son eşitsizlikten ve (2.4.10) dan $\delta \leq \psi(X^*)$ dır. Yani

$$r(X^*) = \psi(X^*) \tag{2.4.11}$$

dir. Buradan da,

$$\bar{S}_{\psi(X^*)} \subset L(X^*) \tag{2.4.12}$$

elde edilir.

Aksini farz edelim. O zaman öyle $Z_0 \in \bar{S}_{\psi(X^*)}$ vardır ki,

$$\|Z_0\| \leq \psi(X^*) \qquad (2.4.13)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrılma teoremine göre $g_0, \|g\| = 1$ ve $\alpha > 0$ değerleri için ve istenilen $Z \in L(X^*)$ için

$$(Z - Z_0, g) \leq -\alpha$$

dır. Buradan (2.4.13) e göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\max_{Z \in Z^*}(Z, g_0) \leq (Z_0, g_0) - \alpha \leq \psi(X^*) - \alpha .$$

Böylece (2.4.12) ve yukarıdaki son eşitsizliği birlikte kullanılarak

$$\psi(X^*) \leq r(X^*) \qquad (2.4.14)$$

eşitsizliği bulunur. (2.4.11) ve (2.4.14) birleştirilirse Lemma.2.4.2. ispat edilmiş olur.

$\psi(X) < 0$ şartını sağlayan $X \in E^n$ noktasını ele alalım. Bu halde X stasionar nokta değildir ve Teorem 2.4.1. e göre $0 \in L(X)$ tir.

Lemma.2.5.1. Eğer $\psi(X) < 0$ ise o zaman ,

$$\psi(X) = \max_{Z \in L(X)} (Z, -\frac{Z^*}{\|Z^*\|}) = -\|Z^*\|$$

tir. $Z^*, L(X)$ kümesinin koordinat başlangıcına yakın olan bir noktasıdır.

İspat: $Z \in L(X)$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$(Z, Z^*) \geq (Z^*, Z^*) .$$

$$\bar{g} = -\frac{Z^*}{\|Z^*\|}, \|g\| = 1$$

alalım. O zaman $Z \in L(X)$ için

$$(Z, \bar{g}) = -\frac{1}{\|Z^*\|}(Z, Z^*) \leq -\frac{1}{\|Z^*\|}(Z^*, Z^*) = -\|Z^*\|$$

yazılır. Buradan,

$$\max_{Z\in L(X)}(Z,\bar{g}) = -\|Z^*\| \tag{2.5.1}$$

$g, \|g\| = 1$ için (2.5.1) e göre

$$-\|Z^*\| \le (Z^*, g) \le \max_{Z\in L(X)}(Z, g)$$

yani,

$$\max_{Z\in L(X)}(Z,\bar{g}) = \min_{\|g\|=1}\max_{Z\in L(X)}(Z,g) = \psi(X) \tag{2.5.2}$$

eşitliği elde edilir. (2.5.1), (2.5.2) ve $\bar{g}$ vektörünün birleştirilmesiyle istenilen elde edilmiş olur.

(2.5.2) eşitliğini aşağıdaki gibi de yorumlayabiliriz .

$\chi(g)$ fonksiyonu $X \in E^n$, $\psi(X) < 0$ için $g = \bar{g}$, tek S^0 küresinde minimum olur. Aşağıdaki Lemma bu yorumu tam olarak verir.

Lemma.2.5.2. Eğer $\psi(X) < 0$ ise $\chi(X, g)$ fonksiyonu tek $g_0 \in S^0$ noktasında minimum değerini alır.

İspat: $X \in E^n$ için $\chi(X,g) = \chi(g)$ yazalım. Farz edelim ki öyle iki $g_1 \neq g_2$, $\|g_1\| = \|g_2\| = 1$ vektörleri vardır ki

$$\chi(g_1) = \chi(g_2) = \min_{\|g\|=1}\chi(g) = \psi(X)$$

eşitliği sağlanır. Bu halde,

$$(g_1, g_2) < 1 \tag{2.5.3}$$

dir. E^n de $\chi(g)$ fonksiyonunun konkavlığına göre $\forall\alpha \in (0,1)$ için

$$\chi(\alpha g_1 + (1-\alpha)g_2) \le \alpha\chi(g_1) + (1-\alpha)\chi(g_2) = \psi(X) \tag{2.5.4}$$

olur.

Belirtelim ki; $\alpha_0 \in (0,1)$ için $\beta = \|\alpha_0 g_1 + (1-\alpha)g_2\| > 0$ olmak üzere, (2.5.3) e göre

$$\beta^2 = \|\alpha_0 g_1 + (1-\alpha)g_2\|^2 = \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1-\alpha_0)(g_1,g_2) + (1-\alpha)^2 < \alpha_0^2 + 2\alpha_0(1-\alpha_0) + (1-\alpha_0)^2 = 1$$

yani $\beta^2 < 1$ olup $0 < \beta < 1$ dir.

$$g_0 = \frac{1}{\beta}(\alpha_0 g_1 + (1-\alpha_0)g_2), \|g_0\| = 1,$$

$\frac{1}{\beta} > 1$ ve $\psi(X) < 0$ olduğu için (2.4.5) ve (2.5.4) e göre,

$$\chi(g_0) = \frac{1}{\beta}\chi(\alpha_0 g_1 + (1-\alpha)g_2) \leq \frac{1}{\beta}\psi(X) < \psi(X)$$

eşitliğinden $\chi(g_0) < \psi(X)$ elde edilir ki bu mümkün değildir. Böylece Lemma.2.5.2. ispat edilmiş olur.

3. SÜREKLİ MİNİMAKS PROBLEMLERİ

3.1. Problemin Tanımı:

Ω', E^n uzayında bir açık küme olsun. G, E^m de kapalı sınırlı küme, $F(X,Y)$ fonksiyonu $\Omega \times G$ kümesinde X e göre sürekli ve sürekli diferensiyellenebilir fonksiyondur. $\Omega \subset \Omega'$ kapalı konveks kümesinde

$$\varphi(X) = \max_{Y \in G} F(X,Y)$$

fonksiyonunun minimumunun bulunması problemine **3.2.** ve **3.3.** te $\varphi(X)$ fonksiyonunun yöne göre doğrultu türevinin mevcut olması, minimaks için gerek şartlar, onların geometrik modelleri ve bazı değerler hakkında bilgiler verilecektir.

3.2. Esas Teoremler

$F(X,Y)$, $X \in \Omega'$, $Y \in G$ fonksiyonu verilsin ve Ω', E^n de açık küme, G ise E^m de sınırlı kapalı küme olsun.

$F(X,Y)$ fonksiyonu değişenlerin tümüne göre $\Omega' \times G$ kümesinde ve $\dfrac{\partial F(X,Y)}{\partial X}$ fonksiyonu sınırlı olsunlar.

Şimdi,

$$\varphi(X) = \max_{Y \in G} F(X,Y)$$

şeklindeki $\varphi(X)$ fonksiyonunun bazı basit özelliklerini sıralayalım.

I. $\varphi(X)$ fonksiyonu Ω' kümesinde sınırlıdır.

II. $Y \in G$ için $F(X,Y)$ fonksiyonu $\Omega \subset \Omega'$ konveks kümesinde X e göre konvekstirse, $\varphi(X)$ fonksiyonu da Ω' kümesinde konvekstir.

