SÜREKLİ ORTAMLAR MEKANİĞİNİN BÜNYE DENKLEMLERİNDE İNVARYANTLARIN BELİRLENMESİ

Bekir AKSOY

Yüksek Lisans Tezi
MAKİNA EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
ISPARTA 2001

T.C
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ ORTAMLAR MEKANİĞİNİN BÜNYE DENKLEMLERİNDE İNVARYANTLARIN BELİRLENMESİ

BEKİR AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

106075

ISPARTA, 2001

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MAKİNA EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ali Ünal ERDEM

(Ünvanı Adı Soyadı)

Üye : Doç. Dr. Ali Kemal YAKUT

(Ünvanı Adı Soyadı)

Üye : Y. Doç. Dr. M. Reşit USAL

(Ünvanı Adı Soyadı)

ONAY

Bu tez 18/07/2001 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

29/08/2001

S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖZET

Mühendislik malzemelerinin bünye denklemleri ve bu bağıntılardaki invaryant parametreler çağdaş sürekli ortamlar mekaniğinde gittikçe artan bir öneme ve anahtar bir role sahip olmaktadır. Bir sürekli ortamın davranışını matematiksel olarak ifade edebilmek için, serbest enerjinin hangi argümanlara bağlı olduğunu ifade ettikten sonra, bu argümanların invaryant formlarını tespit etmek gerekir. Bu argümanlar genellikle simetrik ve/veya antisimetrik matrisler ya da polar vektörler şeklinde ortaya çıkmaktadır.

Bu çalışmada, vektörlerin ve tansörlerin invaryantları, indirgenebilen ve indirgenemeyen invaryantlar ve ayrıca tamlık bazları incelenmiştir. Özellikle simetrik matrislere ait invaryant değerlerin belirlenmesi üzerinde durulmuştur. İnvaryantlar teorisinde ana problem: diğer bütün invaryantların onlardan üretildiği ve verilen bir vektör ve tansörler cümlesi için fazladan eleman içermeyen temel bir invaryant cümlesini tespit etmektir.

Cayley-Hamilton teoreminin invaryantlar teorisinde nasıl kullanıldığı detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Uygun ortogonal grup için tamlık bazlarını oluşturan matris çarpımlarının trace' leri dört adet simetrik matris için çizelge halinde verilmiştir.

Simetrik matrislerin invaryant değerlerini, determinantlarını, terslerini, üslerini, özdeğerlerini ve özvektörlerini hesaplamak için MATLAB programının nasıl kullanıldığı izah edilmiştir. Son olarak, bünye denklemlerinde invaryant değerlerin nasıl yer aldığını göstermek için izotropik hiperelastik bir ortam seçilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Anizotropi, Bünye Denklemleri, İnvaryantlar, İzotropi, Ortogonal Gruplar, Tamlık Bazları.

ABSTRACT

Constitutive equations of Engineering materials and invariant parameters in these relationships play an increasing important and key role in contemporary continuum mechanics. In order to be able to express the behavior of a continuous medium in mathematically, it has to be determined the arguments of free energy. And then, invariant form of these argumants have to be individually considered in the same sense. These argumants are usually symmetric and/or skew-symmetric matrices and sometimes polar vectors.

In this study; invariants of vectors and tensors, reducible and irreducible invariants and also integrity basis are studied. The main problem in the theory of invariants is determine a set of basic invariants from which all other invariants can be generated and which contains no excessive members, for a given set of vectors and tensors.

Especially, determining for invariant parameters of symmetric matrices are examined. For proper orthogonal group, traces of matrix products that creates integrity basis have been given in atable for four symmetric matrices. It is explained how the Cayley-Hamilton theorem is used in the invariant theory in detail.

How using the MATLAB program for determining invariant parameters, determinats, inverces, powers, eigenvalues and eigenvectors of symmetric matrices has been explained. Lastly, to show the places of invariant values in the constitutive equations, an isotropic hyperelastic media is choosen.

KEY WORDS : Anisotropy, Constitutive Equations, Integrity Bases, Invariants, Isotropy, Orthogonal Groups.

TEŞEKKÜR

Yükseklisans tezimi hazırlamam esnasında bana yardımlarını esirgemeyen ilimine ve bilgisine saydı guyduğum danışmān hocam Yrd. Doç. Dr. M. Reşit USAL'a, tezimin yazılması esnasında yardımlarını esirgemeyen kardeşim Atakan AKSOY'a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa
ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
ÇİZELGELER DİZİNİ vii
1.GİRİŞ 1
1.1. Vektörlerin Ve Tansörlerin İnvaryantları 2
1.1.2. İndirgenebilen ve indirgenemeyen invaryantların tamlık bazları 7
1.1.3. Klasik teoriden bazı sonuçlar 8
1.1.4. Ortogonal gruplar ve belirli alt gruplar 12
1.1.4.1. Full ortogonal grup 13
1.1.4.2. Uygun ortogonal (döndürme) grubu 13
1.1.4.3. Transvers izotropi 13
1.1.4.4. Kristal ve kristal sınıfları 13
1.2. İzotropi 23
1.2.1. Vektörler için tamlık bazları 23
1.2.2. İzotropik tansörler 28
1.2.3. Vektörlerin invaryantları ve ikinci mertebeden tansörler için genel formlar ... 31
2. KAYNAK BİLGİSİ 35
3. MATERYAL ve METOT 38
3.1. Materyal 38
3.1.1. Matris polinomlarının traceleri ile ilgili sonuçlar 38
3.1.2. Simetrik ikinci mertebeden tansörlerin invaryantları 49
3.1.2.1. Bir matris $\underline{\underline{a}}$ 51
3.1.2.2. İki matris $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}$ 51
3.1.2.3. Üç matris $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}$ 53
3.1.2.4. Dört matris $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{d}}$ 54
4. BULGULAR 60
4.1. İzotrop Hiper Elastik Cisimlerin Bünye Denklemi 111
5. SONUÇLAR 117
6. KAYNAKLAR 119
ÖZGEÇMİŞ 122
EKLER 123
EK-1 Özdeğerler, Özvektörler Ve Cayley-Hamilton Teoremi 123
EK-2 MATLAB Programı hakkında bazı bilgiler 136

SİMGELER (KISALTMALAR) DİZİNİ

Simge	Simge Adı
m_{ij} , n_{ij} ,..., t_{ij}	ikinci dereceden tansörlerin bileşenleri
a_{ij} , b_{ij} ,..., f_{ij}	simetrik tansörlerin bileşenleri
x_{ij} , y_{ij} ,..., z_{ij}	antisimetrik tansörlerin bileşenleri
$p_{ij}^{(r)}$, $n_{ij}^{(r)}$,..., $t_{ij}^{(r)}$	genel simetrik ve antisimetrik tansörlerin jenerik bileşenleri
$\underline{\underline{a}}$	Herhangi bir tansöre ait matris formun ifadesi
M_{ij}	Ortogonal transformasyon matrisi
U_i	Herhangi bir vektörün bileşeni
I_1 , I_2 , ..., I_n	İnvaryant parametreler
ε_{ijk}	permütasyon tansörü
δ_{ij}	Kronecker-delta
Σ	Gerilme potansiyeli
$\underline{\underline{C}}$	deformasyon tansörü
$\underline{\underline{Z}}$, $\underline{\underline{S}}$	Fiber ailelerine ait tansörler
$\underline{E}$	Elektrik alan vektörü
T_{PQ}	Gerilme tansörünün bileşenleri
P_R	Polarizasyon vektörünün bileşenleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa
Şekil 1.1. Bir örgü örneği 15
Şekil 1.2. Kristal örgüde eksenler ve açılar 16

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 1. Kristal sınıfları karakterize eden dönüşümler 20
Çizelge 2. Matris çarpımlarının tracelerine uygun ortogonal grup için
tamlık bazları 59

1. GİRİŞ

Çeşitli alan büyüklükleri arasında geçerli olan malzemenin yapısal özelliklerinden kaynaklanan "bünye denklemleri" oluşturulurken önemli olan konulardan birisi de izotrop ortamlar için invaryant parametrelerin belirlenmesidir. Bir vektörün veya tansörün bileşenlerinden oluşan ve koordinat transformasyonlarından etkilenmeyen büyüklüklere invaryant denir. Vektörel ve tansörel fonksiyonların elde edilme şekli de bu bağlamda önem arz etmektedir. Bünye denklemlerinde değişken olarak kullanılan polar, eksenel vektörler ve/veya simetrik, antisimetrik tansörler ifade edildikten sonra bunlara ait invaryant değerlerin nasıl belirleneceği Spencer(1971)' de tüm detaylar verilmese bile açıklanmaktadır. Spencer' ın bu çalışmasında; tamlık bazları, invaryant ve jeneratörlere ait bir çizelge verilmiş, vektörel veya tansörel bir formun invaryant değerinin ne olduğu açıkça ifade edildikten sonra birden fazla vektör ve tansöre ait ortak invaryantlar belirli matematiksel esaslar çerçevesinde ortaya konulmuştur. Daha sonra bu invaryant parametrelerinin yer aldığı vektör ve tansör değerli fonksiyonların polinom temsillerinden faydalanılmaktadır. Bu vektörel ve tansörel polinom fonksiyonlarının Sürekli Ortamlar Mekaniği çerçevesinde ısı akısı, polarizasyon vektörü ve gerilme tansörünün ifade edilmesinde kullanıldığını Eringen(1967 ve 1980) ve Şuhubi(1994)' nin çalışmalarında görüyoruz. Biz bu çalışmada daha çok simetrik matris formlara ait invaryant parametreler üzerinde yoğunlaşmış bulunuyoruz.

Tansörel hesabın, matris cebri ve invaryantlarla çok yakın ilişkisi vardır. Bu sebepten dolayı matris cebirine ait temel tanımlar verilmiş matris polinomları ile Cayley – Hamilton teoremi açıkça ifade edilmiştir. Vektörlerin ve tansörlerin invaryantlarına ait temel bilgiler, indirgenebilen veya indirgenemeyen invaryantların tamlık bazlarına ait ifadeler belirlenmiştir. Daha sonra ortogonal gruplar için belirli alt gruplar ifade edilmiş izotropi, transvers izotropi ve kristal sınıfları açıklanmıştır. Matris polinomlarının tracelerini ilgilendiren sonuçlar vektörler, simetrik ikinci mertebeden tansörlerin invaryantları belirlenmeye çalışılmıştır. Vektörlerin ve tansörlerin polinomsal fonksiyonları izah edildikten sonra sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde bu formların invaryantlarını da dikkate alarak bünye denklemlerinde nasıl kullanıldığı gösterilmiştir.

1.1. Vektörlerin ve Tansörlerin İnvaryantları

Bu çalışmada üç boyutlu öklit uzayında vektörler ve tansörlerle ilgileneceğiz. Ele aldığımız tansörler, genellikle ikinci dereceden simetrik veya antisimetrik tansörler olacaktır. Gerekli yerlerde vektör ve tansörlerin kartezyen bileşenleri kullanılacaktır. Eğer arzu edilirse elde edilen sonuçlar tansörel analizin standart teknikleri kullanılarak genel eğrisel koordinat sistemlerine göre ifade edilebilir. İndis notasyonu ve toplama kuralı alışılmış şekilde çalışmanın her yerinde kullanılacaktır. Aksi söylenmedikçe vektör ve tansör komponentlerinin indisleri matris elemanlarının indislerinin 1, 2, 3 değerlerini alacağını biliyoruz. Özel vektörler $\underset{\sim}{U}$, $\underset{\sim}{V}$, $\underset{\sim}{W}$ ve bunların dik kartezyen koordinat sistemindeki (X_i i=1,2,3) bileşenleri sırasıyla U_i , V_i , W_i ile gösterilecektir. Bir vektörler cümlesini ifade edebilmek için o vektör ailesine ait bir jenerik vektör kullanılacak ve U_r ile gösterilecektir. Bu jenerik vektörün X_i sistemindeki bileşenleri ise $U_i^{(r)}$ şeklinde ifade edilecektir. İleride bahsedilecek olan bazı maksatlar için $\underset{\sim}{U}$ vektörü ile ilgili bir antisimetrik matris $\underline{\underline{u}}$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\underline{\underline{u}} = [u_{ij}], \; u_{ij} = e_{ijk} U_k \tag{1.1.1}$$

Burada e_{ijk} üçüncü dereceden permütasyon tansörü olup i, j, k indislerinin çift permütasyonlarında $e_{ijk} = 1$, tek permütasyonlarında $e_{ijk} = -1$ ve diğer bütün durumlar için $e_{ijk} = 0$ 'dır.

(1.1.1) denkleminde verilen ifadeyi uygun işlemlerle;

$$(u_{ij})\,e_{ijl}=(e_{ijk}U_k)e_{ijl}$$

$$u_{ij}\,e_{ijl}=e_{ijk}\,e_{ijl}\,U_k$$

$$u_{ij}\,e_{ijl}=2\delta_{kl}U_k \qquad (1.1.2)$$

$$u_{ij}\,e_{ijl}=2U_l$$

$$U_l=\frac{1}{2}u_{ij}\,e_{ijl}$$

$$U_k=\frac{1}{2}u_{ij}\,e_{ijk}$$

şeklinde ifade ederiz. Benzer şekilde antisimetrik bir $\underline{\underline{U}}_r$ matrisinin elemanlarını $u_{ij}^{(r)}$ ile ifade edeceğiz ve bu bileşenlerle ilgili vektörü $\underset{\sim}{U}_r$ ile göstereceğiz. Simetrik veya antisimetrik olmasına dikkat etmeden X_i sistemindeki genellikle spesifik olan ikinci dereceden tansörlerin bileşenlerini $m_{ij}, n_{ij}, \ldots, t_{ij}$ sembolleri ile göstereceğiz, özellikle simetrik tansörlerin bileşenlerini $a_{ij}, b_{ij}, \ldots, f_{ij}$ sembolleri ile, antisimetrik tansörlerin bileşenleri ise x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} sembolleri ile gösterilecektir. Genel simetrik ve antisimetrik tansörlerin jenerik bileşenleri ise sırasıyla $p_{ij}^{(r)}, a_{ij}^{(r)}, x_{ij}^{(r)}$ sembolleri ile ifade edilecektir. Bu tansörlerle ilgili 3x3 boyutundaki matrisler ise;

$$\begin{matrix} \underline{\underline{m}}=[m_{ij}] & , & \underline{\underline{a}}=[a_{ij}] & , & \underline{\underline{x}}=[x_{ij}] \\ \underline{\underline{p}}_r=[p_{ij}^{(r)}] & , & \underline{\underline{a}}_r=[a_{ij}^{(r)}] & , & \underline{\underline{x}}_r=[x_{ij}^{(r)}] \end{matrix} \qquad (1.1.3)$$

ifadeleri ile verilecektir. Buradan açıkça görüldüğü gibi $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \ldots, \underline{\underline{f}}, \underline{\underline{a}}_r$ simetrik matrisleri ve $\underline{\underline{x}}, \underline{\underline{y}}, \underline{\underline{z}}, \underline{\underline{x}}_r$ (aynı zamanda $\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}, \underline{\underline{w}}, \underline{\underline{u}}_r$) antisimetrik matrisleri göstermektedir.

Ortogonal transformasyonlar altında değişmeyen büyüklükleri inceleyeceğiz. Eğer X_i $(i=1,2,3)$ bir dik kartezyen koordinat cümlesini gösteriyorsa;

$$\overline{X}_i = M_{ij} X_j \tag{1.1.4}$$

transformasyonu yeni bir kartezyen koordinat cümlesini belirler. Yalnız burada transformasyon matrisi M_{ij} aşağıdaki özelliği sağlamaktadır.

$$M_{ik} M_{jk} = \delta_{ij} \tag{1.1.5}$$

Burada δ_{ij} kroniker deltayı temsil etmektedir ve $\underline{\underline{M}}$ matrisi üzerinde kısıtlama

$$M_{ki} M_{kj} = \delta_{ij} \qquad ve \qquad |M_{ij}| = \mp 1 \tag{1.1.6}$$

ifadeleri ile tanımlanmıştır. Elemanları $i\,,j$ olan M_{ij} matrisinin bu şartlar altında ortogonal bir transformasyon matrisi olduğunu söyleyebiliriz. Bütün ortogonal transformasyonlar cümlesi bir grup oluşturur. Bu grup ve alt grupları ileride detaylı bir şekilde incelenecektir.

Ortogonal bir transformasyon altında X_i koordinatlarında bileşenleri U_i olan bir $\underset{\sim}{U}$ vektörü $\overline{X}_i$ koordinatlarında bileşenleri $\overline{U}_i$ olan vektörler cinsinden aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$\overline{U}_i = M_{ij} U_j \tag{1.1.7}$$

Eksenel bir $\underset{\sim}{U}$ vektörü ise, aşağıdaki kurala göre dönüşür.

$$\overline{U}_i = |M_{rs}|\, M_{ij} U_j \tag{1.1.8}$$

Bileşenleri P_{ij} olan ikinci dereceden bir tansör ise aşağıdaki gibi transformasyona uğrar.

$$P_{ij} = M_{ik} M_{jl} P_{kl} \tag{1.1.9}$$

Eğer $|M_{rs}| = 1$ alınırsa bu transformasyon uygun ortogonal transformasyon adını alır ve mutlak (polar) vektör ile eksenel vektör arasındaki fark ortadan kalkar.
(1.1.1) denkleminde olduğu gibi

$$u_{ij} = e_{ijk} U_k \quad , \quad \overline{u}_{ij} = e_{ijk} \overline{U}_k \tag{1.1.10}$$

yazıldığı düşünülerek $\overline{u}_{ij}$' nin ikinci dereceden bir tansörel form olacağını göz önüne alarak

$$\overline{u}_{ij} = M_{ir} M_{js} u_{rs} \tag{1.1.11}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu durumda (1.1.2), (1.1.5) ve (1.1.10) denklemlerinden istifade ederek;

$$\begin{aligned} \overline{U}_i &= \delta_{ij} U_j = M_{jk} M_{ik} \overline{U}_j = \frac{1}{2} M_{jk} M_{ik} e_{pqj} \overline{u}_{pq} \\ &= \frac{1}{2} M_{jk} M_{ik} e_{pqj} M_{pr} M_{qs} u_{rs} = \frac{1}{2} e_{pqj} M_{pr} M_{qs} M_{jk} M_{ik} u_{rs} \\ &= \frac{1}{2} |M_{ij}| e_{rsk} M_{ik} u_{rs} = |M_{ij}| M_{ik} U_k \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

yazılabilir. Böylece eğer (1.1.11) denklemi geçerli ise U_i eksenel bir vektör gibi dönüşür. Bu ifadenin tersi benzer şekilde ispatlanabilir. Şimdi bir invaryantı tanımlayacak duruma gelmiş bulunuyoruz.

$f(u_i, V_i, \ldots, m_{ij}, n_{ij}, \ldots)$ gibi bir fonksiyon verilen bir grup transformasyonlar altında aşağıdaki gibi;

$$f(\overline{U}_i,\overline{V}_i,\ldots,m_{ij},n_{ij},\ldots)=(\left|M_{ij}\right|\rho\, f(U_i,V_i,\ldots,m_{ij},n_{ij},\ldots) \tag{1.1.13}$$

dönüşüyorsa invaryant olduğu söylenir. Eğer $\rho=0$ ise f fonksiyonu mutlak invaryanttır. Eğer $\rho\neq0$ ise f bağıl invaryanttır. Biz genellikle mutlak invaryantlarla ilgileneceğiz ve aksi belirtilmediği sürece invaryant teorisini mutlak invaryantlar için kullanacağız. Ortogonal transformasyonlar altında invaryantların basit örnekleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

a) (1.1.7) denkleminden iki vektörün skaler çarpımı için aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\overline{U}.\overline{V}=M_{ij}U_jM_{ik}V_k=M_{ij}M_{ik}U_jU_k=\delta_{jk}U_jV_k=U_jV_j=U_iV_i \tag{1.1.14}$$

Böylece herhangi bir ortogonal transformasyon altında skaler çarpımın invaryant olduğunu görürüz.

b) P_{ij} tansörü ile ilgili $\underline{\underline{P}}$ matrisinin tracesi $tr\,\underline{\underline{P}}=P_{ii}$ ifadesinde invaryant olduğunu (1.1.6) ve (1.1.9) denklemlerini aşağıdaki gibi kullanılarak görülebilir.

$$\begin{aligned}\overline{P}_{ii}&=M_{ik}M_{il}P_{kl}=P_{ii}\\ \overline{P}_{ii}&=P_{ii}\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

c) P_{ij} tansörü ile ilgili matrisin determinantı da invaryanttır. Bunu aşağıdaki ifadelerden açıkça görebiliriz.

$$\left|P_{ij}\right|=\left|M_{ik}M_{jl}P_{kl}\right|=\left|M_{ij}\right|^2\left|P_{ij}\right|=\left|P_{ij}\right| \tag{1.1.16}$$

Spencer(1971)' a göre, f fonksiyonu kendi argümanlarının cebirsel bir fonksiyonu kabul edilebilir ve bu durum çok ciddi bir kısıtlama değildir. Bölüm 1.1.3'deki cebirsel invaryantların kendi argümanlarında polinomlar olan invaryantlarla üretilebileceği gösterilecektir. Böylece birçok maksat için polinom invaryantları dikkate almak yeterlidir.

Bu bölümdeki tanımlar şüphesiz kolayca yüksek mertebeden tansörlerin invaryantlarını içerecek şekilde genişletilebilir.

1.1.2. İndirgenebilen ve İndirgenemeyen İnvaryantların Tamlık Bazı

İnvaryantlar teorisinde ana problem verilen bir değişkenler cümlesi (vektörler ve tansörler) ve verilen bir grup transformasyonlar için mevcut oldukları kabul edilen invaryantlar cümlesini tespit etmektir. Bu temel cümle diğer invaryantların bulunması için kullanılabilir ve gereksiz hiçbir eleman ihtiva etmez. Şu anki durum için dikkatimizi polinom türündeki invaryantlar üzerinde yoğunlaştıracağız.

Aşağıdaki tanımlar verilen bir değişkenler cümlesi ve verilen transformasyonlar grubu için geçerlidir. Bu polinomsal invaryant eğer diğer invaryantlar cinsinden bir polinom olarak ifade edilebiliyorsa indirgenebilen bir invaryanttır. Aksi takdirde indirgenemez invaryant adını alır. Verilen cümlenin elemanlarına göre bir polinom olarak ifade edilebilen herhangi bir polinomsal invaryantların bir cümlesi bir tamlık bazı adını alır.

Eğer bir tamlık bazı mümkün olan en az sayıda eleman içeriyorsa minimal tamlık bazı olarak bilinir. Açıkça söylemek gerekirse minimal bir tamlık bazının bütün elemanları indirgenemez özelliktedir. İnvaryantlar arasında mevcut olan polinomsal bağlantılar herhangi bir invaryantın geriye kalanlar cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilmesine müsaade etmeyecek şekilde ortaya çıkabilir. Bu tür bağlantılar syzygies olarak adlandırılır.

Böylece temel problem değişik transformasyon grupları altında verilen değişkenler cümlesi için minimal tamlık bazlarını ve syzygiesleri belirlemektir. Burada problemin çözümü için üç boyutlu uzayda vektörlerin ve ikinci dereceden tansörlerin bileşenlerini değişkenler olarak kullanıyor ve kullanılan transformasyon gruplarını ortogonal gruplar veya onların alt grupları şeklinde seçiyoruz.

1.1.3. Klasik Teoriden Bazı Sonuçlar

Cebirsel invaryantlar teorisi 19. yy. matematikçileri tarafından geniş bir şekilde incelenmiştir. Teori ve sonuçların büyük bir kısmı bu araştırmaların sonucu olarak mevcuttur. Örneğin bu teoriler Grace ve Young (1903), Elliot (1913), Turnbull (1960), Weitzenbock (1923) ve Gurevich (1964) tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Ancak bu bilim adamlarının yaptığı çalışmalar modern sürekli ortamlar mekaniğinin uygulamaları için çok fazla faydalı değildir. Bunun ana sebebi bu klasik çalışmaların çoğunun geometrik çalışmalar ve özellikle projektif geometri üzerinde yoğunlaşmış olmalarıdır.

Sonuç olarak çoğu genel lineer transformasyonlar altındaki invaryantlarla ilgilenirler. Verilen boyutların sayısı için ortogonal gruplar ve onların alt grupları lineer grubun bütün alt gruplarını oluşturduğundan full ortogonal grup altında vektörler ve tansörlerin verilen bir cümlesi için bir tamlık bazının aynı vektörler ve tansörler cümlesi için lineer grup altında simetrik ikinci dereceden tansörlerle ilgili bir tamlık bazı ile verildiğini ispatlamak mümkündür (Spencer, 1971).

İnvaryantlar teorisine oldukça modern bir yaklaşım Weyl (1939) tarafından yazılan kitapta mevcuttur. Bu çalışmada özel problemlerden ziyade genel teori ile ilgilenilmiştir. Klasik teori oldukça genel çok sayıda sonuçlar içerir. Bu sonuçlardan biriside Hilbert teoremidir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir; vektörler ve tansörlerden oluşmuş herhangi bir sonlu sistem için sonlu sayıda invaryantlar içeren bir tamlık bazı mevcuttur. Bu teoremin ispatı oldukça uzundur ve Gurevich (1964) tarafından incelenen bir örnekte verilmiştir. Bu teorem oldukça büyük bir öneme sahiptir ve vektörler ve tansörlerden oluşmuş herhangi bir sonlu sistem için sonlu bir tamlık bazının mevcut olduğunu ileri sürer. Genel uygulaması olan başka bir teorem Peano teoremidir. Aynı mertebeden m adet tansörden oluşmuş, aynı uzayda tanımlanmış ve indislerin kendi arasında yer değiştirmesine göre aynı simetriye sahip bir cümle düşünelim. Bu tansörlerden her birisi ν adet farklı komponente sahiptir. $P_{ij}=P_{ji}$ alınmış ve simetrik veya antisimetrik tansörler arasındaki fark göz ardı edilmiştir. Onların komponentleri r. tansör için belirli mertebelerde sıralanmış $(r=1,2,3,\ldots,m)$ ve $\underline{A}_i^r$ $(i=1,2,3,\ldots,\nu)$ şeklinde gösterilmiştir.

Polarizasyon operatörü D_{kl} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$D_{pq}=A_i^{(p)}\frac{\partial}{\partial A_i^{(q)}} \tag{1.1.3.1}$$

Peano teoremine göre; $\upsilon_1,\upsilon_2,\ldots,\upsilon_\upsilon$ parametreleri hepsi de birbirinden farklı olmak üzere $e_{i_1 i_2\ldots i_\nu}\,\underline{A}_{i_1}^{(r_1)}\,\underline{A}_{i_2}^{(r_2)}\ldots\underline{A}_{i_\nu}^{(r_\nu)}$ determinantları hariç tutularak, m adet benzer tansörden seçilen $1,2,\ldots,m$ aralığındaki her bir polinomsal invaryantı; tansörlerin $\upsilon-1$'inin invaryantlarında ve polarizasyon prosesi ile onlardan elde edilen invaryantlarda bir polinom olarak ifade edilebilir. Burada, $e_{i_1 i_2\ldots i_\nu}$ terimi υ. mertebeden permütasyon tansörünü ifade etmektedir.

Bu teoremin kanıtı (Pascal teoremi adı altında) Weyl (1939) tarafından verilmiştir. Teorem, bu $\upsilon-1$ tansörleri için bunlardan elde edilen tansörlerin rasgele sayılarda ki invaryantlarının mümkün bir genel uygulamasıdır; bununla birlikte burada göz önünde bulundurulduğu üzere, bu tip sonuçlar direkt metotlarla kolay bulunabilir. Bölüm 2.1'de teorem toplam iki veya üç boyutta olan vektörlere uygulanacaktır;bu durumda $A_i^{(r)}$, vektörlerin $U_i^{(r)}$ değişkenlerine basitçe indirgenecektir, burada i indisi 1, 2 veya 1, 2 ve 3 değerleri alarak göz önünde bulundurulan uzayın boyutlarının sayısına karşılık gelir.

İnvaryantların aynı zamanda önemli ve şimdi kısaca açıklanacak tamamen basit özellikleri vardır. Hatırlarsak şu anda sadece cebirsel invaryantları göz önünde bulunduruyoruz, örneğin vektörler ve tansörlerin bileşenlerinin cebirsel fonksiyonları olan invaryantlarını göz önüne alalım. Sadece mutlak olan invaryantlar burada göz önünde bulundurulmuştur, aşağıda verilen sonuçlar Gurevich (1967) tarafından verilmiş ve bağıl invaryantlar için geçerli olan daha genel sonuçların özel durumlarıdır. Kısaltma için X_i sistemindeki vektörler ve tansörlerin bileşenlerini, bazı özel dizilerde a_r ile ve $\overline{X}_i$ sisteminde bunlara karşılık gelen bileşenleri $\overline{a}_r$ ile gösterirsek, $\varphi(a_r)$ vektörler ve tansörlerin bir cebirsel invaryantı şeklinde seçilebilir, böylece;

$$\varphi(a_r) = \varphi(\overline{a}_r)$$

yazılabilir ve $\varphi(a_r)$ cebirsel olduğundan aşağıda verilen formdaki bir denkleme uyar.

$$[\varphi(a_r)]^k + I_1 a_r [\varphi(a_r)]^{k-1} + I_2 a_r [\varphi(a_r)]^{k-2} + \dots + I_k(a_r) = 0 \qquad (1.1.3.2)$$

Burada $I_1, I_2, \dots, I_k$ a_r'nin rasyonel fonksiyonlarıdır. Genelliği kaybetmeden k üssünün en küçük bir olabileceği farz edilebilir; sonra (1.1.3.2) denklemindeki katsayılar teker teker tanımlanır, öte yandan (1.1.3.2) denklem formunun iki eşitliği arasındaki fark φ için en düşük mertebeden bir eşitlik haline gelir. $\varphi(\overline{a}_r)$, nasıl ki a_r'nin fonksiyonu ise $\varphi(\overline{a}_r)$'de $\overline{a}_r$'nin bir fonksiyonu olduğundan $\varphi(\overline{a}_r)$ aşağıda verilen denklemin bir çözümüdür.

$$[\varphi(\overline{a}_r)]^k + I_1 \overline{a}_r [\varphi(\overline{a}_r)]^{k-1} + I_2 \overline{a}_r [\varphi(\overline{a}_r)]^{k-2} + \dots + I_k(\overline{a}_r) = 0 \qquad (1.1.3.3)$$

Ayrıca $\varphi(a_r)$ invaryant olduğundan (1.1.3.3) denkleminden;

$$[\varphi(a_r)]^k + I_1 \overline{a}_r [\varphi(a_r)]^{k-1} + I_2 \overline{a}_r [\varphi(a_r)]^{k-2} + \dots + I_k(\overline{a}_r) = 0 \qquad (1.1.3.4)$$

ifadesi yazılabilir. (1.1.3.2) denkleminin katsayıları tekrarlanmadığından; yani her biri bir kez gözüktüğünden,

$$I_1(\overline{a}_r) = I_1(a_r), \quad I_2(\overline{a}_r) = I_2(a_r), \dots, I_k(\overline{a}_r) = I_k(a_r) \qquad (1.1.3.5)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece bir yada fazla sayıda tansörün her cebirsel invaryantı katsayıları bu tansörlerin rasyonel invaryantları olan bir cebirsel eşitliğin çözümüdür.

Şimdi eğer $\varphi(a_r)$'yi rasyonel bir invaryant olarak varsayacak olursak;

$$\varphi(a_r) = \psi(a_r) \,/\, x(a_r) = \psi(\bar{a}_r) \,/\, x(\bar{a}_r) \qquad (1.1.3.6)$$

formunda açıklanabilir, burada ψ ve x ortak çarpanları olmayan polinomlardır. (1.1.3.6) denkleminden;

$$\psi(\bar{a}_r)\, x(a_r) = \psi(a_r)\, x(\bar{a}_r) \qquad (1.1.3.7)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer $\bar{a}_r$ yerine ifadedeki terimlerden a_r yazarsak (1.1.3.7) göz önünde bulundurulan grubun herhangi bir dönüşümünün geçerli olduğu bir özdeşlik haline gelir. Bu özdeşlikte sol taraf $\psi(a_r)$ ile bölünmelidir. ψ ve x ortak çarpan bulundurmadığından $\psi(\bar{a}_r)$'nin $\psi(a_r)$ ile bölünebildiği anlaşılır. Bununla birlikte $\psi(a_r)$'nin ve $\psi(\bar{a}_r)$'nin mertebesi (a_r'de) aynıdır; buradan M_{ij} dönüşümünün matrisinin bileşenleri sadece bir fonksiyon olan çarpanla farklı olmalıdır. Böyle bir fonksiyonun $|M_{ij}|$'nin toplam kuvveti şeklinde ifade edilmesi gereklidir ve ortogonal dönüşümler için daima ± 1'e eşittir. Böylece;

$$\psi(\bar{a}_r) = \pm\psi(a_r), \qquad x(\bar{a}_r) = \pm x(a_r) \qquad (1.1.3.8)$$

yazılabilir. (1.1.3.8) denklemindeki iki eşitliğin işaret seçimi aynı olmalıdır; eğer dönüşüm grubu uygun ortogonal grup veya alt grupsa, bu yüzden sadece pozitif işaret olacaktır (1.1.3.7) ve (1.1.3.8) denkleminden bir veya daha fazla sayıda

tansörlerin her rasyonel invaryantı bu tansörlerin iki polinomsal invaryantının (bağıl invaryant olan) bir bölümüdür.
Bu yüzden argümanlarda polinomsal olan invaryantları göz önünde bulundurmak yeterlidir. Bağıl invaryantların ne olacağı sorunu yalnızca belirli ve sınırlı sayıdaki durumlarda ortaya çıkar.

