YOĞUNLUK KAVRAMI
VE
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Salih AYTAR

Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA, 2001

T.C.

SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YOĞUNLUK KAVRAMI
VE
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

SALİH AYTAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2001

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jurimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Prof. Dr. Öner ÇAKAR
Üye	:	Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Üye	:	Prof. Dr. Bilender A. PAŞAOĞLU

ONAY

Bu tez 13./07./2001 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki juri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

26./07./2001

S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ
Prof.Dr. Orhan AYDEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde, pozitif tamsayılar kümesinde yoğunluğun aksiyomatik tanımı verilip, yoğunluk fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, toplamsallık özelliği (A.P.) tanımlanarak bu özelliğin, bazı yoğunluk örneklerinde sağlanıp sağlanmadığı incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bazı sonuçlar verilmiş, özellikle, bu konuda önemli bir yer tutan Ayrışım(Decomposition) teoremi verilmiştir. İstatistiksel limit, istatistiksel yığılma ve limit noktalarının kümeleri arasındaki bazı bağıntılar Ayrışım teoremi yardımıyla araştırılmıştır. Bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşulun dizinin tek ve çift indisli terimlerinden oluşan altdizilerinin de aynı L sayısına istatistiksel yakınsak olması ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde, istatistiksel monotonluk ve sınırlılık kavramları incelenerek bu kavramların klasik analizde kullanıldığı monoton yakınsaklık teoremi ve ayrıca Bolzano-Weierstrass teoreminin benzerleri istatistiksel yakınsak diziler için verilmiştir.

Son bölümde ise, istatistiksel limit infimum ve supremum kavramları incelenerek örnekler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Toplamsallık özelliği, asimptotik yoğunluk, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık.

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, historical development of the topic has been given.

In the second chapter, the axiomatic definition of density in the set of positive integers has been given and the properties of density function have been investigated. In addition, by defining the additivity property, it has been investigated whether this property is realized in some density samples or not.

In the third chapter, some results concerning statistical convergence have been given. In particular, Decomposition theorem playing an important role in this topic, has been given. Some relations among statistical limit, statistical cluster and the sets of limit points have been established with the help of Decomposition theorem. We also show that, a real sequence $x = (x_n)$ is statistically convergent to L if and only if even and odd subsequences are also statistically convergent to the same number L.

In the fourth chapter, the concepts of statistical monotonicity and boundedness have been given. The analogues of monotonic convergence theorem and Bolzano-Weierstrass theorem in the classical analysis have been given for statistical convergent sequences.

In the final chapter, we consider the concepts of statistical limit inferior and superior. We give some examples.

KEY WORDS: Additivity property, asymptotic density, natural density, statistical convergence, statistical boundedness.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Prof.Dr. Serpil PEHLİVAN'a ve ayrıca çalışmanın ilk aşamalarında beni yönlendiren Prof. Dr. Musa MAMEDOV hocama teşekkürü bir borç bilirim.

SİMGELER DİZİNİ

N	Pozitif tamsayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
c	Yakınsak diziler uzayı
$x = (x_n)$	Reel sayıların bir dizisi
$\underline{\delta}(A)$	A kümesinin alt yoğunluğu
$\overline{\delta}(A)$	A kümesinin üst yoğunluğu
$\delta(A)$	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\underline{s}(A)$	A kümesinin Schnirelmann yoğunluğu
χ_A	A kümesinin karekteristik fonksiyonu
η_δ	Alt ve üst yoğunluğu eşit olan kümelerin kümesi
η_δ^0	Alt ve üst yoğunluğu sıfır olan kümelerin kümesi
C_1	Cesàro matrisi
$M = (a_{nk})$	Sonsuz matris
$\|A(n)\|$	$A \cap \{1, 2, ...\}$ kümesindeki elemanların sayısı
A^c	A kümesinin tümleyeni
Γ_x	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
L_x	$x = (x_n)$ dizisinin limit noktalarının kümesi
Λ_x	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
$st - \lim x$	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limiti
$st - \limsup x$	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit supremumu
$st - \liminf x$	$x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit infimumu
A.P.	Doğal yoğunluklu kümeler için toplamsallık özelliği
A.P.O.	Sıfır doğal yoğunluklu kümeler için toplamsallık özelliği
$A \sim B$	A kümesi asimptotik olarak B kümesine eşit
F_σ	Herhangi bir uzaydaki kapalı kümelerin sayılabilir bir birleşimi

1. GİRİŞ

Yoğunluk kavramı oldukça geniş bir kavram olup asimptotik yoğunluk, doğal yoğunluk, düzgün yoğunluk, rasyonel ve reel sayıların yoğunluğu, oran kümelerinin yoğunluğu v.b. gibi birbirinden farklı birçok şekilde tanımlanmıştır. Biz pozitif tamsayılar kümesindeki yoğunluk kavramını inceleyeceğiz. Pozitif tamsayılar kümesinde; Buck (1953) tarafından genelleştirilmiş asimptotik yoğunluk ve Freedman (1981) tarafından da yoğunluk aksiyomatik olarak tanımlanıp, bazı yoğunluk fonksiyonlarının özellikleri ve yoğunluk için toplamsallık özelliği verilmiştir.

Temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise ilk olarak Fast (1951) tarafından verilmiştir. Buck (1953) ve Schoenberg (1959) tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramı reel ve kompleks diziler için; Maddox (1988) tarafından da herhangi bir lokal konveks topolojik vektör uzayındaki diziler için verilmiştir. Fridy (1985;1993), Śalăt (1980), Connor (1988), Maddox (1988), Rath ve Tripathy (1994) tarafından istatistiksel yakınsaklık ve toplanabilme arasında bağıntı kurulup, Fridy (1985), Rath ve Tripathy (1994) tarafından da istatistiksel Cauchy dizileri üzerinde çalışılmıştır. Fridy (1993) de istatistiksel monotonluk kavramına girmiş, ancak istatistiksel yakınsaklık için monoton yakınsaklık teoremi Tripathy (1998) tarafından verilmiştir. Fridy (1985), Connor (1988) ve Tripathy (1997;1998) Ayrışım teoremlerinin farklı ifadelerini vermişlerdir. Fridy ve Orhan (1997) istatistiksel limit infimum ve supremum kavramlarını tanımlamışlardır. Pehlivan ve Mamedov (2000) tarafından R^n de istatistiksel yakınsaklık kavramı incelenmiştir. Kostyrko v.d. (2001) tarafından da verilen bir (x_n) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi bir F_σ kümesi olarak karakterize edilmiştir.

Sonuç olarak istatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin çeşitli dallarına bir çok matematikçi tarafından uygulanmış ve uygulanmaya devam edilmektedir.

2. POZİTİF TAMSAYILAR KÜMESİNDE YOĞUNLUK

Bu bölümde pozitif tamsayılar kümesinde tanımlanan yoğunluğun aksiyomatik tanımı verilip, özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, toplamsallık özelliği (A.P.) tanımlanarak, bu özelliği sağlayan yoğunluk örnekleri verilmiştir.

2.1. Yoğunluğun Aksiyomatik Tanımı ve Özellikleri

Tanım 2.1.1: A, B doğal sayılar kümesinin herhangi iki altkümesi olmak üzere $A \triangle B$ simetrik farkı sonlu ise A asimptotik olarak B ye eşittir denir ve $A \sim B$ şeklinde gösterilir (Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 2.1.2: A ve B doğal sayılar kümesinin herhangi iki altkümesi olsun. Eğer,

$D1)$ $A \sim B \Rightarrow \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$,

$D2)$ $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$,

$D3)$ $\forall A, B$ için $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$,

$D4)$ $\underline{\delta}(N) = 1$

özellikleri sağlanıyorsa,

$$\underline{\delta} : A \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonuna alt asimptotik yoğunluk denir (Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 2.1.3: $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A)$ şeklinde tanımlanan $\overline{\delta}$ yoğunluğuna birleştirilmiş üst yoğunluk adı verilir (Freedman ve Sember, 1981).

Alt ve üst yoğunluğun temel özelliklerini aşağıdaki teoremle vereceğiz.