III. Eğer $\Omega \subset \Omega'$ kapalı kümedirse ve herhangi $X_0 \in \Omega$ için

$$M(X_0) = \{X \in \Omega \mid \varphi(X) \le \varphi(X_0)\}$$

kümesi sınırlı ise, $\varphi(X)$ fonksiyonu Ω' kümesinde kendi infimum değerini alır. Yani, öyle $X^* \in \Omega$ noktası vardır ki,

$$\varphi(X^*) = \inf_{X \in \Omega} \varphi(X)$$

veya

$$\max_{Y \in G} F(X^*, Y) = \inf_{X \in \Omega} \max_{Y \in G} F(X, Y)$$

dir. Belirlenmiş $X \in \Omega'$ için

$$R(X) = \{Y \in G \mid F(X,Y) = \varphi(X)\}$$

kümesini alalım. $R(X) \subset G$ kümesi E^m de sınırlı kapalı küme olduğu açıktır.

Teorem.3.2.1. $\varphi(X)$ fonksiyonu her bir $X \in \Omega'$ noktasında herhangi $g \in E^n, \|g\| = 1$ yönünde doğrultu türevine sahiptir, yani

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial g} = \max_{Y \in R(X)} \left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X}, g \right) \tag{3.2.1}$$

dir. Teoremin ispatı için aşağıdaki iki lemmadan faydalanacağız.

Lemma.3.2.1. Aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\lim_{\alpha \to +0} \max_{Y \in R(X+tg)} \min_{V \in R(X)} \|Y - V\| = 0$$

İspat:

Aksini farz edelim. O halde pozitif sayıların sıfıra yakınsayan $\{\alpha_k\}$ dizisi ve öyle $\alpha > 0$ değeri vardır ki,

$$\max_{Y \in R(X+\alpha_k g)} \min_{V \in R(X)} \|Y - V\| \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. $Y_k \in R(X + \alpha_k g)$ noktalarını belirleyelim. Bu noktalar için

$$\min_{V \in R(X)} \|Y_k - V\| \geq 0 \tag{3.2.2}$$

olur. Tüm Y_k noktaları G kümesine ait olduğu için hesap edebiliriz ki, $\{Y_k\}$ dizisi yakınsaktır. Eşitlikte limite geçersek

$$F(X + \alpha_k g, Y_k) = \varphi(X + \alpha_k g)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$F(X, Y^*) = \varphi(X)$$

Böylece $Y^* \in R(X)$ olur

$$0 \le \min_{V \in R(X)} \|Y_k - V\| \le \|Y_k - Y^*\|$$

eşitsizliğini yazalım. Buradan

$$\lim_{k \to \infty} \min_{V \in R(X)} \|Y_k - V\| = 0$$

bulunur. Bu ise (3.2.2) ye aykırıdır. Böylece Lemma.3.2.2. ispat edilmiştir.

Bu lemma aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

Herhangi bir $\delta > 0$ sayısı için, öyle $\alpha_0 > 0$ sayısı vardır ki, her $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ve $Y \in R(X + \alpha.g)$ için $V \in R(X)$ olmak üzere,

$$\|Y - V\| < \delta$$

olur.

Aşağıdaki lemma için $Q(X, \alpha) = R(X + \alpha g) \cup R(X)$ kümesini oluşturalım.

Lemma.3.2.2. $g \in E_n, \|g\| = 1$ elemanına göre düzenlenmiş olan aşağıdaki limit ilişkisi doğrudur.

$$\lim_{\alpha \to +0} \left\{ \max_{Y \in Q(X,\alpha)} \left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X}, g \right) - \max_{Y \in R(X)} \left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X}, g \right) \right\} = 0 \qquad (3.2.3)$$

İspat:

Tüm $\alpha > 0$ için

$$Q(X, \alpha) \supset R(X)$$

(3.2.3) formülünde parantezdeki ifadeler negatif değildir. $\delta > 0$ alalım. O halde öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $\|Y' - Y\| < \delta$ eşitsizliğinden $(Y, Y' \in G)$

$$\left| \left(\frac{\partial F(X,Y')}{\partial X}, g \right) - \left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X}, g \right) \right| < \delta$$

elde edilir. Lemma.3.2.1 e göre seçilmiş $\delta > 0$ için $\alpha_0 > 0$ vardır ki, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ ve $Y \in Q(X, \alpha)$ için $V \in R(X)$ var ki,

$$\|Y - V\| < \delta$$

olsun.

$\alpha \in (0, \alpha_0)$ belirleyelim. Farz edelim ki, $Y_\alpha \in Q(X, \alpha)$ öyle noktadır ki,

$$\max_{Y\in Q(X,\alpha)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)=\left(\frac{\partial F(X,Y_\alpha)}{\partial X},g\right)$$

olur. $V_\alpha \in R(X)$ ile

$$\|Y_\alpha - V_\alpha\| < \delta$$

eşitsizliğini sağlayan noktayı belirtelim.

g ye göre düzgün olan

$$0\le \max_{Y\in Q(X,\alpha)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)-\max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)\le\left(\frac{\partial F(X,Y_\alpha)}{\partial X},g\right)-\left(\frac{\partial F(X,V_\alpha)}{\partial X},g\right)<\delta$$

eşitsizliği yazılarak Lemma.3.2.3. ispat edilmiş olur.

Teorem.3.2.1 in ispatı:

İlk olarak belirtelim ki,

$$F(X+\alpha g,Y)=F(X,Y)+\alpha\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)+o(Y,g;\alpha)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(Y,g;\alpha)}{\alpha}=0$$

olup bu limit $Y\in G$ ve $\|g\|=1$, g ye göre düzgündür.

Buradan ve $Q(X,\alpha)$ tanımından aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$\varphi(X+\alpha g)\overset{d.f.}{=}\max_{Y\in G}F(X+\alpha g,Y)=\max_{Y\in R(X+\alpha g)}F(X+\alpha g,Y)\le\max_{Y\in Q(X,\alpha)}F(X+\alpha g,Y)$$

$$\le\max_{Y\in Q(X,\alpha)}F(X,Y)+\alpha\max_{Y\in Q(X,\alpha)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)+\max_{Y\in G}o(X,g;\alpha) \tag{3.2.4}$$

$$\max_{\|g\|=1}\ \max_{Y\in G}\ |o(Y,g;\alpha)|=o(\alpha)$$

olsun. Açıktır ki,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(\alpha)}{\alpha}=0,\ \max_{Y\in Q(X,\alpha)}F(X,Y)=\varphi(X)$$

tir. (3.2.4) e göre aşağıdaki eşitsizliği yazarız.

$$\varphi(X+\alpha g)-\varphi(X)\le\alpha\max_{Y\in Q(X,\alpha)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)+o(\alpha)$$

Lemma.3.2.2 yi kullanırsak

$$\varphi(X+\alpha g)-\varphi(X)\leq \alpha \max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)+o(\alpha) \qquad (3.2.5)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tilde{o}(\alpha)}{\alpha}=0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\varphi(X+\alpha g)\geq \max_{Y\in G}\left[F(X,Y)+\alpha\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)\right]-\max_{Y\in G}|o(Y,g;\alpha)|$$
$$\geq \max_{Y\in R(X)}\left[F(X,Y)+\alpha\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)\right]-o(\alpha)$$
$$=\varphi(X)+\alpha \max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)-o(\alpha)$$

olup,

$$\varphi(X+\alpha g)-\varphi(X)\geq \alpha \max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)-o(\alpha) \qquad (3.2.6)$$

bulunur. (3.2.5) ve (3.2.6) dan,

$$\alpha \max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)-o(\alpha)\leq \varphi(X+\alpha g)-\varphi(X)\leq$$

$$\leq \alpha \max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)+\tilde{o}(\alpha). \qquad (3.2.7)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte limit durumuna geçilirse,

$$\frac{\partial\varphi(X)}{\partial g}\overset{d.f.}{=}\lim_{\alpha\to +0}\frac{1}{\alpha}[\varphi(X+\alpha g)-\varphi(\alpha)]=\max_{Y\in R(X)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X},g\right)$$

olduğundan teorem ispat edilmiş olur. Yani (3.2.7)'ye göre aşağıdaki formül ispat edilmiş olur.

$$\varphi(X+\alpha g)=\varphi(X)+\alpha\frac{\partial\varphi(X)}{\partial g}+o(g;\alpha) \qquad (3.2.8)$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(g;\alpha)}{\alpha}=0$$

Şimdi de $\varphi(X)$ fonksiyonunun $\Omega \in \Omega'$ kapalı konveks kümesinde minimumunun bulunması problemini inceleyelim.