$U, V, \ldots$ vektörlerinin ve $\underline{\underline{m}}$, $\underline{\underline{n}}$, ... matrisleri ile ilgili tansörlerin polinomsal bir invaryantı eğer U ve V'nin bileşenlerine ve $\underline{\underline{m}}$ ve diğer matrislerin elemanlarına göre homojen bir polinom olarak ifade edilebiliyorsa homojen olduğu söylenir. Bu durumda, vektörlerin ve tansörlerin polinomsal bir invaryantı aynı vektörler ve tansörlere göre homojen polinomsal invaryantların bir toplamıdır.

Bir I invaryantının her terimi bir lineer dönüşümden sonra vektörlerin ve tansörlerin her birinin bileşenlerinde aynı dereceden terimlerin toplamı olur. Buradan, eğer bir invaryantta vektörlerin ve tansörlerin her birinin bileşenlerinde aynı dereceden olan tüm terimleri alırsak, bu terimlerin toplamı I'nın invaryant olması altında her dönüşümde değiştirilemeyecektir. Üstteki sonuç hemen görülebilir. Aynı zamanda bu sonuç sadece homojen polinomsal invaryantları göz önünde bulundurmayı gerekli kılar.

1.1.4. Ortogonal Gruplar ve Belirli Altgruplar

Bu konuda, araştırmamız gereken vektörler ve tansörlerin kümeleri için tamlık bazlarının dönüşüm grupları açıklanmış olacaktır. Bu grupların önemi sürekli ortamlar mekaniğinde gösterileceği üzere malzeme simetrilerini tanımlamak için kullanılabilir olması gerçeğidir. Tüm gruplar üç boyutlu dönüşümlerin grupları olarak göz önünde bulundurulmuştur. Kısalık için, "üç boyutlu" niteliği genellikle ihmal edilecektir.

1.1.4.1. Full ortogonal grup

Özellikleri (1.1.1.5) ve (1.1.1.6) denklemleri ile M_{ik} tarafından tanımlı tüm ortogonal dönüşümleri içerir. Bir simetri mertebesiyle malzeme izotropisi bu grup altında invaryansı içerir.

1.1.4.2. Uygun ortogonal (döndürme) grubu

$|M_{ik}| = +1$ gibi tüm ortogonal dönüşümler içerir. Bu grup simetri merkezsiz bir izotropik malzemeyi tanımlar.

1.1.4.3. Transvers izotropi

Tek tercihli bir yönde ilerlendiğinde bir doğrultu üzerindeki her noktada malzemenin özelliği değişmiyorsa malzemenin transvers izotropiye sahip olduğu söylenir. Bunun gibi malzemeler için tercih edilen yön civarında dönmeler altında yapısal bağıntılar invaryanttır. Eğer X_3 tercih edilen yön olarak seçilirse bu gibi dönmeler (rotasyonlar);

$$\underline{\underline{M}}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.1.4.1)$$

matrisiyle gösterilir. İzin verilen dönüşümlerin kesin olup olmadığına göre çeşitli durumlar olabilir. Göz önünde bulundurulan dönüşümler aşağıdaki matrislerde verilmiştir:

$$\underline{\underline{R}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{R}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{D}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1.1.4.2)$$

(Bu notasyon Smith ve Rivlin, 1958; ve Green ve Adkins, 1960 tarafından kullanılmıştır). Burada $\underline{\underline{R}}_1$ ve $\underline{\underline{R}}_3$ sırasıyla X_1 ve X_3 eksenlerinde düzlem normalindeki yansımalardır ve $\underline{\underline{D}}_2$, X_2 ekseninden $180°$ boyunca bir dönmeyi gösterir. Dönüşümler tarafından meydana getirilen dönüşüm grupları tarafından karakterize edilen beş mümkün durum aşağıdaki matrislerdeki gibidir;

(i) $\underline{\underline{M}}_\theta$ (iv) $\underline{\underline{M}}_\theta \underline{\underline{D}}_2$

(ii) $\underline{\underline{M}}_\theta \underline{\underline{R}}_1$ (v) $\underline{\underline{M}}_\theta \underline{\underline{R}}_1 \underline{\underline{R}}_3 \underline{\underline{D}}_2$

(iii) $\underline{\underline{M}}_\theta \underline{\underline{R}}_3$

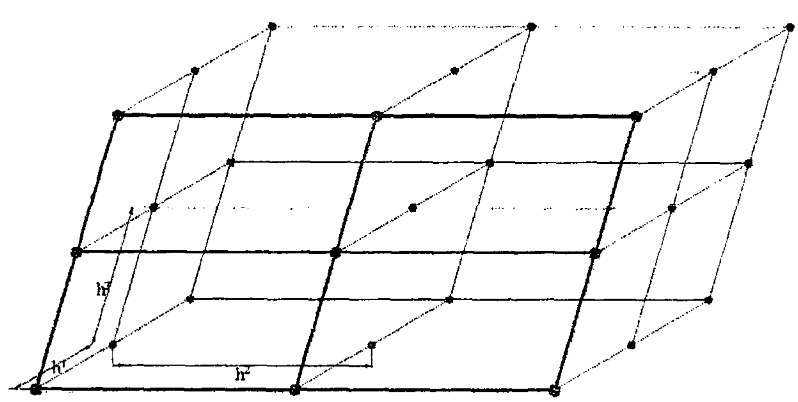
(i) durumu sadece tercih edilen yönde müsaade edilen dönüşümler ve bazen dönüşüm simetrisini karakterize ettiği söylenebilir.

1.1.4.4. Kristal ve Kristal sınıfları

Kristal, belirli bir yerleşim düzeni içerisinde bir araya gelen atomların, ortaya koydukları yerleşim düzeninin üç boyutta tekrarı ile oluşur. Kristal yapı, kristali oluşturan en küçük birim olan "birim hücre" yi ve bunun uzayda yayılarak ne şekilde kristali oluşturduğunu inceleyerek anlaşılabilir. Kristal yapıda dikkati çeken özellik simetridir. Bir kristali ele aldığımızda gerek dış görünüşünde, gerekse atomların iç yerleşiminde çok açık bir simetri özelliği vardır. Bu yüzden gazlarda kesinlikle kristal özellik bulunmaz. Çünkü, bulunduğu kabın şekline göre dış şekil alan gazın içerisindeki atom ve moleküllerde gelişi güzel dağılım gösterirler. Benzer şekilde, sıvılar ve cam da kristal özelliğe sahip olamazlar. Bu tür maddelerde atomlar birbirlerinden oldukça kısa uzaklıklarda bulunsalar bile boyutlarına göre uzun sayılacak bir mesafede periyodik bir tekrar göstermezler. Buna karşılık, bir sıvı düşük sıcaklıklarda soğutulursa katılaşır ve bundan sonra belirli bir şekile ve hacime sahip olabilir. Bu soğutulmuş durumda ortaya çıkan katıda kristallografik özellik gözlenebilir, ancak bu tür katıların cam yapıda amorf bir tarzda oluşabilecekleri de gözden kaçırılmamalıdır.

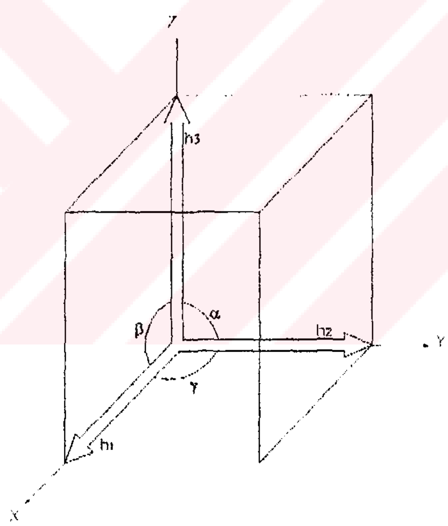
Kristallerde gözlenen simetrik özellik sonucu bu tür yapılar amorf yapılardan fiziksel olarak büyük farklılıklar gösterir. Mesela bir amorf yapı hangi doğrultuda bir dış kuvvetin etkisinde kalırsa kalsın aşağı yukarı aynı direnci gösterir, buna karşılık kristal yapıların dış yüklemelere göre gösterecekleri direnç yüklemenin kristale uygulandığı doğrultuya göre değişir. Belirli bir doğrultuya göre fiziksel özelliklerin farklılık göstermesi kristallerin elektriksel dirençlerinde, mekanik özelliklerinde, ısı iletimlerinde ve optik sabitlerinde de gözlenebilir. Doğrultuya bağımlılık veya yönlenme diyebileceğimiz bu önemli özellik kristalin ilk kez oluşumu sırasında ortaya çıkar ve kristal ilk oluşumu sırasında bir dış fiziksel zorlanmaya uğramıyorsa veya içerisinde bulunduğu kabın şeklini almaya zorlanmıyorsa, iç atomik yapısına bağımlı olacak şekilde bir dış görünümle oluşur. Bu dış şekil kristalin pek çok özelliğinin belirlenmesinde bir tür kimliğini oluşturur. Doğada ideal bir kristal bulmak oldukça zordur ancak kristal kusurları bu tezin kapsamı dışındadır.

Kristal yapı belirli bir düzen içerisinde bir araya gelen atomların bu düzenlerini üç boyutta periyodik olarak devam ettirirken ortaya çıkan düzeni bir nokta ile gösterecek olursak, üç boyutta oluşan kristal noktalardan yapılmış bir kafesi göz önüne almak oldukça açıklayıcı olabilir. Kristali sembolize eden bu şekle bir uzay örgüsü denir. Örgüyü oluşturan her bir noktanın çevresinde nasıl bir düzen varsa diğer noktaların çevresinde de aynı düzen geçerlidir.



Şekil 1.1. Bir örgü örneği

Kristal örgü'nün herhangi bir sıra veya dizisi üzerindeki atomlar ya da atom grupları aralarındaki uzaklık hep aynı kalacak şekilde birbirlerini takip ederler. Aynı düşünce diğer iki boyut için de geçerli olup atom grupları birbirlerini eşit aralıklarla tekrar edeceklerdir. Üç boyut için tekrar aralıkları aynı olabileceği gibi farklıda olabilir. Uzaklıkların üç boyutta birbirinden farklı olduğunu düşünür ve bu uzaklıkları h_1 , h_2 , h_3 olarak tanımlarsak belirli bir başlangıç noktasından çıkan h_1 , h_2 , h_3 vektörleri kristal içerisinde bir hacim belirler. Bu hacme birim örgü hücresi adı verilmektedir. En simetrik kristal h_1 , h_2 , h_3 uzaklıkları birbirine eşit ve aralarındaki açılar 90° olan kübik sistemdeki kristaldir. Doğada gözlenen kristaller eksenleri arasındaki uzaklıklar ve açılara göre sınıflandırılmaktadır (Durlu, 1992).



Şekil 1.2. Kristal örgüde eksenler ve açılar

Bir kristalin simetrisinin onun fiziksel özelliklerinin simetrisini nasıl etkileyeceği problemi Neuman tarafından ortaya atılan bir temel postulatta izah edilmiştir. Neuman prensibine göre; bir kristalin herhangi bir fiziksel özelliğinin simetri elemanları, kristalin nokta grubunun simetri elemanlarını içinde taşır. Bir kristalin nokta grubu, o kristal yapının sahip olduğu makroskopik simetri elemanlarının grubudur. Bu yaklaşım kristallerin otuziki kristal sınıfına ayrılması için bir temel oluşturur. Bu konuyla ilgili bazı temel kavramlar ve tanımlar kısaca aşağıda verilmektedir.

Simetri merkezi: koordinat başlangıcı simetri merkezinde seçildiğinde, kristaldeki her $\underset{\sim}{h}_1, \underset{\sim}{h}_2, \underset{\sim}{h}_3$ örgü noktasına eşdeğer bir $-\underset{\sim}{h}_1, -\underset{\sim}{h}_2, -\underset{\sim}{h}_3$ örgü noktası vardır. Yani kristal, simetri merkezinin bulunduğu noktaya göre simetriktir.

Ayna düzlemi: yapılan bir işlemin her örgü noktasını onun aynadaki görüntüsüne götürmesini sağlayan bir düzlemdir.
Kayma düzlemi: yapılan bir işlem her örgü noktasını onun aynadaki görüntüsünün konumuna götürür ve daha sonra ayna düzlemine paralel kaydırır.

n- kat dönme ekseni: verilen bir eksen etrafında $2\pi/n$'lik dönme kristalin örgü noktalarını yine örgü noktalarına götürür.

n- kat vida ekseni: verilen bir eksen etrafında $2\pi/n$'lik bir dönme ve bunun ardından dönme eksenine paralel öteleme verir.

n- kat inversiyon ekseni: verilen bir eksen etrafında $2\pi/n$'lik bir dönme ve bunu izleyecek şekilde, eksen üzerinde verilen bir noktaya göre inversiyon alma işlemi sağlar (Dikici, 1993).

Referans durumu için belirlenen malzemeler üç tercihli yönde mevcuttur ve $\underset{\sim}{h}_1, \underset{\sim}{h}_2, \underset{\sim}{h}_3$ ile gösterilecek olan üç birim vektörle tanımlanabilirler. Verilen bir sınıf ve birleştiği dönüşüm grubu için malzeme, kendi referans yapısından ayrılmaz. Bir yapıya herhangi bir dönüşüm grubu vasıtasıyla dönüşür.

Alt sisteme gruplanmış, otuziki kristal sınıfı vardır. Kristal sınıfların altı sistemi aşağıdaki gibidir:

(i) Triklinik sistem

Bu sistemde birim vektörler $\underset{\sim 1}{h}, \underset{\sim 2}{h}, \underset{\sim 3}{h}$ ile tanımlanan tercih edilen yönlerin yöneliminde hiçbir sınırlama yoktur, $h_1 \neq h_2 \neq h_3; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^o$. Bu sistem iki sınıf içerir.

(ii) Monoklinik sistem

Burada tercih edilen yönlerden biri diğer iki düzleme diktir, $h_1 \neq h_2 \neq h_3; \alpha = \beta = 90^o \neq \gamma$. (belirli $\underset{\sim 1}{h}$ ile alınız) sistem üç sınıfı içerir.

(iii) Rombik sistem

Birim vektörleri h_i karşılıklı olarak diktir. $h_1 \neq h_2 \neq h_3; \alpha = \beta = \gamma = 90^o$. Bu sistemde üç sınıf vardır.

(iv) Tetragonal sistem

Bu sistemde h_i vektörleri de karşılıklı olarak birbirine diktir. $\underset{\sim 3}{h}$ olarak aldığımız tercih edilen yönlerden biri özel işarete sahiptir ve simetrinin asal ekseni olarak adlandırılır. $h_1 = h_2 \neq h_3; \alpha = \beta = \gamma = 90^o$ Sistem yedi sınıf içerir.

(v) Heksagonal sistem

$\underset{\sim 3}{h}$ vektörü, $\underset{\sim 1}{h}$ ve $\underset{\sim 2}{h}$ ile tanımlana düzleme diktir, $\underset{\sim 3}{h}$ yönü civarında $2\pi / 3$'lük dönüşle $\underset{\sim 2}{h}$ ile $\underset{\sim 1}{h}$ çakışık hale getirilebilir. Bu sistem oniki sınıfı içerir.

(vi) Kübik sistem

Her sınıfı karakterize eden dönüşümleri tanımlamak için, her bir sınıf sistemi için bir referans koordinat sistemi için bir referans koordinat sistemini seçmek uygundur. Triklinik sistem için, bu bir rasgele dikdörtgensel kartezyen sistemdir; monoklinik sitem için X_1 ekseni $\underset{\sim 1}{h}$ yönüne paralel olarak seçilir, fakat diğer taraftan rasgele dikdörtgensel kartezyen sistemdir; rombik, tetragonal ve kübik sistemler için X_1, X_2, X_3 eksenleri sırasıyla $\underset{\sim 1}{h}, \underset{\sim 2}{h}, \underset{\sim 3}{h}$ vektörlerinin yönlerine paralel olarak alınır ve heksagonal sistem için bir dikdörtgensel koordinat sisteminde, X_1 ve X_3

eksenleri h_1 ve h_3'e sırasıyla paralel alınır. Sonra (Smith ve Rivlin, 1958) bu koordinatların dönüşümlerinin terimlerine sahip kristal sınıfların simetri özellikleri de açıklanabilir. ($\underline{\underline{I}}$, 3 x 3 birim matrisi gösterir)

$$\underline{\underline{I}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad \underline{\underline{C}}=-\underline{\underline{I}}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{R}}_1=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{R}}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{R}}_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{D}}_2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{D}}_3=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{M}}_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{M}}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\tag{1.1.4.3}$$

$$\underline{\underline{S}}_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\sqrt{3}&0\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{S}}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\sqrt{3}&0\\\frac{1}{2}\sqrt{3}&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{D}}_2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{D}}_3=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{T}}_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\qquad \underline{\underline{T}}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ve matrisler $\underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{T}}_2, \underline{\underline{T}}_3$; $\underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{T}}_1$ ile benzerlikle belirlenir. Bu matrislerin sonuçlarına uygun dönüşümler aynı zamanda kullanılmaktadır. Çizelge 1 her bir sınıfı karakterize eden dönüşümlerin matrislerini verir. Çizelge 1'de her bir sınıfa uyan dönüşümlerin gruplarının dizilerini gösterir.

Ortogonal dönüşümlerin grupları aynı zamanda herhangi bir transformasyon grubuyla değiştirilemeden kalan bileşenlere sahip tansörlerle karakterize edilebilir. Örneğin dik kartezyen koordinatlarda, kroniker delta δ_{ij} herhangi bir ortogonal dönüşümle değiştirilemez ve permutasyon tansörü e_{ijk} herhangi bir uygun ortogonal dönüşüm tarafından değiştirilemez. Smith ve Rivlin (1957a) bu tip tansörleri, örnekleriyle birlikte belirleyen bir metodu vermişlerdir. Ayrıca Smith ve Rivlin (1964) tarafından bütün kristal sınıfları için aşağıdakine benzer bir çizelge verilmiştir.

Çizelge 1. Kristal sınıflarını karakterize eden dönüşümler

Sistem	Sınıf Numara	Sınıf	Transformasyonlar	η
Triklinik	1	Pedial	$\underline{\underline{I}}$	1
	2	Pinacoidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}}$	2
Monoklinik	3	Domatic	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{R}}_1$	2
	4	Sphenoidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_1$	2
	5	Prismatic	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{R}}_1$	4
Rombik	6	Rhombic – pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{D}}_1$	4
	7	Rhombic–disphenoidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3$	4
	8	Rhombic–dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3$	8
Tetragonal	9	Tetragonal– disphenoidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{T}}_3$	4
	10	Tetragonal–pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{T}}_3$	4
	11	Tetragonal–dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{T}}_3,$ $\underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{T}}_3$	8
	12	Tetragonal-scalenohedral	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{T}}_3,$ $\underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{T}}_3$	8

Tetragonal	13	Ditetragonal-pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{T}}_3$	8
	14	Tetragonal-trapezohedral	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{T}}_3$	8
	15	Ditetragonal-dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{T}}_3, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{T}}_3$	16
Heksagonal	16	Trigonal-Pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2$	3
	17	Rhombohedral	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_2$	6
	18	Ditrigonal-pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_2$	6
	19	Trigonal-trapezohedral	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{S}}_2$	6
	20	Hexagonal-scalenohedral	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_1, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_1\underline{\underline{S}}_2$	12
	21	Trigonal-dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_2$	6
	22	Hexagonal-pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_2$	6
	23	Hexagonal-dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_2$	12
	24	Ditrigonal-dipyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_3, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_3\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_2, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_2\underline{\underline{S}}_2$	12
	25	Dihexagonal-pyramidal	$\underline{\underline{I}}, \underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_1\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{R}}_2, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{R}}_2\underline{\underline{S}}_2, \underline{\underline{D}}_3, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_1, \underline{\underline{D}}_3\underline{\underline{S}}_2$	12

	26	Dihexagonal-trapezohedral	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{S}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{S}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{S}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{S}}_2$	12
	27	Dihexagonal-dipyramidal	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{S}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{S}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{S}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{S}}_2$	24
Kübik	28	Tetartoidal	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$	12
	29	Diploidal	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{R}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$	24
	30	Hextetrahedral	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_3$	24
	31	Gyroidal	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$	24

Kübik	32	Hexoctohedral	$\underline{\underline{I}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{R}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3$, $\underline{\underline{D}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3$, $\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_1\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_2\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{R}}_3\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_1\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_2\,\underline{\underline{T}}_3$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{M}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_1$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_2$, $\underline{\underline{D}}_3\,\underline{\underline{T}}_3$	48

1.2. İzotropi

Bölüm 2.1 ve Bölüm 2.7'de tam ve uygun ortogonal gruplar altında ve üç boyutlu vektörlerin ve ikinci mertebeden tansörlerin rasgele sayıları için tamlık bazları yapılandırılmış olacaktır.

1.2.1. Vektörler için tamlık bazları

Mutlak vektörlerin rasgele bir sayısı m için bir entegrenin burada verilecek olan derivasyonu Weyl (1939)'a dayanılarak verilmiştir. Fakat, bu derivasyon vektörlerinin iki veya üç boyutlu halleri ile özel tutulmuştur. Weyl' in ispatı n-boyutlu uzayın genel durumuna uygulanabilir.

Bir invaryant eğer tüm ortogonal transformasyonlar altında değişmiyorsa çift, negatif determinantlı olan bir ortogonal transformasyon altında işaret değiştiriyorsa tektir. Çift invaryantlar full ve uygun ortogonal transformasyon grupları için mutlak invaryantlardır; tek invaryantlar uygun grup için mutlak invaryantlar ve full grup için bağıl invaryantlar olarak değerlendirilir. Bölüm 1.1.1.'den şunu hatırlıyoruz ki skaler çarpım $U_i^{(r)} \cdot U_i^{(s)}$ vektörleri U_r, U_s vektörlerinin bir çift invaryantıdır (burada tüm vektörler mutlak vektör olarak alınmıştır). Üçlü skaler çarpımın sonucu olan $e_{ijk} U_i^{(r)} U_j^{(s)} U_k^{(t)}$ $(r \neq s \neq t \neq r)$'ın U_r, U_s, U_t vektörlerinin tek invaryantı olduğu doğrulanabilir. Böylece vektörlerin invaryantları şu şekildedir

$$U_i^{(r)} U_i^{(s)}, \quad e_{ijk} U_i^{(r)} U_j^{(s)} U_k^{(t)} \quad (i,j,k = 1,2,3; \; r,s,t = 1,2,\ldots,m) \tag{1.2.1.1}$$

İkinci tip invaryantlarda r, s, t indislerinin hepsi birbirinden farklı olmak zorundadır, çünkü aksi takdirde önceden verilmiş olan ifade özdeş olarak sıfıra eşit olacaktır. (1.2.1.1) denkleminde verilen invaryantlar fonksiyonel olarak bağımsız değildirler, zira bu düşünce onların syzygy'e vasıtasıyla birbiriyle irtibatlı oldukları gösterilerek doğrulanabilir.

$$(e_{ijk} U_i^{(n)} U_j^{(p)} U_k^{(q)})(e_{ijk} U_i^{(r)} U_j^{(s)} U_k^{(t)}) = \begin{vmatrix} U_i^{(n)} U_i^{(r)} & U_i^{(n)} U_i^{(s)} & U_i^{(n)} U_i^{(t)} \\ U_i^{(p)} U_i^{(r)} & U_i^{(p)} U_i^{(s)} & U_i^{(p)} U_i^{(t)} \\ U_i^{(q)} U_i^{(r)} & U_i^{(q)} U_i^{(s)} & U_i^{(q)} U_i^{(t)} \end{vmatrix} \tag{1.2.1.2}$$

Aynı zamanda iki boyutlu durumda benzeşen sonuçları kullanmak gerekli olacaktır ki, bu durumda aşağıdaki ifadelerin invaryant olduğunu doğrulamak mümkündür.

$$U_\alpha^{(r)} U_\alpha^{(s)}, \quad e_{\alpha\beta} U_\alpha^{(r)} U_\beta^{(s)} \quad (r \neq s) \tag{1.2.1.3}$$

Burada $\alpha, \beta = 1, 2$; $r, s = 1, 2, \ldots, m$; $e_{12} = -e_{21} = 1$; $e_{11} = e_{22} = 0$ dır. Yukarıda verilen (1.2.1.3) denklemindeki ilk terimdeki ifadeler çift invaryantlardır; ikinci terimdeki ifadeler ise tek invaryantlardır. Bunlar aşağıda gösterildiği gibi syzygy vasıtasıyla birbirleriyle irtibatlıdır.

$$(e_{\alpha\beta} U_\alpha^{(p)} U_\beta^{(q)})(e_{\alpha\beta} U_\alpha^{(r)} U_\beta^{(s)}) = \begin{vmatrix} U_\alpha^{(p)} U_\alpha^{(r)} & U_\alpha^{(p)} U_\alpha^{(s)} \\ U_\alpha^{(q)} U_\alpha^{(r)} & U_\alpha^{(q)} U_\alpha^{(s)} \end{vmatrix} \tag{1.2.1.4}$$

Amacımız, üç boyutlu uzayda vektörlerin her polinomsal invaryantının (tek veya çift) (1.2.1.1) formundaki invaryantlara göre bir polinom olarak ifade edilebileceğini iki boyutlu uzayda ise (1.2.1.3) formundaki invaryantların polinomsal invaryantları olarak ifade edilebileceğini göstermektir. İlk olarak şuna dikkat etmeliyiz ki; (1.1.3.1) ifadesi ile verilen polarizasyon operatörü D_{pq} nun, (1.2.1.1) ve (1.2.1.3)'de verilen invaryantlara uygulanması sonucunda aynı tipte yeni invaryantlar üretilmektedir. Nitekim üç boyutlu olarak;

$$
\begin{aligned}
D_{pq} U_i^{(q)} U_i^{(r)} &= U_j^{(p)} \frac{\partial}{\partial U_j^{(q)}} \left(U_i^{(q)} U_i^{(r)} \right) = U_j^{(p)} \frac{\partial U_i^{(q)}}{\partial U_j^{(q)}} U_i^{(r)} + U_j^{(p)} U_i^{(q)} \frac{\partial U_i^{(r)}}{\partial U_j^{(q)}} \\
&= U_j^{(p)} \delta_{ij} U_i^{(r)} + U_j^{(p)} U_i^{(q)} \cdot 0 = U_i^{(p)} U_i^{(r)} \\
D_{pq} U_i^{(q)} U_i^{(q)} &= U_j^{(p)} \frac{\partial}{\partial U_j^{(q)}} \left(U_i^{(q)} U_i^{(q)} \right) = U_j^{(p)} \frac{\partial U_i^{(q)}}{\partial U_j^{(q)}} U_i^{(q)} + U_j^{(p)} U_i^{(q)} \frac{\partial U_i^{(q)}}{\partial U_j^{(q)}} \\
&= 2 U_j^{(p)} \delta_{ij} U_i^{(q)} = 2\, U_i^{(p)} U_i^{(q)} \qquad (i = 1,2,3)
\end{aligned}
\tag{1.2.1.5}
$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Yukarıda açıkça ifade edilen, polarizasyon operatörünün gerektirdiği şekilde türev alma işlemleri $D_{pr} = U_n^{(p)} \dfrac{\partial}{\partial U_n^{(r)}}$ şeklinde verilen indislere göre (1.2.1.1) ifadesindeki ikinci terime yani üç vektörün karışık skaler çarpımına uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
D_{pr} e_{ijk} U_i^{(r)} U_j^{(s)} U_k^{(t)} = e_{ijk} U_i^{(p)} U_j^{(s)} U_k^{(t)} \quad (i, j, k = 1,2,3) \tag{1.2.1.6}
$$

ve benzer işlemler aynı şekilde iki boyutlu uzayda tekrarlanırsa;

$$
\begin{aligned}
D_{pq} U_\alpha^{(q)} U_\alpha^{(r)} = U_\alpha^{(p)} U_\alpha^{(r)}, \qquad D_{pq} U_\alpha^{(q)} U_\alpha^{(q)} = 2\, U_\alpha^{(p)} U_\alpha^{(q)} \\
D_{pr} e_{\alpha\beta} U_\alpha^{(r)} U_\beta^{(s)} = e_{\alpha\beta} U_\alpha^{(p)} U_\beta^{(s)} \qquad (\alpha, \beta = 1,2)
\end{aligned}
\tag{1.2.1.7}
$$

eşitlikleri elde edilir.

Full ortogonal grup altında iki boyutlu tek bir vektör olan U'nun invaryantları ile işe başlayabiliriz.

$f_1\,(U_1,U_2)$'nin böyle bir polinomsal invaryant olduğunu farz edelim ve U'nun $\overline{X}_i$ koordinat sistemine göre bileşenleri $(\overline{U}_1,0)$ olsun. f_1 invaryant olduğundan (bu durumda muhtemelen tek invaryant olarak düşünülebilir)

$$f_1(U_1,U_2) = \pm f_1(\overline{U}_1,0) = \pm\varphi\,(\overline{U}_1) \tag{1.2.1.8}$$

ifadesini yazabiliriz.

Eğer f_1 tek invaryant olsa idi $\overline{X}_1 \rightarrow \overline{X}_1$, $\overline{X}_2 \rightarrow -\overline{X}_2$ transformasyonu altında işaret değiştirirdi. Fakat $\overline{U}_1$ ve aynı şekilde $f_1(\overline{U}_1,0)$ böyle bir transformasyonla değişmemektedir; bu nedenle, f_1 tek invaryant olamaz. Nitekim $f_1(\overline{U}_1,0)$, $\overline{U}_1^2$'ne göre bir polinom olmalıdır. Fakat $\overline{U}_1^2 = U_1^2 + U_2^2$'ne eşit olması durumunda f_1'in $U_1^2 + U_2^2$ ifadesine göre de bir polinom olması gerekir. Bunun sonucunda U'nun her polinomsal invaryantı $U_\alpha\, U_\alpha = U_1^2 + U_2^2$ terimine göre de bir polinomdur.

Peano teoremine göre, (1.2.1.5) ve (1.2.1.7) denklemlerinden anlaşıldığı üzere; iki boyutlu rasgele seçilmiş vektör sayısının her polinomsal invaryantının (1.2.1.3) denkleminde verilen ifade tiplerinde bir polinom olduğu ortaya çıkmaktadır. (1.2.1.4) tarzındaki bağıntılar nedeniyle, vektörlerin çift olan her invaryantı $U_\alpha^{(r)}\, U_\alpha^{(s)}$ skaler sonuçları cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir olması gerekmektedir.

Şimdi üç boyutlu olarak U, V olmak üzere iki vektör ele alalım. Tipik bir polinomsal invaryant $f_2(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3)$ olsun. Vektörleri $\overline{X}_i$ şeklinde verilen bir koordinat sisteminde referanslayalım. Bu sistemde $\overline{X}_3$ ekseni U, V vektörlerinin düzlemine dik olarak seçilmiştir. Böyle bir sistemde vektörlerin komponentleri $(\overline{U}_1, \overline{U}_2, 0)$, $(\overline{V}_1, \overline{V}_2, 0)$ formlarına sahiptir ve;

$$f_2(U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3) = f_2(\overline{U}_1, \overline{U}_2, 0, \overline{V}_1, \overline{V}_2, 0)$$

şeklinde yazılabilir.

f_2 tek invaryant olsaydı $\overline{X}_1 \to \overline{X}_1$, $\overline{X}_2 \to \overline{X}_2$, $\overline{X}_3 \to -\overline{X}_3$ transformasyonu altında işaret değiştirirdi. Fakat $\overline{U}_1, \overline{U}_2, \overline{V}_1, \overline{V}_2$ böyle bir transformasyon vasıtasıyla işaret değiştirmez. Bu nedenle;

$$f_2(\overline{U}_1, \overline{U}_2, 0, \overline{V}_1, \overline{V}_2, 0) = -f_2(\overline{U}_1, \overline{U}_2, 0, \overline{V}_1, \overline{V}_2, 0)$$

yazılır.

Nitekim eğer f_2 tek bir invaryant olursa $f_2 = 0$ olacaktır; bu nedenle f_2 sadece çift invaryant olabilir. Şimdi $\overline{X}_3$ değiştirmeden bırakan ortogonal transformasyonlar altında $(\overline{U}_1, \overline{U}_2)$ ve $(\overline{V}_1, \overline{V}_2)$ iki boyutlu bir uzayda bir vektör çiftinin komponentleri şeklinde transform olacaktır ve $f_2(\overline{U}_1, \overline{U}_2, 0, \overline{V}_1, \overline{V}_2, 0)$ böyle transformasyonlar altında çift invaryanttır. Nitekim yukarıda ispat edilen sonuç itibariyle f_2 terimi $\overline{U}_1^2 + \overline{U}_2^2, \overline{V}_1^2 + \overline{V}_2^2, \overline{U}_1\overline{V}_1 + \overline{U}_2\overline{V}_2$ de bir polinomdur. Fakat,

$$\boxed{\overline{U}_1^2 + \overline{U}_2^2 = U_i U_i \quad , \quad \overline{V}_1^2 + \overline{V}_2^2 = V_i V_i \quad , \quad \overline{U}_1\overline{V}_1 + \overline{U}_2\overline{V}_2 = U_i V_i}$$

dır, ki böylelikle f_2'nin $U_i U_i, V_i V_i, U_i V_i$ $(i = 1, 2, 3)$ terimlerine göre bir polinom olması gerekir. Peono teoremi ve (1.2.1.5) ve (1.2.1.6) denklemlerinden; üç boyutlu olarak rasgele sayıdaki vektörlerin her polinomsal invaryantının (1.2.1.1) tipindeki ifadelerde bir polinom olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır ki buda gerekli olan sonuçtur. Yine (1.2.1.2) ifadesini kullanırsak vektörlerin her çift polinomsal invaryantlarının da $U_i^{(r)} U_i^{(s)}$ tipindeki ifadelerde bir polinom olduğunu görürüz.