Teorem 2.1.4: $\underline{\delta}$ alt asimptotik yoğunluk ve $\overline{\delta}$, $\underline{\delta}$ nın birleştirilmiş üst yoğunluğu olsun. Herhangi iki A, B doğal sayı kümeleri için;

i) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$,

ii) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$,

iii) $\forall A, B$ için $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$,

iv) $\underline{\delta}(\emptyset) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$,

$v)$ $\overline{\delta}(N) = 1$,

$vi)$ $A \sim B \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$,

$vii)$ $\underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A)$

dır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: i) $A \subseteq B$, $B = A \cup C$ ve $A \cap C = \emptyset$ olsun. D2 den $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(C) \leq \underline{\delta}(A \cup C)$ dır ve buradan $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(C) \leq \underline{\delta}(B)$ olduğundan $\underline{\delta}(A) \leq \underline{\delta}(B)$ elde edilir.

ii) $A \subseteq B$ olsun. Buna göre $(N \backslash A) \supseteq (N \backslash B)$ yazabiliriz ve $\underline{\delta}(N \backslash A) \geq \underline{\delta}(N \backslash B) \Rightarrow -\underline{\delta}(N \backslash A) \leq -\underline{\delta}(N \backslash B) \Rightarrow 1 - \underline{\delta}(N \backslash A) \leq 1 - \underline{\delta}(N \backslash B) \Rightarrow \overline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(B)$ bulunur.

iii) Tanım 2.1.3. den $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A)$ ve $\overline{\delta}(B) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash B)$ yazabiliriz. D3 den $\forall A, B$ için $\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(B) \leq 1 + \underline{\delta}(A \cap B)$ olduğundan,

$$\underline{\delta}(N \backslash A) + \underline{\delta}(N \backslash B) \leq 1 + \underline{\delta}((N \backslash A) \cap (N \backslash B)) = 1 + \underline{\delta}(N \backslash (A \cup B)),$$

$$-\underline{\delta}(N \backslash A) - \underline{\delta}(N \backslash B) \geq -1 - \underline{\delta}(N \backslash (A \cup B)),$$

$$1 - \underline{\delta}(N \backslash A) + 1 - \underline{\delta}(N \backslash B) \geq 1 - \underline{\delta}(N \backslash (A \cup B)),$$

bulunur ve sonuç olarak $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$ dir.

iv) D2 den $\emptyset \cap N = \emptyset \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\delta}(\emptyset) + \underline{\delta}(N) \leq \underline{\delta}(\emptyset \cup N)$ yazabiliriz. $\underline{\delta}(N) = 1$ olduğundan $\underline{\delta}(\emptyset) + 1 \leq 1 \Rightarrow \underline{\delta}(\emptyset) \leq 1 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\delta}(\emptyset) = 0$ elde edilir.

Diğer taraftan $\overline{\delta}(\emptyset) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash \emptyset) = 1 - \underline{\delta}(N) = 1 - 1 = 0$ olduğundan $\overline{\delta}(\emptyset) = \underline{\delta}(\emptyset) = 0$ dır.

v) $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A)$ olduğunu biliyoruz. Burada $A = N$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \overline{\delta}(N) &= 1 - \underline{\delta}(N \backslash N) \\ &= 1 - \underline{\delta}(\emptyset) = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

bulunur.

vii) D2 de $B = N \backslash A$ alırsak,

$$\underline{\delta}(A) + \underline{\delta}(N \backslash A) \leq \underline{\delta}(A \cup (N \backslash A)) = \underline{\delta}(N)$$

yazabiliriz ve $\underline{\delta}(A) \leq 1 - \underline{\delta}(N \backslash A) = \overline{\delta}(A)$ yı elde ederiz.

Tanım 2.1.5: Doğal sayıların herhangi bir A altkümesi için $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$ oluyorsa

A kümesi δ yoğunluğuna göre doğal yoğunluğa sahiptir denir. Bu özelliğe sahip kümelerin kümesini η_δ ile göstereceğiz. Yani,

$$\eta_\delta = \{A : \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)\}$$

dır. η_δ^0 uzayını da,

$$\eta_\delta^0 = \{A : \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = 0\}$$

şeklinde tanımlarız. Yani $A \in \eta_\delta$ demek $\delta(A) = \underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A)$ demektir (Freedman ve Sember, 1981).

Özellik 2.1.6. $A \in \eta_\delta$ ve $\delta(A) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\overline{\delta}(A) = 0$ olmasıdır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: İlk önce teoremin gerekliliğini ispatlayalım. $A \in \eta_\delta$ ve $\delta(A) = 0$ olsun. Bu durumda $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = \delta(A) = 0$ olur.

Şimdi de yeterliliğini ispatlayalım. $\overline{\delta}(A) = 0$ olsun. $A \in \eta_\delta$ ise $\underline{\delta}(A) = \overline{\delta}(A) = 0$ ve $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$ olduğundan $\delta(A) = 0$ yazabiliriz.

Teorem 2.1.7: **i)** Eğer $A \sim N$ ise $A \in \eta_\delta$ ve $\delta(A) = 1$ dir.

ii) Eğer $A \sim \emptyset$ ise $A \in \eta_\delta^0$ dır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat. **i)** Teorem 2.1.4. (vi) ya göre $A \sim B \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$ dir. Ayrıca Teorem 2.1.4. (v) e göre de $A \sim N \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(N) = 1$ yazarız. D1 den dolayı $A \sim N$ olduğundan $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(N) = 1$ ve $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$ olduğundan da $A \in \eta_\delta$ yazılabilir. $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A) = 1$ ve $\delta(A)$ nın tanımından $\delta(A) = 1$ bulunur.

ii) Teorem 2.1.4. (vi) ya göre $A \sim \emptyset \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(\emptyset) = 0$ olduğundan ve Teorem 2.1.4. (iv) e göre $\overline{\delta}(A) = 0$ yazabiliriz. η_δ^0 tanımından da $A \in \eta_\delta^0$ ı elde ederiz.

Teorem 2.1.8: **i)** δ sonlu toplamsaldır. Yani $A \cap B = \emptyset,\ A, B,\ A \cup B \in \eta_\delta$ ise $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$ dır.

ii) Eğer $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \eta_\delta^0$ ise $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \eta_\delta^0$ dır.

iii) Eğer $A \in \eta_\delta$ ise $(N \backslash A) \in \eta_\delta$ ve $\delta(N \backslash A) = 1 - \delta(A)$ dır.

iv) $A \in \eta_\delta$ ve $A \sim B$ ise $B \in \eta_\delta$ ve $\delta(A) = \delta(B)$ dır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: **i)** $A, B \in \eta_\delta$ olsun . $A \cap B = \emptyset$ ise D2 den ve $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$, $\overline{\delta}(B) = \underline{\delta}(B)$ olduğundan $A, B \in \eta_\delta$ için

$$\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan Teorem 2.1.4. (iii) den $\overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$ olduğundan $\overline{\delta}(A \cup B) \leq \overline{\delta}(A) + \overline{\delta}(B) \leq \underline{\delta}(A \cup B)$ yazabiliriz. Teorem 2.1.4. (vii) den $\underline{\delta}(A) \leq \overline{\delta}(A)$ olduğundan $\underline{\delta}(A \cup B) \geq \overline{\delta}(A \cup B)$ olması ancak ve ancak $\underline{\delta}(A \cup B) = \overline{\delta}(A \cup B)$ ile mümkündür ve $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B)$ dir.

ii) İspatı iki küme için yapacağız, sonlu sayıdaki kümeler için de bu ispat geçerli olacaktır.

A_1, A_2 gibi herhangi iki küme için $A_1, A_2 \in \eta_\delta^0$ olsun. Bu durumda $\overline{\delta}(A_1) = \overline{\delta}(A_2)$ yazabiliriz. Teorem 2.1.4. (iii) den $\overline{\delta}(A_1) + \overline{\delta}(A_2) \geq \overline{\delta}(A_1 \cup A_2)$ olduğundan $0 \geq \overline{\delta}(A_1 \cup A_2)$ buluruz. Yoğunluk negatif olamayacağından $\overline{\delta}(A_1 \cup A_2) = 0$ olur. Böylece $A_1 \cup A_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{2} A_i \in \eta_\delta^0$ dır.

iii) Üst yoğunluk tanımından $\overline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A)$ dır ve $A \in \eta_\delta$ olduğundan $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$ olmasını kullanırsak

$$\underline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A) \tag{1}$$

ifadesini elde ederiz. Yine üst yoğunluğun tanımından $\overline{\delta}(N \backslash A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash (N \backslash A))$ $= 1 - \underline{\delta}(A)$ olduğundan,

$$\underline{\delta}(A) = 1 - \overline{\delta}(N \backslash A) \tag{2}$$

dır.

(1) ve (2) den $1 - \underline{\delta}(N \backslash A) = 1 - \overline{\delta}(N \backslash A)$ bulunur. $\overline{\delta}(N \backslash A) = \underline{\delta}(N \backslash A)$ olduğundan, $(N \backslash A) \in \eta_\delta$ elde edilir. Ayrıca $\overline{\delta}(A) = 1 - \overline{\delta}(N \backslash A)$ ve $\underline{\delta}(A) = 1 - \underline{\delta}(N \backslash A)$ olduğundan,

$$\delta(N \backslash A) = 1 - \delta(A)$$

bulunur.

iv) D1 den $A \sim B \Rightarrow \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ dir. Ayrıca $A \in \eta_\delta$ ise $\overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)$ olduğunu biliyoruz. Teorem 2.1.4. (vi) dan $A \sim B \Rightarrow \overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$ olduğundan,

$\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B) = \underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ dir . Buradan da gözlemleriz ki $B \in \eta_\delta$ dir. $\overline{\delta}(A) = \overline{\delta}(B)$, $\underline{\delta}(A) = \underline{\delta}(B)$ olduğundan da

$$\delta(A) = \delta(B)$$

dir.