Teorem.3.2.2. $\varphi(X)$ fonksiyonunun $X^* \in \Omega$ noktasında minimum değerine sahip olması için gerek şart, $\varphi(X)$ fonksiyonu konveks olduğunda ise yeter şart,

$$\inf_{X \in \Omega} \max_{Y \in R(X^*)} \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z - X^* \right) = 0 \tag{3.2.9}$$

olmasıdır.

İspat:

Gereklilik:

Farz edelim ki, $\varphi(X)$ fonksiyonu Ω kümesinde, $X^* \in \Omega$ noktasında minimal değerini alsın yani

$$\varphi(X^*) = \min_{X \in \Omega} \varphi(X) \tag{3.2.10}$$

olsun ama (3.2.9) şartı sağlanmasın. O zaman öyle $Z_1 \in \Omega$ noktası bulunur ki,

$$\max_{Y \in R(X^*)} \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \overset{d.f.}{=} -\varepsilon < 0 \tag{3.2.11}$$

olur. Şimdi $\tilde{R}$ ile

$$\left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \geq -\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.12}$$

eşitsizliğini sağlayan kümeyi gösterelim.

Açıktır ki, $\tilde{R}$ boş kümedir veya kompakt (E^n de sınırlı kapalı) kümedir.

Önce farz edelim ki, $\tilde{R}$ kompakttır. (3.2.11) ve (3.2.12) ilişkilerine göre $\tilde{R}$, $R(X^*)$ ile ortak noktaya sahip değildir. Buna göre

$$\rho \overset{d.f.}{=} \max_{Y \in \tilde{R}} F(X^*, Y) < \varphi(X^*) \tag{3.2.13}$$

$$X(\lambda) = X^* + \lambda(Z_1 - X^*)$$

yazarsak, $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğunda Ω nın konveksliğinden $X(\lambda) \in \Omega$ alınır.

$$K = \max_{0 \le \lambda \le 1} \max_{Y \in G} \left| \left(\frac{\partial F(X(\lambda), Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \right|$$

olsun.

Açıktır ki, K sonlu sayıdır. $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ vardır ki, $\|X(\lambda) - X^*\| < \delta$ eşitsizliğinden, $Y \in G$ ye göre düzgün olan

$$\left| \left(\frac{\partial F(X(\lambda), Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) - \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \right| \le \frac{\varepsilon}{4}$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuçta $h = \varphi(X^*) - \rho$ yazalım.

$$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{\delta}{\|Z_1 - X^*\|}, \frac{h}{2k}, 1 \right\} \qquad 0 \le \lambda_0 \le 1$$

Gösterelim ki, $\varphi(X(\lambda_0)) \le \varphi(X^*)$ dir. Bu eşitsizlik (3.2.10) a aykırıdır. Aynı yöntemle (3.2.9) gerek şartını, $\tilde{R}$ boş olmayan küme olmak üzere ispat edelim.
$\forall Y \in G$ için *Newton – Leibnitz* formülünü yazalım.

$$F(X(\lambda_0), Y) = F(X^*, Y) + \int_0^{\lambda_0} \left(\frac{\partial F(X(t), Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) dt \qquad (3.2.14)$$

farz edelim ki, $Y \in \tilde{R}$ dir. O zaman (3.2.13), (3.2.14) ve λ_0 ın tanımından aşağıdaki eşitsizliği yazarız.

$$F(X(\lambda_0), Y) \le \varphi(X^*) - h + k\lambda_0 \le \varphi(X^*) - \frac{h}{2} .$$

Farz edelim ki, $Y \in G / \tilde{R}$ dir. O halde

$$F(X(\lambda_0), Y) = F(X^*, \lambda) + \lambda_0 \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) +$$
$$+ \int_0^{\lambda_0} \left[\left(\frac{\partial F(X(t), Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) - \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z - X^* \right) \right] dt$$

(3.2.12) ve λ_0 ın seçilmesi yöntemine göre

$$F(X(\lambda_0), Y) \le \varphi(X^*) - \lambda_0 \frac{\varepsilon}{2} + X_0 \frac{\varepsilon}{4} = \varphi(X^*) - \frac{\lambda_0 \varepsilon}{4} \qquad (3.2.15)$$

tür ve böylece

$$\max_{Y \in G} F(X(\lambda_0), Y) < \varphi(X^*) \qquad (3.2.16)$$

olur. Bu ise (3.2.10) a aykırıdır. Eğer $\widetilde{R}$ boş küme ise, o zaman tüm $Y \in G$ için sağlanır. Bu ise (3.2.16) yı verir. Böylece gereklilik tam olarak gösterilmiştir.

Yeterlilik:

Farz edelim ki, $X^* \in \Omega$ için (3.2.9) doğrudur ve $\varphi(X)$, Ω kümesinde konvekstir. Yani $X_1, X_2 \in \Omega$ için, $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğunda

$$\varphi(X_1 + \lambda(X_2 - X_1)) \leq \varphi(X_1) + \lambda[\varphi(X_2) - \varphi(X_1)] \qquad (3.2.17)$$

dir. Aşağıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\varphi(X^*) = \min_{X \in \Omega} \varphi(X)$$

Bunun için aksini farz edelim. O zaman öyle $Z_1 \in \Omega$ vektörü vardır ki,

$$\varphi(Z_1) < \varphi(X^*)$$

olur. Ayrıca

$$X(\lambda) = X^* + \lambda(Z_1 - X^*) \ , \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

ve

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\varphi(X^*) - \varphi(Z_1)] > 0$$

olsun. $\varepsilon > 0$ için öyle $\delta > 0$ bulunur ki, $\|X(\lambda) - X^*\| \leq \delta$ için,

$$\left| \left(\frac{\partial F(X(\lambda), Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) - \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \right| \leq \varepsilon$$

ifadesi yazılabilir.

$$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{\delta}{\|Z_1 - X^*\|} \ , \ 1 \right\} \ , \ 0 \leq \lambda_0 \leq 1$$

olsun ve (3.2.14) eşitliğini aşağıdaki gibi yazalım,

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) = \left\{ \begin{array}{l} F(X(\lambda_0), Y) - F(X^*, Y) - \\ - \int_0^{\lambda_0} \left[\left(\frac{\partial F(X(t), Y)}{\partial X}, Z_1 - Z^* \right) - \left(\frac{\partial F(X^*, Y)}{\partial X}, Z_1 - X^* \right) \right] dt \end{array} \right\}$$

$Y \in R(X^*)$ için (3.2.17) ve ε un seçilmesinden

$$\lambda_0\left(\frac{\partial F(X^*,Y)}{\partial X}, Z_1 - X^*\right) \le \varphi(X(\lambda_0)) - \varphi(X^*) + \varepsilon\lambda_0 \le \lambda_0[\varphi(Z_1) - \varphi(X^*)] + \varepsilon\lambda_0 = -\varepsilon\lambda_0$$

olur. Demek ki,

$$\max_{Y \in R(X^*)}\left(\frac{\partial F(X^*,Y)}{\partial X}, Z_1 - X^*\right) \le -\varepsilon < 0$$

dir. Bu ise (3.2.9) a aykırıdır.