Bir önceki sonuçlardan iki boyutlu full ortogonal gruplar için rasgele sayıda vektörler için bir tamlık bazı $U_\alpha^{(r)}\,U_\alpha^{(s)}$ muhtemel skaler çarpımların hepsinden ibarettir. İki boyutlu uygun ortogonal grup için $U_\alpha^{(r)}\,U_\alpha^{(s)}$ ve $e_{\alpha\beta}\,U_\alpha^{(r)}\,U_\alpha^{(s)}$ formu şeklinde tüm muhtemel ifadelerden ibarettir; üç boyutlu full ortogonal grup için $U_i^{(r)}\,U_i^{(s)}$ şeklinde tüm muhtemel skaler çarpımlardan ibarettir ve üç boyutlu uygun ortogonal grup için $U_i^{(r)}\,U_i^{(s)}$ şeklinde tüm muhtemel skaler çarpımlar ve $e_{ijk}\,U_i^{(r)}\,U_j^{(s)}\,U_k^{(l)}$ şeklinde tüm olası üçlü skaler çarpımlardan ibarettir. Özet olarak, tamlık bazlarına (yani entegre tabanlara) yalnızca mutlak invaryantlar dahil edilmiştir.

1.2.2. İzotropik tansörler

İzotropik bir tansör, dik kartezyen koordinatların herhangi bir uygun transformasyonu altında komponentleri değişmeyen bir tansör olarak tanımlanır. Bazı amaçlarla biz ister uygun veya ister uygun olmayan herhangi bir transformasyon altında invaryant olan izotropik tansörlere ihtiyaç duyarız; bu tansörler, matris $\underline{\underline{C}} = -\underline{\underline{I}}$ ile verilen merkezi evirme (tersine çevirme) transformasyonu altında invaryant olmayan tansörleri izotropik tansörler listesinden elimine etmek suretiyle elde edilebilir. Bu tezde biz sadece üç boyutlu izotropik tansörleri ele alıyoruz.

Smith ve Rivlin (1957a) bu metodu özellikle bu probleme uygulamayıp bazı belirli diğer transformasyon grupları altında invaryant olan tansörlerin saptanması için uygulamalarına rağmen, izotropik tansörleri elde etmede bu metot uygun bir şekilde kullanılabilir.

$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_\mu}$ terimini μ. dereceden izotropik bir tansör olarak alalım. Sonra M_{ij} transformasyon matrisi yardımıyla tanımlanan herhangi uygun ortogonal transformasyon için aşağıda verilen dönüşümü dikkate alırsak,

$$\bar{\alpha}_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} = M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \dots M_{i_\mu j_\mu} = \alpha_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} \tag{1.2.2.1}$$

ifadesini yazarız.

Ayrıca aşağıda verilen skaler ifadeyi de göz önüne alalım.

$$J = \alpha_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} U_{i_1}^{(1)} U_{i_2}^{(2)} \dots U_{i_\mu}^{(\mu)} \tag{1.2.2.2}$$

Burada düşünülen bütün fonksiyonlar polinomlar şeklinde olduğundan, diferansiyel veya türev alma işlemi cebirsel bir proses gibi düşünülebilir. (1.2.2.2) skaler ifadesi dikkate alınarak aşağıdaki ifadeyi yazarız.

$$\alpha_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} = \frac{\partial^\mu J}{\partial U_{i_1}^{(1)} \, \partial U_{i_2}^{(2)} \, \dots \, \partial U_{i_\mu}^{(\mu)}} \tag{1.2.2.3}$$

Vektörlerin ortogonal bir transformasyon altında,

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \alpha_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} \bar{U}_{i_1}^{(1)} \bar{U}_{i_2}^{(2)} \dots \bar{U}_{i_\mu}^{(\mu)} \\ &= \alpha_{i_1 \; i_2 \; \dots \; i_\mu} M_{i_1 j_1} M_{i_2 j_2} \dots M_{i_\mu j_\mu} U_{j_1}^{(1)} U_{j_2}^{(2)} \dots U_{j_\mu}^{(\mu)} \\ &= \alpha_{j_1 \; j_2 \; \dots \; j_\mu} U_{j_1}^{(1)} U_{j_2}^{(2)} \dots U_{j_\mu}^{(\mu)} = J \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceği görülmektedir. Nitekim, U_r $(r = 1, 2, 3, \dots, \mu)$ vektörlerinin ortogonal transformasyonu altında J invaryanttır. Bu nedenle J, (1.2.1.1) denkleminde verilen ifade tiplerinde bir polinom olarak ifade edilebilir. J'nin yapılanma tarzını dikkate alırsak, vektörlerin her birinin bileşenlerine göre J aynı zamanda multilineerdir. Böylelikle J'nin tipik bir terimi

$$\beta \, (U_i^{(A)} U_i^{(B)}) (U_j^{(C)} U_j^{(D)}) \dots (U_k^{(E)} U_k^{(F)}) (e_{pqr} U_p^{(G)} U_q^{(H)} U_r^{(K)}) \dots (e_{stu} U_s^{(L)} U_t^{(M)} U_u^{(N)}) \tag{1.2.2.4}$$

dir ki burada β sayısal bir katsayıdır, A, B, C, D, ... , E, F, G, H, K, ..., L, M, N 1, 2, ..., μ'nin bir permütasyonudur.

$$\frac{\partial^2 (U_i^{(A)} U_i^{(B)})}{\partial U_j^{(A)} \partial U_k^{(B)}} = \delta_{jk} \quad , \quad \frac{\partial^3 (e_{npq} U_n^{(G)} U_p^{(H)} U_q^{(K)}}{\partial U_r^{(G)} \partial U_s^{(H)} \partial U_t^{(K)}} = e_{rst} \tag{1.2.2.5}$$

olduğu için hemen (1.2.2.3) ve (1.2.2.4) denkleminden şu sonuç çıkmaktadır: $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_\mu}$ ifadesi, her birisi kroniker deltaların ve üçüncü dereceden permütasyon tansörlerinin dış çarpımlarından oluşan terimlerin lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilirler.

$$e_{ijk}\, e_{rst} = \begin{vmatrix} \delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it} \\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt} \\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt} \end{vmatrix} \tag{1.2.2.6}$$

olduğu için $\alpha_{i_1, i_2, \ldots, i_\mu}$ öyle bir tarzda ifade edilebilir ki, terimlerinin her biri çoğunlukla kroniker deltalar ile üçüncü dereceden permütasyon tansörlerinin bir dış çarpımı şeklinde ifade edilebilirler. Böylelikle eğer μ çift ise, $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_\mu}$ ifadesini

$$\delta_{i_\alpha i_\beta}\, \delta_{i_\gamma i_\delta} \ldots \delta_{i_\sigma i_\tau} \tag{1.2.2.7}$$

tipindeki bir terimin toplamı olarak yazabiliriz ve eğer μ tek ise,

$$\delta_{i_\alpha i_\beta}\, \delta_{i_\gamma i_\delta} \ldots \delta_{i_\lambda i_\gamma}\, e_{i_\rho i_\sigma i_\tau} \tag{2.2.8}$$

tipindeki terimin bir toplamı olarak yazabiliriz. Burada her durumda $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \rho, \sigma, \tau)$, $(1, 2, \ldots, \mu)$'nün bir permütasyonudur.

Çift mertebeden izotropik tansörlerin uygun olmayan ortogonal transformasyonlar altında invaryant olduğu kolaylıkla görülebilirken öte yandan tek mertebeden olanların böyle transformasyonlar altında işaret değiştirdiği kolaylıkla görülebilir.

1.2.3. Vektörlerin ve ikinci mertebeden tansörlerin invaryantları; genel formlar

Önceki bölümde elde edilen izotropik tansörlerle ilgili sonuçlar vektörlerin ve ikinci mertebeden tansörlerin polinomsal invaryantlarında genel ifadeleri elde etmek için kullanılabilirler. Bu tezde invaryant terimi tek veya çift bir invaryant anlamına gelebilir; verilmiş olan bir invaryantın tek veya çift olup olmadığını saptamak her zaman kolay bir olaydır; eğer sadece uygun ortogonal transformasyonlar ele alınırsa fark elbette ortadan kalkar.

U_r $(r = 1, 2, \dots, \nu)$ vektörlerinin ve $p_{ij}^{(s)}$ $(s = 1, 2, \dots, \lambda)$ ikinci dereceden tansörlerinin polinomsal invaryantı I olsun. Daha önce verilen sonuçlara dayanarak genellikten bir şey kaybetmeksizin I'nın homojen bir invaryant olduğu kabul edilebilir. Böylece I aşağıdaki formda ifade edilir;

$$I = \beta_{i_1 i_2 \dots i_n\, j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_l k_l}\, U_{i_1}^{(r_1)}\, U_{i_2}^{(r_2)} \dots U_{i_n}^{(r_n)}\, p_{j_1 k_1}^{(s_1)}\, p_{j_2 k_2}^{(s_2)} \dots p_{j_l k_l}^{(s_l)} \tag{1.2.3.1}$$

burada $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ üst indisleri $(1, 2, \dots, \nu)$'den seçilmiş tamsayılar olup hepsinin birbirinden farklı olması gerekmemektedir, benzer şekilde $(s_1, s_2, \dots, s_l)$ üst indisleri ise $(1, 2, \dots, \lambda)$'dan seçilen ve yine birbirlerinden farklı olmaları gerekmeyen tamsayılardır. Ayrıca $(\beta_{i_1 i_2 \dots i_n\, j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_l k_l})$ terimi de bir sayısal katsayılar cümlesini temsil etmektedir.

M_{ij} ile verilen bir ortogonal transformasyon altında U_r ve $p_{ij}^{(s)}$'in bileşenleri aşağıdaki gibi transform edilmiştir.

$$\overline{U}_p^{(r)} = M_{pi}\, U_i^{(r)}, \qquad \overline{p}_{qt}^{(s)} = M_{qj}\, M_{tk}\, p_{jk}^{(s)} \tag{1.2.3.2}$$

Keza I invaryant olduğu için;

$$I=\beta_{v_1 v_2 \dots v_n q_1 t_1 q_2 t_2 \dots q_l t_l}\,\overline{U}_{v_1}^{(r_1)}\,\overline{U}_{v_2}^{(r_2)}\dots\overline{U}_{v_n}^{(r_n)}\,\overline{p}_{q_1 t_1}^{(s_1)}\,\overline{p}_{q_2 t_2}^{(s_2)}\dots\overline{p}_{q_l t_l}^{(s_l)} \tag{1.2.3.3}$$

şeklinde ifade edilir.

(1.2.3.2) formundaki bağıntıları dikkate alarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz;

$$\overline{U}_{v_1}^{(r_1)}=M_{v_1 i_1}\,U_{i_1}^{(r_1)},\qquad \overline{p}_{q_1 t_1}^{(s_1)}=M_{q_1 j_1}\,M_{t_1 k_1}\,p_{j_1 k_1}^{(s_1)}$$

$$\overline{U}_{v_2}^{(r_2)}=M_{v_2 i_2}\,U_{i_2}^{(r_2)},\qquad \overline{p}_{q_2 t_2}^{(s_2)}=M_{q_2 j_2}\,M_{t_2 k_2}\,p_{j_2 k_2}^{(s_2)}$$

$$\overline{U}_{v_n}^{(r_n)}=M_{v_n i_n}\,U_{i_n}^{(r_n)},\qquad \overline{p}_{q_n t_n}^{(s_n)}=M_{q_n j_n}\,M_{t_n k_n}\,p_{j_n k_n}^{(s_n)}$$

yukarıda verilen bağıntıların (1.2.3.3) denkleminde yerine konması durumunda

$$\begin{aligned}I=&\beta_{v_1 v_2 \dots v_n q_1 t_1 q_2 t_2 \dots q_l t_l}\,M_{v_1 i_1}U_{i_1}^{(r_1)}M_{v_2 i_2}U_{i_2}^{(r_2)}\dots M_{v_n i_n}U_{i_n}^{(r_n)}\\ &M_{q_1 j_1}M_{t_1 k_1}P_{j_1 k_1}^{(s_1)}M_{q_2 j_2}M_{t_2 k_2}P_{j_2 k_2}^{(s_2)}\dots M_{q_n j_n}M_{t_n k_n}P_{j_n k_n}^{(s_n)}\\ =&\beta_{v_1 v_2 \dots v_n q_1 t_1 q_2 t_2 \dots q_l t_l}\,M_{v_1 i_1}\,M_{v_2 i_2}\dots M_{v_n i_n}\quad M_{q_1 j_1}\,M_{t_1 k_1}\\ &M_{q_2 j_2}M_{t_2 k_2}\dots M_{q_n j_n}M_{t_n k_n}\,U_{i_1}^{(r_1)}U_{i_2}^{(r_2)}\dots U_{i_n}^{(r_n)}P_{j_1 k_1}^{(s_1)}\,P_{j_2 k_2}^{(s_2)}\dots P_{j_n k_n}^{(s_n)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son ifade ile (1.2.3.3) denklemlerinin karşılaştırılması sonucu,

$$\begin{aligned}\beta_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_l k_l}=&M_{v_1 i_1}\,M_{v_2 i_2}\dots M_{v_n i_n}M_{q_1 j_1}\,M_{t_1 k_1}M_{q_2 j_2}M_{t_2 k_2}\\ &\dots M_{q_l j_l}\,M_{t_l k_l}\,\beta_{v_1 v_2 \dots v_n q_1 t_1 q_2 t_2 \dots q_l t_l}\end{aligned} \tag{1.2.3.4}$$

eşitliği elde edilir ve böylelikle $\beta_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_l k_l}$ izotropik bir tansörün komponentleridir ve dolayısıyla (1.2.2.7) ve (1.2.2.8) denklemlerinde verilmiş olan formların lineer bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Böyle bir ifadeyi (1.2.3.1) denkleminde verilmiş olan $\beta_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 k_1 j_2 k_2 \dots j_l k_l}$ ifadesinde yerine koyduğumuzda I aşağıda verilen formları içeren ifadelere göre bir polinom olarak yazılabilir

$$\begin{aligned} &(i) \quad \Pi_{ii}^{(1)} \\ &(ii) \quad \Pi_i^{(r_1)}\, \Pi_{ij}^{(2)}\, \Pi_j^{(r_2)} \end{aligned} \tag{1.2.3.5}$$

$$\begin{aligned} &(iii) \quad e_{ijk}\, \Pi_{iq}^{(3)}\, \Pi_q^{(r_1)}\, \Pi_{jk}^{(4)} \\ &(iv) \quad e_{ijk}\, \Pi_{iq}^{(5)}\, \Pi_q^{(r_1)}\, \Pi_{jm}^{(6)}\, \Pi_m^{(r_2)}\, \Pi_{kn}^{(7)}\, \Pi_n^{(r_3)} \end{aligned} \tag{1.2.3.6}$$

Burada, $\Pi_{ij}^{(1)}, \dots, \Pi_{ij}^{(7)}$ aşağıda verilen formlardaki ifadelerdir.

$$\Pi_{ij} = p_{ik}^{(s_1)}\, p_{kl}^{(s_2)}, \dots, p_{nj}^{(s_m)} \tag{1.2.3.7}$$

Bu ifadeler, $p_{ij}^{(s)}$'in bazılarını veya tamamını $p_{ji}^{(s)}$ ile yer değiştirerek (1.2.3.7)'den elde edilmişlerdir. Özel durumlar olarak, $\Pi_{ij}^{(4)}$ ve $\Pi_{ij}^{(l)}$ hariç tutulursa geriye kalanlar kroniker delta δ_{ij} olabilir. (1.2.3.7) denkleminde; $s_1, s_2, \dots, s_m$ parametreleri $1, 2, \dots, \lambda$ 'dan seçilmiş ve hepsinin birbirinden farklı olması gerekmeyen tamsayılardır, ayrıca (1.2.3.5) ve (1.2.3.6) denklemlerindeki r_1, r_2, r_3 parametreleri $1, 2, \dots, \nu$ 'den seçilmiş ve yine birbirlerinden farklı olmaları gerekmeyen değerlerdir. I'nın her bir teriminin (1.2.3.6)'da verilen olan formlarının en fazla bir bileşenini bulundurması gerekir. İkinci dereceden tansörlerin bütün invaryantlarının sadece (1.2.3.5) denkleminin (i) formunda verilen invaryantlar cinsinden ifade edilebileceği unutulmamalıdır ve bütün bu invaryantlar çift invaryantlardır. $p_{ij}^{(s)}$'in simetrik tansörler olarak ele alındığı durumlar için, (1.2.3.5) ve (1.2.3.6)'da özetlenen sonuçlar Spencer ve Rivlin (1962) tarafından verilmiştir. Bu çalışmalar Rivlin (1955) ile Pipkin ve Rivlin (1959) tarafından yapılan çalışmaların bir devamı mahiyetindedir.

(1.2.3.5) ve (1.2.3.6) formlarının invaryantları, vektörlerin ve ikinci mertebeden tansörlerin rasgele sayıları için bir tamlık bazı oluşturur. Fakat bu entegre taban sonlu olan bir taban değildir ve elbette minimal bir tabanda değildir. Bu nedenle vektörler ve ikinci mertebeden tansörler için sonlu olan bir taban ve mümkünse minimal bir tamlık bazı oluşturan bir dizi invaryantı (1.2.3.5) ve (1.2.3.6) denklemlerinde listelenmiş olan invaryantlardan seçmek gereklidir.

2. KAYNAK BİLGİSİ

Sürekli Ortamlar Mekaniği kapsamında invaryantlar teorisi ile ilgili ilk ve önemli çalışmanın Rivlin ve Ericksen (1955) tarafından yapıldığını görüyoruz. Bu çalışmada; İzotropik malzemelerin Gerilme-Deformasyon bağıntıları, deformasyon kinematiği, izotropik bir malzemede gerilme kavramı, gerilme transformasyonu ve yer değiştirme gradyentlerine bağlı gerilmeler incelenmiş, matris cebrinde invaryantlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiş, simetrik matrislerin skaler invaryantları ve kinematik matrisler cinsinden gerilme matrisi için önemli sonuçlar elde edilmiştir. Rivlin(1955), izotropik malzemelerin Gerilme-Deformasyon bağıntıları üzerine bazı hatırlatmalar isimli çalışmasında ise Hamilton-Cayley teoreminin genelleştirilmesini yaparak daha önceki çalışmalarda kapalı kalan bazı noktalar açıklık kazandırmaya çalışmıştır. Spencer ve Rivlin(1959) tarafından konuyla ilgili kapsamlı bir çalışma da Matris polinomları teorisi ve bunların izotropik sürekli ortamlar mekaniğindeki uygulamaları başlığı altında yapılmıştır. Bu çalışmada özellikle birden fazla matrise ait tamlık bazlarının ifadesi verilmiş ve Peano teoreminin izotropik matris polinomlarına nasıl uygulandığı anlatılmıştır. Spencer ve Rivlin(1959), beş ve daha az sayıda simetrik 3x3' lük matrisler için sonlu tamlık bazlarını araştırmışlardır. Adkins(1960a-1960b), arka arkaya yayınladığı iki makalede ortotropik ve izotropik malzemelerin simetri bağıntılarını ele almış, gerilme ve deformasyon tansörlerine dayanarak sürekli ortamların mekanik davranışını matematiksel olarak izah ederken yine polinomsal bağıntıları kullanmıştır. Spencer(1961), altı adet simetrik 3x3' lük matris için invaryant parametrelerin nasıl bulunacağını ve invaryantlar arasındaki ilişkileri incelemiştir. Spencer ve Rivlin(1962), Vektörler ve ikinci dereceden tansörlerin izotropik tamlık bazlarının nasıl bulunduğuna ait detayları vermişler ve uygun ortogonal transformasyon gruplarını açıklamışlardır. Bu çalışmayı takip eden makalede ise yine Spencer ve Rivlin(1965), matris çarpımlarının trace leri arasındaki ilişkileri belirlemeye çalışmış, antisimetrik matrislerin invaryantlarına ait karmaşıklıklara da açıklık kazandırmışlardır. Smith G.F, Smith M.M. ve Rivlin(1963) tarafından yapılan bir başka incelemede ise simetrik bir tansör ve bir vektöre ait tamlık bazları ayrıca kristal sınıflarına ait tamlık bazları ele alınmış ve her bir kristal sınıfına karşılık gelen transformasyon grupları dikkatli bir şekilde ifade edilmiştir. Smith ve Rivlin(1964), Vektörler ve kristal sınıfları için tamlık bazlarını yeniden incelemiş ve konuya açıklık kazandıracak bir çok ara işlemin detaylarını vermiştir. Wineman ve Pipkin (1964), monograf tarzında hazırladıkları çalışmalarında bünye denklemleri üzerindeki maddesel simetri kısıtlamalarını incelerken; Fonksiyonel tabanları belirleyen kriterleri, fonksiyonel tabanlar olarak tamlık bazlarını, form-invaryant tansör değerli fonksiyonlar için kanonik temsilleri form-invaryant polinomsal yaklaşımları ve kısmen hafizalı malzemeler konusunu ele almışlardır. Wang (1969a- 1969b) iki makalede izotropik fonksiyonlar için temsil teoremlerini incelemiş birinci makalede simetrik tansörler ve vektörlerin ikincisinde ise antisimetrik tansörler, simetrik tansörler ve vektörlerin izotropik fonksiyonlarını ele almıştır. Spencer(1971) Sürekli ortam fiziğinin birinci cildinde kısım üç' te İnvaryantlar teorisi ile ilgili çalışmalarını bir araya toplamıştır. Bu eserde o tarihe kadar yapılan çalışmalar özetlenmektedir. Boehler(1987), katılar mekaniğinde tansör fonksiyonlarının uygulamaları hakkında yazdığı eserinde anizotropik bünye denklemlerinin invaryant formülasyonu hakkında detaylı bilgiler vermektedir. Zheng(1993-a, 1993-b, 1993-c, 1993-d) tarafından yapılan çalışmalar; vektör, simetrik ve antisimetrik tansör değerli fonksiyonların temsilleri, bünye denklemleri üzerindeki maddesel simetri kısıtlamaları, anizotropik elastik malzemelerin gerinme enerjisi fonksiyonları, kristal sınıfları için uygun transformasyon grupları altında tamlık bazları gibi konularda kapsamlı bilgiler vermektedir. Zheng(1994), tansor fonksiyonları için temsiller teorisi – Bünye denklemlerine birleştirilmiş bir invaryant yaklaşım adlı çalışmasında invaryantlarla ilgili temel kavramların genel bir gözden geçirmesini yapmış, izotropik, ortotropik ve anizotropik ortamlar için vektör ve tansörlerin tansörel fonksiyonları hakkında derleyici bilgiler vermiştir.

Sürekli ortamlar mekaniği alanında takip edilen kaynaklar Eringen (1967, 1980), Eringen ve Maugin (1990) ve Şuhubi (1994)' ye aittir. Eringen (1967), modern sürekli ortamlar mekaniğinin ana iskeletini oluşturduğu bu eserinde sırasıyla gerinme, hareket, gerilme, sürekli ortamların termodinamiği, bünye denklemleri, elastisite teorisi, akışkanların dinamiği, termoelastisite ve viskoelastisite konularını sistematik bir tarzda işlemiştir. Eringen (1980)' de yukarıdaki konulardan farklı olarak sürekli ortamların elektrodinamiğini ayrı bir bölüm olarak vermiştir. Şuhubi

(1994)' nin eseri ise Eringen (1967)' nin paralelinde ancak daha detaylı yazılmış ve sürekli ortamlar mekaniği konusunda Türkçe literatüre kazandırılmış önemli bir kaynaktır. Sürekli ortamlar ve invaryantlar konusunda önemli çalışmalar yapan Rivlin'in makaleleri, editörlüğünü Barenblatt ve Joseph(1996)' ın yaptığı 2828 sayfalık bir eserde bir araya getirilmiştir. Bu eser izotropik sonlu elastisite, anizotropik sonlu elastisite, elastik malzemelerde sonlu deformasyonlar üzerinde küçük deformasyonların süperpozisyonu, bünye denklemleri ve invaryantlar, iç değişkenli teoriler – çok kutuplu sürekli ortamlar, Newtoniyen olmayan akışkanlar, çatlak mekaniği, viskoelastik malzemelerde dalgalar, kristal fiziği ve elektromagnetik alanlar konusunda önemli bir başvuru kaynağı oluşturmaktadır.

Usal(1994) doktora tezinde, iki bağımsız ve genleşmez fiber ailesi ile takviye edilmiş ve güçlü bir elektrostatik alanla etkileşim halinde olan nonlineer elastik bir dielektrik ortamın termodinamik davranışını sistematik olarak modellemiştir. Bu çalışmada, gerilme potansiyelinin maddesel koordinat sisteminin tam izotropi grubu altında invaryant kalma koşulu ifade edilmiştir. Bu koşulun sağlanabilmesi için İnvaryantlar teorisi çerçevesinde serbest enerji üç simetrik tansöre bir polar vektöre ve bunların müşterek invaryantlarına göre ifade edilmiştir. Daha sonra gerilme ve polarizasyon için bünye denklemleri maddesel ve uzaysal koordinatlarda elde edilmiştir.

MATLAB programı hakkında detaylı bilgiler veren bir eser Biran ve Breiner(1995) tarafından yazılmıştır. Ayrıca Türkçe bir kaynak olan ve İbrahim Yüksel(2000) tarafından yazılan " MATLAB ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü " isimli kaynak ta çalışmalarımızda epeyce faydalı olmuştur. Bu eserde MATLAB paket programının yapısı, program hazırlama ve grafik işlemler, denklem takımları ve matematiksel fonksiyonların çözümü ve bazı diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri anlatılmaktadır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Materyal

3.1.1. Matris polinomlarının tracelerini ilgilendiren sonuçlar

Bu bölümde, indirgemelerde kullanılacak olan matris polinomları için bir dizi sonuçlar elde ifade edilmektedir ve temel kaynağımız Spencer(1971)'ın çalışmalarıdır. Aksi iddia edilmedikçe matrisler 3x3 boyutlu matrisler olarak alınırlar ve genelde bu matrisler ne simetrik ne de antisimetriktir. Simetrik matrisler için daha kapsamlı sonuçlar ileride verilecektir.

(1.2.3.5) ve (1.2.3.6) denklemlerinde verilmiş olan formların sonlu olan invaryant sayıları dışında tüm invaryantları indirgemede matris notasyonu kullanmak daha uygun ve kolay olacaktır.

Bölüm 1.1.1'de olduğu gibi $(\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, \ldots, \underline{\underline{t}})$ matrisleri

$$\underline{\underline{m}} = [m_{ij}], \quad \underline{\underline{n}} = [n_{ij}] \text{ , v.s.}$$

şeklinde tanımlanan 3x3 boyutlu matrisler olsun.

Bu matrislerin herhangi bir matris çarpımını aşağıda tanımlanmış şekliyle göz önüne alalım.

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{m}}^{\alpha_1} \underline{\underline{n}}^{\beta_1} \ldots \underline{\underline{t}}^{\delta_1} \underline{\underline{m}}^{\alpha_2} \underline{\underline{n}}^{\beta_2} \ldots \underline{\underline{t}}^{\delta_2} \ldots \underline{\underline{m}}^{\alpha_r} \underline{\underline{n}}^{\beta_r} \ldots \underline{\underline{t}}^{\delta_r} \qquad (3.1.1.1)$$

Bu ifade herhangi bir mertebeden matrislerin sonlu sayıda ardışık çarpımlarıyla oluşturulmuştur. (3.1.1.1) ifadesinde yer alan $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \delta_r)$ indisleri pozitif tamsayılar veya sıfırdır ve hiçbir zaman iki komşu faktör aynı matrisin üssü (kuvveti) şeklinde yazılmamıştır. $\underline{\underline{\Pi}}$ çarpımının derecesi $\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, \ldots, \underline{\underline{t}}$ matrislerine göre

$\alpha_1 + \beta_1 + ... + \delta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + ... + \delta_2 + ... + \alpha_r + \beta_r + ... + \delta_r$

şeklinde ifade edilir.

$\underline{\underline{m}}$ matrisine göre $\underline{\underline{\Pi}}$'nin derecesi $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_r$ dir. $\underline{\underline{n}}$ matrisine göre $\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_r$ dir ve böylece devam eder.

$\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, ..., \underline{\underline{t}}$'ye göre bir matris polinomu; skaler katsayıları $\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, ..., \underline{\underline{t}}$ matrislerinin elemanlarına göre polinomlar olan ve (3.1.1.1) tipinde sonlu sayıdaki terimlerin bir toplamıdır. Böyle bir polinomun derecesi onun en yüksek dereceli teriminin derecesidir. Onun $\underline{\underline{m}}$ matrisine göre derecesi en yüksek dereceli $\underline{\underline{m}}$'li terimin dercesine eşittir.

Bir matrisin veya matris polinomu $\underline{\underline{P}}$'nin tracesi onun ana köşegenindeki elemanların toplamıdır ve $tr\,\underline{\underline{P}}$ sembolü ile gösterilecektir. Nitekim eğer;

$$\underline{\underline{P}} = [P_{ij}] \tag{3.1.1.2}$$

olursa;

$$tr\,\underline{\underline{P}} = [P_{ii}]$$

şeklinde ifade edilir. $\underline{\underline{P}}$ matrisinin tracesi şüphesiz bir skaler değerdir. Eğer bir matris çarpımı olan $\underline{\underline{\Pi}}$'yi aşağıdaki gibi dikkate alırsak,

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{m}}\;\underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{p}} ... \underline{\underline{s}}\;\underline{\underline{t}}, \quad \underline{\underline{\Pi}} = [\Pi_{ij}], \quad \Pi_{ij} = m_{ik}\, n_{kl}\, p_{lq} ... s_{bc}\, t_{cj}$$

Bu çarpımın tracesi

$$tr\,\underline{\underline{\Pi}} = \Pi_{ii} = m_{ik}\, n_{kl}\, p_{lq} \ldots s_{bc} t_{ci} \tag{3.1.1.3}$$

tarzında yazılır. Burada $(\underline{\underline{m}}\,;\,\underline{\underline{n}}\,,\ldots\,\underline{\underline{s}}\,,\,\underline{\underline{t}})$nin farklı olması şart değildir.

(3.1.1.3) denkleminin sağ tarafındaki ifade $(\underline{\underline{m}}\,,\underline{\underline{n}}\,,\ldots\underline{\underline{s}}\,,\underline{\underline{t}})$ matrislerinin dairesel permütasyonları ile değişmez. Nitekim;

$$tr\,\underline{\underline{\Pi}} = tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\;\underline{\underline{p}}\ldots\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}} = tr\;\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\ldots\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{m}} = tr\,\underline{\underline{p}}\ldots\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}} \tag{3.1.1.4}$$

formunda yazmakta her zaman mümkündür.

Yani, bir matris çarpımının tracesi çarpım faktörlerinin dairesel bir değişimi ile değiştirilemez. Aynı zamanda, transpoz alma işlemi matrisin ana köşegeninde yer alan elemanları etkilemez. (3.1.1.2)'deki tanımın bir sonucu olarak şunu ifade edebiliriz: bir matris çarpımın tracesi bu çarpımın transpozunun tracesine eşittir. Bu özellik ileride sık sık kullanılacaktır.

Matris çarpımlarının ve polinomlarının tarcelerini daha düşük dereceden matris çarpımlarının traceleri cinsinden polinomlar şeklinde ifade etmenin mümkün olup olmayacağını araştıracağız. Birçok durumda, böyle bir ifadeden alınan veya elde edilen kesin bir form ile ilgilenmeyeceğiz; genellikle böyle bir ifadenin mevcut olduğunu bilmek bizim için yeterli olacaktır. Böylece,

$$tr\,\underline{\underline{P}} \equiv 0 \tag{3.1.1.5}$$

notasyonunu ifade edecek duruma gelmiş oluruz. Bu notasyonun daha açık anlamını şöyle ifade edebiliriz: $tr\,\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{P}}$'nin derecesinden daha düşük dereceden matris çarpımlarının traceleri cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir. Bu oldukça önemli bir sonuçtur. Eğer matris çarpımlarının traceleri tartışma konusu olan içerikteki invaryantlar ise, ki çoğu zaman durum böyledir, o zaman (3.1.1.5) denkleminde indirgenebilir bir invaryant olan $tr\,\underline{\underline{P}}$ bir ifade halini alır. Eğer $\underline{\underline{P}}_1$ ve $\underline{\underline{P}}_2$ aynı dereceden matris polinomları ise ve,

$$tr\,\underline{\underline{P}}_1 - tr\,\underline{\underline{P}}_2 \equiv 0 \qquad (3.1.1.6)$$

olursa $tr\,\underline{\underline{P}}_1$ ve $tr\,\underline{\underline{P}}_2$'nin denk olduğunu söyleriz. Bu notasyon ve terminoloji çoğu zaman cebirsel invaryantlar teorisinde kullanılır. Bu durumda herhangi bir invaryanta uygulanmaktan ziyade matris polinomlarının tracelerine uygulanabilmesi için biraz değiştirilmesi gerekir.