Doğal yoğunluğun sayılabilir toplamsal olmadığını aşağıdaki özellikle verip ardından yoğunluk fonksiyonu için başka bir toplamsallık özelliği tanımlayacağız.

Özellik 2.1.9: δ sayılabilir toplamsal değildir (Freedman ve Sember, 1981).
İspat: $A_i = \{i\}$ tek nokta kümelerini alalım. $\forall i$ için $A_i \in \eta_\delta^0$ ve $\forall i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ dur. Burada $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = N$ ve $\delta(N) = 1$ olduğu halde $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta(A_i) = 0$ dır. Böylece $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \delta(A_i) \neq \delta(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_i))$ bulunur ki bu da δ nın sayılabilir toplamsal olmadığını verir.

Tanım 2.1.10: (Toplamsallık Özelliği (A.P.)) $A_i \in \eta_\delta$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$) olsun. $B_i \sim A_i$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta_\delta$ olacak şekilde B_i kümeleri var ve

$$\delta\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B_i)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\delta(B_i)\Big)$$

eşitliği sağlanıyorsa toplamsallık özelliği (A.P.) vardır denir (Freedman ve Sember, 1981).

Benzer şekilde sıfır doğal yoğunluklu kümeler için de toplamsallık özelliği aşağıdaki şekilde verilebilir.

Tanım 2.1.11: (Sıfır Doğal Yoğunluklu Kümeler İçin Toplamsallık Özelliği (A.P.O.)) $A_i \in \eta_\delta^0$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$) olsun. $B_i \sim A_i$ ve $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta_\delta^0$ olacak şekilde B_i kümeleri mevcutsa sıfır doğal yoğunluklu kümeler için toplamsallık özelliği (A.P.O.) vardır denir (Freedman ve Sember, 1981).

Şimdi (A.P.O.) nin sağlandığını gösteren bir örnek vereceğiz.

Örnek 2.1.12: $A_i = \{i\}$ kümeleri için $B_i = \{i^2\}$ seçelim. Burada

$$A_1 = \{1\} \quad B_1 = \{1\}, \quad A_2 = \{2\} \quad B_2 = \{4\}, \quad A_3 = \{3\} \quad B_3 = \{9\}, \ldots$$

dır ve A_i ile B_i nin simetrik farkı sonlu olduğundan $\forall i$ için $A_i \sim B_i$ dir. $A_i = \{i\} \in \eta_\delta^0$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \{1, 4, 9, 16, \ldots\} \in \eta_\delta^0$ olduğundan (A.P.O.) özelliği sağlanır.

Özellik 2.1.13: (A.P.) varsa (A.P.O.) vardır.

İspat: Kolayca görülür ki $\eta_\delta^0 = \{A : \overline{\delta}(A) = 0\} \subseteq \eta_\delta = \{A : \overline{\delta}(A) = \underline{\delta}(A)\}$ dir. Buradan (A.P.) varsa (A.P.O.) vardır diyebiliriz.

Tanım 2.1.14: (**(A.P.O.)$'$ Özelliği**) (A.P.O.) de A_i kümelerinin ayrık olma şartını kaldırınca elde edilen özelliğe (A.P.O.)$'$ adı verilir (yani $A_i \in \eta_\delta^0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ olsun. $B_i \sim A_i$ ve $\bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i) \in \eta_\delta^0$ olacak şekilde B_i kümeleri varsa (A.P.O.)$'$ vardır denir.) (Freedman ve Sember, 1981).

Teorem 2.1.15: (A.P.O.) ve (A.P.O.)$'$ denktir (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: **i)** (A.P.O.)$'$ sağlanırsa (A.P.O.) sağlanır. Çünkü (A.P.O.)$'$ de kümeler ayrık olabilir veya ayrık olmayabilir.

ii) Şimdi (A.P.O.) sağlanırsa (A.P.O.)$'$ nin sağlandığını gösterelim. Kabul edelim ki (A.P.O.) sağlansın. Bu taktirde η_δ^0 daki kümelerin herhangi bir dizisi A_i olsun. İkişer ikişer ayrık A_i' dizisini

$$A_1' = A_1, \quad A_{i+1}' = A_{i+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{i} A_j$$

şeklinde tanımlayalım. (A.P.O.) sağlandığından $A_i \in \eta_\delta^0$ ve A_i' ler ayrık alındığından $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i' \in \eta_\delta^0$ olacak şekilde $B_i' \sim A_i'$ kümeleri vardır. $B_i = \bigcup_{j=1}^{i} B_j'$ alalım. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i'$ dür. $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i' \in \eta_\delta^0$ olduğundan da $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta_\delta^0$ olur. Herhangi A_i kümeleri için $A_i \in \eta_\delta^0$ ve $A_i \sim B_i$ olacak şekilde $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta_\delta^0$ bulunduğundan (A.P.O.)$'$ sağlanır.

(i) ve (ii) den de (A.P.O.) ve (A.P.O.)$'$ nin denk olduğu görülür.

2.2. Yoğunluk Örnekleri ve (A.P.O.)

Bu kısımda, Tanım 2.1.1. deki koşulları sağlayan, pozitif tamsayılar kümesindeki bazı yoğunluk örnekleri ve bu örneklerin (A.P.O.) ni sağlayıp sağlamadığı incelenmiştir.

Bir A kümesindeki x e eşit veya daha küçük pozitif tamsayıların sayısını $A(x)$ ile gösterelim. Örneğin, A kümesi çift sayılardan oluşuyorsa $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dır. Bu durumda $A(1) = 0,\ A(2) = 1,\ A(3) = 1, \ldots,\ A(7) = 3,\ A(8) = 4,\ A(\frac{17}{2}) = 4$. Burada açıkça $x \geq 0$ için $A(x) = \left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]$ olduğunu elde ederiz. Herhangi bir $A = [a_i]$ kümesi için $A(a_j) = j$ dir.

Tanım 2.2.1: Bir A kümesinin asimptotik yoğunluğu,

$$\underline{d}_0(A) = \lim_{n \to \infty} \inf \frac{A(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. $\frac{A(n)}{n}$ dizisinin limitinin varolması durumunda A kümesinin doğal yoğunluğunu $d_0(A)$ ile gösteririz. Böylece A doğal yoğunluğa sahipse,

$$\underline{d}_0(A) = d_0(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$$

dir (Freedman ve Sember, 1981).

Örnek 2.2.2: $A = \{1, 2, ...\} = N$ ise $\underline{d}_0(A) = d_0(A) = 1$ dir.

Örnek 2.2.3: $A = \{2, 4, 6, ...\}$ olsun. $\frac{A(n)}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \cdots$$

şeklinde ve

$$\underline{d}_0(A) = d_0(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

dir.

Örnek 2.2.4: $A = \{1, 4, 9, ..., n^2, ...\}$ ise

$$\underline{d}_0(A) = d_0(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n}$$

olduğundan $\underline{d}_0(A) = d_0(A) = 0$ dır.

Her doğal sayı kümesinin (alt)asimptotik yoğunluğu vardır fakat doğal yoğunluğu olmayabilir. Doğal yoğunluğa sahip olmayan bir küme örneği Örnek 2.2.5. de verilmiştir.

Örnek 2.2.5: $A = \{1, 4, 5, 6, 13, 14, ..., 24, 49, 50, ..., 96, 193, 194, ...\}$ kümesinin $\frac{A(n)}{n}$ dizisinin üst limitini oluşturan altdizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3}$$

ve alt limitini oluşturan altdizisi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnek için A kümesinin alt asimptotik yoğunluğu $\frac{1}{3}$ olduğu halde doğal yoğunluğa sahip değildir.

Tanım 2.2.6: (Kümeye Göre Yoğunluk) $A \subseteq D \subseteq N$ olmak üzere D kümesine göre A kümesinin alt asimptotik yoğunluğu,

$$\underline{\delta}_D(A) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{A(n)}{D(n)}$$

ve doğal yoğunluğu da,

$$\delta_D(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{D(n)}$$

şeklinde tanımlanır. Tanım 2.2.1. de N kümesi olarak D kümesi düşünülürse D1-D4 özellikleri sağlanır.

Teorem 2.2.7: $A \subseteq D \subseteq N$ olmak üzere $d_0(A) = \delta_D(A) \cdot d_0(D)$ dir.