Eğer $\Omega = E^n$ ise, (3.2.9) ilişkisi aşağıdaki eşitsizliğe denktir.

$$\min_{\|g\|=1} \max_{Y \in R(X^*)}\left(\frac{\partial F(X^*,Y)}{\partial X}, g\right) \ge 0$$

Teorem.3.2.3. Eğer herhangi $X_0 \in \Omega$ noktası ve herhangi $Q \subset G$ kapalı kümesi için

$$\inf_{Z \in \Omega} \max_{Y \in Q}\left(\frac{\partial F(X_0,Y)}{\partial X}, Z - X_0\right) \overset{d.f.}{=} -a \le 0 \qquad (3.2.18)$$

eşitsizliği sağlanırken $F(X,Y)$ fonksiyonunun tüm $Y \in Q$ için X e göre Ω da kısmi türevi süreklidir. O halde,

$$\min_{Y \in Q} F(X_0,Y) - a \le \inf_{X \in \Omega} \varphi(X) \le \varphi(X_0)$$

olur.

Sonuç 3.2.1. Eğer teoremin şartlarında $Q \subset R(X_0)$ ve $a = 0$ ise, o halde

$$\inf_{X \in \Omega} \varphi(X) = \varphi(X_0)$$

olur. Yani X_0, $\varphi(X)$ fonksiyonunun Ω kapalı konveks kümesinde minimum noktasıdır.

Sonuç 3.2.2. Eğer $\Omega = E^n$ ve $a = 0$ ise, (3.2.18) aşağıdaki şart ile denktir.

$$\min_{\|g\|=1} F(X_0,Y) \le \inf_{X \in E_n} \varphi(X) \le \varphi(X_0)$$

3.3. Minimaks İçin Gerek Şartın Geometrik Modeli:

$X \in \Omega$ noktasını alalım. Farz edelim ki, önceki gibi

$$\Gamma(X)=\{V=\lambda(Z-X) \mid \lambda>0, Z\in\Omega\}$$

olsun. $\Gamma^{-}(X)$ ile Ω kümesinin X noktasında tüm yönlerde koniği işaretleyelim, $\Gamma^{+}(X)$ ile $\Gamma^{-}(X)$'e eşlenik koniği işaretleyelim. Yine önceki gibi,

$$H(X)=\left\{Z=\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X} \mid Y\in R(X)\right\}$$

olsun. $H(X)$ in sınırlı kapalı küme olduğu bellidir. $L(X)$ ile $H(X)$ kümesinin noktalarının oluşturduğu konveks örtüyü gösterelim.

$$L(\mathrm{X})=\left\{Z=\sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k Z_k \mid Z_k\in \mathrm{H}(\mathrm{X}), \alpha_k\geq 0, \sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k=1, \tau\in\mathrm{N}\right\}$$

$L(X)$ sınırlı kapalı konveks kümedir.

Teorem 3.3.1. (3.2.9) eşitliği aşağıdaki ifadeye denktir.

$$L(X^{*})\cap\Gamma^{+}(X^{*})\neq\varnothing \tag{3.3.1}$$

İspat:

Gösterelim ki, (3.2.9) dan (3.3.1) alınır. Farz edelim ki, (3.2.9) eşitliği sağlanır. Ama

$$L(X^{*})\cap\Gamma^{+}(X^{*})=\varnothing$$

olsun. O zaman *Ayrılma Teoremi*'ne göre öyle $V_0\in\Gamma^{+}(X^{*})=\Gamma^{-}(X^{*})$ vektörü vardır ki,

$$\max_{Z\in L(X^{*})}(V_0,Z)\overset{d.f.}{=}-a<0$$

(V,Z) fonksiyonu V'ye göre sürekli ve sonuncu eşitsizlik $Z\subset L(X^{*})$ ye göre düzgündür. Buna göre $V_0\in\Gamma^{-}(X^{*})$ için $V_1=\lambda_1(X_1-X^{*})\subset\Gamma(X^{*})$ vektörü göstermek olur ki,

$$\max_{Z\in L(X^{*})}(V_1,Z)\leq-\frac{\alpha}{2}$$

dir. Buradan,

$$\max_{Z\in L(X^*)}(Z, X_1 - X^*) \le -\frac{\alpha}{2\lambda_1}$$

elde edilir. Özel olarak

$$\max_{Y\in R(X^*)}\left(\frac{\partial F(X^*,Y)}{\partial X}, X_1 - X^*\right) \le -\frac{\alpha}{2\lambda_1}$$

yazılır. Bu ise (3.2.9) a aykırıdır.

Şimdi de, (3.3.1) den (3.2.9) un elde edilebilirliğini gösterelim. Bunun için aksini farz edelim. O zaman öyle $V_0 \in \Gamma(X^*) \subset \Gamma^-(X^*)$ vektörü vardır ki,

$$\max_{Y\in R(X^*)}\left(\frac{\partial F(X^*,Y)}{\partial X}, V_0\right) < 0$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuncu eşitsizlik aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$\max_{Z\in H(X^*)}(V_0, Z) < 0$$

Kolaylıkla görülür ki,

$$\max_{Z\in L(X^*)}(V_0, Z) = \max_{Z\in H(X^*)}(V_0, Z) < 0 \qquad (3.3.2)$$

$V_0 \in \Gamma^-(X^*) = \Gamma^{++}(X^*)$ olduğunda

$$(V_0, Z) \ge 0, \quad Z \in \Gamma^+(X^*) \qquad (3.3.3)$$

sağlanır. (3.3.2) ve (3.3.3) bağlantılarından,

$$L(X^*) \cap \Gamma^+(X^*) = \varnothing$$

bulunur. Bu ise (3.3.1) e zıttır. Böylece teorem ispat edilmiş olur.

Sonuç.3.3.1. Eğer $\Gamma(X^*) = E_n$ ise, o halde (3.3.1) bağıntısı ile denktir.

$$0 \in L(X^*) \qquad (3.3.4)$$

Gerçekten de, bu halde $\Gamma^+(X^*) = \{0\}$ olur.

Teorem.3.3.2. $\varphi(X)$ fonksiyonunun $X^* \in \Omega$ noktasında minimal değere sahip olması için gerek şart, $\varphi(X)$ Ω kümesinde konveks olduğunda ise yeter şart, $R(X^*)$ a ait olan τ sayıda $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\tau$ noktalarının $(1 \le \tau \le n+1)$ ve τ sayıda negatif olmayan $\alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$ değerlerinin aşağıdaki bağıntıyı sağlamasıdır.

$$\inf_{Z \in \Omega} \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left(\frac{\partial F(X^*, Y_k)}{\partial X}, Z - X^* \right) = 0 \qquad (3.3.5)$$

İspat:

Gereklilik:

Farz edelim ki, $X^* \in \Omega$, $\varphi(X_1)$ fonksiyonun Ω'da minimum noktasıdır. O zaman (3.3.1) bağıntısı sağlanır. O halde $L(X^*)$ ın elemanı olan öyle bir Z_0 noktası vardır ki, bu nokta $\Gamma^+(X^*)$ kümesine aittir.