Bu bölümde verilecek sonuçlar Hamilton – Cayley teoremine dayanır, bu teorem 3x3 boyutunda bir $\underline{\underline{m}}$ matrisi için aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\underline{\underline{m}}^3 - \underline{\underline{m}}^2\, tr\,\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\,\underline{\underline{m}}\left[(tr\,\underline{\underline{m}})^2 - tr\,\underline{\underline{m}}^2\right] - \underline{\underline{I}}\det\underline{\underline{m}} = 0 \qquad (3.1.1.7)$$

olarak yazılabilir; burada $\underline{\underline{I}}$ 3x3 boyutlu birim matrisi göstermektedir ve det $\underline{\underline{m}}$, $\underline{\underline{m}}$ matrisinin determinantıdır. (3.1.1.7) denkleminin tracesi alındığında

$$tr\,\underline{\underline{m}}^3 + tr\,\underline{\underline{m}}^2\, tr\,\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\,(tr\,\underline{\underline{m}})\,(tr\,\underline{\underline{m}})^2 - \frac{1}{2}\,(tr\,\underline{\underline{m}})\, tr\,\underline{\underline{m}}^2 - tr\,\underline{\underline{I}}\,\det\underline{\underline{m}} = 0$$

$$tr\,\underline{\underline{m}}^3 - \frac{3}{2}\, tr\,\underline{\underline{m}}^2\, tr\,\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\,(tr\,\underline{\underline{m}})^3 - 3\det\underline{\underline{m}} = 0 \qquad (3.1.1.8)$$

sıfıra eşit olduğu sonucu ortaya çıkar ki böylelikle det $\underline{\underline{m}}$; $tr\,\underline{\underline{m}}$, $tr\,\underline{\underline{m}}^2$ ve $tr\,\underline{\underline{m}}^3$'de bir polinom olarak ifade edilebilir.

$$\det\underline{\underline{m}} = \frac{1}{3}\left\{ tr\,\underline{\underline{m}}^3 - \frac{3}{2}\, tr\,\underline{\underline{m}}^2\, tr\,\underline{\underline{m}} + \frac{1}{2}\,(tr\,\underline{\underline{m}})^3 \right\}$$

Rivlin (1955) nedeniyle, (3.1.1.7) denklemine denk bir ilişki;

$$
\begin{aligned}
&\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}-\underline{\underline{m}}\,(tr\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}-tr\,\underline{\underline{n}}\,tr\,\underline{\underline{p}})\\
&\quad -\underline{\underline{n}}\,(tr\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}-tr\,\underline{\underline{p}}\,tr\,\underline{\underline{m}})-\underline{\underline{p}}\,(tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}-tr\,\underline{\underline{m}}\,tr\,\underline{\underline{n}})\\
&\quad -(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})\,tr\,\underline{\underline{m}}-(\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}})\,tr\,\underline{\underline{n}}-(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}})\,tr\,\underline{\underline{p}} \qquad (3.1.1.9)\\
&\quad -\underline{\underline{I}}(tr\,\underline{\underline{m}}\,tr\,\underline{\underline{n}}\,tr\,\underline{\underline{p}}-tr\,\underline{\underline{m}}\,tr\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}-tr\,\underline{\underline{n}}\,tr\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}-tr\,\underline{\underline{p}}\,tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\\
&\quad +tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+tr\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}})=0
\end{aligned}
$$

denklemi ile ifade edilir. Bu denklemin çıkartılışı ile ilgili bazı açıklayıcı bilgiler ekler kısmında verilmiştir.

(3.1.1.9) denklemi çeşitli yollardan elde edilebilir. Örneğin $\det\underline{\underline{m}}$'i (3.1.1.7) ve (3.1.1.8) denkleminden elimine etmek suretiyle ve sonuç olarak elde edilen ilişkide $\underline{\underline{m}}+\lambda\,\underline{\underline{n}}+\mu\,\underline{\underline{p}}$ ile $\underline{\underline{m}}$'in yerini değiştirerek, bu işlem yapılır, bundan sonra ise $\lambda\,\mu$'nün katsayılarını sıfıra eşitleyerek (3.1.1.9) denklemi elde edilir. (3.1.1.7) denkleminden bağımsız olan bir elde etme Rivlin (1955) tarafından verilmiştir. (3.1.1.9) denkleminde $\underline{\underline{m}}=\underline{\underline{n}}=\underline{\underline{p}}$ alınarak ve (3.1.1.8) denklemini kullanarak, (3.1.1.7) denklemi elde edilir.

Şimdi ise (3.1.1.7) ifadesini $\underline{\underline{p}}$ ile çarparak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$
\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}}-\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,tr\,\underline{\underline{m}}+\frac{1}{2}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\left[(tr\,\underline{\underline{m}})^2-tr\,\underline{\underline{m}}^2\right]-\underline{\underline{p}}\,\det\underline{\underline{m}}=\underline{\underline{0}}
$$

ve sonuç olarak ortaya çıkan bu ifadenin tracesi alınırsa,

$$
tr\,\underline{\underline{m}}^3\,p-tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,tr\,\underline{\underline{m}}+\frac{1}{2}\,tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\left[(tr\,\underline{\underline{m}})^2-tr\,\underline{\underline{m}}^2\right]-tr\,\underline{\underline{p}}\,\det\underline{\underline{m}}=0
$$

elde edilir. Yukarıda açıklanan notasyonda,

$$tr\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}} \equiv 0 \qquad (3.1.1.10)$$

olarak yazılabilir. Çünkü (3.1.1.5) ifadesindeki yaklaşım çerçevesinde bu terim diğerleri cinsinden ifade edilebilir. Aynı şekilde sağdaki (3.1.1.9) denklemini $\underline{\underline{q}}$ ile çarparsak ve bunun tracesini alırsak (yine aynı mantık çerçevesinde)

$$tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{q}} \equiv 0 \qquad (3.1.1.11)$$

denklemi elde edilir. Kısaca yazmak istersek;

$$\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}} \equiv \Sigma\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}$$

yazılır ve (3.1.1.11) denklemi;

$$tr\,(\Sigma\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\,\underline{\underline{q}} \equiv 0 \qquad (3.1.1.12)$$

şeklinde elde edilmiş olur. Fakat aynı zamanda matris sonucunun tracesi kendi faktörlerinin dairesel permütasyonu tarafından değiştirilmediği için;

$$tr\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{p}} = tr\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^3, \qquad tr\,(\Sigma\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\,\underline{\underline{q}} = tr\,\underline{\underline{q}}\;\Sigma\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}$$

dür. (3.1.1.11)'de bundan sonra $\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{n}}$ alınırsa,

$$tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}} = tr\,\underline{\underline{q}}\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2) \equiv 0 \qquad (3.1.1.14)$$

$$tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}} + tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{q}} = 0$$

$$tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{q}} = -\,tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}}$$

elde edilir. Bir sonraki durum için (3.1.1.14) denkleminde $\underline{\underline{q}}$ yerine $\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{q}}$ yazılacak olursa,

$$tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2 + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^3)\,\underline{\underline{q}} \equiv 0$$

ifadesi elde edilir.

$$tr\,(\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{q}}) = 0 \Rightarrow tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}} = 0 \Rightarrow$$
$$tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{q}} = -\,tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}}$$

yazılabilir. Bu sonuç ileride kullanılmaktadır.

Fakat (3.1.1.10) denklemine benzer bir durum ile $tr\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{q}} = tr\,\underline{\underline{m}}^3\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{p}} \equiv 0$ yazılabilir. Nitekim,

$$\begin{aligned} tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{q}} &= tr\,\underline{\underline{q}}\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}} + \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2) \equiv 0 \\ &= tr\,\underline{\underline{q}}\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}) = -\,tr\,\underline{\underline{q}}\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}^2) \end{aligned} \qquad (3.1.1.15)$$

eşitliğini de yazabiliriz.

(3.1.1.14) ve (3.1.1.15) arasındaki ilişkiler Rivlin (1955)'de matrislerin polinom ilişkileri için bütün detayları ile verilmiştir.

Bir sonraki yapılacak iş ise $tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{q}}$ ifadesini dikkate almaktır. (3.1.1.14) tipindeki bağıntıları tekrar tekrar kullanmak suretiyle biz,

$$\begin{aligned} tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{q}} = tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{q}} &\equiv -tr\,(\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{n}} + \underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}^2)\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{q}} \\ &= -tr\,\underline{\underline{m}}^2\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{q}} - tr\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{q}} \\ &\equiv tr\,\underline{\underline{m}}^2\,(\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2)\,\underline{\underline{q}} + (tr\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2)\,\underline{\underline{q}} \end{aligned} \qquad (3.1.1.16)$$

ve

$$
\begin{aligned}
tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{q}} &= tr\,\underline{\underline{m}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{q}} \equiv -tr\,\underline{\underline{m}}\,(\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}} + \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2)\,\underline{\underline{q}} \\
&\equiv -\,tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}} - tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} \qquad (3.1.1.17)\\
&\equiv tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}} + tr\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}} - tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}}
\end{aligned}
$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Gerekli olan ilişki (3.1.1.17) denkleminden (3.1.1.16) denklemini çıkarmak suretiyle elde edilir. Bu durumda;

$$3\,tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} \equiv 0 \qquad (3.1.1.18)$$

elde edilir. Bu ilişki polinomsal matris bağıntılarından hemen elde edilen bir sonuçtur. Bu ilişkiler Adkins (1958), Spencer ve Rivlin (1959a)'de birbirinden bağımsız olarak ifade edilmiştir. Eğer (3.1.1.18) denkleminde $\underline{\underline{m}}$'nin yerine $\lambda\,\underline{\underline{m}} + \mu\,\underline{\underline{r}}$ konulursa,

$$3\,tr\,(\lambda\,\underline{\underline{m}} + \mu\,\underline{\underline{r}})^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} \equiv 0$$

$$tr\left[\lambda^2\,\underline{\underline{m}}^2 + \lambda\,\mu\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}}) + \mu^2\,\underline{\underline{r}}^2\right]\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} \equiv 0 \qquad (3.1.1.19)$$

elde ederiz; ki burada $\underline{\underline{m}}$'in yerine $\underline{\underline{r}}$ kullanarak (3.1.1.18) denkleminden elde edilen bağıntılar ve (3.1.1.18)'in kendisiyle birlikte aşağıdaki ifadeyi yazarız.

$$\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{m}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} + \lambda\,\mu\,tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} + \mu^2\,tr\,\underline{\underline{r}}^2\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}} \equiv 0$$

bu ifadede ilk ve son terimler (3.1.1.8)'de verilen ifade dikkate alındığında sıfıra eşitlenir. Bu durumda yalnızca aşağıdaki terimin dikkate alınması gerektiğini görürüz.

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}}=0 \qquad (3.1.1.20)$$

Aynı şekilde (3.1.1.20) denkleminde $\underline{\underline{n}}$ yerine $\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{s}}$ yazılırsa

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}^2+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{s}}^2)\,\underline{\underline{q}}=0$$

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}^2\,\underline{\underline{q}}+tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}})\underline{\underline{q}}+tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{s}}^2\,\underline{\underline{q}}=0$$

ifadelerini elde ederiz. Yukarıdaki son ifadede traceleri alınan ilk ve son terimler (3.1.1.20) denkliği nedeniyle sıfıra götürülebilir. Dolayısıyla,

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{q}}=0 \qquad (3.1.1.21)$$

ilişkisi kolayca elde edilebilir. Şimdi ise $\underline{\underline{q}}$ yerine $\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}$ ve $\underline{\underline{n}}$ yerine $\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{t}}$ yazmak suretiyle

$$\left.\begin{aligned} &tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}=0\\ &tr\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{t}})\,\underline{\underline{q}}=0\end{aligned}\right. \qquad (3.1.1.21)_1$$

ifadeleri elde ederiz. $(3.1.1.21)_1$'de verilen ifadelerden ikinciyi birinciden çıkaracak olursak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,(\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}-\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{s}})\,\underline{\underline{q}}=0 \qquad (3.1.1.22)$$

Aynı zamanda (3.1.1.21) denkleminde $\underline{\underline{p}}$'nin yerine $\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}$ ve $\underline{\underline{n}}$'nin yerine de $\underline{\underline{t}}$ yazılırsa;

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}+\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{s}})\,\underline{\underline{q}}\equiv 0 \qquad (3.1.1.23)$$

sonucu elde edilir. (3.1.1.22) ve (3.1.1.23) ifadelerini toplayacak olursak,

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}\equiv 0 \qquad (3.1.1.24)$$

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}})=-\,tr(\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}})$$

sonucu elde edilir. Buradan açıkça görüldüğü üzere $\underline{\underline{m}}$ ve $\underline{\underline{r}}$ matrisleri dairesel permütasyonun dışında kendi aralarında yer değiştirdiklerinde invaryantın işareti değişir. Aynı zamanda;

$$tr(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}=tr\,\underline{\underline{q}}\,(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{m}})\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}$$

ifadesi elde edilir ve $(\underline{\underline{q}},\underline{\underline{m}},\underline{\underline{r}},\underline{\underline{p}},\underline{\underline{n}},\underline{\underline{s}},\underline{\underline{t}})\rightarrow(\underline{\underline{m}},\underline{\underline{r}},\underline{\underline{p}},\underline{\underline{n}},\underline{\underline{s}},\underline{\underline{t}},\underline{\underline{q}})$ yer değiştirmeleri yapılırsa;

$$tr\,\underline{\underline{m}}\,(\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{r}})\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}\equiv 0$$

sonucu elde edilir. Aynı şekilde;

$$tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}\,(\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}\equiv 0\,, \qquad tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{p}}\,(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}\equiv 0$$

$$tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}(\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}+\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{s}})\,\underline{\underline{q}}\equiv 0\,, \qquad tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{s}}\,(\underline{\underline{t}}\,\underline{\underline{q}}+\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{t}})\equiv 0$$

denkliklerinin doğruluğu gösterilebilir. Böylelikle yedinci mertebeden olan bir matris çarpımının tracesi, sonuçtaki bitişik herhangi bir iki faktörün karşılıklı olarak değiştirilmesinden elde edilen matrisin tracesinin negatifine denktir.

Şimdi (3.1.1.11) ifadesinde sırasıyla $\underline{\underline{m}}$, $\underline{\underline{n}}$, $\underline{\underline{p}}$, $\underline{\underline{q}}$ yerine $\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}$, $\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}$, $\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}$, $\underline{\underline{t}}$ konulursa;

$$
\begin{aligned}
tr(&\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\\
&+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}+\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}})\,\underline{\underline{t}}\equiv 0
\end{aligned}
$$

ifadesi ortaya çıkar. Bu durumda her bir terimin bitişik faktörlerinin çift sayı olarak karşılıklı yer değiştirmesi suretiyle $tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}$'den çıkarılabileceği sonucu ortaya çıkar; bunun neticesinde bütün terimler $tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}$'ye eşittir ve,

$$
tr\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{q}}\,\underline{\underline{r}}\,\underline{\underline{s}}\,\underline{\underline{t}}\equiv 0 \tag{3.1.1.25}
$$

yazarız.

Böylece, yedinci mertebeden bir matris çarpımının tracesi derecesi yediden daha düşük matris çarpımlarının traceleri cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir. (3.1.1.7) – (3.1.1.25) bağıntıları, bu bağıntılarda yer alan $\underline{\underline{m}}, \underline{\underline{n}}, \ldots, \underline{\underline{t}}$ matrislerinden herhangi birinin yerine bu matrislerin polinomları yerleştirildiği zaman yine geçerli olacaktır. Özellikle (3.1.1.25) denklemine dikkat ettiğimiz zaman yedi veya daha yüksek dereceden bir matris polinomunun tracesi daha düşük dereceden matris çarpımlarının tracelerine göre bir polinom olarak ifade edilir diyebiliriz.

Bu bölümün ana sonuçları aşağıda verilen teoremde özetlenmektedir:

μ adet 3x3 boyutlu matrisler ($\underline{\underline{p}}_r \quad r=1,2,3,\ldots,\mu$) cinsinden ifade edilen herhangi bir matris polinomu $\underline{\underline{p}}$'nin tracesi matris çarpımlarının traceleri cinsinden bir polinom olarak ifade edilebilir. Bu matris çarpımlarından her biri aşağıdaki şartları sağlar.

(i) Bu çarpımlardan herbiri $\underline{\underline{p}}_r^3$ ve $\underline{\underline{p}}_r^3$ formlarına ait faktörlerin bir çarpımıdır.

(ii) İlk ve son faktörler aynı matrisin kuvvetleri şeklinde ortaya çıkmaz.

(iii) Eğer bu çarpımlardan birisi $\underline{\underline{p}}_r^3$ faktörünü içeriyorsa diğer faktörleri içermez.

(iv) Hiçbir iki faktör birbirinin aynısı değildir. Yani aynı terimleri içermez.

(v) Faktör olarak $\underline{\underline{p}}_r$ ve $\underline{\underline{p}}_r^2$'yi içeren herhangi bir çarpımda $\underline{\underline{p}}_r$ faktörü $\underline{\underline{p}}_r^2$'den önce gelir.

(vi) Eğer bu çarpımlardan biri $\underline{\underline{p}}_r^2$, $\underline{\underline{p}}_s^2$, $r \neq s$ gibi iki faktör ihtiva ediyorsa bunlar ya birbirlerini takip eden faktörler yada çarpımın ilk ve son faktörleri olarak gözükürler.

(vii) Hiçbir çarpım veya sonuç, $\underline{\underline{p}}_r$ matrisine göre altıncı dereceden daha büyük bir dereceye sahip olamaz.

Bunun sonuçlarından hareketle, (i) şıkkında bahsedilen ifadenin (3.1.1.10) ifadesinde $\underline{\underline{p}} = m^{\alpha} \underline{\underline{\Pi}}$ eşitliğinin kullanılması ile daha anlaşılır hale geldiği görülür. Burada $\alpha \geq 1$ ve $\underline{\underline{\Pi}}$ muhtemelen $\underline{\underline{I}}$ olarak ifade edilebilen bir matris çarpımıdır. (ii) şıkkında bahsedilen özellik ise; bir matris sonucunun tracesinin bu çarpıma ait faktörlerin dairesel permütasyona uygun olarak yer değiştirmesinden etkilenmeyeceğini ifade eder, böylece $tr\, \underline{\underline{a}}_q^{\alpha}\, \underline{\underline{\Pi}}\, \underline{\underline{a}}_q^{\beta} = tr\, \underline{\underline{a}}_p^{\alpha+\beta}\, \underline{\underline{\Pi}}$ yazılabilir. (iii) şıkkındaki ifade ise aynı zamanda (3.1.1.10) eşitliğinin bir sonucudur. (iv) ise (3.1.1.14)'den türetilmiştir. (v)'deki ifade (3.1.1.15)'den ve (vi)'deki ifade (3.1.1.18)'den ve (vii)'deki sonuç ise (3.1.1.25) denkliğinden faydalanılarak ifade edilmiştir.

3.1.2. Simetrik İkinci Mertebeden Tansörlerin İnvaryantları

Bu bölümde, $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \ldots, \underline{\underline{f}}$ simetrik matrisleriyle ilgili olan ve indis notasyonunda $a_{ij}, b_{ij}, \ldots, f_{ij}$ olarak ifade edilen simetrik ikinci dereceden tansörlere ait bir cümle için minimal olduğu gösterilen bir tamlık bazını ifade etmeye çalışacağız. (1.2.3.5) ifadesinden böyle bir tamlık bazının $tr\, \underline{\underline{\Pi}}$'nin invaryantlarından oluşturulduğunu görüyoruz. Burada $\underline{\underline{\Pi}}$ matrisi; $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, ..., \underline{\underline{f}}$ matrislerinden oluşturulmuş herhangi bir matris çarpımıdır. Bütün bu invaryantlar çift invaryantlar olarak değerlendirildiğinde bunların full veya uygun ortogonal bir grubun transformasyonu altında invaryant kalıp kalmadığını düşünmek önemini yitirmektedir. Daha açık bir ifade ile, full ortogonal grup ile uygun ortogonal grup transformasyonları çift invaryantlar için aynı sonuçları üretmektedir.

Bir önceki bölümde elde edilen sonuçlar doğrudan doğruya $tr\,\underline{\underline{\Pi}}$ formuna ait invaryantların indirgenmesine uygulanmıştır. Gerekli olan kural; geçen bölümün sonunda verilen teoremin şartlarını sağlayan matris çarpımlarına ait tracelerin tamlık bazına dahil edilmesidir. Ayrıca simetrik matrislerden elde edilen bir matris çarpımının transpozunun çarpımda yer alan faktörlerin ters sırada (sondan başa doğru) yazılmasıyla elde edilebileceğini de görüyoruz. Sonuç olarak, bir matris çarpımının tracesi o çarpımın transpozunun tracesine eşit olduğundan: simetrik matrislerden oluşturulan bir matris çarpımının tracesi çarpım faktörlerinin ters sırada yazılmasıyla elde edilen matris çarpımlarının tracesine eşittir.

Geçen bölümün sonunda verilen teoremin (vii) şıkkına göre, tamlık bazında yer alan invaryantlardan hiçbirinin derecesi matris elemanları cinsinden altıdan daha büyük dereceli terimler içermez. Böylece, hiçbir invaryantın altı farklı matristen daha fazla matrisi bünyesinde bulunduramayacağı anlaşılmış olur. Bu yüzden en fazla altı farklı matrisin invaryantlarını göz önüne almak durumundayız.

Verilen belli sayıdaki matrisler için yalnızca sonlu sayıda matris çarpımları Bölüm 3.1.1'in sonunda verilen teoremin şartlarını sağlayabilir. Böylece bu teorem ikinci dereceden tansörlerin herhangi bir sonlu cümlesi için sonlu bir tamlık bazının yazılmasını mümkün hale getirir. Genellikle bu tamlık bazı minimal bir taban değildir. Böylece ileride gösterilecek olan prosedür birden altıya kadar olan matrisler için teoremin şartlarını sağlayan invaryantların listesini açığa çıkarır ve sonrada bu invaryantlardan diğerleri cinsinden yazılabilenleri ifade eder. Tamlık bazlarının mümkün olan invaryantlarını yazarken; simetrik matrislerin bir matris çarpımına ait tracesinin çarpımda yer alan faktörlerin dairesel permütasyonla değiştirilmesinden etkilenmeyeceği veya çarpım faktörlerinin transpozu alındığı zaman sonucun değişmeyeceği gerçeğini her zaman dikkate alıyoruz. Bir matris için burada bahsedilen sonuç açıkça bilinmektedir. İki matris için bu sonuç (Rivlin 1955)'de verilmiştir; üçten beşe kadar olan matrisler için Spencer ve Rivlin (1959a,b;1960)'nin çalışmalarında mevcuttur. Altı matris için ise Spencer (1961)'ın çalışması incelenebilir.

3.1.2.1. Bir matris $\underline{\underline{a}}$

Tek matris $\underline{\underline{a}}$'nın Bölüm 3.1.1'deki teoremin şartlarına uyan invaryantları;

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,,\ tr\,\underline{\underline{a}}^2\,,\ tr\,\underline{\underline{a}}^3 \qquad (3.1.2.1)$$

şeklinde ifade edilir ve bunların hiçbiri diğer matrislerin terimleriyle açıklanamaz.

3.1.2.2. İki matris $\underline{\underline{a}}\,,\underline{\underline{b}}$

Sadece tek bir matris içeren invaryanta ek olarak bölüm 3.1.1'in sonunda verilen teoremin şartlarını sağlayan aşağıdaki matris sonuçlarının tracelerini de göz önünde bulundurmak gerekir.

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,,\quad \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2\,,\quad \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,,\quad \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\,,\quad \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2$$

Bunların ilk dördü sadeleştirilemez. Sonuncu terim olan ($tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2$)'yi (3.1.1.15) denklemiyle kıyaslayıp dairesel permütasyonu da göz önüne alarak $tr\,\underline{\underline{b}}^2(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2)$ formunda yazabiliriz. Dairesel permütasyona sadık kalmadan sadece parantez içerisindeki terimin sırasını ters çevirirsek bu invaryantın işareti değişir, yani;

$$tr\,\underline{\underline{b}}^2(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2) = -\,tr\,\underline{\underline{b}}^2(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}})$$

yazarız. Bu negatif işaretli terim yine dairesel permütasyon gereğince

$$-tr\,\underline{\underline{b}}^2(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}) = -tr(\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}})\,\underline{\underline{b}}^2 = -tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \qquad (3.1.2.2)_1$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi de $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2$ teriminde yer alan matrislerin transpozunu aldıktan sonra tracesini ifade edersek sonucun değişmeyeceğini bildiğimizden,

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2 = tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}} = tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \qquad (3.1.2.2)_2$$

eşitliğini yazabiliriz. $(3.1.2.2)_1$ ve $(3.1.2.2)_2$ ifadelerini dikkate alarak

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2 = -tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 = tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2 \qquad (3.1.2.3)$$

eşitlikleri oluşturulur. Burada matematiksel bir tutarsızlıkla karşılaştığımızı görüyoruz. Pozitif bir değer kendi kendisinin negatifine eşit olamayacağına göre bu belirsizliği ortadan kaldıracak tek çıkış noktamız bu değeri sıfıra eşitlemektir.

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2 \equiv 0 \qquad (3.1.2.4)$$

yazarak bu terimi invaryantlar listesinden çıkarırız. Bu durumda ikinci dereceden simetrik iki matris için geriye kalan terimler aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$tr\,\underline{\underline{a}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2$, $tr\,\underline{\underline{a}}^3$

$tr\,\underline{\underline{b}}$, $tr\,\underline{\underline{b}}^2$, $tr\,\underline{\underline{b}}^3$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2$, $tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2$

3.1.2.3 Üç matris $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$

Yukarıda iki matris için verilen invaryantlara ilave olarak aşağıdaki matris sonuçlarının tracelerini göz önünde bulundurmak gereklidir.

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\ ,\ \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\ ,\ \underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}$$

Ayrıca bu matris çarpımlarından dairesel permütasyonla elde edilen yeni çarpımların tarcelerini de değerlendirmek gerekir. Yukarıdaki listede yer alan ilk terim olan $tr(\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}})$'yi dikkate alıp bu terimin hem dairesel permütasyonlarını hem de transpozunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}} = tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}} = tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}} = tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} = tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}} = tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}$$

Böylece sadece $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$'yi alıkoymak yeterli olmaktadır. Benzer şekilde $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}} = tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}$ yazılabildiğinden sadece $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}$'yi alıkoymak ve bu terime ilave olarak $tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}$ ve $tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$'yi eklemek gerekir. Aynı yaklaşımla $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}$, $tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}$ ve $tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}$ invaryantları tamlık bazına dahil edilmelidir. Geriye kalan invaryantlar sadeleştirilebilir. (3.1.1.15) bağıntısı yardımıyla, matris çarpımında yer alan faktörlerin dairesel permütasyona göre değiştirilmesi ve faktörlerin ters sırada yazılması (transpozu alınarak) sonucu değiştirmeyecek düşüncesiyle

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}} = -\,tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}} = -\,tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}} = -tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}$$

ifadesini yazabiliriz. Buradan $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}} \equiv 0$ ve bu terimle $\underline{\underline{b}}$'nin yerine $\underline{\underline{b}}^2$ yazarak $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}} \equiv 0$ ifadesini elde ederiz. Sonuç olarak çarpım faktörlerinin dairesel değişimleri ve transpozlarından faydalanarak, (3.1.1.14) ve (3.1.1.18) formundaki bağıntılar yardımıyla

$$\begin{aligned} 2tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2 &= tr(\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2+\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2) \equiv -tr\,\underline{\underline{a}}^2(\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}) \\ &= -tr(\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2)\,\underline{\underline{b}} \equiv 0 \end{aligned} \tag{3.1.2.5}$$

ifadesi elde edilir. Böylece tamlık bazında alıkonulması gereken invaryantları aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},\ tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}$$

Burada yer alan $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$, terimlerinde dairesel permütasyona göre matrislerin değiştiği gözlenmektedir. Kısalık sağlamak amacıyla bu değişimi göstermek üzere bu üç terimin yerine $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^*$ yazabiliriz. Burada $\underline{\underline{c}}$ matrisinin üzerine konan * üst – indisi matrislerin dairesel permütasyona göre değiştirilip yazılması gerektiğini göstermektedir. Aynı mantık $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}$ terimlerine uygulanırsa bu üçünün yerine sadece $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^*$ yazmanın yeterli olduğu görülecektir. Üç simetrik matris için tüm invaryantların bir arada görülmesi açısından hepsini yeniden yazacak olursak aşağıdaki liste elde edilir.

$tr\,\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{a}}^2,\ tr\,\underline{\underline{a}}^3$

$tr\,\underline{\underline{b}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2,\ tr\,\underline{\underline{b}}^3$

$tr\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2,\ tr\,\underline{\underline{c}}^3$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},\quad tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2$

$tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\quad tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}},\quad tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2,\quad tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}},\ tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}},\ tr\,\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{a}}$

3.1.2.4 Dört matris $\underline{\underline{a}}, \underline{\underline{b}}, \underline{\underline{c}}, \underline{\underline{d}}$

Yukarıdaki listede verilen invaryantlara ilave olarak tracelerini göz önüne almamız gereken matris çarpımları,

$$\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\ ,\ \underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}$$

ve $\underline{\underline{a}}\,,\underline{\underline{b}}\,,\underline{\underline{c}}\,,\underline{\underline{d}}$ matrislerinin permütasyonu ile bunlardan elde edilen çarpımların tracelerini de dikkate almamız gerekir.

$\underline{\underline{a}}\,,\underline{\underline{b}}\,,\underline{\underline{c}}\,,\underline{\underline{d}}$'nin her birine göre lineer olan üç farklı invaryant aşağıdaki gibi göz önüne alınabilir.

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}},\ tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}},\ tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}} \qquad (3.1.2.6)$$

Bu arada,

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\Sigma\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} = tr\,\underline{\underline{b}}\,\Sigma\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}} = tr\,\underline{\underline{c}}\,\Sigma\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$$

olduğunu hatırlayarak bu invaryantlar arasında (3.1.1.12) tarzında yalnızca bir farklı bağıntı olduğunu görürüz. Bu düşünceyi (3.1.2.6)'da verilen invaryantlardan herhangi birini diğer ikisi cinsinden ifade etmek için kullanabiliriz. Sonuç olarak, (3.1.2.6)'da verilen invaryantlardan yalnızca iki tanesini tamlık bazında alıkoymak gerekir, bunlarda

$$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}},\ tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}$$

olur.

Yukarıdaki tartışmada $\underline{\underline{a}}$ matrisi yerine $\underline{\underline{a}}^2$'yi kullanarak, $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}$ invaryantlarından yalnızca iki tanesini alıkoymak gerektiğini düşünürüz. Bu invaryantları içeren diğer bağıntılar tesis edilebilir. Ancak bu ilişkiler bize yeni bir bilgi sağlamaz. Şüphesiz benzer şartlar $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$ ve $\underline{\underline{d}}$'nin ikinci dereceden terimlerini içeren invaryantlara da uygulanabilir. Böylece tamlık bazında

$$tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}},\; tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}$$

invaryantlarını alıkoyarız. Bunlara ilaveten $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ faktörlerinin dairesel permütasyonu ile bunlardan elde edilen invaryantları da tamlık bazına eklemek gerekir.

Daha sonra $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ matrislerine göre ikinci dereceden ve $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ matrislerine göre birinci dereceden invaryantları dikkate alırız. Yalnız hemen indirgenemeyen bu invaryantlar $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}$ ve $tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}$ olup aşağıda verilen,

$$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\Sigma\,\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} \equiv 0$$

bağıntıdan ve (3.1.1.18) tarzındaki bağıntılardan yani,

$$tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2(\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}+\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}) \equiv 0$$

şeklindeki ifadeden faydalanırsak tamlık bazlarında yukarıda verilen iki invaryanttan $(tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}},\; tr\,\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}})$ sadece bir tanesi kalır. Benzer şartlar $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ matrislerinin herhangi iki tanesi için ikinci dereceden geriye kalan iki tanesi için birinci dereceden terimler içeren invaryantlara uygulanabilir. Bu durumda geriye kalan invaryantlar,

$$\underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}},\quad \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}},\quad \underline{\underline{a}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}},\quad \underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}},\quad \underline{\underline{b}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}},\quad \underline{\underline{c}}^2\underline{\underline{d}}^2\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$$

matris çarpımlarının traceleri şeklinde elde edilir.

Şimdi $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}$ ve bu terimde yer alan $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ matrislerinin permütasyonlarıyla elde edilen invaryantları göz önüne alıyoruz. (3.1.1.20) tipindeki bağıntı yardımıyla

$$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} \equiv -tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} = -tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}} \qquad (3.1.2.7)$$

ifadesini yazabiliriz.

Aynı zamanda $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\sum\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} \equiv 0$ ilişkisi ile (3.1.1.10) ve (3.1.2.7) bağıntılarının kullanılmasından sonra;

$$2\,tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}} + 2\,tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}} \equiv 0 \qquad (3.1.2.8)$$

denkliği elde edilir. (3.1.2.7) ve (3.1.2.8)'den ve benzer bağıntılar yardımıyla aşağıda verilen invaryantın tamlık bazına dahil edilmesi gerektiğini görüyoruz.

$$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}$$

Ayrıca $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$, $\underline{\underline{c}}$, $\underline{\underline{d}}$ matrislerinin dairesel permütasyonu ile yukarıdaki invaryanttan türetilen diğer invaryantlarında tamlık bazına dahil edilmesi gerekmektedir. Bu invaryantların tespit edilmesi esnasındaki bağıntılar daha önce yapılan işlemlerin bir tekrarı olacağı için burada verilmemiştir. Dört simetrik matris için invaryantların tam listesi aşağıda verilmiştir.