İspat: Tanım 2.2.1. den $d_0(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d_0(A) &= \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} . \frac{D(n)}{D(n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{D(n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n} \\ &= \delta_D(A) \cdot d_0(D) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.2.8: $D = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...\}$ ve $A = \{5, 9, 13, ..., 4n+1, ...\}$ alırsak, burada $d_0(A) = \frac{1}{4}$, $d_0(D) = \frac{1}{2}$, ve $\delta_D(A) = \frac{1}{2}$ dir.

Tanım 2.2.1. deki asimptotik yoğunluk C_1 Cesàro matrisi yardımıyla aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

Tanım 2.2.9: $\frac{A(n)}{n}$, $C_1\chi_A$ dizisinin n. terimini gösterirse,

$$\underline{d}_1(A) = \liminf_{n\to\infty}(C_1\chi_A)_n$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon herhangi bir A kümesine göre yoğunluk tanımlar ve D1-D4 özelliklerini sağlar. Yoğunluk olduğunun ispatı Teorem 2.2.10. un özel bir halidir (Freedman ve Sember, 1981).

Tanım 2.2.9., toplanabilme metodundan bir yoğunluk elde etmek için genel bir yol olabileceği fikrini akla getirir.

Teorem 2.2.10: M negatif olmayan regüler matris ve $\underline{\delta}_M$ aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\underline{\delta}_M(A) = \liminf_{n\to\infty}(M\chi_A)_n.$$

Bu durumda $\underline{\delta}_M$ bir yoğunluktur (yani $\underline{\delta}_M$, D1-D4 özelliklerini sağlar.). Dahası

$$\overline{\delta}_M(A) = \limsup_{n\to\infty}(M\chi_A)_n$$

eşitliği vardır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: İspat için D1-D4 özelliklerinin sağlandığını göstermemiz gerekir.

D1) $A \sim B$ ise $\underline{\delta}_M(A) = \underline{\delta}_M(B)$ olduğunu gösterelim.

$A \sim B$ ise $1 \le j \le N_1$ için $\chi_A(j) = \chi_B(j)$ dışında pozitif bir N_1 sayısı vardır ve

$$\begin{aligned} \mid (M\chi_A)_n - (M\chi_B)_n \mid &= \mid \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}\chi_A(j) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}\chi_B(j) \mid \\ &\le \sum_{j=1}^{N_1} a_{nj} \mid \chi_A(j) - \chi_B(j) \mid \\ &\le \sum_{j=1}^{N_1} a_{nj} \to 0 \quad (n\to\infty) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $\liminf_{n\to\infty} \mid (M\chi_A)_n - (M\chi_B)_n \mid \to 0$ bulunur. Buradan,

$$\liminf_{n\to\infty}(M\chi_A)_n = \liminf_{n\to\infty}(M\chi_B)_n \;\Rightarrow\; \underline{\delta}_M(A) = \underline{\delta}_M(B)$$

elde edilir.

D2) $A \cap B = \emptyset$ ise $\underline{\delta}_M(A) + \underline{\delta}_M(B) \le \underline{\delta}_M(A \cup B)$ olduğunu gösterelim.

$A \cap B = \emptyset$ ise $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\underline{\delta}_M(A \cup B) &= \liminf_{n\to\infty}(M\chi_{A\cup B})_n \\
&= \liminf_{n\to\infty}(M\chi_A + M\chi_B)_n \\
&\geq \liminf_{n\to\infty}(M\chi_A)_n + \liminf_{n\to\infty}(M\chi_B)_n \\
&= \underline{\delta}_M(A) + \underline{\delta}_M(B)
\end{aligned}$$

yazabiliriz.

D3) $\forall A, B$ için $\underline{\delta}_M(A)+\underline{\delta}_M(B) \leq 1+\underline{\delta}_M(A\cap B)$ olduğunu gösterelim. $\chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cup B}$ yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}
1+\underline{\delta}_M(A \cap B) &= 1+\liminf_{n\to\infty}(M\chi_{A\cap B})_n \\
&= 1+\liminf_{n\to\infty}(M\chi_A + M\chi_B - M\chi_{A\cup B})_n \\
&\geq 1+\liminf_{n\to\infty}(M\chi_A)_n + \liminf_{n\to\infty}(M\chi_B)_n - \limsup_{n\to\infty}(M\chi_{A\cup B})_n \\
&= 1+\underline{\delta}_M(A) + \underline{\delta}_M(B) - \overline{\delta}_M(A\cup B) \\
&= \underline{\delta}_M(A) + \underline{\delta}_M(B) + \underline{\delta}_M(N\backslash(A\cup B)) \\
&\geq \underline{\delta}_M(A) + \underline{\delta}_M(B)
\end{aligned}$$

bulunur.

D4) $\underline{\delta}_M(N) = 1$ olduğunu gösterelim. $\underline{\delta}_M(N) = \liminf_{n\to\infty}(M\chi_N)_n = \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} = 1$ dır. Böylece $\underline{\delta}_M$ nin bir yoğunluk olduğu elde edilmiş olur.

Şimdi de $\overline{\delta}_M = \limsup_{n\to\infty}(M\chi_A)_n$ olduğunu gösterelim. $\overline{1} = (1, 1, \ldots)$ olmak üzere $\chi_{N\backslash A} = \overline{1} - \chi_A$ ve $\lim_{n\to\infty} (1 - M\overline{1})_n = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_M(A) &= 1-\underline{\delta}_M(N\backslash A) \\
&= 1-\liminf_{n\to\infty}(M\chi_{N\backslash A})_n \\
&= \limsup_{n\to\infty}(1 - M\chi_{N\backslash A})_n \\
&= \limsup_{n\to\infty}(1 - M\overline{1} + M\chi_A)_n \\
&= \limsup_{n\to\infty}(M\chi_A)_n
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Ayrıca bu şekilde tanımlanan yoğunluk (A.P.O.) ni sağlar. Teorem 2.2.12. bunu ispatlar.

Tanım 2.2.11: (Birim Matrisden Elde Edilen Yoğunluk) J birim matrisinden elde edilen $\underline{\delta}_j$ yoğunluğu,

$$\underline{\delta}_j(A) = \begin{cases} 0 & , N\backslash A \text{ sonsuz} \\ 1 & , \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Freedman ve Sember, 1981).

Burada $\underline{\delta}_j(A) = \liminf\limits_{n\to\infty} (J\chi_A) = \liminf\limits_{n\to\infty} (\chi_A)_n$ ve $A \in \eta^0_{\delta_j}$ ise A sonludur. η_{δ_j} nin elemanları $A \sim N$ şeklindeki sonsuz kümelerden oluşur.

Şimdi (A.P.O.) nin herhangi negatif olmayan matrisden elde edilen yoğunluk için sağlandığını gösteren aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 2.2.12: M bir negatif olmayan regüler matris ve $\underline{\delta}_M$ yoğunluğu Teorem 2.2.10. daki gibi tanımlansın. Bu durumda (A_i), $\eta^0_{\delta_M}$ daki kümelerin ayrık bir dizisi ise $B_i \sim A_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ve $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta^0_{\delta_M}$ olacak şekilde kümelerin bir B_i dizisi vardır (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: $M = (a_{ni})$ negatif olmayan regüler bir matris olsun. Her bir $n = 1, 2, \ldots$ için $s(n+1) > s(n)$ ve $\sum\limits_{i=s(n)+1}^{\infty} a_{ni} < \frac{1}{n}$ olacak şekilde $s(n)$ var olsun. Herbir $j = 1, 2, \ldots$ için $k(j)$ yi seçelim. Burada $n \geq k(j)$ olması

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}(\chi_{A_1}(i) + \ldots + \chi_{A_j}(i)) < \frac{1}{j}$$

ve $k(j+1) > k(j)$ demektir. $k(j)$ nin varlığını Teorem 2.1.4. den söyleyebiliriz. Ayrıca $n \geq k(1)$ için $p(n)$; $k(p(n)) \leq n < k(p(n)+1)$ şeklinde olsun. Sonuç olarak $m = 1, 2, \ldots$ için,

$$B_m = A_m \backslash \{1, 2, \ldots, s(k(m+1))\}$$

şeklinde seçelim. Burada $m = 1, 2, \ldots$ için $B_m \sim A_m$ dir.

Şimdi $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ için $\overline{\delta}_M(B) = 0$ yani $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta^0_{\delta_M}$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 2.2.10. dan $\overline{\delta}_M(B) = \limsup\limits_{n\to\infty} (M\chi_B)_n = \limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ni}\chi_B(i)$ yazabiliriz.