Konveks örtüden alınan herhangi bir nokta $(n+1)$ den büyük olmayan noktaların konveks kombinasyonu şeklinde verildiğinden, $R(X^*)$ a ait olan $Y_1, Y_2, ..., Y_r$ noktaları ile $\alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{r} \alpha_k = 1$ değerleri vardır ki,

$$Z_0 = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \frac{\partial F(X^*, Y_k)}{\partial X}$$

olur. Hatırlayalım ki, $Z_0 \in \Gamma^+(X^*)$. O halde $V \in \Gamma^-(X^*)$ için

$$(Z_0, V) \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı anlamına gelir. Özel halde, tüm $Z \in \Omega$ için

$$\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \left(\frac{\partial F(X^*, Y_k)}{\partial X}, Z - X^* \right) \geq 0$$

olur ve buradan (3.3.5) elde edilir.

Yeterlilik:

Farz edelim ki, (3.3.5) eşitliği sağlansın. O zaman tüm $V \in \Gamma(X^*)$ için

$$\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \frac{\partial F(X^*, Y_k)}{\partial X}, V \right) \geq 0$$

olur. Skaler çarpımın sürekliliğine göre sonuncu eşitsizlik tüm $V \in \Gamma^-(X^*)$ için doğrudur. O halde,

$$\left(\sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k\frac{\partial F(X^*,Y_k)}{\partial X}\right)\in\Gamma^+(X^*)$$

dır. Diğer taraftan $L(X^*)$ in tanımına göre

$$\sum_{k=1}^{\tau}\left(\alpha_k\frac{\partial F(X^*,Y_k)}{\partial X}\right)\in L(X^*)$$

dır. Bu durumda (3.3.1) bağıntısı sağlanır. Böylece teorem ispat edilmiştir.

Eğer $\Gamma(X^*)=E^n$ ise (3.3.5) aşağıdaki eşitlikle eşdeğerdir.

$$\sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k\frac{\partial F(X^*,Y_k)}{\partial X}=0 \tag{3.3.6}$$

Gerçekten de, bu halde (3.3.1), (3.3.4) ile (3.3.4) ise (3.3.6) ile aynı eşdeğerdir.

Teorem.3.3.3. Eğer $F(X,Y)$ fonksiyonu Ω kümesinde X e göre konveks ise (her bir $Y\in G$ için) ve $X^*\in\Omega$ noktaları için

$$\inf_{X\in G}\max_{Y\in G}F(X,Y)=\max_{Y\in G}F(X^*,Y) \tag{3.3.7}$$

ise o halde $G_\tau=\{Y_k\in G\mid k\in[1;\tau]\}$, $1\le\tau\le n+1$ sonlu kümesi vardır ki,

$$\inf_{X\in\Omega}\max_{Y\in G}F(X,Y)=\inf_{X\in\Omega}\max_{Y\in G_\tau}F(X,Y)$$

veya,

$$\inf_{X\in G}\max_{Y\in G_\tau}F(X,Y)=\max_{Y\in G_\tau}F(X^*,Y)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

(3.3.7) eşitliği ve Teorem.3.3.2 ye göre $R(X^*)$ ın $Y_1,Y_2,\ldots,Y_i$ noktaları vardır ki, (3.3.5) eşitliği sağlanır. Gösterelim ki, $G_\tau\overset{d.f.}{=}\{Y_k\mid k\in[1,\tau]\}$ aranan küme gibi alabiliriz. Gerçekten de, $\max F(X,Y)$ fonksiyonunun Ω da konveksliğine göre $Y\in G_\tau$ için ve (3.3.5) ilişkisine göre Teorem.3.3.2 ye dayanarak

$$\inf_{X\in\Omega}\max_{Y\in G_\tau}F(X,Y)=\max_{Y\in G_\tau}F(X^*,Y) \tag{3.3.8}$$

yazabiliriz. G_τ kümesinin noktaları $R(X^*)$ dan alındığında, buna göre

$$\max F(X^*,Y)=\max_{Y\in G_r} F(X^*,Y) \tag{3.3.9}$$

olur. (3.3.7), (3.3.8) ve (3.3.9) eşitliklerini birleştirirsek, istenileni elde ederiz. Böylece teorem ispat edilmiştir.

Ω kümesinin aşağıda verilen özel haline bakalım. Farz edelim ki,

$$\Omega=\{X\in E^n \mid h(X,\beta)\le 0, tüm\beta\in W\}$$

$W\subset E^n$ sınırlı kapalı kümedir, $h(X,\beta)$ fonksiyonu ise $\partial h(X,\beta)/\partial X$ ile beraber değişkenlerin toplamına göre $E^n\times W$ kümesinde süreklidir.

Farz edelim ki, bundan başka $h(X,\beta)$ fonksiyonu her bir belirlenmiş $\beta\in W$ için X e göre konvekstir ve $\overline{X}\in E_n$ noktası vardır ki,

$$\max_{\beta\in W} h(\overline{X},\beta)<0 \tag{3.3.10}$$

dir. (3.3.10) şartına *Sleyter şartı* denir. Verilenlere göre Ω kümesi kapalı konveks kümedir. (3.3.10) a göre iç noktalara sahiptir.

Farz edelim ki, $X_0\in\Omega$ olsun. Aşağıdaki kümeyi ele alalım.

$$\Gamma(X_0)=\{V\in E^n \mid \max_{\beta\in W} h(X_0+\alpha V,\beta)\le 0, \alpha\in[0,\alpha_0(V)], d_0(V)>0\}$$

$\Gamma^-(X_0)$ ile $\Gamma(X_0)$ kümesinin kapanmasını gösterelim.

Açıktır ki, $\Gamma^-(X_0)$ Ω kümesinin X_0 noktasında mümkün yönlerde koniğidir.

Aşağıdaki kümeleri ele alalım

$$\mathrm{B}(X_0)=\left\{V\in E_n \mid \left(V,\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\right)\le 0, \beta\in(X_0)\right\}$$

$$Q(X_0)=\{\beta\in W \mid h(X_0,\beta)=0\}$$

Eğer $Q(X_0)=\varnothing$ ise o zaman $\mathrm{B}(X_0)=E^n$ dir.

Lemma.3.3.1. $\Gamma^-(X_0)=\mathrm{B}(X_0)$

eşitliği doğrudur.

İspat:

Eğer $Q(X_0)=\varnothing$ ise o zaman lemmanın doğruluğu açıktır. Gerçekten de, bu halde X_0, Ω kümesinin iç noktasıdır. Diğer taraftan, $B(X_0)=E^n$ dir. Böylece $\Gamma^-(X_0)=B(X_0)$ olur. Bundan sonra $Q(X_0)\neq\varnothing$ olsun. Bu halde $\max\limits_{\beta\in W} h(X_0,\beta)=0$ olur.

Önce, $\Gamma^-(X_0)\subset B(X_0)$ olduğunu gösterelim. $V_0\subset\Gamma^-(X_0)$ olsun. O halde öyle $\{V_i\}$ vektörler dizisi vardır ki,

$$V_0=\lim_{i\to\infty}V_i;\quad V_i\subset\Gamma(X_0),\quad i=1,2,...$$

eşitliği sağlanır. Tüm $\beta\in W$ ve $\alpha\in(0,\alpha_0(V_i))$ için, $\Gamma(X_0)$ ın tanımına göre

$$h(X_0+\alpha V_i,\beta)\leq 0$$

olur. Buradan,

$$h(X_0+\alpha V_i,\beta)=h(X_0,\beta)+\alpha\left(\frac{\partial h(X_0+T_iV_i,\beta)}{\partial X},V_i\right)\leq 0$$

$$T_i\overset{d.f.}{=}T(\alpha)\in(0,\alpha)$$

bulunur. Eğer $\beta\in Q(X_0)$ ise o zaman $h(X_0,\beta)=0$ ve buna göre

$$\left(\frac{\partial h(X_0+T_i(\alpha)V_i,\beta)}{\partial X},V_i\right)\leq 0 \tag{3.3.11}$$

olur. (3.3.11) eşitsizliği tüm $\alpha\in(0,\alpha_0(V_i))$ için doğrudur. $\alpha=0$ alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left(\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X},V_0\right)\leq 0 \tag{3.3.12}$$

(3.3.12) eşitsizliğinde $i\to\infty$ için limite geçelim. Tüm $\beta\in Q(X_0)$ için

$$\left(\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X},V_0\right)\leq 0$$

olur. Böylece, $V_0\in B(X_0)$ ve $\Gamma^-(X_0)\subset B(X_0)$ olduğu gösterilmiş oldu.