$tr\,\underline{\underline{a}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2$, $tr\,\underline{\underline{a}}^3$

$tr\,\underline{\underline{b}}$, $tr\,\underline{\underline{b}}^2$, $tr\,\underline{\underline{b}}^3$

$tr\,\underline{\underline{c}}$, $tr\,\underline{\underline{c}}^2$, $tr\,\underline{\underline{c}}^3$

$tr\,\underline{\underline{d}}$, $tr\,\underline{\underline{d}}^2$, $tr\,\underline{\underline{d}}^3$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$, $tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}^2$, $tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^2$, $tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2$

$tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,,\quad tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,,\quad tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}^2$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}\,,\quad tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{d}}^2$

$tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,,\quad tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{b}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}^2$

$tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{b}}^2\,,\quad tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}^2$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}$

$tr\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{b}}, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{b}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\quad ,\ tr\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{a}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}$

$tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,, tr\,\underline{\underline{d}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,, tr\,\underline{\underline{c}}^2\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}\,, tr\,\underline{\underline{a}}^2\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}\,, tr\,\underline{\underline{b}}^2\,\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{c}}\,\underline{\underline{d}}\,\underline{\underline{a}}$

Beş ve altı matris için benzer işlemler yapılarak ilave invaryant parametrelerin nasıl elde edildiği Spencer(1971)' de açıklanmaktadır. Bu eserde aynı zamanda antisimetrik matrislere ait invaryant parametrelerin nasıl belirlendiği de ifade edilmektedir. Bu çalışmanın hacmini daha fazla büyütmemek için antisimetrik matrislerle ilgili detaylara girmiyor ve bu konu hakkında giriş kısmında verdiğimiz bilgilerle yetiniyoruz. Aşağıda verilen çizelgede matrisler için invaryant parametreler özetlenmiştir.

Çizelge 2. Bu çizelgede verilen matris çarpımlarının traceleri uygun ortogonal grup için tamlık bazlarını oluşturur.

Matrisler	**Matris Çarpımları**
a	a; a^2; a^3
a, b	ab; ab^{2*}; a^2b^2
a, b, c	abc; a^2bc^*; $a^2b^2c^*$
a, b, c, d	$abcd$; $abdc$; a^2bcd^*; a^2bdc^* a^2b^2cd, a^2c^2bd, a^2d^2bc, b^2c^2ad, b^2d^2ac, c^2d^2ab; a^2bacd^*
a, b, c, d, e	$abcde$, $abdec$, $abecd$, $acbed$, $acdbe$, $adcbe$; a^2bcde^*, a^2bced^* a^2cbde^*, a^2bedc^*
a, b, c, d, e, f	$acfebd$, $adcbfe$, $adcfbe$, $adfbce$, $adfbce$, $aebdcf$, $aecbdf$, $aecdbf$, $aedbcf$, $aedcbf$

Bu çizelgede bazı harflerin üzerinde üst indis şeklinde yer alan * işareti ; o terimde yer alan her bir matrisin dairesel permütasyon kuralına göre yer değiştirerek yazılması gerektiğini ifade eder.

4. BULGULAR

Bu bölümde, Spencer(1971)' dan faydalanarak daha önceki bölümlerde teorik temelleri verilmeye çalışılmış olan invaryant parametreler MATLAB paket programından faydalanarak belirlenmeye çalışılmaktadır.

Simetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi için, MATLAB programında aşağıdaki sembolik tanımlamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a12');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
a31=sym('a13');
a32=sym('a22');
a33=sym('a33');
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A ( A matrisinin karesi)
AAA=A*A*A ( A matrisinin kübü)
DETA=det(A) ( A matrisinin determinantı)
INVA=inv(A) ( A matrisinin tersi)
TRA=trace(A) ( A matrisinin trace'i)
TRAA=trace(A*A) ( A matrisinin karesinin trace' i)
TRAAA=trace(A*A*A) ( A matrisinin kübünün trace'i)
```

```
A =
[ a11, a12, a13]
[ a12, a22, a23]
[ a13, a22, a33]
```

AA =

[a11^2+a12^2+a13^2, a11*a12+a12*a22+a13*a22, a11*a13+a12*a23+a13*a33]
[a11*a12+a12*a22+a23*a13, a12^2+a22^2+a23*a22, a12*a13+a23*a22+a23*a33]
[a11*a13+a12*a22+a13*a33, a12*a13+a22^2+a33*a22, a13^2+a23*a22+a33^2]

AAA =

[(a11^2+a12^2+a13^2)*a11+(a11*a12+a12*a22+a13*a22)*a12+(a11*a13+a12*a23
+a13*a33)*a13,
(a11^2+a12^2+a13^2)*a12+(a11*a12+a12*a22+a13*a22)*a22+(a11*a13+a12*a23+
a13*a33)*a22,
(a11^2+a12^2+a13^2)*a13+(a11*a12+a12*a22+a13*a22)*a23+(a11*a13+a12*a23+
a13*a33)*a33]
[(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*a11+(a12^2+a22^2+a23*a22)*a12+(a12*a13+a23*a
22+a23*a33)*a13,
(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*a12+(a12^2+a22^2+a23*a22)*a22+(a12*a13+a23*a2
2+a23*a33)*a22,
(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*a13+(a12^2+a22^2+a23*a22)*a23+(a12*a13+a23*a2
2+a23*a33)*a33]
[(a11*a13+a12*a22+a13*a33)*a11+(a12*a13+a22^2+a33*a22)*a12+(a13^2+a23*a
22+a33^2)*a13,
(a11*a13+a12*a22+a13*a33)*a12+(a12*a13+a22^2+a33*a22)*a22+(a13^2+a23*a2
2+a33^2)*a22,
(a11*a13+a12*a22+a13*a33)*a13+(a12*a13+a22^2+a33*a22)*a23+(a13^2+a23*a2
2+a33^2)*a33]

DETA =
a11*a33*a22-a11*a23*a22-a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22

INVA =

[a22*(a33-a23)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22),(-
a12*a33+a13*a22)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22),-(-
a12*a23+a13*a22)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22)]
[-(a12*a33-a23*a13)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22),(a11*a33-
a13^2)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-
a13^2*a22),(-a11*a23+a12*a13)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22)]
[a22*(a12-a13)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22),-(a11*a22-
a12*a13)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-
a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-a13^2*a22),(a11*a22-
a12^2)/(a11*a33*a22-a11*a23*a22-a12^2*a33+a12*a13*a22+a13*a12*a23-
a13^2*a22)]

TRA =
a11+a22+a33

TRAA =
a11^2+2*a12^2+2*a13^2+a22^2+2*a23*a22+a33^2

TRAAA =
(a11^2+a12^2+a13^2)*a11+(a11*a12+a12*a22+a13*a22)*a12+(a11*a13+a12*a23+
a13*a33)*a13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*a12+(a12^2+a22^2+a23*a22)*a22+(a
12*a13+a23*a22+a23*a33)*a22+(a11*a13+a12*a22+a13*a33)*a13+(a12*a13+a22
^2+a33*a22)*a23+(a13^2+a23*a22+a33^2)*a33

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri için, MATLAB programında aşağıdaki sembolik tanımlamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a12');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
a31=sym('a13');
a32=sym('a23');
a33=sym('a33');
b11=sym('b11');
b12=sym('b12');
b13=sym('b13');
b21=sym('b12');
b22=sym('b22');
b23=sym('b23');
b31=sym('b13');
b32=sym('b23');
b33=sym('b33');
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
BB=B*B
BBB=B*B*B
DETB=det(B)
INVB=inv(B)
TRB=trace(B)
TRBB=trace(B*B)
TRBBB=trace(B*B*B)
TRAB=trace(A*B)
TRABB=trace(A*B*B)
```

TRBAA=trace(B*A*A)

TRAABB=trace(A*A*B*B)

A =

[a11, a12, a13]

[a12, a22, a23]

[a13, a23, a33]

B =

[b11, b12, b13]

[b12, b22, b23]

[b13, b23, b33]

BB =

[b11^2+b12^2+b13^2, b11*b12+b12*b22+b13*b23, b11*b13+b12*b23+b13*b33]

[b11*b12+b12*b22+b13*b23, b12^2+b22^2+b23^2, b12*b13+b22*b23+b23*b33]

[b11*b13+b12*b23+b13*b33, b12*b13+b22*b23+b23*b33, b13^2+b23^2+b33^2]

BBB =

[(b11^2+b12^2+b13^2)*b11+(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b12+(b11*b13+b1
2*b23+b13*b33)*b13,

(b11^2+b12^2+b13^2)*b12+(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b22+(b11*b13+b1
2*b23+b13*b33)*b23,

(b11^2+b12^2+b13^2)*b13+(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b23+(b11*b13+b1
2*b23+b13*b33)*b33]

[(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b11+(b12^2+b22^2+b23^2)*b12+(b12*b13+b2
2*b23+b23*b33)*b13,

(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b12+(b12^2+b22^2+b23^2)*b22+(b12*b13+b2
2*b23+b23*b33)*b23,

(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b13+(b12^2+b22^2+b23^2)*b23+(b12*b13+b22*b23+b23*b33)*b33]
[(b11*b13+b12*b23+b13*b33)*b11+(b12*b13+b22*b23+b23*b33)*b12+(b13^2+b23^2+b33^2)*b13,
(b11*b13+b12*b23+b13*b33)*b12+(b12*b13+b22*b23+b23*b33)*b22+(b13^2+b23^2+b33^2)*b23,
(b11*b13+b12*b23+b13*b33)*b13+(b12*b13+b22*b23+b23*b33)*b23+(b13^2+b23^2+b33^2)*b33]

DETB =
b11*b22*b33-b11*b23^2-b12^2*b33+2*b12*b13*b23-b13^2*b22

INVB =
[-(b22*b33-b23^2)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),-(-b12*b33+b13*b23)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),(-b12*b23+b13*b22)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22)]
[-(-b12*b33+b13*b23)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),(-b11*b33+b13^2)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),-(-b11*b23+b12*b13)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22)]
[(-b12*b23+b13*b22)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),-(-b11*b23+b12*b13)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22),-(b11*b22-b12^2)/(-b11*b22*b33+b11*b23^2+b12^2*b33-2*b12*b13*b23+b13^2*b22)]

TRB =
b11+b22+b33

TRBB =

b11^2+2*b12^2+2*b13^2+b22^2+2*b23^2+b33^2

TRBBB =

(b11^2+b12^2+b13^2)*b11+2*(b11*b12+b12*b22+b13*b23)*b12+2*(b11*b13+b12*b23+b13*b33)*b13+(b12^2+b22^2+b23^2)*b22+2*(b12*b13+b22*b23+b23*b33)*b23+(b13^2+b23^2+b33^2)*b33

TRAB =

a11*b11+2*a12*b12+2*a13*b13+a22*b22+2*a23*b23+a33*b33

TRABB =

(a11*b11+a12*b12+a13*b13)*b11+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*b12+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*b13+(a12*b11+a22*b12+a23*b13)*b12+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*b22+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*b23+(a13*b11+a23*b12+a33*b13)*b13+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*b23+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*b33

TRBAA =

(a11*b11+a12*b12+a13*b13)*a11+(a12*b11+a22*b12+a23*b13)*a12+(a13*b11+a23*b12+a33*b13)*a13+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*a12+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*a22+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*a23+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*a13+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*a23+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*a33

TRAABB =

((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b13+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*b12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b

```
11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b13+((a11*a13
+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2
)*b23)*b23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23
+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b33
```

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ matrisleri için, MATLAB programında aşağıdaki sembolik tanımlamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a12');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
a31=sym('a13');
a32=sym('a23');
a33=sym('a33');
b11=sym('b11');
b12=sym('b12');
b13=sym('b13');
b21=sym('b12');
b22=sym('b22');
b23=sym('b23');
b31=sym('b13');
b32=sym('b23');
b33=sym('b33');
c11=sym('c11');
c12=sym('c12');
c13=sym('c13');
c21=sym('c12');
c22=sym('c22');
c23=sym('c23');
```

```
c31=sym('c13');
c32=sym('c23');
c33=sym('c33');

A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
C=[c11 c12 c13; c21 c22 c23; c31 c32 c33]
CC=C*C
CCC=C*C*C
DETC=det(C)
INVC=inv(C)
TRC=trace(C)
TRCC=trace(C*C)
TRCCC=trace(C*C*C)
TRAC=trace(A*C)
TRABC=trace(A*B*C)
TRAABC=trace(A*A*B*C)


A =
[ a11, a12, a13]
[ a12, a22, a23]
[ a13, a23, a33]


B =
[ b11, b12, b13]
[ b12, b22, b23]
[ b13, b23, b33]
```

C =

[c11, c12, c13]

[c12, c22, c23]

[c13, c23, c33]

CC =

[c11^2+c12^2+c13^2,   c11*c12+c12*c22+c13*c23,   c11*c13+c12*c23+c13*c33]

[c11*c12+c12*c22+c13*c23,   c12^2+c22^2+c23^2, c12*c13+c22*c23+c23*c33]

[c11*c13+c12*c23+c13*c33,   c12*c13+c22*c23+c23*c33,   c13^2+c23^2+c33^2]

CCC =

[(c11^2+c12^2+c13^2)*c11+(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c12+(c11*c13+c12*c23
+c13*c33)*c13,

(c11^2+c12^2+c13^2)*c12+(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c22+(c11*c13+c12*c23+
c13*c33)*c23,

(c11^2+c12^2+c13^2)*c13+(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c23+(c11*c13+c12*c23+
c13*c33)*c33]

[(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c11+(c12^2+c22^2+c23^2)*c12+(c12*c13+c22*c23
+c23*c33)*c13,

(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c12+(c12^2+c22^2+c23^2)*c22+(c12*c13+c22*c23+
c23*c33)*c23,

(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c13+(c12^2+c22^2+c23^2)*c23+(c12*c13+c22*c23+
c23*c33)*c33]

[(c11*c13+c12*c23+c13*c33)*c11+(c12*c13+c22*c23+c23*c33)*c12+(c13^2+c23
^2+c33^2)*c13,

(c11*c13+c12*c23+c13*c33)*c12+(c12*c13+c22*c23+c23*c33)*c22+(c13^2+c23^
2+c33^2)*c23,

(c11*c13+c12*c23+c13*c33)*c13+(c12*c13+c22*c23+c23*c33)*c23+(c13^2+c23^
2+c33^2)*c33]

DETC =

c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22

INVC =

[(c22*c33-c23^2)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),(-c12*c33+c13*c23)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),-(-c12*c23+c13*c22)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22)]

[(-c12*c33+c13*c23)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),(c11*c33-c13^2)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),-(c11*c23-c12*c13)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22)]

[-(-c12*c23+c13*c22)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),-(c11*c23-c12*c13)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22),(c11*c22-c12^2)/(c11*c22*c33-c11*c23^2-c12^2*c33+2*c12*c13*c23-c13^2*c22)]

TRC =

c11+c22+c33

TRCC =

c11^2+2*c12^2+2*c13^2+c22^2+2*c23^2+c33^2

TRCCC =

(c11^2+c12^2+c13^2)*c11+2*(c11*c12+c12*c22+c13*c23)*c12+2*(c11*c13+c12*c23+c13*c33)*c13+(c12^2+c22^2+c23^2)*c22+2*(c12*c13+c22*c23+c23*c33)*c23+(c13^2+c23^2+c33^2)*c33

TRAC =

a11*c11+2*a12*c12+2*a13*c13+a22*c22+2*a23*c23+a33*c33

TRABC =
(a11*b11+a12*b12+a13*b13)*c11+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*c12+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*c13+(a12*b11+a22*b12+a23*b13)*c12+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*c22+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*c23+(a13*b11+a23*b12+a33*b13)*c13+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*c23+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*c33

TRAABC =
((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*c11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*c12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*c13+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*c12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*c22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*c23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*c13+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*c23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*c33

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}$ matrisleri için, , MATLAB programında aşağıdaki program hazırlanarak, bu programın çalıştırılarak elde edilen sonuçlar sembolik olarak aşağıda verilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a12');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
```

```
a31=sym('a13');
a32=sym('a23');
a33=sym('a33');
b11=sym('b11');
b12=sym('b12');
b13=sym('b13');
b21=sym('b12');
b22=sym('b22');
b23=sym('b23');
b31=sym('b13');
b32=sym('b23');
b33=sym('b33');
c11=sym('c11');
c12=sym('c12');
c13=sym('c13');
c21=sym('c12');
c22=sym('c22');
c23=sym('c23');
c31=sym('c13');
c32=sym('c23');
c33=sym('c33');
d11=sym('d11');
d12=sym('d12');
d13=sym('d13');
d21=sym('d12');
d22=sym('d22');
d23=sym('d23');
d31=sym('d13');
d32=sym('d23');
d33=sym('d33');

A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
```

```
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
C=[c11 c12 c13; c21 c22 c23; c31 c32 c33]
D=[d11 d12 d13; d21 d22 d23; d31 d32 d33]
DD=D*D
DDD=D*D*D
DETD=det(D)
INVD=inv(D)
TRD=trace(D)
TRDD=trace(D*D)
TRDDD=trace(D*D*D)
TRAD=trace(A*D)
TRADD=trace(A*D*D)
TRDAA=trace(D*A*A)
TRAADD=trace(A*A*D*D)
TRAABC=trace(A*A*B*C)
TRABCD=trace(A*B*C*D)
TRAABCD=trace(A*A*B*C*D)
TRAABBCD=trace(A*A*B*B*C*D)

A =
[ a11, a12, a13]
[ a12, a22, a23]
[ a13, a23, a33]
 B =
[ b11, b12, b13]
[ b12, b22, b23]
[ b13, b23, b33]
C =
[ c11, c12, c13]
[ c12, c22, c23]
[ c13, c23, c33]
```

D =

[d11, d12, d13]

[d12, d22, d23]

[d13, d23, d33]

DD =

[d11^2+d12^2+d13^2,   d11*d12+d12*d22+d13*d23,   d11*d13+d12*d23+d13*d33]

[d11*d12+d12*d22+d13*d23,   d12^2+d22^2+d23^2,   d12*d13+d22*d23+d23*d33]

[d11*d13+d12*d23+d13*d33,   d12*d13+d22*d23+d23*d33,   d13^2+d23^2+d33^2]

DDD =

[(d11^2+d12^2+d13^2)*d11+(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d12+(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d13,

(d11^2+d12^2+d13^2)*d12+(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d22+(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d23,

(d11^2+d12^2+d13^2)*d13+(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d23+(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d33]

[(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d11+(d12^2+d22^2+d23^2)*d12+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d13,

(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d12+(d12^2+d22^2+d23^2)*d22+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d23,

(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d13+(d12^2+d22^2+d23^2)*d23+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d33]

[(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d11+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d12+(d13^2+d23^2+d33^2)*d13,

(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d12+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d22+(d13^2+d23^2+d33^2)*d23,

(d11*d13+d12*d23+d13*d33)*d13+(d12*d13+d22*d23+d23*d33)*d23+(d13^2+d23^2+d33^2)*d33]

DETD =

d11*d22*d33-d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22

INVD =
[(d22*d33-d23^2)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-
d13^2*d22),-(d12*d33-d13*d23)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-
d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22),(d12*d23-d13*d22)/(d11*d22*d33-
d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22)]
[-(d12*d33-d13*d23)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-
d13^2*d22),(d11*d33-d13^2)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-
d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22),-(d11*d23-d12*d13)/(d11*d22*d33-
d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22)]
[(d12*d23-d13*d22)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-
d13^2*d22),-(d11*d23-d12*d13)/(d11*d22*d33-d11*d23^2-
d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22),(d11*d22-d12^2)/(d11*d22*d33-
d11*d23^2-d12^2*d33+2*d12*d13*d23-d13^2*d22)]

TRD =
d11+d22+d33

TRDD =
d11^2+2*d12^2+2*d13^2+d22^2+2*d23^2+d33^2

TRDDD =
(d11^2+d12^2+d13^2)*d11+2*(d11*d12+d12*d22+d13*d23)*d12+2*(d11*d13+d1
2*d23+d13*d33)*d13+(d12^2+d22^2+d23^2)*d22+2*(d12*d13+d22*d23+d23*d33
)*d23+(d13^2+d23^2+d33^2)*d33

TRAD =
a11*d11+2*a12*d12+2*a13*d13+a22*d22+2*a23*d23+a33*d33

TRADD =
(a11*d11+a12*d12+a13*d13)*d11+(a11*d12+a12*d22+a13*d23)*d12+(a11*d13+a
12*d23+a13*d33)*d13+(a12*d11+a22*d12+a23*d13)*d12+(a12*d12+a22*d22+a2

3*d23)*d22+(a12*d13+a22*d23+a23*d33)*d23+(a13*d11+a23*d12+a33*d13)*d13
+(a13*d12+a23*d22+a33*d23)*d23+(a13*d13+a23*d23+a33*d33)*d33

TRDAA =
(a11*d11+a12*d12+a13*d13)*a11+(a12*d11+a22*d12+a23*d13)*a12+(a13*d11+a
23*d12+a33*d13)*a13+(a11*d12+a12*d22+a13*d23)*a12+(a12*d12+a22*d22+a2
3*d23)*a22+(a13*d12+a23*d22+a33*d23)*a23+(a11*d13+a12*d23+a13*d33)*a13
+(a12*d13+a22*d23+a23*d33)*a23+(a13*d13+a23*d23+a33*d33)*a33

TRAADD =
((a11^2+a12^2+a13^2)*d11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*d12+(a11*a13+a12*a23
+a13*a33)*d13)*d11+((a11^2+a12^2+a13^2)*d12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*d
22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*d23)*d12+((a11^2+a12^2+a13^2)*d13+(a11*a12
+a12*a22+a23*a13)*d23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*d33)*d13+((a11*a12+a12*
a22+a23*a13)*d11+(a12^2+a22^2+a23^2)*d12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*d13)
*d12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*d12+(a12^2+a22^2+a23^2)*d22+(a12*a13+a2
3*a22+a23*a33)*d23)*d22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*d13+(a12^2+a22^2+a23
^2)*d23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*d33)*d23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*d
11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*d12+(a13^2+a23^2+a33^2)*d13)*d13+((a11*a13
+a12*a23+a13*a33)*d12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*d22+(a13^2+a23^2+a33^2
)*d23)*d23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*d13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*d23
+(a13^2+a23^2+a33^2)*d33)*d33

TRAABC =
((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23
+a13*a33)*b13)*c11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b
22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*c12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12
+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*c13+((a11*a12+a12*
a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)
*c12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a2
3*a22+a23*a33)*b23)*c22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23
^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*c23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b

11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*c13+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*c23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*c33

TRABCD =

((a11*b11+a12*b12+a13*b13)*c11+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*c12+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*c13)*d11+((a11*b11+a12*b12+a13*b13)*c12+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*c22+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*c23)*d12+((a11*b11+a12*b12+a13*b13)*c13+(a11*b12+a12*b22+a13*b23)*c23+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*c33)*d13+((a12*b11+a22*b12+a23*b13)*c11+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*c12+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*c13)*d12+((a12*b11+a22*b12+a23*b13)*c12+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*c22+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*c23)*d22+((a12*b11+a22*b12+a23*b13)*c13+(a12*b12+a22*b22+a23*b23)*c23+(a12*b13+a22*b23+a23*b33)*c33)*d23+((a13*b11+a23*b12+a33*b13)*c11+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*c12+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*c13)*d13+((a13*b11+a23*b12+a33*b13)*c12+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*c22+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*c23)*d23+((a13*b11+a23*b12+a33*b13)*c13+(a13*b12+a23*b22+a33*b23)*c23+(a13*b13+a23*b23+a33*b33)*c33)*d33

TRAABCD =

(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*c11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*c12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*c13)*d11+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*c12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*c22+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*c23)*d12+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*c13+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a1

2*a23+a13*a33)*b23)*c23+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a
13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*c33)*d13+(((a11*a12+a12*a22+a23*
a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*c11+((a
11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a
23*a33)*b23)*c12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23
+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*c13)*d12+(((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b1
1+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*c12+((a11*a12+
a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)
*b23)*c22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a
13+a23*a22+a23*a33)*b33)*c23)*d22+(((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^
2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*c13+((a11*a12+a12*a22
+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*c2
3+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a
22+a23*a33)*b33)*c33)*d23+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*
a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*c11+((a11*a13+a12*a23+a13*a33
)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*c12+((a11*
a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a3
3^2)*b33)*c13)*d13+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23
*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*c12+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(
a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*c22+((a11*a13+a12
*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b3
3)*c23)*d23+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b
12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*c13+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13
+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*c23+((a11*a13+a12*a23+a1
3*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*c33)*
d33

TRAABBCD =
((((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a
23+a13*a33)*b13)*b11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)
*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a

12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b13)*c11+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b22+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b23)*c12+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b13+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b23+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b33)*c13)*d11+((((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b13)*c12+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b22+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b23)*c22+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b13+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b23+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b33)*c23)*d12+((((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b11+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b13)*c13+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b12+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b22+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b23)*c23+(((a11^2+a12^2+a13^2)*b11+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13)*b13+((a11^2+a12^2+a13^2)*b12+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b23)*b23+((a11^2+a12^2+a13^2)*b13+(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a3

3)*b33)*b33)*c33)*d13+((((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^
2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*b11+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b1
2+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b12+((a11*a12+
a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)
*b33)*b13)*c11+(((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+
(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*b12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^
2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b22+((a11*a12+a12*a22
+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b2
3)*c12+(((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13
+a23*a22+a23*a33)*b13)*b13+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2
+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b23+((a11*a12+a12*a22+a23*a1
3)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b33)*c13)
*d12+((((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+
a23*a22+a23*a33)*b13)*b11+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a
23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)
*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b13)*c12+((
(a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22
+a23*a33)*b13)*b12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b
22+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a
12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b23)*c22+(((a11*a1
2+a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a3
3)*b13)*b13+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12
*a13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b23+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a2
2^2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b33)*c23)*d22+((((a11*a12+
a12*a22+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)
*b13)*b11+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a
13+a23*a22+a23*a33)*b23)*b12+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^
2+a23^2)*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b13)*c13+(((a11*a12+a12*a22
+a23*a13)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*b1
2+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a
22+a23*a33)*b23)*b22+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)
*b23+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b23)*c23+(((a11*a12+a12*a22+a23*a13

```
)*b11+(a12^2+a22^2+a23^2)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b13)*b13+((a11*
a12+a12*a22+a23*a13)*b12+(a12^2+a22^2+a23^2)*b22+(a12*a13+a23*a22+a23*
a33)*b23)*b23+((a11*a12+a12*a22+a23*a13)*b13+(a12^2+a22^2+a23^2)*b23+(a
12*a13+a23*a22+a23*a33)*b33)*b33)*c33)*d23+((((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*
b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b11+((a11*a1
3+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^
2)*b23)*b12+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b2
3+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b13)*c11+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12
*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b12+((a11*a13+a12*a2
3+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b
22+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+
a23^2+a33^2)*b33)*b23)*c12+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23
*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b13+((a11*a13+a12*a23+a13*a3
3)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b23+((a11
*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a
33^2)*b33)*b33)*c13)*d13+((((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a
22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b11+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)
*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b12+((a11*a
13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33
^2)*b33)*b13)*c12+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*
a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b12+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a
12*a13+a23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b22+((a11*a13+a12*
a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)
*b23)*c22+(((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12
+(a13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b13+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a
23*a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b23+((a11*a13+a12*a23+a13*
a33)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b33)*c2
3)*d23+((((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a
13^2+a23^2+a33^2)*b13)*b11+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*
a22+a23*a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b12+((a11*a13+a12*a23+a13*a33
)*b13+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b13)*c13+(
((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23
```

```
^2+a33^2)*b13)*b12+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*
a33)*b22+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b22+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a
12*a13+a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b23)*c23+(((a11*a1
3+a12*a23+a13*a33)*b11+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b12+(a13^2+a23^2+a33^
2)*b13)*b13+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b12+(a12*a13+a23*a22+a23*a33)*b2
2+(a13^2+a23^2+a33^2)*b23)*b23+((a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b13+(a12*a13+
a23*a22+a23*a33)*b23+(a13^2+a23^2+a33^2)*b33)*b33)*c33)*d33
```

Simetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi sayısal değerler kullanılarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=2;
a12=4;
a13=6;
a21=4;
a22=-3;
a23=8;
a31=6;
a32=8;
a33=-9;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A
AAA=A*A*A
DETA=det(A)
INVA=inv(A)
[V,E]=eig(A) ( A matrisine ait özvektörler ve özdeğerler)
TRA=trace(A)
TRAA=trace(A*A)
TRAAA=trace(A*A*A)
```

A =

2	4	6
4	-3	8
6	8	-9

AA =

56	44	-10
44	89	-72
-10	-72	181

AAA =

228	12	778
12	-667	1624
778	1624	-2265

DETA = 562

INVA =

-0.0658	0.1495	0.0890
0.1495	-0.0961	0.0142
0.0890	0.0142	-0.0391

V =

0.6927	-0.1799	0.6984
-0.6751	-0.5025	0.5401
-0.2538	0.8456	0.4695

E =

-4.0967	0	0
0	-15.0304	0
0	0	9.1271

TRA = -10

TRAA = 326

TRAAA = -2704

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri sayısal değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=2;
a12=4;
a13=6;
a21=4;
a22=-3;
a23=8;
a31=6;
a32=8;
a33=-9;
b11=-3;
b12=7;
b13=6;
b21=7;
b22=-9;
b23=5;
b31=6;
b32=8;
b33=-10;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
BB=B*B
BBB=B*B*B
DETB=det(B)
```

```
INVB=inv(B)
[V,E]=eig(A)
[V,E]=eig(B)
TRB=trace(B)
TRBB=trace(B*B)
TRBBB=trace(B*B*B)
TRAB=trace(A*B)
TRABB=trace(A*B*B)
TRBAA=trace(B*A*A)
TRAABB=trace(A*A*B*B)
```

A =

2	4	6
4	-3	8
6	8	-9

B =

-3	7	6
7	-9	5
6	8	-10

BB =

94	-36	-43
-54	170	-53
-22	-110	176

BBB =

-792	638	814
1034	-2332	1056
352	2244	-2442

DETB = 1210

INVB =

0.0413	0.0975	0.0736
0.0826	-0.0050	0.0471
0.0909	0.0545	-0.0182

V =

0.6927	-0.1799	0.6984
-0.6751	-0.5025	0.5401
-0.2538	0.8456	0.4695

E =

-4.0967	0	0
0	- 15.0304	0
0	0	9.1271

V =

0.7074	0.6437	-0.1198
0.4932	-0.2565	-0.5123
0.5063	-0.7211	0.8504

E =

6.1746	0	0
0	-12.5106	0
0	0	-15.6640

TRB = -22

TRBB = 440

TRBBB = -5566

TRAB =343

TRABB =-3960

TRBAA = -3219

TRAABB = 60676

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$ matrisleri sayısal değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=2;
a12=4;
a13=6;
a21=4;
a22=-3;
a23=8;
a31=6;
a32=8;
a33=-9;
b11=-3;
b12=7;
b13=6;
b21=7;
b22=-9;
b23=5;
b31=6;
b32=8;
b33=-10;
```

```
c11=10;
c12=12;
c13=14;
c21=12;
c22=-6;
c23=-7;
c31=14;
c32=-7;
c33=14;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
C=[c11 c12 c13; c21 c22 c23; c31 c32 c33]
CC=C*C
CCC=C*C*C
DETC=det(C)
INVC=inv(C)
[V,E]=eig(A)
TRC=trace(C)
TRCC=trace(C*C)
TRCCC=trace(C*C*C)
TRAC=trace(A*C)
TRABC=trace(A*B*C)
TRAABC=trace(A*A*B*C)
A =
     2     4     6
     4    -3     8
     6     8    -9


B =
    -3     7     6
     7    -9     5
     6     8   -10
```

C =

10	12	14
12	-6	-7
14	-7	14

CC =

440	-50	252
-50	229	112
252	112	441

CCC =

7328	3816	10038
3816	-2758	-735
10038	-735	8918

DETC = -4522

INVC =

0.0294	0.0588	0.0000
0.0588	0.0124	-0.0526
0	-0.0526	0.0451

V =

0.6927	-0.1799	0.6984
-0.6751	-0.5025	0.5401
-0.2538	0.8456	0.4695

E =

-4.0967	0	0
0	-15.0304	0
0	0	9.1271

TRC = 18

TRCC = 1110

TRCCC =13488

TRAC =64

TRABC =3277

TRAABC = -30739

Simetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}$ matrisleri sayısal değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir

```
a11=2;
a12=4;
a13=6;
a21=4;
a22=-3;
a23=8;
a31=6;
a32=8;
a33=-9;
b11=-3;
b12=7;
b13=6;
b21=7;
b22=-9;
b23=5;
```

```
b31=6;
b32=8;
b33=-10;
c11=10;
c12=12;
c13=14;
c21=12;
c22=-6;
c23=-7;
c31=14;
c32=-7;
c33=14;
d11=5;
d12=-2;
d13=6;
d21=-2;
d22=5;
d23=11;
d31=6;
d32=11;
d33=-1;

A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
C=[c11 c12 c13; c21 c22 c23; c31 c32 c33]
D=[d11 d12 d13; d21 d22 d23; d31 d32 d33]
DD=D*D
DDD=D*D*D
DETD=det(D)
INVD=inv(D)
[V,E]=eig(C)
TRD=trace(D)
```

```
TRDD=trace(D*D)
TRDDD=trace(D*D*D)
TRAD=trace(A*D)
TRADD=trace(A*D*D)
TRDAA=trace(D*A*A)
TRAADD=trace(A*A*D*D)
```