Ayrıca $\sum\limits_{i=s(n)+1}^{\infty} a_{ni} < \frac{1}{n}$ ve $s(n+1) > s(n)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_M(B) &= \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni}\chi_B(i) + \sum_{i=s(n)+1}^{\infty} a_{ni}\chi_B(i)\right)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni}\chi_B(i)\right)\\
&= \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni}\chi_B(i)\right)
\end{aligned}$$

dir. B_m ler ayrık ve $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$ olduğundan $\chi_B(i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \chi_{B_m}(i)$ yazabiliriz. Böylece,

$$\overline{\delta}_M(B) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{B_m}(i)$$

dir. Burada toplamı $p(n)$ e kadar alabiliriz. Çünkü, eğer $m > p(n) \Rightarrow k(m+1) > k(p(n)+1) > n \Rightarrow s(k(m+1)) > s(n) \Rightarrow \{1,2,\ldots,s(n)\} \cap B_m = \emptyset \Rightarrow \chi_{B_m}(i) = 0$ ve $i \leq s(n)$ ise $\chi_{B_m}(i) = 0$ dır. Ayrıca $m = 1,2,\ldots$ için,

$$B_m = A_m \backslash \{1,2,\ldots,s(k(m+1))\}$$

olduğundan aşağıdakileri yazarak eşitsizliğe devam edersek,

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_M(B) &= \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni} \sum_{m=1}^{p(n)} \chi_{B_m}(i)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{s(n)} a_{ni} \sum_{m=1}^{p(n)} \chi_{A_m}(i)\\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} \sum_{m=1}^{p(n)} \chi_{A_m}(i)
\end{aligned}$$

bulunur. $n \geq k(p(n))$ ve

$$\overline{\delta}_M(B) \leq \limsup_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\left(\chi_{A_1}(i) + \ldots + \chi_{A_{p(n)}}(i)\right) < \frac{1}{p(n)}\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_M(B) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{p(n)} \qquad ,(n\to\infty \text{ için } p(n)\to\infty)\\
&= 0
\end{aligned}$$

sonucunu buluruz. $\overline{\delta}_M(B) \leq 0$ olduğundan ve yoğunluk negatif olamayacağından $\overline{\delta}_M(B) = 0$ yazarız. Bu ifade de bize $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \eta^0_{\delta_M}$ olmasını verir.

Şimdi G.G. Lorentz tarafından ortaya atılan toplanabilme metodu ile yakından ilgili olan başka bir yoğunluk tanımlayacağız.

Tanım 2.2.13: (Düzgün Yoğunluk)

$$\underline{u}(A) = \lim_{n\to\infty}\left[\min_{m\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_A(i)\right],$$

$$\overline{u}(A) = \lim_{n\to\infty}\left[\max_{m\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_A(i)\right]$$

ifadelerini yazalım. Burada $\underline{u}$ ya A nın alt düzgün yoğunluğu, $\overline{u}$ ya da A nın üst düzgün yoğunluğu adını vereceğiz. Ayrıca $\underline{u}$ fonksiyonu alt asimptotik yoğunluktur. Yani D1-D4 özelliklerini sağlar (Freedman ve Sember, 1981).

Özellik 2.2.14: $A \in \eta_u$ olması için gerek ve yeter koşul χ_A dizisinin hemen hemen yakınsak olmasıdır (Freedman ve Sember, 1981).

Özellik 2.2.15: Herhangi bir A kümesi keyfi ardışık tamsayı dizilerini içeriyorsa $\overline{u}(A) = 1$ dir. Yani her $N_1 > 0$ için $\{k+1, k+2, \ldots k+N_1\} \subseteq A$ olacak şekilde bir k sayısı varsa,

$$\overline{u}(A) = \lim_{n\to\infty}\left[\max_{m\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_A(i)\right] = 1 \tag{3}$$

dir (Freedman ve Sember, 1981).

Özellik 2.2.16: (3) şeklinde tanımlanan $\overline{u}(A)$ yoğunluğu için (A.P.O.)$'$ özelliği sağlanmaz (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: $A = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$ ve $A_j = \{j + a; a \in A\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ olsun. Herbir j için $A_j \in \eta^0_u$ dır. Yani herbir j için,

$$\overline{u}(A_j) = \lim_{n\to\infty}\left[\max_{m\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_{A_j}(i)\right] = 0$$

dır. Çünkü, $A_1 = \{2, 3, 5, 9, \ldots, 2^n+1, \ldots\}$, $A_2 = \{3, 4, 6, 10, \ldots, 2^n+2, \ldots\}, \ldots$

$j = 1,\ m = 0$ için

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_{A_1}(i) &= \tfrac{\chi_{A_1}(1)+\chi_{A_1}(2)+\ldots+\chi_{A_1}(n)}{n} \\ &= \tfrac{0+1+1+0+1+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+\ldots}{n} \cong \tfrac{\log_2 n}{n}\end{aligned}$$

dir.

$j = 1,\ m = 1$ için

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_{A_1}(i) &= \tfrac{\chi_{A_1}(2)+\chi_{A_1}(3)+\ldots+\chi_{A_1}(n+1)}{n} \\ &= \tfrac{1+1+0+1+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+\ldots}{n} \cong \tfrac{\log_2 n}{n}\end{aligned}$$

dir.

$j = 1,\ m = 2$ için

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_{A_1}(i) &= \tfrac{\chi_{A_1}(3)+\chi_{A_1}(4)+\ldots+\chi_{A_1}(n+2)}{n} \\ &= \tfrac{1+0+1+0+0+0+1+0+0+0+0+0+0+0+1+0+0+\ldots}{n} \leq \tfrac{\log_2 n}{n}\end{aligned}$$

bulunur. $m \geq 0$ üzerinden maximum alındığında da,

$$\max_{m\geq 0}\frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{m+n}\chi_{A_j}(i) \cong \frac{\log_2 n}{n}$$

ifadesini elde ederiz. $\forall j$ için

$$\overline{u}(A_j) \cong \lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\log_2 e}{1} = 0$$

dır.

Şimdi de (A.P.O.)$'$ nin sağlanmadığını gösterelim. Bunun için $B_i \sim A_i$ kümelerinin herhangi bir seçimi için $\overline{u}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer $B_i,\ B_i \sim A_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ şeklinde herhangi bir dizi ve $M > 0$ ise bu durumda $1 \leq i \leq M$ için $n \geq k_i$ iken $2^n + i \in B_i$ olacak şekilde bir k_i vardır. $k = \max\{k_1, k_2, \ldots k_M\}$ ve $n > k$ alarak,

$$2^n + 1 \in B_1,\ 2^n + 2 \in B_2, \ldots,\ 2^n + M \in B_M$$

olduğundan dolayı,

$$\{2^n + 1, 2^n + 2, \ldots, 2^n + M\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

dir. Daha önceden her $M > 0$ için $\{k+1, k+2, \dots, k+M\} \subseteq A$ olacak şekilde $k(= 2^n)$ varsa $\overline{u}(A) = 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $\overline{u}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) > 0$ bulunur ki bu da bize (A.P.O.)$'$ nin sağlanmadığını verir.

Özellik 2.2.17: (3) Şeklinde tanımlanan $\overline{u}(A)$ yoğunluğu için (A.P.O.) özelliği sağlanmaz (Freedman ve Sember, 1981).

İspat: Özellik 2.2.16. ya göre $\overline{u}(A)$ yoğunluğu için (A.P.O.)$'$ özelliği sağlanmaz. Önerme 2.1.15. e göre (A.P.O.) ve (A.P.O)$'$ özellikleri denk olduğundan $\overline{u}(A)$ yoğunluğu için (A.P.O.)$'$ sağlanmaz.

Tanım 2.2.18: (Schnirelmann Yoğunluğu) Pozitif tamsayıların bir $A \subseteq N$ kümesinin Schnirelmann yoğunluğu,

$$\underline{s}(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $A(n)$, A kümesindeki n den küçük veya eşit pozitif tamsayıların sayısıdır (Niven vd., 1991).

Bu tanımı asimptotik yoğunluk ile karşılaştırırsak

$$0 \leq \underline{s}(A) \leq \underline{d}_0(A) \leq 1$$

olduğunu görürüz.

Schnirelmann yoğunluğu hesaplanırken dizinin ilk terimlerinin önemi büyüktür. Gerçekten 1 ve 2 sayıları herhangi bir A kümesinde mevcutken veya mevcut değil iken asimptotik yoğunluk değişmediği halde Schnirelmann yoğunluğu, $1 \notin A$ iken $\underline{s}(A) = 0$, $2 \notin A$ iken $\underline{s}(A) \leq \frac{1}{2}$ dir. $\underline{s}(A) = 1$ olması da sadece $A = N$ iken mümkündür.

Uyarı 2.2.19: Schnirelmann yoğunluğu Tanım 2.2.1 deki yoğunluğun aksiyomatik tanımını sağlamaz. Bunun için D1 özelliğinin sağlanmadığını göstermemiz yeterlidir. $A = \{1, 3, 5, 7...\}$ ve $B = \{3, 5, 7, ...\}$ şeklinde tanımlayalım. Burada $\frac{A(n)}{n}$ dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \cdots$$

ve $\frac{B(n)}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \cdots$$

şeklindedir. $A \sim B$ olduğu halde $\underline{s}(A) = \frac{1}{2}$ ve $\underline{s}(B) = 0$ dır.