Şimdi de $B(X_0)\subset\Gamma^-(X_0)$ olduğunu gösterelim. Bunun $V_0\in B(X_0)$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\left(\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X},V_0\right)\le 0,\ \beta\in Q(X_0) \tag{3.3.13}$$

dir. $\forall\alpha>0$ için bir $\bar{\varepsilon}>0$ vardır ki, $\varepsilon\in[0;\bar{\varepsilon}]$ için

$$\max_{\beta\in Q_\varepsilon(X_0)}\left(V_0,\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\right)\le a \tag{3.3.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $Q_\varepsilon(X_0)=\{\beta\in W\mid -\varepsilon\le h(X_0,\beta)\le 0\}$ şeklindedir.

Aksini farz edelim. O zaman her $\bar{a}>0$ ve herhangi pozitif sayıların sıfıra yakınsayan $\{\varepsilon_\nu\}$ dizisi için aşağıdaki eşitsizliği yazarız.

$$\max_{\beta\in Q_{\varepsilon_\nu}(X_0)}\left(V_0,\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\right)\ge\bar{a}>0,\ \ (\nu=1,2,...) \tag{3.3.15}$$

O halde, (3.3.15) de maksimuma ulaşılır. Buradan, her bir ν için $\beta_\nu\in Q_{\varepsilon_\nu}(X_0)$ vardır ki,

$$\left(V_0,\frac{\partial h(X_0,\beta_\nu)}{\partial X}\right)\ge\bar{a} \tag{3.3.16}$$

dir. O zaman ,

$$-\varepsilon_\nu\le h(X_0,\beta_\nu)\le 0 \tag{3.3.17}$$

bulunur. Tüm β_ν, $\nu=1,2,...$ noktaları W kümesine aittir. O halde $\{\beta_\nu\}$ dizisinden oluşan bir alt dizi seçilebilir. Genel hali bozmadan düşünelim ki, tüm $\{\beta_\nu\}$ dizisinin limiti $\beta^*\in W$ noktasıdır. (3.3.16) ve (3.3.17) de $\nu\to\infty$ limitine geçersek

$$\left(V_0,\frac{\partial h(X_0,\beta^*)}{\partial X}\right)\ge\bar{a}$$

eşitsizliğini elde ederiz. O halde, $h(X_0,\beta^*)=0$ olup $\beta^*\in Q(X_0)$ dır. Buradan,

$$\max_{\beta\in Q(X_0)}\left(V_0,\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\right)\ge\bar{a}_n$$

elde edilir. Bu ise (3.3.13) e aykırıdır. Böylece, $\forall a>0$ için bir $\bar{\varepsilon}>0$ vardır ki, tüm $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}]$ için (3.3.14) eşitsizliğinin sağlandığı ispat edilmiştir.

$W_0 = \overline{X} - \overline{X}_0$ olsun. $\overline{X}_0$, (3.3.10) şartını sağlayan bir nokta olsun ve gösterelim ki, her $\gamma > 0$ noktası için $V_0(\gamma) \overset{d.f.}{=} V_0 + \gamma . w_0$ eşitliği sağlanır ve bu nokta $\Gamma(X_0)$ a aittir, yani tüm $\alpha \in [0, \alpha_0(\gamma)]$, $\alpha_0(\gamma) > 0$ için,

$$\max_{\beta \in W} h(X_0 + \alpha V_0(\gamma), \beta) \leq 0$$

olur. Şimdi,

$$\varphi_1(X) = \max_{\beta \in W} h(X, \beta)$$

$$a = -\frac{1}{8}\gamma\varphi_1(\overline{X}) > 0$$

olsun. O halde, $a > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$ öyle $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ bulunur ki,

$$\max_{\beta \in Q_\varepsilon(X_0)} \left(\frac{\partial h(X_0, \beta)}{\partial X}, V_0 \right) \leq a$$

eşitsizliği sağlanır. $h(X, \beta)$ nın X e göre konveksliğinden

$$\left(\frac{\partial h(X_0, \beta)}{\partial X}, \overline{X} - X_0 \right) \leq h(\overline{X} - \beta) - h(X_0, \beta) \qquad (3.3.18)$$

elde edilir.

Eğer $\varepsilon \in \left(0, -\frac{1}{2}\varphi_1(\overline{X})\right]$ ise o halde $\beta \in Q_\varepsilon(X_0)$ için (3.3.18) e göre aşağıdaki eşitsizliği yazarız.

$$\left(\frac{\partial h(X_0, \beta)}{\partial X}, W_0 \right) \leq \varphi_1(\overline{X}) - \varepsilon \leq \frac{1}{2}\varphi_1(\overline{X}) = -\frac{4a}{\gamma}$$

Her ε için $0 < \varepsilon < \min\left\{ \bar{\varepsilon}, -\frac{1}{2}\varphi_1(\overline{X}) \right\}$ olsun. O halde,

$$\max_{\beta \in Q_\varepsilon(X_0)} \left(\frac{\partial h(X_0, \beta)}{\partial X}, V_0 \right) \leq a$$

olur. Buradan,

$$\gamma \max_{\beta \in Q_\varepsilon(X_0)} \left(\frac{\partial h(X_0, \beta)}{\partial X}, W_0 \right) \leq -4a$$

elde edilir. Buradan,

$$\max_{\beta \in Q_\varepsilon(X_0)} \left(\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}, V_0(\gamma) \right) \le -3a \qquad (3.3.19)$$

bulunur. $\tau \in (0,\alpha)$ için

$$\begin{aligned} h(X_0 + \alpha V_0(\gamma),\beta) &= h(X_0,\beta) + \alpha \left(\frac{\partial h(X_0 + \tau V_0(\nu),\beta)}{\partial X} \right) \\ &\le \alpha \left(\frac{\partial h(X_0 + \tau V_0(\gamma),\beta)}{\partial X}, V_0(\gamma) \right) \end{aligned} \qquad (3.3.20)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.19), (3.3.20) ve değişenlerin $E^n \times W$ kümesinde $\partial h(X,\beta)/\partial X$ fonksiyonunun sınırlılığından, yeteri kadar küçük $\alpha \in [0,\alpha_0]$, $\alpha_0 > 0$ ve tüm $\beta \in Q_\varepsilon(X_0)$ için

$$h(X_0 + \alpha V_0(\gamma),\beta) \le -2\alpha a \le 0 \qquad (3.3.21)$$

bulunur. Şimdi $\beta \in Q_\varepsilon(X_0)$ olsun. O halde $h(X,\beta) < -\varepsilon$ olur. Öyle $\alpha_0(\gamma)$, $0 < \alpha_0(\gamma) \le \alpha_0$ bulunur ki, $\alpha \in [0,\alpha_0(\gamma)]$ *ve* $\beta \ne Q_\varepsilon(X_0)$ için