```
A =

     2     4     6
     4    -3     8
     6     8    -9


B =

    -3     7     6
     7    -9     5
     6     8   -10


C =

    10    12    14
    12    -6    -7
    14    -7    14


D =

     5    -2     6
    -2     5    11
     6    11    -1


DD =

    65    46     2
    46   150    32
     2    32   158
```

DDD =

245	122	894
122	1010	1894
894	1894	206

DETD = -1070

INVD =

0.1178	-0.0598	0.0486
-0.0598	0.0383	0.0626
0.0486	0.0626	-0.0196

V =

-0.5052	-0.6870	-0.5223
-0.6471	-0.0989	0.7560
0.5710	-0.7199	0.3946

E =

9.5461	0	0
0	26.3983	0
0	0	-17.9444

TRD =9

TRDD = 373

TRDDD =1461

TRAD = 236

TRADD = -838

TRDAA =-1336

TRAADD = 44988

Asimetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi sembolik değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=sym('a11');
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('a21');
a22=sym('a22');
a23=sym('a23');
a31=sym('a31');
a32=sym('a32');
a33=sym('a33');
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A
AAA=A*A*A
DETA=det(A)
INVA=inv(A)
TRA=trace(A)
TRAA=trace(A*A)
TRAAA=trace(A*A*A)
A =
[ a11, a12, a13]
[ a21, a22, a23]
[ a31, a32, a33]
```

```
AA =
[  a11^2+a12*a21+a13*a31, a11*a12+a12*a22+a13*a32, a11*a13+a12*a23+a13*a33]
[ a21*a11+a22*a21+a23*a31,   a12*a21+a22^2+a23*a32, a21*a13+a22*a23+a23*a33]
[ a31*a11+a32*a21+a33*a31, a31*a12+a32*a22+a33*a32,   a13*a31+a23*a32+a33^2]

AAA =
[(a11^2+a12*a21+a13*a31)*a11+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*a21+(a11*a13+a12
*a23+a13*a33)*a31,
(a11^2+a12*a21+a13*a31)*a12+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*a22+(a11*a13+a12*
a23+a13*a33)*a32,
(a11^2+a12*a21+a13*a31)*a13+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*a23+(a11*a13+a12*
a23+a13*a33)*a33]
[(a21*a11+a22*a21+a23*a31)*a11+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*a21+(a21*a13+a22
*a23+a23*a33)*a31,
(a21*a11+a22*a21+a23*a31)*a12+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*a22+(a21*a13+a22*
a23+a23*a33)*a32,
(a21*a11+a22*a21+a23*a31)*a13+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*a23+(a21*a13+a22*
a23+a23*a33)*a33]
[(a31*a11+a32*a21+a33*a31)*a11+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*a21+(a13*a31+a
23*a32+a33^2)*a31,
(a31*a11+a32*a21+a33*a31)*a12+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*a22+(a13*a31+a2
3*a32+a33^2)*a32,
(a31*a11+a32*a21+a33*a31)*a13+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*a23+(a13*a31+a2
3*a32+a33^2)*a33]

DETA =
a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22


INVA =
```

[(a22*a33-a23*a32)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), (-a12*a33+a13*a32)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), -(-a12*a23+a13*a22)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22)]

[-(a21*a33-a23*a31)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), (a11*a33-a13*a31)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), (-a11*a23+a21*a13)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22)]

[(a32*a21-a22*a31)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), -(a11*a32-a31*a12)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22), -(-a11*a22+a12*a21)/(a11*a22*a33-a11*a23*a32-a21*a12*a33+a21*a13*a32+a31*a12*a23-a31*a13*a22)]

TRA =
a11+a22+a33

TRAA =
a11^2+2*a12*a21+2*a13*a31+a22^2+2*a23*a32+a33^2

TRAAA =
(a11^2+a12*a21+a13*a31)*a11+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*a21+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*a31+(a21*a11+a22*a21+a23*a31)*a12+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*a22+(a21*a13+a22*a23+a23*a33)*a32+(a31*a11+a32*a21+a33*a31)*a13+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*a23+(a13*a31+a23*a32+a33^2)*a33

Asimetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri sembolik değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
A =
[ a11, a12, a13]
[ a21, a22, a23]
[ a31, a32, a33]

B =
[ b11, b12, b13]
[ b21, b22, b23]
[ b31, b32, b33]

BB =
[   b11^2+b12*b21+b13*b31, b11*b12+b12*b22+b13*b32, b11*b13+b12*b23+b13*b33]
[ b21*b11+b22*b21+b23*b31,   b12*b21+b22^2+b23*b32, b21*b13+b22*b23+b23*b33]
[ b31*b11+b32*b21+b33*b31, b31*b12+b32*b22+b33*b32,   b13*b31+b23*b32+b33^2]

BBB =
[(b11^2+b12*b21+b13*b31)*b11+(b11*b12+b12*b22+b13*b32)*b21+(b11*b13+b
12*b23+b13*b33)*b31,
(b11^2+b12*b21+b13*b31)*b12+(b11*b12+b12*b22+b13*b32)*b22+(b11*b13+b1
2*b23+b13*b33)*b32,
(b11^2+b12*b21+b13*b31)*b13+(b11*b12+b12*b22+b13*b32)*b23+(b11*b13+b1
2*b23+b13*b33)*b33]
[(b21*b11+b22*b21+b23*b31)*b11+(b12*b21+b22^2+b23*b32)*b21+(b21*b13+b
22*b23+b23*b33)*b31,
(b21*b11+b22*b21+b23*b31)*b12+(b12*b21+b22^2+b23*b32)*b22+(b21*b13+b2
2*b23+b23*b33)*b32,
(b21*b11+b22*b21+b23*b31)*b13+(b12*b21+b22^2+b23*b32)*b23+(b21*b13+b2
2*b23+b23*b33)*b33]
[(b31*b11+b32*b21+b33*b31)*b11+(b31*b12+b32*b22+b33*b32)*b21+(b13*b31
+b23*b32+b33^2)*b31,
(b31*b11+b32*b21+b33*b31)*b12+(b31*b12+b32*b22+b33*b32)*b22+(b13*b31+
b23*b32+b33^2)*b32,
```

(b31*b11+b32*b21+b33*b31)*b13+(b31*b12+b32*b22+b33*b32)*b23+(b13*b31+
b23*b32+b33^2)*b33]

DETB =
b11*b22*b33-b11*b23*b32-b21*b12*b33+b21*b13*b32+b31*b12*b23-
b31*b13*b22

INVB =
[(-b22*b33+b23*b32)/(-b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),(b12*b33-b13*b32)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),-(b12*b23-b13*b22)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22)]
[-(-b21*b33+b23*b31)/(-b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),-(b11*b33-b13*b31)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),(b11*b23-b21*b13)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22)]
[-(b32*b21-b22*b31)/(-b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),(b11*b32-b31*b12)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22),(-b11*b22+b12*b21)/(-
b11*b22*b33+b11*b23*b32+b21*b12*b33-b21*b13*b32-
b31*b12*b23+b31*b13*b22)]

TRB =
b11+b22+b33

TRBB =
b11^2+2*b12*b21+2*b13*b31+b22^2+2*b23*b32+b33^2

TRBBB =

(b11^2+b12*b21+b13*b31)*b11+(b11*b12+b12*b22+b13*b32)*b21+(b11*b13+b12*b23+b13*b33)*b31+(b21*b11+b22*b21+b23*b31)*b12+(b12*b21+b22^2+b23*b32)*b22+(b21*b13+b22*b23+b23*b33)*b32+(b31*b11+b32*b21+b33*b31)*b13+(b31*b12+b32*b22+b33*b32)*b23+(b13*b31+b23*b32+b33^2)*b33

TRAB =

a11*b11+a12*b21+a13*b31+a21*b12+a22*b22+a23*b32+a31*b13+a32*b23+a33*b33

TRABB =

(a11*b11+a12*b21+a13*b31)*b11+(a11*b12+a12*b22+a13*b32)*b21+(a11*b13+a12*b23+a13*b33)*b31+(a21*b11+a22*b21+a23*b31)*b12+(a21*b12+a22*b22+a23*b32)*b22+(a21*b13+a22*b23+a23*b33)*b32+(a31*b11+a32*b21+a33*b31)*b13+(a31*b12+a32*b22+a33*b32)*b23+(a31*b13+a32*b23+a33*b33)*b33

TRBAA =

(a11*b11+a21*b12+a31*b13)*a11+(b11*a12+b12*a22+b13*a32)*a21+(b11*a13+b12*a23+b13*a33)*a31+(b21*a11+b22*a21+b23*a31)*a12+(a12*b21+a22*b22+a32*b23)*a22+(b21*a13+b22*a23+b23*a33)*a32+(b31*a11+b32*a21+b33*a31)*a13+(b31*a12+b32*a22+b33*a32)*a23+(a13*b31+a23*b32+a33*b33)*a33

TRAABB =

((a11^2+a12*a21+a13*a31)*b11+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*b21+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b31)*b11+((a11^2+a12*a21+a13*a31)*b12+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*b22+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b32)*b21+((a11^2+a12*a21+a13*a31)*b13+(a11*a12+a12*a22+a13*a32)*b23+(a11*a13+a12*a23+a13*a33)*b33)*b31+((a21*a11+a22*a21+a23*a31)*b11+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*b21+(a21*a13+a22*a23+a23*a33)*b31)*b12+((a21*a11+a22*a21+a23*a31)*b12+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*b22+(a21*a13+a22*a23+a23*a33)*b32)*b22+((a21*a11+a22*a21+a23*a31) *b13+(a12*a21+a22^2+a23*a32)*b23+(a21*a13+a22*a23+a23*a33)*b33)*b32+((a31*a11+a32*a21+a33*a31)*b11+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*b21+(a13*a31+a23*a32+a33^2)*b31)*b13+((a31*a11+a32*a21+a33*a31)*b12+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*b22+(a13*a31+a23*a32+a33^2)*b32)*b23+((a31*a11+a32*a21+a33*a31)*b13+(a31*a12+a32*a22+a33*a32)*b23+(a13*a31+a23*a32+a33^2)*b33)*b33

Asimetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi sayısal değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

```
a11=5;
a12=3;
a13=2;
a21=-4;
a22=-3;
a23=-2;
a31=-8;
a32=-2;
a33=4;
b11=9;
b12=13;
b13=11;
b21=6;
b22=7;
b23=8;
b31=9;
b32=10;
b33=17;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A
AAA=A*A*A
DETA=det(A)
```

```
INVA=inv(A)
[V,E]=eig(A)
TRA=trace(A)
TRAA=trace(A*A)
TRAAA=trace(A*A*A)

A =
     5     3     2
    -4    -3    -2
    -8    -2     4

AA =
    -3     2    12
     8     1   -10
   -64   -26     4

AAA =
  -119   -39    38
   116    41   -26
  -248  -122   -60

DETA = -16

INVA =
    1.0000    1.0000         0
   -2.0000   -2.2500   -0.1250
    1.0000    0.8750    0.1875

V =
  -0.1481 - 0.4055i  -0.1481 + 0.4055i   0.3755
   0.0652 + 0.3652i   0.0652 - 0.3652i  -0.8899
   0.6832 - 0.4574i   0.6832 + 0.4574i   0.2589
```

E =

3.3651 + 3.2543i	0	0
0	3.3651 - 3.2543i	0
0	0	-0.7301

TRA =6

TRAA = 2

TRAAA = -138

Asimetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri sayısal değerler kullanarak tanımlanmış ve MATLAB programından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

A =

5	3	2
-4	-3	-2
-8	-2	4

B =

9	13	11
6	7	8
9	10	17

BB =

258	318	390
168	207	258
294	357	468

BBB =

7740	9480	12012
5076	6213	7890
9000	11001	14046

DETB = -72

INVB =

-0.5417	1.5417	-0.3750
0.4167	-0.7500	0.0833
0.0417	-0.3750	0.2083

V =

-0.1481 - 0.4055i	-0.1481 + 0.4055i	0.3755
0.0652 + 0.3652i	0.0652 - 0.3652i	-0.8899
0.6832 - 0.4574i	0.6832 + 0.4574i	0.2589

E =

3.3651 + 3.2543i	0	0
0	3.3651 - 3.2543i	0
0	0	-0.7301

V =

-0.5988	0.8466	0.7229
-0.3929	-0.5134	0.2357
-0.6979	-0.1404	-0.6495

E =

30.3520	0	0
0	-0.7070	0
0	0	3.3550

TRB = 33

TRBB = 933

TRBBB = 27999

TRAB = -48

TRABB = -1989

TRBAA = -740

TRAABB = -27525

Antisimetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi sembolik olarak ifade edilmiş, MATLAB programından faydalanarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
a11=0;
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('-a12');
a22=0;
a23=sym('a23');
a31=sym('-a13');
a32=sym('-a23');
a33=0;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A
AAA=A*A*A
DETA=det(A)
TRA=trace(A*A)
```

```
A =
[   0,  a12,  a13]
[ -a12,   0,  a23]
[ -a13, -a23,   0]

AA =

[ -a12^2-a13^2,     -a13*a23,      a12*a23]
[    -a13*a23, -a12^2-a23^2,     -a12*a13]
[     a12*a23,     -a12*a13, -a13^2-a23^2]


AAA =
[       0,            (-a12^2-a13^2)*a12-a12*a23^2,           (-a12^2-a13^2)*a13-a13*a23^2]
[ -(-a12^2-a23^2)*a12+a12*a13^2,      0,                     -a13^2*a23+(-a12^2-a23^2)*a23]
[  a12^2*a13-(-a13^2-a23^2)*a13,                a12^2*a23-(-a13^2-a23^2)*a23,              0]

DETA = 0

TRAA = -2*a12^2-2*a13^2-2*a23^2
```

Antisimetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri sembolik olarak ifade edilmiş, MATLAB programından faydalanarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
a11=0;
a12=sym('a12');
a13=sym('a13');
a21=sym('-a12');
a22=0;
a23=sym('a23');
a31=sym('-a13');
a32=sym('-a23');
```

```
a33=0;
b11=0;
b12=sym('b12');
b13=sym('b13');
b21=sym('-b12');
b22=0;
b23=sym('b23');
b31=sym('-b13');
b32=sym('-b23');
b33=0;

A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
BB=B*B
BBB=B*B*B
DETB=det(B)
TRAB=trace(A*B)

A =
[    0,  a12,  a13]
[ -a12,    0,  a23]
[ -a13, -a23,    0]

B =
[    0,  b12,  b13]
[ -b12,    0,  b23]
[ -b13, -b23,    0]

BB =
[ -b12^2-b13^2,     -b13*b23,      b12*b23]
[     -b13*b23, -b12^2-b23^2,     -b12*b13]
[      b12*b23,     -b12*b13, -b13^2-b23^2]
```

BBB =

```
[            0, (-b12^2-b13^2)*b12-b12*b23^2, (-b12^2-b13^2)*b13-b13*b23^2]
[ -(-b12^2-b23^2)*b12+b12*b13^2,                  0, -b13^2*b23+(-b12^2-b23^2)*b23]
[ b12^2*b13-(-b13^2-b23^2)*b13, b12^2*b23-(-b13^2-b23^2)*b23,               0]
```

DETB =0

TRAB = -2*a12*b12-2*a13*b13-2*a23*b23

Antisimetrik bir $\underline{\underline{A}}$ matrisi sayısal olarak ifade edilmiş, MATLAB programından faydalanarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
a11=0;
a12=4;
a13=6;
a21=-4;
a22=0;
a23=7;
a31=-6;
a32=-7;
a33=0;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
AA=A*A
AAA=A*A*A
DETA=det(A)
[V,E]=eig(A)
TRAA=trace(A*A)
A =
    0   4   6
   -4   0   7
   -6  -7   0
```

```
AA =
  -52  -42   28
  -42  -65  -24
   28  -24  -85

AAA =
    0  -404  -606
  404     0  -707
  606   707     0

DETA =  0

V =
   0.5074 + 0.0000i   0.5074 - 0.0000i   0.6965
   0.4098 + 0.3922i   0.4098 - 0.3922i  -0.5970
  -0.2732 + 0.5883i  -0.2732 - 0.5883i   0.3980

E =
   0.0000 +10.0499i        0                  0
        0             0.0000 -10.0499i        0
        0                  0              0.0000

TRAA = -202
```

Antisimetrik $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ matrisleri sayısal olarak ifade edilmiş, MATLAB programından faydalanarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
a11=0;
a12=4;
a13=6;
a21=-4;
```

```
a22=0;
a23=7;
a31=-6;
a32=-7;
a33=0;
b11=0;
b12=6;
b13=9;
b21=-6;
b22=0;
b23=-12;
b31=-9;
b32=12;
b33=0;
A=[a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33]
B=[b11 b12 b13; b21 b22 b23; b31 b32 b33]
BB=B*B
BBB=B*B*B
DETB=det(B)
[V,E]=eig(A)
[V,E]=eig(B)
TRAB=trace(A*B)