Örnek 2.2.20: $A = \{2, 4, 6, ...\}$ olsun $\frac{A(n)}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \ldots$$

şeklinde ve

$$s(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n} = 0$$

dır.

Uyarı 2.2.21: Bundan sonraki bölümlerde δ şeklinde tanımlanan yoğunluğu Tanım 2.2.1 deki d_0 yoğunluğu olarak yani, herhangi bir $A \subseteq N$ kümesi için,

$$\delta(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$$

ve

$$\underline{\delta}(A) = \lim_{n \to \infty} \inf \frac{A(n)}{n}$$

şeklinde kullanacağız.

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde temeli Tanım 2.2.1. doğal yoğunluk kavramına dayanan, dizilerin adi anlamda yakınsaklık kavramından farklı olan istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır.

İstatistiksel yakınsaklık tanımını vermeden önce adi yakınsak dizilerin tanımını hatırlayarak istatistiksel yakınsaklık fikrinin nereden kaynaklandığını görelim. Adi yakınsaklıkta bir x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise L nin herbir ε komşuluğu dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi bu kavramı biraz genelleştirmeye çalışacağız. Kabul edelimki, L noktasının herbir ε komşuluğu dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda elemanı kalsın, fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre çok azdır, yani söyleyebiliriz ki dizinin "hemen hemen" tüm elemanları L nin ε komşuluğu içerisindedir. Bu durumda x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğu söylenebilir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanların sayısının "az" olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir. Şimdi iki dizinin "hemen hemen" eşit olmasını tanımlayıp istatistiksel yakınsaklık kavramını vereceğiz.

Tanım 3.1: $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri için $\delta(\{k \in N : x_k \neq y_k\}) = 0$ ise x ve y dizileri hemen hemen her k için eşittir denir (Fridy, 1985).

Tanım 3.2: (İstatistiksel Yakınsaklık) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k : \mid x_k - L \mid \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \mid x_k - L \mid \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

ise x dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast, 1951).

Örnek 3.3: $x = (x_k)$ dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k & , k = n^2, \quad n \in N \\ 0 & , k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$K = \{k :\mid x_k - 0 \mid \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

alınır. Burada K kümesinin yoğunluğu $\delta(K) = 0$ dır. Dolayısıyla x dizisi $L = 0$ a istatistiksel yakınsaktır, yani $st - \lim x = 0$ dır. Aynı zamanda bu dizinin ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan yakınsak değildir. O halde istatistiksel yakınsak her dizinin yakınsak olamayacağı söylenebilir. Diğer taraftan yakınsak her dizinin istatistiksel yakınsak olduğu sonlu sayıdaki kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan söylenebilir (Fridy, 1985).

Tanım 3.4: Herhangi bir J reel sayısı için,

$$\delta(\{k \in N : x_k > J\}) = 1$$

ise (x_k) sayı dizisi $+\infty$ a,

$$\delta(\{k \in N : x_k < J\}) = 1$$

ise $-\infty$ a ıraksaktır denir (Tripathy, 1998).

Tanım 3.5: Bir reel sayı dizisinin istatistiksel limiti sıfıra eşitse diziye istatistiksel sıfır dizisi denir.

Yardımcı Teorem 3.6: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ istatistiksel sıfır dizisi ise onların çarpımı da istatistiksel sıfır dizisidir (Connor, 1985).

İspat: Eğer $\mid x_k y_k \mid \geq \varepsilon$ ise $\mid x_k \mid \geq \sqrt{\varepsilon}$ veya $\mid y_k \mid \geq \sqrt{\varepsilon}$ dur. Böylece herhangi bir $n \in N$ için,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \tfrac{1}{n} \mid \{k \leq n :\mid x_k y_k \mid \geq \varepsilon\} \mid \\ &\leq \tfrac{1}{n} \Big\{ \mid \{k \leq n :\mid x_k \mid \geq \sqrt{\varepsilon}\} \mid + \mid \{k \leq n :\mid y_k \mid \geq \sqrt{\varepsilon}\} \mid \Big\} \end{aligned}$$

elde edilir. Sağ taraftaki her iki ifade de $n \to \infty$ için sıfıra yaklaşacağından,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n :\mid x_k y_k \mid \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olur. Böylece $st - \lim xy = 0$ elde edilir.

Teorem 3.7:(Ayrışım) $x = (x_k)$, ℓ ye istatistiksel yakınsak bir dizi ise $\lim_{n\to\infty} y_n = \ell$, $x = y + z$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \mid = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi ve $z = (z_k)$ istatistiksel sıfır dizisi vardır. Ayrıca x sınırlı ise $\| z \|_\infty \leq \| x \|_\infty + \mid \ell \mid$ olacak şekilde z de sınırlıdır (Connor, 1988).

İspat: $N_0 = 0$ ve $n > N_j$ için,

$$\frac{1}{n} \mid \{k \leq n : \mid x_k - \ell \mid \geq \frac{1}{j}\} \mid < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların (N_j) artan dizisini seçelim. $y = (y_k)$ ve $z = (z_k)$ dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım;

$N_0 < k \leq N_1$ ise $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ ve $j \geq 1$ için $N_j < k \leq N_{j+1}$ olduğunu kabul edelim. $\mid x_k - \ell \mid < \frac{1}{j}$ ise $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ ve $\mid x_k - \ell \mid \geq \frac{1}{j}$ ise $y_k = \ell$ ve $z_k = x_k - \ell$ alalım. Böylece $x = y + z$ dizisini inşa edelim. Bu durumda $\| z \|_\infty \leq \| x \|_\infty + \mid \ell \mid$ olduğu açıktır.

Şimdi $\lim_{k\to\infty} y_k = \ell$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > \frac{1}{j}$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ ve j seçelim. $k > N_j$ için $\mid y_k - \ell \mid = \mid x_k - \ell \mid < \frac{1}{j} < \varepsilon$ olduğundan $\mid y_k - \ell \mid < \varepsilon$ dur. Eğer $\mid x_k - \ell \mid \geq \frac{1}{j}$ ise $\mid y_k - \ell \mid = \mid \ell - \ell \mid = 0$ dır. Böylece $\lim_{k\to\infty} y_k = \ell$ elde edilir.

Şimdi de $z = (z_k)$ nin istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid \{k \leq n : z_k \neq 0\} \mid = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir n doğal sayısı ve $\varepsilon > 0$ için,

$$\mid \{k \leq n : z_k \neq 0\} \mid \geq \mid \{k \leq n : \mid z_k \mid \geq \varepsilon\} \mid$$

olduğundan sonuç açıktır.

$\frac{1}{j} < \varepsilon_1$ olacak şekilde $j \in N$ ve $\varepsilon_1 > 0$ ise her $n > N_j$ için,

$$\mid \{k \leq n : z_k \neq 0\} \mid < \varepsilon_1$$

olduğunu göstereceğiz. İnşaadan hatırlayacağız ki $N_j < k \leq N_{j+1}$ için yalnızca $\mid x_k - \ell \mid > \frac{1}{j}$ ise $z_k \neq 0$ dır. Böylece $N_L < k \leq N_{L+1}$ ise

$$\{k \leq n : z_k \neq 0\} \subseteq \left\{k \leq n : \mid x_k - \ell \mid > \frac{1}{L}\right\}$$

dir. Neticede, eğer $L > j$ ve $N_L < n < N_{L+1}$ ise,

$$\frac{1}{n} \mid \{k \le n : z_k \neq 0\} \mid \le \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : \mid x_k - \ell \mid > \frac{1}{L} \right\} \right| < \frac{1}{L} < \frac{1}{j} < \varepsilon_1$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. Burada $N_j(\varepsilon_1, \varepsilon) = N_j$ dir.

Tanım 3.8: $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer,

$$\delta(\{n_j : j \in N\}) = 0$$

ise (x_{n_j}) altdizisine seyrek (thin) altdizi, aksi taktirde seyrek olmayan (nonthin) altdizi adı verilir (Fridy, 1993).

Tanım 3.9: λ ya yakınsak $x = (x_k)$ dizisinin seyrek olmayan ($\delta(K) > 0$) altdizisi varsa, λ ya x sayı dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir. x sayı dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir (Fridy, 1993).

Tanım 3.10: $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{n \in N : \mid x_n - \mu \mid < \varepsilon\}$$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse μ sayısı $x = (x_k)$ dizisinin bir istatistiksel yığılma noktasıdır denir. x sayı dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir (Fridy, 1993).