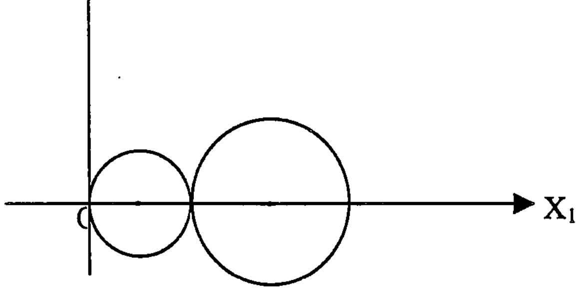
$$h(X_0 + \alpha V_0(\gamma),\beta) \le -\frac{1}{2}\varepsilon \qquad (3.3.22)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.3.21) ve (3.3.22) birleştirirsek,

$$\max_{\beta \in W} h(X_0 + \alpha V_0(\gamma),\beta) \le 0, \quad \alpha \in [0,\alpha_0(\gamma)]$$

olur. O halde $V_0(\gamma) \in \Gamma(X_0)$ olur. Sonuncu ifadeden $\forall \gamma > 0$ için $V_0 \in \overline{\Gamma}(X_0)$.Yani $\mathrm{B}(X_0) \subset \overline{\Gamma}(X_0)$ dır. Böylece Lemma.3.3.1 ispat edilmiştir.

(3.3.10) ile verilen *Sleyter* şartı lemmanın doğruluğunu sağlıyor. Bu, (Şekil.3.1) ile verilen aşağıdaki örnekten anlaşılıyor.



(Şekil.3.1)

Farz edelim ki,

$$\Omega=\{X=(x_1,x_2)\mid(x_1-1)^2+x_2^2-1\le 0,(x_1-4)^2+x_2^2-4\le 0\}$$

olsun. Bu halde, $W=\{1,2\}$ için

$$h(X,1)=(x_1-1)^2+x_2^2-1,$$
$$h(X,2)=(x_1-4)^2+x_2^2-4$$

dir. Ω kümesi bir tek $X_0=(2,0)$ noktasından oluşur. Buna göre $\Gamma(X_0)=\overline{\Gamma}(X_0)=\{0\}$ dır. Şimdi biz $\mathrm{B}(X_0)$ kümesini bulalım.

$$Q(X_0)=\{1,2\} \text{ ve } \frac{\partial(x_0,1)}{\partial x}=(2,0),\frac{\partial h(x_0,2)}{\partial x}=(-4,0),$$

olur. O halde

$$\mathrm{B}(X_0)=\{V=(\upsilon_1,\upsilon_2)\mid\upsilon_1=0\}$$

olarak bulunur. Böylece, $\overline{\Gamma}(X_0)\neq\mathrm{B}(X_0)$ olduğu söylenebilir. Buradan görülen, Ω kümesinin iç noktalara sahip olmadığıdır.

Bellidir ki, *Sleyter* şartı sağlandığında

$$\begin{cases}\left\{V\mid\left(V,\dfrac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\right)\le 0\right\}, & \beta\in Q(X_0) \text{ ise}\\ E^n, & Q(X_0)\neq\{\ \} \text{ ise}\end{cases}$$

olur. $K(X_0)$ ile $\mathrm{H}'(X_0)=\left\{-\dfrac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\mid \beta\in Q(X_0)\right\}$ kümesinin konveks kanonik örtüsünü gösterelim.

$$K(X_0)=\left\{V=-\sum_{i=1}^{\tau}\lambda_i\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X}\mid\lambda_i\ge 0,\beta_i\in Q(X_0),\tau\in N\right\}$$

Eğer $Q(X_0)=\varnothing$ ise, $K(X_0)=\{0\}$ olup, $K(X_0)$ kapalı bir koniktir.

Lemma.3.3.2: *Sleyter* şartı sağlanırsa,

$$\Gamma^+(X_0)=K(X_0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

Eğer $Q(X_0)=\varnothing$ ise lemmanın doğruluğu açıktır. Buna biz göre $Q(X_0)\neq\varnothing$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathrm{B}(X_0)=K^+(X_0) \tag{3.3.23}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim. $V_0\in\mathrm{B}(X_0)$ olsun. Bu halde tüm $\beta\in Q(X_0)$ için

$$\left(-\frac{\partial h(X_0,\beta)}{\partial X},V_0\right)\geq 0$$

eşitsizliği doğrudur ve buradan tüm $Z\in K(X_0)$ için $(Z,V_0)\geq 0$ olur yani $V_0\in K^+(X_0)$ dır.

O halde,

$$\mathrm{B}(X_0)\subset K^+(X_0) \tag{3.3.24}$$

dır. Şimdi aksini farz edelim, yani $V_0\in K^+(X_0)$ olsun. O halde tüm $Z\in K(X_0)$ için

$$(Z,V_0)\geq 0$$

olur. Tüm $\beta\in Q(\mathrm{X}_0)$ için

$$\left(-\frac{\partial h(\mathrm{X}_0,\beta)}{\partial \mathrm{X}},V_0\right)\geq 0$$

veya

$$\left(-\frac{\partial h(\mathrm{X}_0,\beta)}{\partial \mathrm{X}},V_0\right)\leq 0$$

dır. Bu $V_0\in\mathrm{B}(X_0)$ olduğu anlamına gelir. Böylece,

$$K^+(X_0)\subset\mathrm{B}(X_0) \tag{3.3.25}$$

elde edilir. (3.3.24) ve (3.3.25) birleştirilirse (3.3.23) eşitliği elde edilir. (3.3.23) eşitliğinde eşlenik alınırsa

$$\Gamma^+(X_0)=K(X_0)$$

veya

$$\mathrm{B}(X_0)=\Gamma^-(X_0)\quad ve\quad K^{++}(X_0)=K(X_0)$$

olur. Böylece Lemma.3.3.2 ispat edilmiştir.

Teorem 3.3.4. Farz edelim ki,

$$\Omega = \{X \in E_n \mid h(X,\beta) \le 0, \quad \beta \in W\}$$

şeklindedir ve (3.3.10) *sleyter* şartı sağlanır. X^* noktasının $\varphi(X)$ fonksiyonunun Ω da minimumu olması için gerek şart ($\varphi(X)$ in Ω da konveks olması için yeter şart), $R(X^*)$ dan $Y_1, Y_2, \dots, Y_\tau$ noktalarının, $Q(X^*)$ dan $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\tau_1}$ ve negatif olmayan

$$\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1\tau}; \lambda_{21}, \dots, \lambda_{2\tau}; \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_{1i} = 1 \quad , \quad 1 \le \tau \le h+1 \quad ; \quad 1 \le \tau_1 \le n$$

değerlerinin varlığıdır ki,

$$\sum_{i=1}^{\tau} \lambda_{1i} \frac{\partial F(X^*, Y_i)}{\partial X} + \sum_{i=1}^{\tau} \lambda_{2i} \frac{\partial h(X^*, \beta_i)}{\partial X} = 0 \qquad (3.3.26)$$

olsun.

İspat:

(2.2.2 ve (3.3.1) teoremlerine göre, (3.3.26) ve (3.3.1) eşitliklerinin aynı güçte olduğunu göstermek yeterlidir. Önce, (3.3.26) ifadesinin (3.3.1) den elde edildiğini gösterelim. Bunun için,

$$Z^* \in L(X^*) \cap \Gamma^+(X^*)$$

olduğunu farz edelim. Eğer Bölüm.2 deki Lemma.2.1.1, Lemma.2.3.4. ve Lemma.2.3.2 yi kullanılırsa (3.3.26) eşitliğini yazarız. (3.3.1) ifadesinin ise (3.3.26) dan elde edilebilirliği açıkça bellidir. Böylece teorem ispat edilmiştir.