A =
    0    4    6
   -4    0    7
   -6   -7    0

B =
    0    6    9
   -6    0  -12
   -9   12    0
```

BB =

-117	108	-72
108	-180	-54
-72	-54	-225

BBB =

0	-1566	-2349
1566	0	3132
2349	-3132	0

DETB = 0

V =

0.5074 + 0.0000i	0.5074 - 0.0000i	0.6965
0.4098 + 0.3922i	0.4098 - 0.3922i	-0.5970
-0.2732 + 0.5883i	-0.2732 - 0.5883i	0.3980

E =

0.0000 +10.0499i	0	0
0	0.0000 -10.0499i	0
0	0	0.0000

V =

-0.7428	0.0000 + 0.4734i	0.0000 - 0.4734i
-0.5571	-0.3922 - 0.4370i	-0.3922 + 0.4370i
0.3714	-0.5883 + 0.2913i	-0.5883 - 0.2913i

E =

0.0000	0	0
0	0.0000 +16.1555i	0
0	0	0.0000 -16.1555i

TRAB = 12

4.1 İzotrop Hiperelastik Cisimlerin Bünye Denklemi

Bu kısımda bünye denklemlerinde invaryant parametrelerin nasıl kullanıldığını ve ne şekilde yer aldığını göstermek amacıyla Şuhubi(1994)' de izotrop hiperelastik ortamlar için verilen bağıntıları ifade etmeyi gerekli gördük. Bu konu hakkında tüm detaylı bilgiler Şuhubi (1994)' den temin edilebilir.

Ortam izotrop kabul edildiğinde gerilme potansiyeli,

$$\Sigma(\underline{\underline{C}},\underline{X})=\Sigma(\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{Q}}^T,\underline{X}),\ \forall\underline{\underline{Q}}\in O(3) \tag{4.1.1}$$

şeklinde verilmektedir. Herhangi bir ikinci mertebeden tansörün temel invaryantları o tansöre ait karakteristik denklemin katsayıları olarak ortaya çıkan üç skaler fonksiyondur. Tansörün bütün analitik invaryantları bu üç invaryant cinsinden ifade edilebilir. Buna göre izotrop cisimlerin gerilme potansiyeli $\underline{\underline{C}}$ tansörünün I, II, III invaryantlarına bağlı olarak

$$\Sigma(\underline{\underline{C}},\underline{X})=\Sigma(I,II,III,\underline{X}) \tag{4.1.2}$$

yazılabilir. Yani bünye denklemindeki bağımsız değişkenlerin sayısı altıdan üçe düşmüş olur. Buna göre 2. tür Piola-Kirchoff gerilme tansörü için bünye denklemi

$$T_{KL}=2\frac{\partial\Sigma}{\partial C_{KL}}=2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial C_{KL}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial II}\frac{\partial II}{\partial C_{KL}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\frac{\partial III}{\partial C_{KL}}\right)$$

ya da kompakt notasyondan yararlanarak

$$T_{KL}=\frac{\partial\Sigma}{\partial\underline{\underline{C}}}=2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial\underline{\underline{C}}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial II}\frac{\partial II}{\partial\underline{\underline{C}}}+\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\frac{\partial III}{\partial\underline{\underline{C}}}\right) \tag{4.1.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin yukarıda verildiği şekliyle ifade edilmesi aslında epeyce uzun işlemleri gerektirir. Deformasyon geometrisi, balans denklemleri ve bünye aksiyomları kullanıldıktan sonra elde edilebilen bu denklemin detaylarına burada giremiyoruz. Okuyucu bu konudaki kapsamlı bilgileri Eringen(1980) ve Şuhubi(1994)' de bulabilir. Yukarıda verilen (4.1.3) bağıntısının gerçek yapısını tanıyabilmek için

$$I = tr\underline{\underline{C}},\ II = \frac{1}{2}\left[(tr\underline{\underline{C}})^2 - tr\underline{\underline{C}}^2\right]\ III = \det C = \frac{1}{6}\left[(tr\underline{\underline{C}})^3 - 3tr\underline{\underline{C}}\,tr\underline{\underline{C}}^2 + 2tr\underline{\underline{C}}^3\right] \qquad (4.1.4)$$

invaryantlarının $\underline{\underline{C}}$ tansörünün C_{KL} bileşenine göre türevlerini hesaplamalıyız. Bu amaçla önce temel genel $tr\underline{\underline{C}}^n$' nin türevini hesaplamaya çalışalım.

$$tr\,\underline{\underline{C}}^n = C_{K_1L_1}\, C_{L_1L_1} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\, C_{L_{n-1}K_1}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial C_{KL}}(tr\,\underline{\underline{C}}^n) = {} & \partial_{KK_1}\,\partial_{LL_1}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\, C_{L_{n-1}K_1} \\ & + \partial_{KL_1}\,\partial_{LL_2}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\, C_{L_{n-1}K_1} \\ & + \ldots + \partial_{KL_{n-2}}\,\partial_{LL_{n-1}}\, C_{K_1L_1}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-1}K_1} \\ & + \partial_{KL_{n-1}}\,\partial_{LK_1}\, C_{K_1L_1}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\end{aligned}$$

elde deriz. Buradan da kolayca

$$\frac{\partial}{\partial C_{KL}}(tr\,\underline{\underline{C}}^n) = C_{LL_2} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\, C_{L_{n-1}K} +$$

$$C_{KK_1}\, C_{LL_3} \ldots C_{L_{n-2}L_{n-1}}\, C_{L_{n-1}K_1} + \ldots + C_{K_1L_1}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-3}K}\, C_{LK_1} + C_{LL_1}\, C_{L_1L_2} \ldots C_{L_{n-2}K}$$

sonucunu buluruz. Yukarıdaki terimleri dikkatle inceler, simetrilerini ve tekrarlanan indisler üzerinde 1 den 3 e kadar toplam olduğunu hatırlarsak

$$\frac{\partial}{\partial C_{KL}}(tr\,\underline{\underline{C}}^{n})=n(\underline{\underline{C}}^{n-1})_{KL}\,,\; n>1;\; \frac{\partial}{\partial C_{KL}}(tr\,\underline{\underline{C}}^{n})=\partial_{KL}$$

elde ederiz. Bu bağıntıları daha derli toplu olarak

$$\frac{\partial(tr\,\underline{\underline{C}}^{n})}{\partial C_{KL}}=n\underline{\underline{C}}^{n-1},\quad \underline{\underline{C}}^{0}\equiv\underline{\underline{I}} \tag{4.1.5}$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.5) bağıntısının tanımları (4.1.4) ile verilen invaryantlara uygularsak kolaylıkla

$$\frac{\partial I}{\partial C}=\underline{\underline{I}},\; \frac{\partial II}{\partial C}=I\underline{\underline{I}}-\underline{\underline{C}},\; \frac{\partial III}{\partial C}=\frac{1}{6}\left[3I^{2}\,\underline{\underline{I}}-3(tr\underline{\underline{C}}^{2})\underline{\underline{I}}-6I\,\underline{\underline{C}}+6\underline{\underline{C}}^{2}\right]=\underline{\underline{C}}^{2}-I\,\underline{\underline{C}}+II\,\underline{\underline{I}} \tag{4.1.6}$$

olduğunu görürüz. Bu ifadeleri (4.1.3) bağıntısına yerleştirip çıkan terimleri topladığımızda maddesel gerilme tansörü için

$$\underline{\underline{T}}=2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}+I\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+II\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right)\underline{\underline{I}}-2\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+I\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right)\underline{\underline{C}}+2\frac{\partial\Sigma}{\partial III}+\underline{\underline{C}}^{2} \tag{4.1.7}$$

bağıntısını elde ederiz. (4.1.7) elimizde olunca $(7.1.7)_1$ den $\rho/\rho_0 = 1/\sqrt{III}$ ile Cauchy gerilme tansörü için

$$\underline{\underline{t}}=\frac{2}{\sqrt{III}}\left\{\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}+I\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+II\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right)\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}-\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+I\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right)\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}\,\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^{T}\right\}$$

sonucuna varırız. Yukarıdaki bağıntıyı yazarken $\underline{\underline{C}}=\underline{\underline{F}}^T\underline{\underline{F}}$ olduğunu göz önünde tuttuk. Öte yandan Finger tansörü $\underline{\underline{c}}^{-1}=\underline{\underline{F}}\,\underline{\underline{F}}^T$ olarak belirlendiğinden Cauchy gerilme tansörü, (2.5.19) ile ifade edilen Hamilton-Cayley teoremi uyarınca

$$\underline{\underline{c}}^{-3}=I\,\underline{\underline{c}}^{-2}-II\,\underline{\underline{c}}^{-1}+III\,\underline{\underline{I}} \tag{4.1.8}$$

yazabileceğimiz için gerilme tansörü

$$\underline{\underline{t}}=\frac{2}{\sqrt{III}}\left[III\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\underline{\underline{I}}+\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}+I\frac{\partial\Sigma}{\partial II}\right)\underline{\underline{c}}^{-1}-\frac{\partial\Sigma}{\partial II}\underline{\underline{c}}^{-2}\right] \tag{4.1.9}$$

şeklini alır. Dolayısıyla izotrop ve hiperelastik ortamın bünye denklemi

$$\underline{\underline{t}}=h_0\,\underline{\underline{I}}+h_1\underline{\underline{c}}^{-1}+h_2\underline{\underline{c}}^{-2},\; t_{kl}=h_0\,\delta_{kl}+h_1\,c_{kl}^{-1}+h_2\,c_{km}^{-1}c_{ml}^{-1} \tag{4.1.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada h_0, h_1 ve h_2 malzeme fonksiyonları Green ya da Finger şekil değiştirme tansörünün I, II, III invaryantlarına ve heterojen malzemelerde $\underline{\underline{X}}$ parçacığına bağlıdır. Bu üç fonksiyon da tek bir gerilme potansiyeli tarafından üretilmiş olup

$$h_0\,(I,II,III,\underline{\underline{X}})=2\sqrt{III}\,\frac{\partial\Sigma}{\partial III},\; h_1\,(I,II,III,\underline{\underline{X}})=2\sqrt{III}\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial I}+\underline{\underline{I}}\frac{\partial\Sigma}{\partial II}\right)$$

$$h_2\,(I,II,III,\underline{\underline{X}})=-\frac{2}{\sqrt{III}}\frac{\partial\Sigma}{\partial II} \tag{4.1.11}$$

bağıntılarıyla belirlenir.

(4.1.8) karakteristik denklemi $\underline{\underline{c}}$ Cauchy şekil değiştirme matrisi ile çarparak elde ettiğimiz,

$$\underline{\underline{c}}^{2}=I\,\underline{\underline{c}}^{1}-II\,\underline{\underline{I}}+III\,\underline{\underline{c}}$$

ifadesini (4.1.10) denklemine yerleştirirsek Cauchy gerilmesinin

$$\underline{\underline{t}}=b_0\,\underline{\underline{I}}+b_{-1}\,\underline{\underline{c}}^{-1}+b_1\,\underline{\underline{c}} \tag{4.1.12}$$

şeklinde yazılabileceğini görürüz. Burada malzeme fonksiyonları,

$$b_0=h_0-II\,h_2=\frac{2}{\sqrt{III}}\left(II\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+III\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right),\qquad b_{-1}=h_1+I\,h_2=\frac{2}{\sqrt{III}}\frac{\partial\Sigma}{\partial I}$$

$$b_1=III\,h_2=-\frac{2}{\sqrt{III}}\frac{\partial\Sigma}{\partial II} \tag{4.1.13}$$

olarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde (4.1.8) denklemini $\underline{\underline{c}}^{2}$ matrisi ile çarparak bulduğumuz,

$$\underline{\underline{c}}^{-1}=I\,\underline{\underline{I}}-II\,\underline{\underline{c}}+III\,\underline{\underline{c}}^{2}$$

ifadesini (4.1.12) denklemin yerleştirirsek,

$$\underline{\underline{t}}=a_0\,\underline{\underline{I}}+a_1\,\underline{\underline{c}}+a_2\,\underline{\underline{c}}^{2} \tag{4.1.14}$$

bağıntısını da yazabiliriz. Burada malzeme fonksiyonları,

$$a_0=b_0+I\,b_{-1}=h_0+I\,h_1+(I^2-II)h_2=\frac{2}{\sqrt{III}}\left(I\frac{\partial\Sigma}{\partial I}+II\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+III\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right)$$

$$a_1=b_1-II\,b_{1}=(III-\underline{\underline{I}}\,II)h_2-II\,h_1=-\frac{2}{\sqrt{III}}\left(II\frac{\partial\Sigma}{\partial II}+III\frac{\partial\Sigma}{\partial III}\right) \tag{4.1.15}$$

$$a_2 = IIIb_{-1} = III(h_1 + I\,h_2) = \frac{2}{\sqrt{III}} I \frac{\partial \Sigma}{\partial I}$$

olarak tanımlanmıştır. Doğal olarak (4.1.10), (4.1.12) ve (4.1.14) ile verilen bünye denklemleri birbirine eşdeğerdir. Amacımıza en uygun olan bağıntı özgürce seçilebilir. Ortam sıkışmaz olduğunda III = 1 koşulu sağlandığından gerilme potansiyeli de yalnız I ve II invaryantlarına bağlı olur.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, Sürekli ortamlar mekaniğinin bünye denklemlerini modellerken ortaya çıkan invaryant değerler hakkında açıklayıcı bilgiler verilmektedir. Bünye denklemlerinde bağımsız değişkenler olarak karşımıza çıkan parametreler vektörel veya tansörel formlarda gözüktüğü için vektörler ve tansörlerin invaryantları hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. İncelenen tansörler genellikle ikinci dereceden simetrik tansörlerdir.

Ortogonal bir transformasyon altında vektörlerin ve tansörlerin nasıl dönüştükleri ifade edilmiştir. Gereksiz hiçbir elemanı ihtiva etmeyen tamlık bazları belirlenmiş ve minimal tamlık bazlarının ne anlama geldiği açıklanmıştır. Full ortogonal grup, uygun ortogonal grup, transvers izotropi ve kristal sınıfları hakkında gerekli görülen bilgiler ve transformasyon matrisleri verilmiş kristal sınıflarına ait simetri özellikleri çizelge halinde ifade edilmiştir. Vektörler için tamlık bazları izotropik tansörler ikinci mertebeden tansörler için genel formlar belirlenmiştir.

Önce genel bir matrise ait invaryantın ne olduğu belirlenmiş ve Hamilton - Cayley teoremine dayanarak invaryantlarla ilgili temel ve belirleyici özellikler ortaya konmuştur. Daha sonra simetrik ikinci mertebeden bir, iki, üç ve dört matrise ait invaryant değerler belirli bir sıra ve sistematik içerisinde ifade edilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar bir çizelge halinde ifade edilmiştir. Simetrik, Asimetrik ve antisimetrik matrislerin invaryantlarını, determinantlarını, terslerini, yüksek mertebeden üslerini sembolik olarak belirleyen bir MATLAB program uygulaması yapılmıştır. Ayrıca bu matrisler sembolik olarak ifade edildikten sonra yine bu matrislere ait invaryantlar, determinatlar , ters matrisler, yüksek mertebeden kuvvetler, özdeğerler ve özvektörler elde edilmiştir.

Buraya kadar elde edilen invaryant değerlerin nasıl kullanıldığını göstermek amacıyla izotropik hiperelastik bir ortamın bünye modeli ele alınmıştır. Ayrıca ekler kısmında Cayley - Hamilton teoreminin invaryantlar teorisinde nasıl kullanıldığına ait detaylı bilgiler verilmiş ve MATLAB programı hakkında açıklayıcı bilgiler sunulmuştur. Bu çalışmanın asıl amacı MATLAB programından faydalanarak matrislere ait invaryant parametrelerin hem sembolik hem de sayısal olarak kolaylıkla elde edilebileceğini göstermektir. Programdan elde edilen sonuçlarla teorik sonuçlar arasında tam bir uyum olduğu gözlenmektedir. Özellikle deneysel verilerden elde edilen sonuçlar MATLAB programı ile birlikte bünye denklemlerinde kullanıldığı takdirde uzun zaman alan işlemler çok kısa bir sürede sonuçlandırılabilir. Bu programın çok güçlü grafik çizme alt yapısının mevcut olduğunu aynı zamanda adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde de oldukça yetenekli olduğunu belirtmek gerekir.

6. KAYNAKLAR

Adkins, J.E., 1960. Further Symmetry Relations for Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal., 4.

Adkins, J.E., 1960. Symmetry Relations for Orthotropic and Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal, 5 , 263-274.

Biran, A., Breiner, M., 1995. MATLAB for Engineers, Addison - Wesley,

Barenblatt, G.I., Joseph, D.D., 1996. Collected Papers of R.S. Rivlin, Volume- I ve II, Springer – Verlag, New York, 2828 p.

Boehler, J.P., 1987. Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics, Springer Verlag Wien - New York, 289 p.

Dikici, M., 1993. Kristallerin Esneklik Özellikleri, 19 Mayıs Üniversitesi, Samsun, 193s.

Durlu, T.N., 1992. Katıhal Fiziğine Giriş, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, 313 s.

Eringen, A.C., 1967. Mechanics of continua, John Wiley& Sons. Inc, New York, 502 p.

Eringen, A.C., 1980. Mechanics of Continua, Robert E. Krieger Pub. Co., Hungtington, New York, 590 p.

Rivlin, R.S., Ericksen, J.L., 1955. Stress – Deformation Relations for Isotropic Materials, Mechanics Division, Naval Research Laboratory, Washington, D.C., 323-424.

Smith, G.F., 1962. Further Results on the Strain Energy Function for Anisotropic Elastic Materials, Arch. Rat. Mech. Anal, 10, 108-118.

Smith; G.F., 1964. On Isotropic Integrity Bases, Arch. Rat. Mech. Anal, 17, 282- 292.

Spencer, A.C., Rivlin, R.S., 1958. The Theory of Matrix Polynomials and its Application to the Mechanics of Isotropic Continua, Arch. Rational Mech. Anal., 2, 309-336.

Spencer, A.J.M., Rivlin, R.S., 1959. Further Results in the Theory Matrix Polynomials, Arch. Rational Mech. Anal, 4, 214-230.

Spencer, A.C., 1960. The Invariants of six Symmetric 3x3 Matrices, Arch. Rational Mech. Anal, 7, 309-336.

Spencer, A.C., Rivlin, R.S., 1958. Finite Integrity Bases for Five or Fewer Symmetric 3x3 Matrices, Arch. Rational Mech. Anal, 2 , 435-476.

Spencer, A.J.M., Rivlin, R.S., 1961. Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second Order Tensors, Arch. Rational Mech. Anal, 9, 45-65.

Spencer, A.J.M, 1964. Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second Order Tensors : Part II, Arch. Rational Mech. Anal, 18, 51-82.

Spencer, A.J.M, 1971. Theory of İnvariants in Continuum Physics, Vol. 1, Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York, 115 p.

Spencer, A.J.M., 1980. Continuum Mechanics, Longman Inc, 182 p.

Şuhubi, S.E., 1994. Sürekli Ortamlar Mekaniği – Giriş, İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi yayını, 243 s.

Tin, A.T., Badem A.N., 1986. Matematik 1/2 (Lineer Cebir) Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü, 180 s.

Usal, M.R., 1993. Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro – Termomekanik Davranışına ait Matematiksel bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi- Fen Bilimleri Enstitüsü, 108 s.

Wang, C.C., 1969a-b. On Representations for Isotropic Functions. Part I: Isotropic Functions of Symmetric Tensors and Vectors. Part II: Isotropic Functions of Skew-Symmetric Tensors, Symmetric Tensors, and Vectors. Arch. Rat. Mech. Annal., vol 33, 249 – 287.

Yüksel, İ., 2000. MATLAB ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü, Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı, Yayın no: 167, Bursa.

Zheng, Q.S., 1993-a. On Transversely Isotropic, Orthoropic and Relative Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part I: Two Dimensional Orthoropic and Relative Isotropic Functions and Three Dimensional Relative Isotropic Functions, Int. J. Engng Sci., 31, 1399-1409.

Zheng, Q.S., 1993-b. On Transversely Isotropic , Orthoropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part II: The Representations for Three Dimensional Transversely Isotropic Functions, Int. J. Engng., Sci., 31, 1411-1423.

Zheng, Q.S., 1993-c. On Transversely Isotropic, Orthoropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part III: The Irreducibility of the Representations for Three Dimensional Transv. Isotro. Func., Int. J. Engng., Sci., 31, 1425-1433.

Zheng, Q.S., 1993-d. On Transversely Isotropic, Orthoropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew-Symmetric Tensors and Vectors. Part IV: The Representations for Three Dimensional Orthoropic Functions, Int. J. Engng., Sci., 31, 1435-1443 .

Zheng, Q.S., 1993. Theory of Representations for Tensor Functions – A Unified Invariant Approach to Constitutive Equations, Appl. Mech. Rev., Vol. 47, no 11, November, 1994.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bekir AKSOY

Doğum Yeri : ISPARTA

Doğum Yılı : 1974

Medeni Hali : BEKAR

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1988 – 1992 Isparta Teknik Lisesi

Lisans 1993-1997 Fırat Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Bilgisayar Öğretmenliği

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi:

1997 – 2001 S.D.Ü. Senirkent Meslek Yüksekokulu Bilgisayar Donanımı Programı Öğretim Görevliliği

EKLER

EK-1. Özdeğerler, Özvektörler Ve Cayley-Hamilton Teoremi

Bir matrisin özdeğerleri ile bunlara karşı gelen özvektörlerini belirleme problemine karakteristik değer problemi denilmektedir. Özdeğer kelimesi, Almanca "eigenwert" İngilizce "Characteristic value" kelimelerinin ortak anlamlarından ortaya çıkar. Bazen "özdeğer" yerine gizli kök (Latent root) ve özerk değer (auto value) kullanılmış olmasına karşın en yaygın terminoloji özdeğerdir. Bir matrisin özdeğerler kümesine tayf (spectrum) denir. En büyük özdeğerin mutlak değerine ise tayfsal yarıçap adı verilir. (Tin ve Badem, 1986)

K cismi üzerinde n boyutlu bir V vektör uzayı tanımlanmış olsun. Bu uzayı yine kendisine dönüştüren bir L operatörü alalım. Yani L operatörü $\underline{X}$ vektörünü aynı uzay içerisinde kalmak şartıyla $\underline{\underline{A}}\,\underline{X}$ şeklinde bir transformasyona uğratmaktadır.

$$\underline{X} \xrightarrow{L} \underline{\underline{A}}\,\underline{X} \qquad \text{(E1)}$$

Burada $L:\underline{X} \to \underline{\underline{A}}\,\underline{X}$ dönüşümünde sıfırdan farklı öyle çarpanlar vardır ki bunların görüntüleri yine kendilerine eşit olur. $\lambda \in K$ cismi olmak üzere $L(\underline{X}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \lambda\,\underline{X}$ eşitliğini sağlayan $\underline{X}$ vektörlerine $\underline{\underline{A}}$ matrisinin özvektörleri denir. Bu eşitliği sağlayan λ değerlerine de $\underline{\underline{A}}$ matrisinin özdeğerleri denir.

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \lambda\,\underline{X} \Rightarrow \lambda\,\underline{X} - \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0}$$

$$\lambda\,\underline{\underline{I}}\,\underline{X} - \underline{\underline{A}}\,\underline{X} = \underline{0} \Rightarrow (\lambda\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})\,\underline{X} = \underline{0} \qquad \text{(E2)}$$

$$\underline{\underline{D}}(\lambda)\,\underline{X} = 0$$

şekline gelir. Bu son denklem n bilinmeyenli homojen bir denklemdir. Buradaki $\underline{\underline{D}}(\lambda)$ 'ya $\underline{\underline{A}}$ matrisinin karakteristik matrisi denir.

$$\underline{\underline{D}}(\lambda)=\lambda \underline{\underline{I}}-\underline{\underline{A}}=\lambda\begin{bmatrix}1\,0\ldots 0\\ 0\,1\ldots 0\\ .\\ .\\ .\\ 0\,0\ldots 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11}\; a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}\; a_{22}\ldots a_{2n}\\ .\\ .\\ .\\ a_{n1}\; a_{n2}\ldots a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}-a_{12}\ldots -a_{1n}\\ -a_{21}\;\lambda-a_{22}\ldots -a_{2n}\\ .\\ .\\ .\\ -a_{n1}\;-a_{n2}\ldots \lambda-a_{nn}\end{bmatrix} \qquad \text{(E3)}$$

Bu matrisin determinantını alarak açılırsa $\underline{\underline{D}}(\lambda)\underline{X}=0$ ifadesi

$$\left|\underline{\underline{D}}(\lambda)\right|=\lambda^n+C_1\,\lambda^{n-1}+C_2\,\lambda^{n-2}+\ldots+C_{n-1}\,\lambda+C_n=0 \qquad \text{(E4)}$$

elde edilir. Bu son ifadeye $\underline{\underline{A}}$ matrisinin karakteristik polinomu denir. $\left|\underline{\underline{D}}(\lambda)\right|\underline{X}=0$ karakteristik denklem adını alır.

$\underline{X}=[X_1,X_2,\ldots,X_n]\underline{\underline{A}}$ matrisinin özvektörlerini, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ ise $\underline{\underline{A}}$ matrisinin özdeğerlerini gösterir.

Fazla detaylara ve matematiksel ispatlara girmeden özdeğerlerle ilgili bazı teorem ve sonuçları aşağıdaki gibi özetlemek mümkündür.

1) $\left|\underline{\underline{A}}\right|=0$ ise $\underline{\underline{A}}$ matrisinin en azından bir özdeğeri sıfırdır.

2) $\underline{\underline{A}}$ matrisinin bir özdeğeri λ ise $\underline{\underline{A}}^k$ ' nın da bir özdeğeri $\underline{\underline{A}}^k$ 'dır.

3) Simetrik bir matrisin özdeğer ve özvektörleri reeldir.

4) Simetrik bir matrisin özvektörleri birbirlerine diktir.

5) $\underline{\underline{A}}$ simetrik bir matris ve $\underline{\underline{A}}$ matrisinin özvektörleri de $X_1,X_2,\ldots,X_n$ olmak üzere $\underline{P}^T\,\underline{\underline{A}}\,\underline{P}=\underline{\underline{D}}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$'dir. Burada $\underline{P}=[X_1,X_2,\ldots,X_n]$ 'dir.

6) Cayley-Hamilton Teoremi: Her kare matris kendi öz denklemini sağlar. Bu teorem yardımıyla matrislerin tersi, negatif ve pozitif kuvvetleri bulanabilir.

$$\underline{\underline{D}}(\lambda)=\lambda^n+C_1\,\lambda^{n-1}+\ldots+C_{n-1}\lambda+C_n=0$$

$$\underline{\underline{D}}(\underline{\underline{A}})=\underline{\underline{A}}^{n}+C_1\,\underline{\underline{A}}^{n-1}+\ldots+C_{n-1}\underline{\underline{A}}+C_n=0 \tag{E5}$$

7) $\underline{\underline{A}}(n,n)$ kare matrisinin $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ özdeğerleri ve $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ köşegen elemanları olmak üzere

a) $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$ (E6)

b) $\lambda_1.\lambda_2.\ldots.\lambda_n=|\underline{\underline{A}}|=\det\underline{\underline{A}}$ (E7)

8) $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ b,r K cisminden alınmak üzere, X bağımsız değişkeni gösteriyorsa;

$$f(x)=a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n \tag{E8}$$

bir polinomdur. X yerine $\underline{\underline{A}}$ kare matrisi konulursa

$$f(\underline{\underline{A}})=a_0+a_1\underline{\underline{A}}+\ldots+a_n\underline{\underline{A}}^n \tag{E9}$$

bir matris polinomu olarak elde edilir.

9) X bağımsız değişken olmak üzere

$$\underline{\underline{A}}(X)=\begin{bmatrix} a_{11}(X)\ \ldots\ a_{1n}(X) \\ a_{21}(X)\ \ldots\ a_{2n}(X) \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}(X)\ \ldots\ a_{nn}(X) \end{bmatrix} \tag{E10}$$

şeklindeki ifadeye de polinom matrisi denir.

λ 'ya göre r. Dereceden her polinom matrisi katsayıları aynı boyutlu matrislerden ibaret olan λ 'ya göre r. dereceden bir matris polinomu ile gösterilebilir.

10) Bir $\underline{\underline{A}}$ matrisinin özvektörleri lineer bağımsızdırlar.

Şimdi özdeğer probleminden elde ettiğimiz

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda\, \underline{\underline{I}})\underline{X} = \underline{0}$$

lineer denklem takımının $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ için sıfırdan farklı çözümünün mevcut olabilmesi için katsayılar determinantının sıfır olduğunu düşünmek durumundayız (Şuhubi, 1994). Bu durumda,

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda\, \underline{\underline{I}}) = 0$$

yazabiliriz. Bu determinantın daha açık ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - \lambda\, a_{11}\,a_{22} - \lambda\, a_{11}\,a_{33} + \lambda^2\, a_{11} - a_{11}\,a_{22}\,a_{32}$$

$$-\lambda\, a_{22}\,a_{22} + \lambda^2\, a_{22} + \lambda^2\, a_{33} - \lambda^3 + \lambda\, a_{23}\,a_{32}$$

$$-a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + \lambda\, a_{11}\,a_{22} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$$

$$+a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{31}\,a_{22} + \lambda\, a_{13}\,a_{31} = 0$$

Bu ifadeyi λ' nın katsayılarına göre düzenleyerek yazacak olursak,

$$-\lambda^3+\lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})$$
$$-\lambda\,(a_{11}a_{22}+a_{11}a_{33}+a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}-a_{13}a_{31}) \qquad \text{(E12)}$$
$$+(a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22})=0$$

ifadesi elde edilir. Burada λ^2 nin katsayısı A matrisinin köşegen elemanlarının toplamı şeklinde karşımıza çıkmış ve daha önce bu terim birinci invaryant olarak tanımlanmıştır.

$$tr\underline{\underline{A}}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=I=I_A$$

λ' nın katsayısını invaryant parametreler cinsinden ifade edebilmek için tez çalışmalarımızdaki ve sürekli ortamlar mekaniği konusundaki tecrübelerimize dayanarak aşağıdaki terimin açılımını yapmanın uygun olduğu görülmüştür,

$$\frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2-tr\underline{\underline{A}}^2\}=?$$

$$(tr\underline{\underline{A}})^2=(a_{11}+a_{22}+a_{33})^2=a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+2a_{11}a_{22}+2\,a_{11}a_{33}+2a_{22}a_{33}$$

$$\underline{\underline{A}}^2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} \qquad tr\underline{\underline{A}}^2=?$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}^2+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}\ldots\ldots\\ \ldots a_{21}a_{12}+a_{22}^2+a_{23}a_{32}\ \ldots\\ \ldots\ldots a_{31}a_{13}+a_{32}a_{23}+a_{33}^2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2 - tr\underline{\underline{A}}^2\} = \frac{1}{2}\{a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}\,a_{21} + a_{13}\,a_{31} + a_{23}\,a_{32} - a_{11}^2 - a_{22}^2 - a_{33}^2 - a_{11}\,a_{22} - a_{11}\,a_{33} - a_{22}\,a_{33}\}$$

$$\frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2 - tr\underline{\underline{A}}^2\} = a_{12}\,a_{21} + a_{13}\,a_{31} + a_{23}\,a_{32} - a_{11}\,a_{22} - a_{11}\,a_{33} - a_{22}\,a_{33}$$

$$-\frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2 - tr\underline{\underline{A}}^2\} = a_{11}\,a_{22} + a_{11}\,a_{33} + a_{22}\,a_{33} - a_{12}\,a_{21} - a_{13}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}$$

elde ettiğimiz bu terim λ' nın katsayısı ile eşdeğer bir ifade olarak karşımıza çıkmaktadır. (E12) denklemindeki sabit terim ise A matrisinin determinantına eşittir. Dolayısı ile (E12) denklemini aşağıdaki formda yazabiliriz.

$$-\lambda^3 + \lambda^2\,tr\underline{\underline{A}} - \lambda\frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2 - tr\underline{\underline{A}}^2\} + \det\underline{\underline{A}} = 0 \qquad \text{(E13)}$$

$$\begin{Bmatrix} I_1 = tr\underline{\underline{A}} \\ I_2 = tr\underline{\underline{A}}^2 \\ I_3 = tr\underline{\underline{A}}^3 \end{Bmatrix}$$

$$I = tr\underline{\underline{A}}$$
$$II = \frac{1}{2}\{(tr\underline{\underline{A}})^2 - tr\,\underline{\underline{A}}^2\}$$
$$III = \det\underline{\underline{A}}$$

$$I = I_1 = tr\underline{\underline{A}}$$
$$II = \frac{1}{2}\{I_1^2 - I_2\}$$
$$III = \det\underline{\underline{A}}$$

Cayley – Hamilton teoremine göre her matris kendi karakteristik denklemini sağlamak zorunda olduğundan aşağıdaki eşitliği yazarız.

$$-\underline{\underline{A}}^3+\underline{\underline{A}}^2\, tr\,\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{A}}\frac{1}{2}\{(tr\,\underline{\underline{A}})^2-tr\,\underline{\underline{A}}^2\}+\underline{\underline{I}}\,\det\underline{\underline{A}}=0 \qquad \text{(E14)}$$

Bu ifadenin trace' ni alıp ($\det\underline{\underline{A}}$) terimini çekecek olursak;

$$\det\underline{\underline{A}}=III=\frac{1}{6}\left[I_1^3-3\,I_1\,I_2+I_3\right] \qquad \text{(E15)}$$

ifadesini elde ederiz. Yine (E14) eşitliğini A matrisinin tersi ile çarparak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$-\underline{\underline{A}}^2+\underline{\underline{A}}\, tr\,\underline{\underline{A}}-\underline{\underline{I}}\frac{1}{2}\{(tr\,\underline{\underline{A}})^2-tr\,\underline{\underline{A}}^2\}+\underline{\underline{A}}^{-1}(\det\underline{\underline{A}})=0 \qquad \text{(E16)}$$

Elde ettiğimiz (E16) ifadesinden $\underline{\underline{A}}^{-1}$ ters matris terimini çekecek olursak

$$\underline{\underline{A}}^{-1}=\frac{1}{\det\underline{\underline{A}}}\left\{\underline{\underline{A}}^2-\underline{\underline{A}}\, tr\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{I}}\frac{1}{2}\{(tr\,\underline{\underline{A}})^2-tr\,\underline{\underline{A}}^2\}\right\} \qquad \text{(E17)}$$

yazabiliriz.

Cayley – Hamilton teoreminin bazı ilginç sonuçlarını görmek için aşağıda verilen 2x2 boyutunda bir A matrisini ele alıyoruz.

$$\underline{\underline{A}}_{2x2}\,,\ \underline{\underline{A}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Bu matris için yukarıda verdiğimiz bilgiler ışığında aşağıdaki ifadeleri yazarız;

$$P(\lambda)\equiv\det(\underline{\underline{A}}-\lambda\,\underline{\underline{A}})=\lambda^2-I\,\lambda+II=0$$

$$\underline{\underline{A}}^2 - I\,\underline{\underline{A}} + II\,\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{A}}^2 = I\,\underline{\underline{A}} - \cancel{II}\,\underline{\underline{I}} \tag{E18}$$

$$I = I_1 = tr\,\underline{\underline{A}}$$

$$II = \frac{1}{2}\,(I_1^2 - I_2) = \det \underline{\underline{A}}$$

Yukarıda verilen (E18) ifadesinde A matrisi yerine $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ yazacak olursak

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 - I\,(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + II\ \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$$

$$(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2 - \left[tr(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\right](\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \left\{\left[tr(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})\right]^2 - tr(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^2\right\}\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}} \tag{E19}$$

ifadesini yazabiliriz. Bu ifadede yer alan parantezleri uygun şekilde açarak terimleri düzenlediğimiz zaman invaryantlar teorisinde önemli bir sonuç olan ve Rivlin(1955) tarafından da doğrulanan aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$\underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}^2 - (tr\,\underline{\underline{A}} + tr\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \tag{E20}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{(tr\,\underline{\underline{A}})^2 + 2tr(\underline{\underline{A}})\,tr(\underline{\underline{B}}) + (tr\,\underline{\underline{B}})^2 - tr\,\underline{\underline{A}}^2 - 2tr(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) - tr\,\underline{\underline{B}}^2\right\}\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$$

Rivlin(1955) bu çalışmasında İzotrop malzemeler için Gerilme deformasyon bağıntıları ve invaryantlar teorisi hakkında oldukça önemli ve detaylı bilgiler vermektedir.

Yukarıda verilen (E18) denkleminde A matrisi yerine 3 adet matrisin toplamını yani A+B+C yazacak olursak,

$$(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})^2 - tr(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}) + \frac{1}{2}\underline{\underline{I}}\left[\left\{tr(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})\right\}^2 - tr(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})^2\right] = 0$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadede yer alan parantezler açılıp gerekli düzeltmeler yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir;

$$\underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})+\underline{\underline{B}}\,(\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{A}})+\underline{\underline{C}}\,(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})=\underline{\underline{A}}\,tr(\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}})+\underline{\underline{B}}\,tr(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}})+\underline{\underline{C}}\,tr(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})$$
$$+[\ tr(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})-tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\ -tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})-tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}+tr(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}})-tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\ ]\,\underline{\underline{I}}$$

Daha önce verilen (E16) ifadesinde ($-\underline{\underline{A}}^3+I\,\underline{\underline{A}}^2-II\,\underline{\underline{A}}+III\,\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{0}}$) A matrisinin yerine $\underline{\underline{A}}\rightarrow\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}$ yazılıp $\lambda\ \mu$'nün katsayısı sıfıra eşitlenecek olursa (3.1.19) denkleminin elde edileceği ifade edilmişti. Bu işlemin bazı detaylarını aşağıdaki gibi veriyoruz:

$$-\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^3+I\left(\underline{\underline{A}}\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2-II\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)+III\,\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{0}}$$

$$I=tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)=tr\underline{\underline{A}}+\lambda tr\underline{\underline{B}}+\mu tr\underline{\underline{C}}$$
$$II=\frac{1}{3}\left[\{(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}})\}^2-tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2\right]$$
$$III=\frac{1}{6}\left\{\left[tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)\right]^3-3tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\,tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^3\right\}$$
$$\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2=\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)$$
$$=\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,\underline{\underline{C}}^2+\lambda\,\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}+\lambda\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}+\lambda\mu\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}+\lambda\mu\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}$$
$$+\mu\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}+\mu\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}$$
$$=\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,\underline{\underline{C}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda\mu\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$
$$=\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda\mu\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,\underline{\underline{C}}^2$$

$$\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^3=\underline{\underline{A}}^3+\lambda^3\underline{\underline{B}}^3+\mu^3\underline{\underline{C}}^3$$
$$+\lambda^2\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2+\underline{\underline{B}}^2\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu^2\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^2+\underline{\underline{C}}^2\,\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$
$$+\lambda\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)$$
$$+\lambda\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$
$$+\lambda^2\mu\left(\underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^2+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\lambda\mu^2\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}^2+\underline{\underline{C}}^2\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$

$$I=\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2=\left(tr\underline{\underline{A}}+\lambda\;tr\underline{\underline{B}}+\mu\,tr\underline{\underline{C}}\right)\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\;\underline{\underline{B}}+\mu\;\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$=tr\,\underline{\underline{A}}\;\;\Big[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda\,\mu\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)$$

$$+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\Big]$$

$$+\lambda\,tr\,\underline{\underline{B}}\left[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda\,\mu\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\;\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\right]$$

$$+\mu\,tr\,\underline{\underline{C}}\left[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda\,\mu\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\right]$$

$$II=\frac{1}{2}\left[\left\{tr\;\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)\right\}^2-tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2\right]$$

$$J_1\equiv\left[\,tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)\right]^2=\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+\lambda\;\left(tr\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}+tr\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{A}}\right)+\mu\,\lambda\left(tr\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{C}}+tr\underline{\underline{C}}\;tr\underline{\underline{B}}\right)$$

$$+\mu\left(tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{C}}\;tr\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2+\mu^2\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$=\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+\;\;\lambda^2\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2+\mu^2\left(tr\underline{\underline{C}}\right)^2+2\lambda\,tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}+2\mu\,\lambda\;tr\,\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{C}}+2\mu\,tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{C}}$$

$$J_2\equiv tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2=tr\;\;\Big[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{A}}\right)+\mu\;\lambda\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{B}}\right)+\mu\;\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{A}}\right)$$

$$+\lambda^2\;\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\Big]$$

$$=\hbar\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda\;\;\left[\hbar\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{B}}\right)+\hbar\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{A}}\right)\right]\;+\mu\,\lambda\left[\hbar\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)+\left(\underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{B}}\right)\right]$$

$$+\mu\left[\hbar\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)+\left(\underline{\underline{C}}\;\underline{\underline{A}}\right)\right]\;+\lambda^2\;\hbar\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,\hbar\underline{\underline{C}}^2$$

$$=tr\,\underline{\underline{A}}^2\;+\;\lambda^2\;\;tr\,\underline{\underline{B}}\;+\;\mu^2\;\;tr\underline{\underline{C}}\;+\;2\;\mu\;\lambda\;\;tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)+2\;\mu\;\;tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)$$

$$II=\frac{1}{2}\left\{\left(tr\underline{\underline{A}}\right)^2+\lambda\left(tr\underline{\underline{B}}\right)^2+\mu^2\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2+2\lambda\;\;tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}\right.$$

$$+2\,\mu\,\lambda\;tr\,\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{C}}+2\mu\;tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{C}}-tr\;\underline{\underline{A}}^2-\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{B}}^2$$

$$\left.-\,\mu^2\;\;tr\,\underline{\underline{C}}^2-2\,\mu\;\lambda\,tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)-2\mu\;tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(tr\underline{\underline{A}}\right)^2-tr\,\underline{\underline{A}}^2\;\right]+\left[\lambda^2\;\left(tr\underline{\underline{B}}\right)^2-\lambda^2\;\;tr\;\underline{\underline{B}}^2\;\right]\right.$$

$$\left.+\left[\mu^2\;\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2-\mu^2\;\;tr\,\underline{\underline{C}}^2\;\right]\right\}+2\lambda\;\;tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}+2\mu\;\lambda\;tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}$$

$$+\;2\mu\;\lambda\;\;tr\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{C}}+2\mu\;tr\;\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{C}}-2\;\mu\;\lambda\,tr\;\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)-2\mu\;tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)$$

$$=II_A+II_{\lambda B}+II_{\mu c}+\lambda\;tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{B}}+\mu\;\;\left[tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right]+\mu\;\lambda\;\left[tr\underline{\underline{B}}\;tr\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$II\;\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\;\underline{\underline{B}}+\mu\;\underline{\underline{C}}\right)=\underline{\underline{A}}\;\left[\;II_A+II_{\lambda B}+II_{\mu c}+\lambda\;\;tr\,\underline{\underline{A}}\;\;tr\mathbf{B}+\mu\;\;\left\{tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\;\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right\}\right.$$

$$+\mu\,\lambda\,\{tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}-tr\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\}]$$

$$+\lambda\,\underline{\underline{B}}\,\{tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}-tr\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\}]$$

$$+\mu\,\underline{\underline{C}}\,\{tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}-tr\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\}]$$

$$III=\frac{1}{6}[\{tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)\}^3-3tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$+2\,tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\,\underline{\underline{B}}+\mu\,\underline{\underline{C}}\right)^3\Big]$$

$$J_3\equiv\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^3+\lambda^3\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^3+\mu^3\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^3$$

$$+\lambda^2\left[tr\,\underline{\underline{A}}\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2+\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2 tr\,\underline{\underline{A}}+tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\right]$$

$$+\mu^2\left[tr\,\underline{\underline{A}}\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2+\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2 tr\,\underline{\underline{A}}+tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\right]$$

$$+\lambda\left[\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2 tr\,\underline{\underline{B}}+tr\,\underline{\underline{B}}\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{A}}\right]$$

$$+\mu\left[\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2 tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{C}}\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{A}}\right]$$

$$+\lambda\,\mu\left[tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{A}}+tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}+tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{B}}+tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{A}}+tr\,\underline{\underline{B}}\right.$$

$$J_3=\left(\hbar\underline{\underline{A}}\right)^3+\lambda^3\left(\hbar\underline{\underline{B}}\right)^3+\mu^3\left(\hbar\underline{\underline{C}}\right)^3+3\lambda^2\left(\hbar\underline{\underline{A}}\right)\left(\hbar\underline{\underline{B}}\right)^2+3\mu^2\left(\hbar\underline{\underline{A}}\right)\left(\hbar\underline{\underline{C}}\right)+3\lambda\left(\hbar\underline{\underline{B}}\right)\left(\hbar\underline{\underline{A}}\right)$$

$$+3\mu\left(\hbar\underline{\underline{C}}\right)\left(\hbar\underline{\underline{A}}\right)^2+3\lambda\,\mu\,\hbar\underline{\underline{A}}\,\hbar\underline{\underline{B}}\,\hbar\underline{\underline{C}}+3\lambda\,\mu\,\hbar\underline{\underline{A}}\,\hbar\underline{\underline{C}}\,\hbar\underline{\underline{B}}$$

$$+3\lambda^2\mu\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2+3\lambda\,\mu^2\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$J_4=3tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\underline{\underline{C}}\right)tr\left(\underline{\underline{A}}+\lambda\underline{\underline{B}}+\mu\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$=3\left(tr\,\underline{\underline{A}}+\lambda\,tr\,\underline{\underline{B}}+\mu\,tr\,\underline{\underline{C}}\right)\left[tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right.$$

$$\left.+2\mu\,tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$=3\left\{tr\,\underline{\underline{A}}\left[tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\,\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\,tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]\right.$$

$$+\lambda\,tr\,\underline{\underline{B}}\left[tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\,\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\,tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$+\mu\,tr\,\underline{\underline{C}}\left[tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\,tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\,tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\,\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\,tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$III=\frac{1}{6}\{\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^3+\lambda^3\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^3+\mu^3\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^3+3\lambda^2\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2$$

$$+3\,\mu^2\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2+3\lambda\left(tr\hbar\underline{\underline{B}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+3\mu\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2$$

$$+3\lambda\,\mu\left(tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\,tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{A}}\,tr\,\underline{\underline{C}}\,tr\,\underline{\underline{B}}\right)$$

$$+3\lambda^2\mu\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{B}}^2\right)+3\lambda\mu^2\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)\left(tr\,\underline{\underline{C}}^2\right)$$

$$-3\;\left[tr\,\underline{\underline{A}}\left\{tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2 tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2 tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right\}\right.$$

$$+\lambda\, tr\,\underline{\underline{B}}\left\{tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2 tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2 tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right\}$$

$$+\mu\, tr\,\underline{\underline{C}}\left\{tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2 tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2 tr\,\underline{\underline{C}}^2+2\mu\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\, tr\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right\}$$

$$III\;\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{I}}\;\Big\{\frac{1}{6}\left[\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^3+\lambda^3\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^3+\mu^3\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^3\right]+\frac{1}{2}\lambda^2 tr\,\underline{\underline{A}}\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\mu^2 tr\,\underline{\underline{A}}\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2+\frac{1}{2}\lambda\, tr\,\underline{\underline{B}}\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2+\frac{1}{2}\mu\; tr\,\underline{\underline{C}}\left(tr\,\underline{\underline{A}}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\;\mu\left(tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{B}}\; tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{C}}\; tr\,\underline{\underline{B}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2\mu\; tr\,\underline{\underline{C}}\left(tr\,\underline{\underline{B}}\right)^2+\frac{1}{2}\lambda\;\mu^2\; tr\,\underline{\underline{B}}\left(tr\,\underline{\underline{C}}\right)^2$$

$$-tr\,\underline{\underline{A}}\left[\frac{1}{2}\left(tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^{2h} tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2 tr\,\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\lambda\; tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right.$$

$$-\lambda\; tr\,\underline{\underline{B}}\left[\frac{1}{2}\left(tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\; tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\; tr\,\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right.$$

$$-\mu\; tr\,\underline{\underline{C}}\left[\frac{1}{2}\left(tr\,\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\; tr\,\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\; tr\,\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\lambda\; tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)+2\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$-\left(\underline{\underline{A}}^3+\lambda^3\underline{\underline{B}}^3+\mu^3\underline{\underline{C}}^3+\lambda^2\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}^2+\underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)\right.$$

$$+\mu^2\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}^2+\underline{\underline{C}}^2\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)+\lambda\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^2+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)$$

$$+\mu\left(\underline{\underline{A}}^2\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}^2+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)$$

$$+\lambda\;\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$

$$+\lambda^2\mu\left(\underline{\underline{B}}^2\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}^2+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\lambda\;\mu^2\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}^2+\underline{\underline{C}}^2\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)$$

$$+\left[\;tr\,\underline{\underline{A}}\left[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\mu\;\lambda\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\;\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\right]\right.$$

$$+\lambda\; tr\,\underline{\underline{B}}\left[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\mu\;\lambda\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\underline{\underline{C}}^2\right]$$

$$+\mu\; tr\,\underline{\underline{C}}\left[\underline{\underline{A}}^2+\lambda\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\mu\;\lambda\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}\right)+\mu\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\right)+\lambda^2\;\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\;\underline{\underline{C}}^2\right]$$

$$-\left[\;\underline{\underline{A}}\left\{II_A+II_{\lambda B}+II_{\mu C}+\lambda\;\; tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{B}}+\mu\left[tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]+\mu\lambda\left[tr\,\underline{\underline{B}}\; tr\,\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]\right.\right.$$

$$+\lambda\;\underline{\underline{B}}\left\{II_A+II_{\lambda B}+II_{\mu C}+\lambda\;\; tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{B}}+\mu\left[tr\,\underline{\underline{A}}\; tr\,\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]+\mu\lambda\left[tr\,\underline{\underline{B}}\; tr\,\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\right)\right]\right\}$$

$$+\mu\,\underline{\underline{C}}\,\{II_{A}+II_{\lambda B}+II_{\mu C}+\lambda\; tr\underline{\underline{A}}\, tr\underline{\underline{B}}+\mu\left[tr\underline{\underline{A}}\, tr\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right]+\mu\,\lambda\left[tr\underline{\underline{B}}\, tr\underline{\underline{C}}-tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right]$$

$$+\Big[\;\frac{1}{6}\left[(tr\underline{\underline{A}})^3+\lambda^3\,(tr\underline{\underline{B}})^3+\mu^3(tr\underline{\underline{C}})^3\right]+\frac{1}{2}\lambda^2\,tr\underline{\underline{A}}\,(tr\underline{\underline{B}})^2+\frac{1}{2}\mu^2\,tr\underline{\underline{A}}\,(tr\underline{\underline{C}})^2$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\; tr\underline{\underline{B}}\,(tr\underline{\underline{A}})^2+\frac{1}{2}\mu\; tr\underline{\underline{C}}(tr\underline{\underline{A}})^2+\frac{1}{2}\lambda\;\mu\left(tr\underline{\underline{A}}\, tr\underline{\underline{B}}\, tr\underline{\underline{C}}+tr\underline{\underline{A}}\, tr\underline{\underline{C}}\, tr\underline{\underline{B}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\lambda^2\;\mu\, tr\underline{\underline{C}}(tr\underline{\underline{B}})^2+\frac{1}{2}\lambda\;\mu^2(tr\underline{\underline{C}})^2$$

$$-tr\underline{\underline{A}}\left\{\;\frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\; tr\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\; tr\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\,\lambda\; tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)+\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right\}$$

$$-\lambda\; tr\underline{\underline{B}}\left\{\left\{\;\frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\; tr\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\; tr\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\;\lambda\; tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)+\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right\}\right.$$

$$-\mu\; tr\underline{\underline{C}}\left[\;\frac{1}{2}\left(tr\underline{\underline{A}}^2+\lambda^2\; tr\underline{\underline{B}}^2+\mu^2\; tr\underline{\underline{C}}^2\right)+\mu\;\lambda tr\left(\underline{\underline{B}}\;\underline{\underline{C}}\right)+\mu\; tr\left(\underline{\underline{A}}\;\underline{\underline{C}}\right)\right]\;\underline{\underline{I}}=\underline{\underline{0}}$$

$$-(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}}+\underline{\underline{C}}\,B\,\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{C}})+tr\,\underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}})$$

$$+\lambda\; tr\,\underline{\underline{B}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}})+\mu\; tr\,\underline{\underline{C}}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}}+\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{B}})-\underline{\underline{A}}\left[tr\,\underline{\underline{B}}\;\;tr\,\underline{\underline{C}}-tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})\right]$$

$$-\lambda\;\;\underline{\underline{B}}\left[tr\hbar\,\underline{\underline{B}}\;\;tr\,\underline{\underline{C}}-tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})\right]-\mu\;\;\underline{\underline{C}}\left[tr\,\underline{\underline{B}}\;\;tr\,\underline{\underline{C}}-tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})\right]$$

$$+\{\;\frac{1}{2}\,(\,tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\,\underline{\underline{B}}\;tr\,\underline{\underline{C}}+tr\,\underline{\underline{A}}\;tr\,\underline{\underline{C}}\;tr\,\underline{\underline{B}})-tr\,\underline{\underline{A}}\;tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})-\lambda\;tr\,\underline{\underline{B}}\;tr(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})$$

$$-\mu\;tr\;\underline{\underline{C}}\;tr\;(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{C}})\;\}\;\underline{\underline{I}}\;=\underline{\underline{0}}$$

Bu son ifadede $\lambda\;\mu$ ' nün katsayısı olan terim sıfıra eşitlenerek A yerine m, B yerine n ve C yerine de p yazılacak olursa aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$-(\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}+\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{p}})$$

$$+\,tr\;\underline{\underline{m}}\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})+\lambda\;\;tr\;\underline{\underline{n}}\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})+\mu\;tr\,\underline{\underline{p}}\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}}+\underline{\underline{p}}\,\underline{\underline{n}})$$

$$-\underline{\underline{m}}\left[tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\;\underline{\underline{p}}-tr\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\right]\;-\lambda\;\;\underline{\underline{n}}\left[tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\;\underline{\underline{p}}-tr(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\right]$$

$$-\mu\;\underline{\underline{p}}\left[tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\,\underline{\underline{p}}-tr\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\right]+\frac{1}{2}\,\{\,(tr\;\underline{\underline{m}}\;tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\;\;\underline{\underline{p}}+tr\;\underline{\underline{m}}\;tr\;\;\underline{\underline{p}}\;tr\;\underline{\underline{n}})$$

$$-\,tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})-\lambda\;tr\;\underline{\underline{n}}\;tr\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})-\mu\;tr\;\;\underline{\underline{p}}\;tr\;(\underline{\underline{n}}\,\underline{\underline{p}})\;\}\;\underline{\underline{I}}\;=\;\underline{\underline{0}}$$

EK-2. MATLAB Programı hakkında bazı bilgiler

MATLAB; (Matrix Laboratory), ilk defa 1985'de C. B. Moler tarafindan geliştirilmiş ve özellikle de matris esaslı matematik ortamında kullanılabilen etkileşimli bir paket programlama dili olarak tanımlanmıştır. Başlangıçta MATLAB özellikle mühendislik alanında, iyi grafik özelliklere sahip daha çok sayısal hesaplamalarda kullanılmak amacıyla geliştirilmiş bir paket programlama dili olarak ortaya çıkmıştır. MATLAB, orijinal olarak matris hesaplamalarının öncüleri olarak bilinen LINPACK ve EISPACK projeleri yoluyla geliştirilen matris yazılım programlarına kolay erişim sağlamak amacıyla yazılmıştır. Bugün için farklı alanlarda kullanılabilen çok geniş bir ürün yelpazesine sahip MATLAB, teknik hesaplamalarda kullanılan yüksek başarımlı bir dil olarak tanımlanmaktadır. MATLAB'ın belli başlı kullanım alanları aşağıdaki gibi sıralanabilir.

- Matematik ve hesaplama işlemleri, algoritma geliştirme
- Modelleme, benzetim ve prototipleme
- Verilerin analizi, incelenmesi ve görüntülenmesi
- Bilimsel ve mühendislik alanında grafik işlemleri
- Grafiksel kullanıcı ara yüz (Graphical User Interface) yapısınıda içine alan uygulama geliştirme.

MATLAB'da dizilerin oluşturulması çok kolay bir işlemdir. Bunun için sadece ":" işaretini kullanmak yeterlidir. Örneğin;