Çoğunlukla bir dizinin istatistiksel limit noktaları ile istatistiksel yığılma noktaları çakışıktır. Şimdi bunların birbirinden farklı olabildiğini gösteren bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.11: $x = (x_k)$ dizisi $x = \left(0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, 0, ...\right)$ şeklinde düzgün dağılımlı bir dizi olsun (Kupers ve Niederreiter, 1974). Herhangi bir alt aralıktaki x_k ların yoğunluğu aralığın boyuna eşittir. Burada $L_x = [0, 1]$ dir. Aynı zamanda herhangi bir $\gamma \in [0, 1]$ için

$$\delta(\{k \in N : x_k \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)\}) \ge \varepsilon > 0$$

olduğundan $\Gamma_x = [0, 1]$ olur.

$\forall\varepsilon > 0$ ve herbir n için $\lambda \in [0,1]$ alarak x in bir $\{x\}_K$ altdizisinin λ ya yakınsak olduğunu kabul edip $\delta(K)$ yoğunluğuna bakacağız.

$$K = \{k \in K_n : x_k\} = \{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \cup \{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz, yoğunluğa geçersek,

$$\delta(K) = \delta(\{k \in K_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}) + \delta(\{k \in K_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}) \leq 2\varepsilon$$

olduğundan $\delta\{K\} \leq 2\varepsilon$ buluruz. ε keyfi olduğundan yeterince küçük ε için $\delta(K) = 0$ olur. Bu ise $\{x\}_K$ altdizisinin seyrek bir altdizi olduğunu verir. λ keyfi olduğundan bu şekilde hiçbir seyrek olmayan altdizi bulunamayacağından $\Lambda_x = \phi$ dur (Fridy, 1993).

Teorem 3.12: $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel sayı dizileri olsun. Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ ise $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir (Fridy, 1993).

Teoremde x ve y dizilerinin farklı olduğu yerlerin yoğunluğu sıfır, fakat buralarda sonsuz sayıda eleman olabileceğinden birbirinden farklı limit noktaları içerebilir. Yani bu şekildeki x, y dizileri için her zaman $L_x = L_y$ diyemeyiz.

Yardımcı Teorem 3.13: $x = (x_n)$ bir sayı dizisi ise hemen hemen her k için $x_k = y_k$ ve $L_y = \Gamma_x$ olacak şekilde en az bir $y = (y_n)$ sayı dizisi vardır (Fridy 1993).

Teorem 3.14: $x = (x_n)$ reel sayı dizisi verilsin. $\delta(\{n \in N : x_n \neq y_n\}) = 0$ olacak şekilde bir (y_n) ve bir (z_n) istatistiksel sıfır dizisi vardır ve

$$x = y + z$$

şeklinde yazılabilir. Burada $L_y \supseteq \Gamma_x$ dir.

İspat: (y_n) ve (z_n) dizileri aşağıdaki şekilde inşa edilsin;

$$y_n = \begin{cases} x_n & , k^2 \neq n \quad , \quad k \in N \\ \frac{x_n}{2} & , k^2 = n \quad , \quad k \in N \end{cases} ,$$

$$z_n = \begin{cases} 0 & , k^2 \neq n \quad , \quad k \in N \\ \frac{x_n}{2} & , k^2 = n \quad , \quad k \in N \end{cases} .$$

Burada $\delta(\{n \in N : x_n \neq y_n\}) = \delta(\{1,4,9,16,\ldots\}) = 0$ ve $\delta(\{n \in N : z_n \neq 0\}) = \delta(\{1,4,9,16,\ldots\}) = 0$ dır. x dizisini de $x = y + z$ şeklinde yazabiliriz.

$\delta(\{n \in N : x_n \neq y_n\}) = 0$ olduğundan Teorem 3.12 ye göre $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir. $L_y \supseteq \Gamma_y$ olduğundan da $\Gamma_x \subseteq L_y$ dir.

Örnek 3.15: $x = (x_n), y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$ dizileri aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$x_n = \begin{cases} 6 & , k^2 = n \ , \quad k \in N \\ 1 & , k^2 \neq n \text{ ve n tek ise } , k \in N \\ 2 & , k^2 \neq n \text{ ve n çift ise } , k \in N \end{cases} ,$$

$$y_n = \begin{cases} 3 & , k^2 = n \ , \quad k \in N \\ 1 & , k^2 \neq n \text{ ve n tek ise } , k \in N \\ 2 & , k^2 \neq n \text{ ve n çift ise } , k \in N \end{cases} ,$$

$$z_n = \begin{cases} 0 & , k^2 \neq n \ , k \in N \\ 3 & , k^2 = n \ , k \in N \end{cases} .$$

Burada $\Gamma_x = \{1,2\}$, $\Gamma_y = \{1,2\}$, $L_y = \{1,2,3\}$, $x = y + z$ ve $\Gamma_x \subset L_y$ dir.

Sonuç 3.16: İstatistiksel yakınsak bir dizinin istatistiksel yığılma noktası dizinin istatistiksel limit noktasıdır (Tripathy, 1997).

İspat: $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel limit noktası L, istatistiksel yığılma noktası da a olsun. Biz $a \neq L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon < \left| \frac{a-L}{2} \right|$ alarak aşağıdaki kapsamayı yazabiliriz;

$$\{k \in N : | x_k - L | \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in N : | x_k - a | < \varepsilon\}.$$

Buradan yoğunluğa geçersek,

$$\delta(\{k \in N : | x_k - L | \geq \varepsilon\}) \geq \delta(\{k \in N : | x_k - a | < \varepsilon\}) \tag{4}$$

elde ederiz. (x_n) dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan,

$$\delta(\{k \in N : | x_k - L | \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır ve (4) den $\delta(\{k \in N : | x_k - a | < \varepsilon\}) = 0$ bulunur. Bu ise a nın istatistiksel yığılma noktası olmasıyla çelişir. O halde $L = a$ olmalıdır.

Klasik analizdeki yakınsak diziler için verilen teoremin istatistiksel benzerini aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz.

Teorem 3.17: $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ istatistiksel yakınsak diziler ve α, β skalerler olsunlar.

(i) $st - \lim(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot st - \lim x + \beta \cdot st - \lim y$,

(ii) $st - \lim(xy) = (st - \lim x)(st - \lim y)$,

(iii) $st - \lim x = st - \lim(Tx)$ her $k \in N$ için, $(Tx)_k = x_{k+1}$ dir (Connor, 1985).

Not 3.18: Sınırlı istatistiksel yakınsak dizileri bsc (bounded statistically convergent sequences) ile gösterelim. bsc, ℓ_∞ un kapalı altuzayıdır. lim, c yakınsak diziler üzerinde sınırlı lineer fonksiyonel olduğu gibi benzer şekilde $st - \lim$, bsc üzerinde sınırlı lineer fonksiyoneldir (Śalăt, 1980).

Teorem 3.19: Bir reel sayı dizisinin istatistiksel limiti varsa, tektir.
İspat: Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Bu dizi ℓ ve ℓ' gibi iki farklı değere istatistiksel yakınsak ve $0 < \varepsilon < \left|\frac{\ell - \ell'}{2}\right|$ olsun.

$$X = \{k \leq n : | x_k - \ell | \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu $x = (x_k)$, ℓ ye istatistiksel yakınsak olduğundan, $\delta(X) = 0$ dır. Ayrıca $x = (x_k)$, ℓ' ye istatistiksel yakınsak olduğundan,

$$Y = \{k \leq n : | x_k - \ell' | \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu $\delta(Y) = 0$ dır. Küme bağıntısından $Y' \subset X$ olduğundan $\delta(Y') \leq \delta(X)$ dır. Bu ise $1 \leq 0$ ı verir ki çelişki elde edilir. O halde $\ell \neq \ell'$ için çelişki elde edildi, $\ell = \ell'$ olmalıdır.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık ile altdiziler arasındaki bağıntıyı verecek bir yardımcı teorem vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.20: $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $st - \lim x_k = \ell$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = \ell$ olacak şekilde bir,

$$K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subseteq N$$

altkümesinin var olmasıdır (Šalǎt, 1980).

İspat: İlk olarak teoremin yeterliliği ispat edelim. $\varepsilon > 0$ keyfi bir sayı olsun. $x_{k_n} \to \ell$ $(n \to \infty)$ olduğundan $n > n_0$ için $| x_{k_n} - \ell |< \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in N$ seçebiliriz. A_ε kümesini,

$$A_\varepsilon = \{n \in N :| x_n - \ell |\geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlayalım. O zaman,

$$A_\varepsilon \subset N \backslash \{k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, \ldots\}$$

elde ederiz. Sağ taraftaki kümenin asimptotik yoğunluğu sıfır olduğundan,

$$\delta(A_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mid A_\varepsilon \mid = 0$$

dır. O halde x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi gerekliliği ispat edelim. $st - \lim x_k = \ell$ olsun. $j = 1, 2, \ldots$ için,

$$K_j = \{n \in N :| x_n - \ell |< \frac{1}{j}\}$$

tanımlayalım. İstatistiksel yakınsaklığın tanımından dolayı $j = 1, 2, \ldots$ için $\delta(K_j) = 1$ dir. K_j $(j = 1, 2, \ldots)$ nin tanımından,

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots K_j \supset K_{j+1} \supset \ldots \tag{5}$$

dir, ayrıca $j = 1, 2, \ldots$ için $\delta(K_j) = 1$ dir.