TARTIŞMA ve SONUÇ

n-boyutlu E^n uzayının bir alt kümesinin elemanı olan X için tanımlanmış $F(X)$ fonksiyonunun sürekliliği sağlandığı taktirde, bu fonksiyonun maksimum ve minimumu arasında kıyaslamalar yapılabileceği gösterilmiş ve bu kıyaslamalar özellikler halinde sunulmuştur.

Herhangi bir vektör değerli fonksiyonun sürekliliğinin ve yöne göre doğrultu türevinin mevcut olması durumunda, bu fonksiyonun bir bileşkesi olan başka bir fonksiyonun da sürekliliğinin ve belirtilen yöne göre doğrultu türevinin mevcut olacağı görülmüştür.

Maksimum tipli bir $F(X)$ fonksiyonunun minimumunun bulunabilmesi için bazı gerek ve yeter şartlara ihtiyaç olduğu görülmüş ve bu şartlar verildiğinde minimumu bulunmuş, geometrik model verilerek ispat yapılmıştır.

E^n ve E^m sonlu boyutlu uzaylarının alt kümeleri olan G ve Ω kümelerinin kartezyen çarpımı olan $G \times \Omega$ kümesinin elemanı olan (X,Y) vektörü için tanımlanan $F(X,Y)$ fonksiyonunun maksimumunun minimumunun bulunması için ihtiyaç duyulan gerek ve yeter şartlar tanımlanmış ve fonksiyonunun minimaksının elde edildiği görülmüştür. Bir de geometrik model verilerek bunun doğruluğu pekiştirilmiştir.

KAYNAKLAR

Demyanov, V.F., Malozemov ,V.M., 1972. V vedenie v minimaks ...,İzdotelstvo Nauka Glavnoye Rodokçiye Fiziko Matematiçeskoy Literaturi , Moskova

Kirsanov , İ.B., 1970 , Lekçii po matematiçeskoy teorii ekstremalnıh zadac, İzd-vo Moskova Üniversitesi

Demyanov , V.F., 1966 , K minimizecii maksimelnova ukloneniye, Vestnik LQU, No:7 , 21-28

Demyanov , V.F. 1966 , K reşeniyu nekotorıx mınımaksnıks zadac, I,II, Kibernetika No:6 , 58-66

Demyanov ,V.F., 1966 , Metod posledovatelnıx priblijeniy dlya reşeniy adnoy minimaksnoy Tezisi Kr. Nouci Soobşeniy Mejdunerodnovo kongressa matematikov ,Sekçiye 14,31

Demyanov ,B.F., 1968 , Algoritms for some minimaks problems , J. Computer and System Sciences 2, No:4 ,342-380

Demyanov ,V.F., 1969 , K zadece o mininakse , DAN SSSR 187 , No:2 , 255-258

Duboviçkiy ,A.Y.,1963 , Milyutin A.A., Zadaçi no ekstremum pri naliçii ograniçeniy ograniçeniy , DAN SSSR 149 , No:4 , 759-762

Demyanov ,V.F., 1968 , Differençinovanie funkçii maksimine I,III,,Jurnal Vıç. Matem.İmatem.fiziki 8 , No:6 ,1186-1195

Demyanov ,V.F., 1970 , Differençinovanie funkçii maksimine I,III,,Jurnal Vıç. Matem.İmatem.fiziki 10, No:1 , 26-38

Duboviçkiy ,A.Y., Milyutin ,A.A., 1965 , Zadaci ne ekstremum pri haliçii ograniçeniy, Jurnal ,viç.matem.i.matem.fiziki 5 , No:3 , 395-453

Kuhn ,N.M.,Tucker A.W., 1951 , Nonlineer programming , Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability , Universty of California Press , Berkeley , 481-491

Lovenberg ,K.A., 1944 , A method for the solution ofeertain nonlineer problems in leest Squeres ,Quart.Appl , Math.2 , 164-168

Saban ,G., 1976 , Analize Giriş , İstanbul , 104,116,137,200-206 s.

Balcı ,M., 1977, Matematik Analiz , Ankara ,144-169 s.

Matveenko ,D.,Pashaev.,R.T.,Rubinov.,A.M., 1998, Convex Analysıs On The Plane , Baku State University

William , E.B. and Richard, C.D.,1977, Elemantary Differential Equations and Boundary Value Problems , John Wiley & Sons.

Demyanov,V.F., Rubinov,A.M., 1964 , Minimizaçiya Glavkovo Vıpuklovo Funkçionala Ne Vıpuklom Mnojestve ,Vestnik LQU, No:19,5-17 s.

Demyanov ,V.F., 1970 , Nnehojdenie Sedlovıh Toçek ne Mnogogrannikah , DAN SSSR 192, No:1 ,13-15

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Ahmet Zahid KÜÇÜK

Doğum Yeri : KONYA

Doğum Yılı : 1978

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1991-1994 , DENİZLİ

Lisans : 1994-1998 , KONYA Selçuk Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1998-1999 Mefkure Dersanesi

1999-2000 Sistem Dersanesi

2000-2001 Sistem Dersanesi

106047

DİSKRET VE SÜREKLİ MİNİMAKS PROBLEMLERİ – BİR DÜZGÜN OLMAYAN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Ahmet Zahid KÜÇÜK
Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 64s., 2001

Anahtar Kelimeler: Minimaks Problemi, Diskret Minimaks Problemi, Geometrik yorum.

Bu tezin birinci bölümünde; önce sürekli fonksiyonların tanımı yapılarak maksimum ve minimumları ile ilgili bazı özellikler verilmiş, ardından sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar incelenmiştir.

İkinci bölümde; *X*, n-boyutlu vektör olmak üzere maksimum tipli $f(X)$ fonksiyonu için diskret minimaks problemi tanımlanmış ve örneklerle incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde problem için bir geometrik yorum verilmiştir.

Üçüncü bölümde; $\varphi(X) = \max F(X,Y)$ şeklindeki sürekli fonksiyonun minimumunun bulunması problemi verilip, aynı fonksiyonun yöne göre doğrultu türevi incelenmiştir. Ayrıca minimaks problemi için gerekli şartlar incelenip bir geometrik model verilmiştir.

Jüri : Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Prof. Dr. Agamali AGAMALİYEV (Danışman)
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

DİSCRETE AND CONTİNUOUS MİNİMAX PROBLEMS-THE MAXİMUM PRİNCİPAL FOR AN EXTREMAL PROBLEM

Ahmet Zahid KÜÇÜK
Mathematics Education, Mester Thesis, 64pg., 2001

Key Words : Minimax problem , Geometric interpolation , Discret Minimax problem.

This thesis consists; ın the first chapter some properties concerned with maximums and minumums of continuous functions have been given with proof. Consequently the continuous differentiable functions have been examined.

In the second chapter X as n-dimentional vector, discret minimax problems for $f(X)$ function of the maximum type have been defined and examined with examples. Besides, a geometric interpolation is available.

In the third chapter a problem of finding a continuous as minimum in the form of $\varphi(X) = \max F(X,Y)$ has been presented and the differentiation of the same functions according to direction has been studied. Moreover, the necessary conditions have been examined and geometric interpolations have been given.

Jüri: Prof.Dr. Serpil PEHLİVAN
Prof.Dr. Agamali AGAMALİYEV (Counselor)
Prof.Dr. Bilender PAŞAOĞLU