```
X = 0 : 0.2 : 10
```

Şeklinde girilen bir komut ile aşağıdaki dizi elde edilebilir. Bu sonuç doğrudan doğruya MATLAB programından buraya aktarılmıştır.

```
X =
 Columns 1 through 14
       0    0.2000    0.4000    0.6000    0.8000    1.0000    1.2000    1.4000    1.6000
1.8000    2.0000    2.2000    2.4000    2.6000
```

Columns 15 through 28

2.8000 3.0000 3.2000 3.4000 3.6000 3.8000 4.0000 4.2000 4.4000
4.6000 4.8000 5.0000 5.2000 5.4000

Columns 29 through 42

5.6000 5.8000 6.0000 6.2000 6.4000 6.6000 6.8000 7.0000 7.2000
7.4000 7.6000 7.8000 8.0000 8.2000

Columns 43 through 51

8.4000 8.6000 8.8000 9.0000 9.2000 9.4000 9.6000 9.8000 10.0000

Elde edilen sonuçtan açıkça görüldüğü gibi komut satırı 0 ile başlayan 0.2'şer adım ile artan 10 sayısına kadar bir vektör dizisi oluşturur ve bunları X değişkenine atar. Başlangıç değeri 0'dan büyük veya küçük olabilir. Verilen komutun sonuna konulan ";" işareti aynı işlemleri yaptırır fakat ekrana yazılmasını önler.

Matlab özellikle matrislerle ilgili işlemlerde çok büyük kolaylıklar sağlar. Örneğin aşağıda verilen matrisin MATLAB programına tanıtılması şu şekildedir.

$$\underline{\underline{X}} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 5 & 11 & 8 \\ 9 & 7 & 12 \\ 4 & 14 & 1 \end{bmatrix}$$

X = [16 2 13; 5 11 8; 9 7 12; 4 14 1]

Bu komut satırının sonucu MATLAB tarafindan aşağıdaki şekilde icra edilir.

```
X =
   16    2   13
    5   11    8
    9    7   12
    4   14    1
```

MATLAB'da aynı boyutlu iki matris arasında eleman elemana çarpma işleminin icrası aşağıda gösterildiği gibi ".*" işlemcisiyle çok kısa yoldan yerine getirilir. Bunu yapabilmek için önce aynı boyutlu iki matrisi tanımlamak gerekir. Böyle bir işlemin program tarafından üretilen sonucu aşağıda verilmiştir.

```
>>A = [ 16  2  13; 5  11  8;  9  7  12]
A =
   16    2   13
    5   11    8
    9    7   12

>> B = [ 5  2  9; 5  -1  8;  -4  7  3]
B =
    5    2    9
    5   -1    8
   -4    7    3

>> C= A.*B
C =
   80    4  117
   25  -11   64
  -36   49   36
```

MATLAB programında matrisleri eleman elemana sağdan bölmek için "./", geri veya soldan bölmek için ".\" operatörleri kullanılır. Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu A ve B matrislerini eleman elemana sağdan ve soldan bölelim;

A= [18 –20 4; 8 –14 10; 3 4 –9]

B= [6 –4 2; 4 –7 -5; 3 4 –6]

Sağdan eleman elemana bölündüğünde MATLAB programında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

```
» A= [ 18 -20 4; 8 -14 10; 3 4 -9]
A =
   18  -20    4
    8  -14   10
    3    4   -9
» B= [ 6 -4 2; 4 -7 -5; 3 4 -6]
B =
    6   -4    2
    4   -7   -5
    3    4   -6
» C=A./B
C =
   3.0000   5.0000   2.0000
   2.0000   2.0000  -2.0000
   1.0000   1.0000   1.5000
```

Soldan eleman elemana bölündüğünde MATLAB programında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

```
» A= [ 18 -20  4; 8  -14  10;  3  4  -9]
A =
   18  -20    4
    8  -14   10
    3    4   -9
» B= [ 6  -4  2;  4  -7  -5;  3  4  -6]
B =
    6   -4    2
    4   -7   -5
    3    4   -6
» C=A.\B
C =
   0.3333   0.2000   0.5000
   0.5000   0.5000  -0.5000
   1.0000   1.0000   0.6667
```

Bir matrisin transpozu satırların ve sütunların yer değiştirmesi ile elde edilir. MATLAB programında bu işlem için matrisi temsil eden harfin üzerine " ' " işareti konur.. Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu A matrisinin transpozunun sonucu MATLAB programından aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

```
» A= [ 18 -20  4; 8  -14  10;  3  4  -9]
A =
   18  -20    4
    8  -14   10
    3    4   -9
» B=A'
B =
   18    8    3
  -20  -14    4
    4   10   -9
```

Matrislerin MATLAB programında nokta çarpımları yani iç çarpımları " * " işlemcisi önüne nokta, " . " getirmek suretiyle " .* " yerine getirir. Örneğin aynı boyutta A ve B matrislerinin nokta çarpımı C şeklinde bir matris ise bu C matrisi şu şekilde ifade edilir.

C = sum (A.*B)

Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu A ve B matrislerinin nokta çarpımları (iç çarpımları) için bir örnek MATLAB programında hazırlanmış ve sonucu aşağıda gösterilmiştir.

```
» A=[6 5 1; 2 9 -3; 10 3 7]
A =
   6   5   1
   2   9  -3
  10   3   7
» B=[1 2 5; 6 8 12; -5 3 15]
B =
   1   2   5
   6   8  12
  -5   3  15
» C=sum(A.*B)
C =
  -32   91   74
```

MATLAB programında matrisleri çarpmakta oldukça kolaydır. Matrisleri çarpmak için "*" operatörü kullanılır. Matris çarpımı yaparken şuna dikkat etmek gerekir. Birinci matrisin sütun sayısıyla ikinci matrisin satır sayısının birbirine eşit olması gerekir. MATLAB programıyla 3x3 boyutlu A ve B matrislerinin çarpımları olan X matrisinin sonucu aşağıda elde edilmiştir.

```
» A=[6 5 1; 2 9 -3; 10 3 7]
A =
   6   5   1
   2   9  -3
  10   3   7
» B=[1 2 5; 6 8 12; -5 3 15]
B =
   1   2   5
   6   8  12
  -5   3  15
» X=A*B
X =
  31  55  105
  71  67   73
  -7  65  191
```

X ve Y şeklinde iki satır vektörünün nokta çarpımı MATLAB programında elde etmenin en basit yolu ikincisinin transpozesini alarak satır vektörü haline getirip çarpma işlemi yapmaktır. MATLAB programı yardımıyla aşağıdaki örnekte X ve Y satır vektörlerinin iç çarpımı bir örnekle açıklanmıştır.

```
» X=[3 6 9]
X =
   3   6   9
» Y=[12 16 20]
Y =
  12  16  20
» Z=X*Y'
Z =
 312
```

Aynı şekilde vektörlerin dış çarpımı için iki vektör tanımlanır. Yukarıdaki örnekte tanımlanan X ve Y vektörlerini tekrar kullanarak MATLAB programı yardımıyla X ve Y vektörlerinin dış çarpımın sonucu aşağıda verilmiştir.

```
» X=[3 6 9]
X =
   3   6   9
» Y=[12 16 20]
Y =
   12   16   20
» Z=X'*Y
Z =
   36   48   60
   72   96  120
  108  144  180
```

Matrislerin kuvvetini almak için bir A matrisini ele alalım. Eğer A matrisinin içindeki her elemanın karesi alınmak isteniyorsa A.^2 deyimi kullanılır. Bir kare matrisi elde edilmek isteniyorsa (yani A*A matrisi) A^2 deyimi kullanılır. Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu A matrisinin MATLAB programı yardımıyla A matrisinin her elemanını karesini alan matris ve A^2 matrisi elde edilmiştir.

```
» A=[3 7 8; 12 5 9; -17 6 13]
A =
    3   7   8
   12   5   9
  -17   6  13
» K=A.^2
K =
    9   49   64
  144   25   81
  289   36  169
```

```
» A=[3 7 8; 12 5 9; -17 6 13]
A =
   3   7   8
  12   5   9
 -17   6  13
» K=A^2
K =
  -43  104  191
  -57  163  258
 -200  -11   87
```

Matrislerin üstel fonksiyonları örneğin bir A matrisinin üstel fonksiyonu e^A şeklinde ifade edilir. MATLAB programında bu fonksiyonlar exp(A) şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu bir A matrisinin üstel fonksiyonu MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

```
» A=[3 7 8; 12 5 9; -17 6 13]
A =
   3   7   8
  12   5   9
 -17   6  13
» K=exp(A)
K =
  1.0e+005 *
   0.0002   0.0110   0.0298
   1.6275   0.0015   0.0810
   0.0000   0.0040   4.4241
```

Matrislerin tersini MATLAB programı yardımıyla elde etmek çok kolaydır. Örneğin bir A kare matrisinin tersinin (yani A^{-1} matrisinin) elde etmek için inv komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte 2x2 boyutlu bir A matrisinin tersi MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

```
» A=[4 9; 19 13]
A =
    4    9
   19   13
» B=inv(A)
B =
  -0.1092    0.0756
   0.1597   -0.0336
```

Matrislerin determinantını MATLAB programı yardımıyla elde etmek için, bir A kare matrisinin determinantı det komutu ile elde edilir. Aşağıdaki örnekte 3x3 boyutlu bir A matrisinin determinantı MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

```
» A=[3 7 8; 12 5 9; -17 6 13]
A =
    3    7    8
   12    5    9
  -17    6   13
» B=det(A)
B =
  -874
```

MATLAB programında polinomlarla ilgili işlemler yapmakta mümkündür. Polinomların; köklerinin bulunması, değerlendirilmesi ve türevi gibi standart polinom işlemleri için gerekli fonksiyonları sağlamaktadır. Bunlara ek olarak, eğri uydurma ve kısmi kesirlere ayırma gibi daha ileri uygulamalar için de fonksiyonlar mevcuttur. Polinomlarla ilgili fonksiyonlar MATLAB Toolbox'un polyfun klasörü içerisinde yer almaktadır.

MATLAB programında polinomların gösterilmesi için; polinomlar en yüksek mertebeden en düşük mertebeye doğru azalan sırada polinom katsayıları içeren bir satır vektörü ile gösterilir. Örneğin üçüncü mertebeden bir polinom;

$P(x)=x^3+5x^2+0x-8$

polinomunu MATLAB programında;

P=[1 5 0 -8]

şeklinde tanımlamak gerekir.

Polinomların köklerini bulmak için polinomun sıfira eşit olması gerekir. MATLAB programında polinomun köklerini bulmak için "roots" komutu kullanılır. Yukarıdaki P polinomunun köklerini MATLAB programı yardımıyla aşağıda elde edilmiştir.

```
» P=[1  5  0  -8]
P =
    1    5    0   -8
» Q=roots(P)
Q =
   -4.6262
   -1.5151
    1.1413
```

Polinomların çarpımını yapmak için MATLAB programında "conv" komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte P1 ve P2 polinomlarının çarpımının sonucu MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

$P1=x^3+5x^2+0x-8$, $P2=2x^3+3x^2+7x+5$

```
» P1=[1  5  0  -8]
P1 =
    1    5    0   -8
```

```
» P2=[2 3 7 5]
P2 =
   2   3   7   5
» Q=conv(P1,P2)
Q =
   2   13   22   24   1  -56  -40
```

Polinomların toplamını yapmada doğrudan kullanılacak bir komut yoktur. Eğer her iki polinom vektörü aynı boyutta ise standart dizi toplama işlemi yapılır. Örneğin yukarıda verilen iki polinomu toplamak için Q=P1+P2 yazılır. Aşağıdaki örnekte MATLAB programı yardımıyla bu iki polinom toplanmıştır.

$P1 = x^3 + 5x^2 + 0x - 8 \quad , \; P2 = 2x^3 + 3x^2 + 7x + 5$

```
» P1=[1 5 0 -8]
P1 =
   1   5   0  -8
» P2=[2 3 7 5]
P2 =
   2   3   7   5
» Q=P1+P2
Q =
   3   8   7  -3
```

Fakat polinomların derecesi birbirine eşit değilse iki polinomdan derecesi düşük polinoma sıfırlar ilave edilerek yüksek dereceden polinom ile aynı dereceye getirilir.

$P1 = 2x^3 + 6x^2 + 2x - 8 \quad , \; P2 = -3x^2 + 5x + 8$

```
» P1=[2 6 2 -8]
P1 =
   2   6   2  -8
```

```
» P2=[0 -3 5 8]
P2 =
   0  -3   5   8
» Q=P1+P2
Q =
   2   3   7   0
```

Polinomlarda bölme işlemi yapmak için MATLAB programında "deconv" komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte P1 ve P2 polinomlarının bölme işleminin sonucu MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

$P1 = 2x^3 + 6x^2 + 2x - 8 \quad , \; P2 = x^3 - 3x^2 + 5x + 8$

```
» P1=[2 6 2 -8]
P1 =
   2   6   2  -8
» P2=[1 -3 5 8]
P2 =
   1  -3   5   8
» Q=deconv(P1,P2)
Q =
   2
```

Polinomun türevini almak için MATLAB programında "polyder" komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte P1 polinomunun türev alma işleminin sonucu MATLAB programı yardımıyla elde edilmiştir.

$P1 = 2x^3 + 6x^2 + 2x - 8$

```
» P1=[2 6 2 -8]
P1 =
   2   6   2  -8
» Q=polyder(P1)
Q =
   6   12   2
```

Polinom değerlerini hesaplanması için katsayılarının satır vektörüne dayanan verilen polinomların toplama, çarpma, bölme ve türev işlemleri yapılabildiği gibi bunların değerlendirilmesi de yapılabilir. MATLAB programında bu değerlendirmeyi "polyval" komutu yardımıyla yapabiliriz. Örneğin;

$$P(x)=x^3+4x^2-7x-10$$

polinomunu ele alalım ve bunu –1 ve 3 noktaları arasındaki değerlerini hesaplayalım. Önce;

```
x = linspace(-1,3)
```

komutu ile –1 ile 3 noktaları arasında 100 adet eşit aralıklarla nokta oluşturulur daha sonra;

```
P = [1  4  -7  10]
Q= polyval (P,x)
```

```
» x = linspace(-1,3)
x =
  Columns 1 through 7
   -1.0000  -0.9596  -0.9192  -0.8788  -0.8384  -0.7980  -0.7576
  Columns 8 through 14
   -0.7172  -0.6768  -0.6364  -0.5960  -0.5556  -0.5152  -0.4747
```

```
 Columns 15 through 21
 -0.4343  -0.3939  -0.3535  -0.3131  -0.2727  -0.2323  -0.1919
 Columns 22 through 28
 -0.1515  -0.1111  -0.0707  -0.0303   0.0101   0.0505   0.0909
 Columns 29 through 35
  0.1313   0.1717   0.2121   0.2525   0.2929   0.3333   0.3737
 Columns 36 through 42
  0.4141   0.4545   0.4949   0.5354   0.5758   0.6162   0.6566
 Columns 43 through 49
  0.6970   0.7374   0.7778   0.8182   0.8586   0.8990   0.9394
 Columns 50 through 56
  0.9798   1.0202   1.0606   1.1010   1.1414   1.1818   1.2222
 Columns 57 through 63
  1.2626   1.3030   1.3434   1.3838   1.4242   1.4646   1.5051
 Columns 64 through 70
  1.5455   1.5859   1.6263   1.6667   1.7071   1.7475   1.7879
 Columns 71 through 77
  1.8283   1.8687   1.9091   1.9495   1.9899   2.0303   2.0707
 Columns 78 through 84
  2.1111   2.1515   2.1919   2.2323   2.2727   2.3131   2.3535
 Columns 85 through 91
  2.3939   2.4343   2.4747   2.5152   2.5556   2.5960   2.6364
 Columns 92 through 98
  2.6768   2.7172   2.7576   2.7980   2.8384   2.8788   2.9192
 Columns 99 through 100
  2.9596   3.0000
» P = [1  4  -7  10]
P =
   1   4   -7   10
```

```
» Q= polyval (P,x)
Q =
 Columns 1 through 7
  20.0000   19.5168   19.0374   18.5619   18.0909   17.6248   17.1639
 Columns 8 through 14
  16.7087   16.2595   15.8167   15.3807   14.9520   14.5309   14.1178
 Columns 15 through 21
  13.7131   13.3172   12.9305   12.5534   12.1863   11.8296   11.4837
 Columns 22 through 28
  11.1490   10.8258   10.5146   10.2158    9.9297    9.6568    9.3974
 Columns 29 through 35
   9.1520    8.9210    8.7047    8.5035    8.3179    8.1481    7.9948
 Columns 36 through 42
   7.8581    7.7385    7.6365    7.5524    7.4865    7.4394    7.4114
 Columns 43 through 49
   7.4028    7.4142    7.4458    7.4981    7.5715    7.6664    7.7831
 Columns 50 through 56
   7.9220    8.0837    8.2684    8.4765    8.7085    8.9647    9.2455
 Columns 57 through 63
   9.5514    9.8827   10.2399   10.6232   11.0332   11.4702   11.9346
 Columns 64 through 70
  12.4267   12.9471   13.4961   14.0741   14.6814   15.3186   15.9859
 Columns 71 through 77
  16.6837   17.4126   18.1728   18.9648   19.7889   20.6456   21.5352
 Columns 78 through 84
  22.4582   23.4149   24.4057   25.4311   26.4914   27.5870   28.7183
 Columns 85 through 91
  29.8857   31.0897   32.3305   33.6087   34.9246   36.2785   37.6709
 Columns 92 through 98
  39.1022   40.5728   42.0831   43.6334   45.2242   46.8559   48.5288
 Columns 99 through 100
  50.2434   52.0000
```

MATLAB programında kesirli polinomlar v kalan işlemleri yapılabilir. Pay ve paydası polinom olan kesir polinomlar ayrı ayrı değerlendirilir. Örneğin;

$$f=\frac{2x^2+3x-10}{x^3-2x^2+4x+10}$$

fonksiyonunun payını katsayıları 2, 3,--10 ve paydasının katsayıları 1, -2, 4, 10 olan bir kesir polinomla ilgili işlemler MATLAB programı yardımıyla aşağıdaki şekilde yapılır.

Pay ve paydanın kökleri MATLAB programı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunabilir.

```
» Pay = [2  3  -10]
Pay =
    2    3  -10
» payda = [1  -2  4  10]
payda =
    1   -2    4    10
» Q=roots(Pay)
Q =
   -3.1085
    1.6085
» T=roots(payda)
T =
   1.6221 + 2.3250i
   1.6221 - 2.3250i
  -1.2443
```

Kesir polinomunu türevi;

```
» Pay = [2  3  -10]
Pay =
    2    3  -10
```

```
» payda = [1  -2  4  10]
payda =
    1   -2    4    10
» R=polyder(Pay,payda)
R =
   10   -4  -24  104  -10
```

Kesir polinomunu kısmi kesirlere ayırmak için "residue" komutu kullanılır. Buna göre;

```
» Pay = [2  3  -10]
Pay =
    2    3  -10
» payda = [1  -2  4  10]
payda =
    1   -2    4    10
» [r p k]=residue(Pay,payda)
r =
   1.3904 - 0.3264i
   1.3904 + 0.3264i
  -0.7808
p =
   1.6221 + 2.3250i
   1.6221 - 2.3250i
  -1.2443
k =
    []
```

MATLAB programında doğrusal ve doğrusal olamayan denklem takımları ve matematiksel fonksiyonları çözümünü yapabilmek mümkündür. Örneğin aşağıda verilen dördüncü dereceden doğrusal denklemin köklerini bir polinom formuna dönüştürerek köklerini bulabiliriz.

$$f = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 8$$

```
» a = [1  2  -4  5  -8]
a =
    1    2   -4    5   -8
» yp=roots(a)
veya
»yp=roots ([1  2  -4  5  -8])
yp =
  -3.6413
   1.3695
   0.1359 + 1.2593i
   0.1359 - 1.2593i
```

MATLAB programında doğrusal olamayan denklem takımlarının çözümlerini yapmakta mümkündür. Örneğin matris işaretler sisteminde bu problem aşağıdaki biçimde ele alınabilir. A ve B matrisleri verilmiş olsun AX=B veya XA=B sağlayan bir yegane X matrisinin olup olmadığını araştırmak gerekir. X matrisinin katsayı matrisini A sol veya sağ tarafinda yer almasına bağlı olarak normal kesme " / "veya ters kesme " \ " olmak üzere iki adet bölme simgesi kullanılır. X= A\B matris denklemi AX=B'nin çözümü X=B/A matris denklemi XA=B'nin çözümüdür. MATLAB programında denklem takımlarının ters kesme veya bölme işlemiyle çözümü için AX=B şeklinde verilen ve B'nin satır matrisi olarak tanımlandığı matris denkleminin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak;

$$A^{-1} AX = A^{-1} B$$

elde edilir. Burada A^{-1} A, I olarak tanımlanan birim matrise denktir. Buna göre I

$I\,X = A^{-1}\,B$ veya $X = A^{-1}\,B$

elde edilir. Bu çözümü MATLAB ortamında yapmak için X = inv(A) komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte verilen bir denklem takımının MATLAB programı yardımıyla çözümü elde edilmiştir.

$$\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 16 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -15 \end{bmatrix}$$

```
» a=[1 4 -1 1; 2 7 1 -2; 1 4 -1 2; 3 -10 -2 5]
a =
    1    4   -1    1
    2    7    1   -2
    1    4   -1    2
    3  -10   -2    5

» b=[2 16 1 -15]'
b =
    2
   16
    1
  -15

» x=a\b
x =
   2.0000
   1.0000
   3.0000
  -1.0000
```

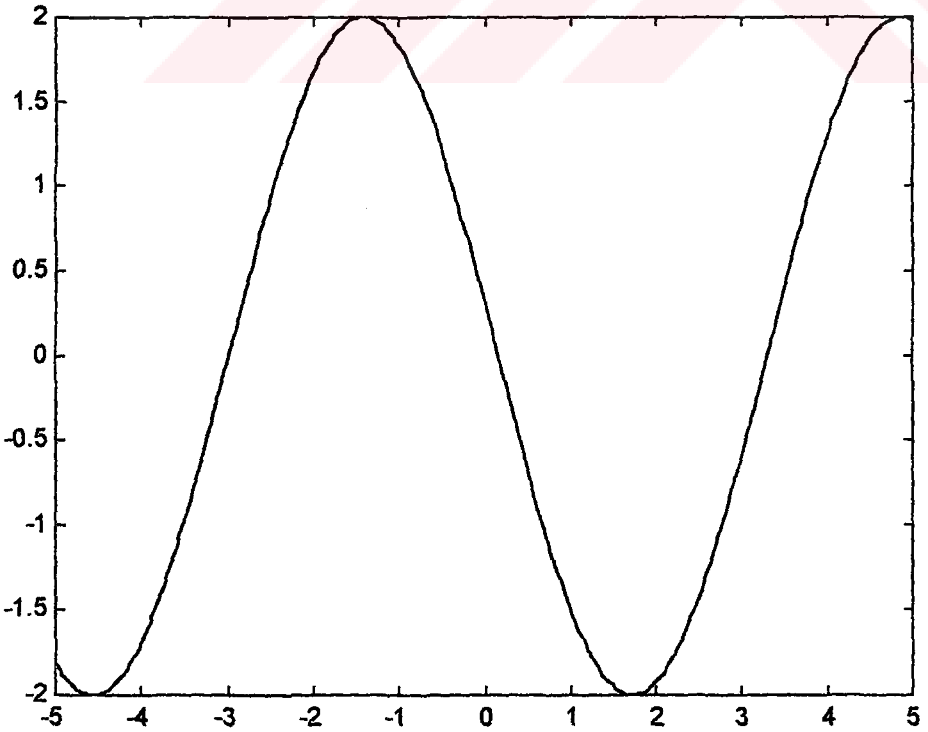
MATLAB programında fonksiyonların minimize edilmesi ve sıfırların bulunması için MATLAB optimizasyon ile ilişkili işlemleri yerine getiren belli sayıda yüksek seviyeden fonksiyon fonksiyonları sağlar. Tek değişkenli fonksiyonların minimize edilmesi için "fminbnd" komutu kullanılır. Birkaç değişkenli fonksiyonlar için ise "fminsearch" komutu kullanılır. Fonksiyonların sıfırlarını bulmak için ise "fzero" komutu kullanılır.

MATLAB programında fonksiyonların grafiklerini çizmek mümkündür.MATLAB programında grafik çizmek için "fplot" komutu kullanılır. Aşağıdaki örnekte MATLAB programı yardımıyla

$y = 2\sin(x+3)$

ifadesinin grafiği çizilmiştir.

»fplot('2*sin(x+3)',[-5 5])



Şimdiye kadar MATLAB programı ile yapmış olduğumuz örneklerde sayısal değerler kullandık. MATLAB programında sayısal çözümlerin yanı sıra sembolik değişkenler kullanılarak da çözümler yapılabilir. Sembolik çözümler yapabilmek için değişkenlerin sembolik olarak tanımlanması gerekir. MATLAB programında değişkenleri sembolik tanımlamak için "sym" komutu kullanılır. Aşağıdaki örneklerde sembolik olarak 3x3 boyutlu matrislerin toplama, çıkarma, çarpma ve eleman elemana kare alma işlemi gibi sonuçlar MATLAB programıyla elde edilmiştir.

Matrislerin sembolik olarak toplamı;

A =
[a11, a12, a13]
[a21, a22, a23]
[a31, a32, a33]

B =
[b11, b12, b13]
[b21, b22, b23]
[b31, b32, b33]

TOPLAMI =
[a11+b11, a12+b12, a13+b13]
[a21+b21, a22+b22, a23+b23]
[a31+b31, a32+b32, a33+b33]

Matrislerin sembolik olarak farkı;

A =
[a11, a12, a13]
[a21, a22, a23]
[a31, a32, a33]

B =

[b11, b12, b13]

[b21, b22, b23]

[b31, b32, b33]

CIKAR =

[a11-b11, a12-b12, a13-b13]

[a21-b21, a22-b22, a23-b23]

[a31-b31, a32-b32, a33-b33]

Matrislerin sembolik olarak çarpımı;

A =

[a11, a12, a13]

[a21, a22, a23]

[a31, a32, a33]

B =

[b11, b12, b13]

[b21, b22, b23]

[b31, b32, b33]

CARPMA =

[a11*b11+a12*b21+a13*b31, a11*b12+a12*b22+a13*b32, a11*b13+a12*b23+a13*b33]

[a21*b11+a22*b21+a23*b31, a21*b12+a22*b22+a23*b32, a21*b13+a22*b23+a23*b33]

[a31*b11+a32*b21+a33*b31, a31*b12+a32*b22+a33*b32, a31*b13+a32*b23+a33*b33]

Matrislerin sembolik olarak eleman elemana karesinin alınması;

A =

[a11, a12, a13]

[a21, a22, a23]

[a31, a32, a33]

B =

[b11, b12, b13]

[b21, b22, b23]

[b31, b32, b33]

KAREA =

[a11^2, a12^2, a13^2]

[a21^2, a22^2, a23^2]

[a31^2, a32^2, a33^2]

KAREB =

[b11^2, b12^2, b13^2]

[b21^2, b22^2, b23^2]

[b31^2, b32^2, b33^2]

Benzer şekilde tüm sembolik işlemler daha önce yapılmış olan sayısal örneklere benzer şekilde sembolik olarak yapılabilmesi mümkündür.