Keyfi bir $v_1 \in K_1$ seçelim. Her bir $n > v_2$, $v_2 \in K_2$ için $\frac{K_2(n)}{n} > \frac{1}{2}$ olacak şekilde bir $v_2 > v_1$ vardır. Böyle devam ederek $\delta(K_j) = 1$ olduğundan herbir $n \geq v_3$, $v_3 \in K_3$ için $\frac{K_3(n)}{n} > \frac{2}{3}$ olacak şekilde bir $v_3 > v_2$ vardır. Böylece indirgeme yöntemiyle pozitif tamsayıların

$$v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_j < \ldots$$

dizisini herbir $n \geq v_j$, $v_j \in K_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ için,

$$\frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j} \tag{6}$$

olacak şekilde inşa edebiliriz.

Böylece K yı şöyle inşa edebiliriz; $(1, v_1)$ aralığının herbir doğal sayısı K ya aittir, daha ileri (v_j, v_{j+1}) aralığındaki herhangi bir doğal sayının K ya ait olması için gerek ve yeter koşul K_j $(j = 1, 2, \ldots)$ ye ait olmasıdır. (5) ve (6) ya göre $v_j \leq n \leq v_{j+1}$ deki herbir n için,

$$\frac{K(n)}{n} \geq \frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j}$$

olduğundan $\delta(K) = 1$ dir. $\Big(K = \big((1, v_1) \cap N\big) \cup \big((v_1, v_2) \cap K_2\big) \cup \big((v_2, v_3) \cap K_3\big) \cup \ldots\Big)$

$\varepsilon > 0$ olsun. $\frac{1}{j} < \varepsilon$ olacak şekilde bir j seçelim. $n \geq v_j$, $n \in K$ olsun. O zaman $v_m \leq n < v_{m+1}$ olacak bir $m \geq j$ sayısı vardır. Fakat K nın tanımına göre, $n \in K_m$ dir. O halde

$$| x_n - \ell | < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$$

dur. Böylece, herbir $n \geq v_j$, $n \in K$ için $| x_n - \ell | < \varepsilon$, yani,

$$\lim x_k = \ell$$

ifadesini elde ederiz.

Bu bölümün geri kalan kısmında klasik analizdeki bazı sonuçların istatistiksel yakınsaklığa uyarlanmasına ilişkin bazı teorem ve sonuçlar vereceğiz.

Teorem 3.21: Her $n \in K \subset N$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$, $\delta(K) = 1$ ve $st - \lim x_n = st - \lim z_n = L$ olsun. O zaman $st - \lim y_n = L$ dir (Tripathy, 1997).

İspat: $st - \lim x_n = L$ ise $A = \{k \in N : | x_k - L | \geq \varepsilon\}$ için $\delta(A) = 0$ dır. Benzer şekilde $st - \lim z_n = L$ ise $B = \{k \in N : | z_k - L | \geq \varepsilon\}$ için $\delta(B) = 0$ dır. O zaman

$$\{k \in N : | y_k - L | \geq \varepsilon\} \subseteq A \cup B \cup K^c$$

dir. Dolayısıyla $\delta(\{k \in N : | y_k - L | \geq \varepsilon\}) = 0$ olduğundan $st - \lim y_n = L$ dir.

Teorem 3.22: $\delta(K) = 1$ olmak üzere $n \in K \subset N$ için $x_n \leq y_n$ olsun. Eğer $st - \lim x_n$ ve $st - \lim y_n$ mevcut ise o zaman $st - \lim x_n \leq st - \lim y_n$ dir (Tripathy, 1997).

İspat: $st-\lim x_n = L_1$, $st-\lim y_n = L_2$ olsun. $\delta(K)=1$ olmak üzere her $n \in K \subset N$ için $x_n \leq y_n$ olsun. $L_1 > L_2$ olduğunu kabul edelim. $\frac{L_1-L_2}{2} > \varepsilon$ seçersek,

$$K \cap \{k :| x_k - L_1 |\geq \varepsilon\} \supseteq \{k :| y_k - L_2 |\geq \varepsilon\} \cap K \tag{7}$$

yazabiliriz. $\delta(\{k :| y_k - L_2 |< \varepsilon\}) = 1$, $\delta(K)=1$ olduğundan,

$$\delta(\{k :| y_k - L_2 |< \varepsilon\} \cap K) = 1$$

dir. (7) ifadesinde sol tarafın yoğunluğu 1 dir. Bu ise $st-\lim x_n = L_1$ ifadesiyle çelişir. O halde $L_1 \leq L_2$ olmak zorundadır.

Teorem 3.23: Her $n \in K \subset N$ için $x_n > 0$, $\delta(K)=1$ ve her $n \in N$ için $x_n \neq 0$ olsun. O zaman $st-\lim x_n = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $st-\lim \frac{1}{x_n} = 0$ olmasıdır (Tripathy, 1997).

Teorem 3.24: $x=(x_k)$ reel sayı dizisi L ye istatistiksel yakınsak olsun.

$$\delta\left(\{k \in N : x_k < a, \quad x_k > b, \quad a,b \in R\}\right) = 0$$

ise L, $[a,b]$ aralığındadır.

İspat: $st-\lim x_k = L$ ve $x=(x_k)$ dizisi $[a,b]$ aralığında olsun.

i) İlk olarak $a \leq L$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $a > L$ olsun. (x_k) dizisi L ye istatistiksel yakınsak olduğundan $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{k \in N :| x_k - L |\geq \varepsilon\}) = 0$$

yazabiliriz. $0 < \varepsilon < a - L$ olmak üzere,

$$\{k \in N : x_k < a\} \supseteq \{k \in N :| x_k - L |< \varepsilon\}$$

dır. Buradan yoğunluğa geçersek,

$$\delta(\{k \in N : x_k < a\}) \geq \delta(\{k \in N :| x_k - L |< \varepsilon\}) \neq 0$$

yani $\delta(\{k \in N : x_k < a\}) \neq 0$ buluruz ki bu çelişkidir. O halde $a \leq L$ olmalıdır.

ii) Benzer şekilde işlemler yaptığımızda $b \geq L$ olduğunu elde ederiz.

(i) ve (ii) den ise $a \leq L \leq b$ buluruz.

Örnek 3.25: $x = (x_n)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , k^2 \neq n \ , \quad k \in N \\ n & , k^2 = n \ , \quad k \in N \end{cases} .$$

Burada $st - \lim x_n = 0$ ve

$$\delta(\{n \in N : x_n < a, \quad x_n > b, \quad a, b \in R \ \ (a = 0, b = \frac{1}{2})\} = 0$$

dır. Diğer taraftan $L = 0$ dır ve $L \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alınabilir. Burada $a = 0$ ve $b = \frac{1}{2}$ dir.

Teorem 3.26: $x = (x_n)$ reel sayı dizisi verilsin. $st - \lim x_n = L$ olması için gerek ve yeter koşul $st - \lim x_{2n} = L$ ve $st - \lim x_{2n-1} = L$ olmasıdır.

İspat: $\varepsilon > 0$ için,

$$A = \{n \in N :\mid x_{2n} - L \mid \geq \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad B = \{n \in N :\mid x_{2n-1} - L \mid \geq \varepsilon\}$$

diyelim. Burada $A \cap B = \emptyset$ ve

$$\{n \in N :\mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\} = A \cup B \tag{8}$$

dir.

Şimdi teoremin gerekliliğini ispatlayalım. $st - \lim x_n = L$ ise,

$$\delta(\{n \in N :\mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\}) = 0$$

dır ve (8) den $\delta(A \cup B) = 0$ yazabiliriz. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $\delta(A \cup B) = \delta(A) + \delta(B) = 0$ ve yoğunluğun tanımından $\delta(A) = \delta(B) = 0$ olmalıdır. Bu ise bize $st - \lim x_{2n} = L$ ve $st - \lim x_{2n-1} = L$ olduğunu verir.

Şimdi de yeterliliğini ispatlayalım. $st - \lim x_{2n} = L$ ve $st - \lim x_{2n-1} = L$ olsun. Bu durumda $\delta(A) = \delta(B) = 0$ olur. Buradan $\delta(A \cup B) = 0$ dır. (8) den $\delta(\{n \in N :\mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\}) = 0$ olur bu ise $st - \lim x_n = L$ demektir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.27: $x = (x_n)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$x_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n} & , k^2 \neq n \ , \quad k \in N \\ n & , k^2 = n \ , \quad k \in N \end{cases} .$$

Özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{2}$ seçilirse,

$$\delta(\{n \in N :\mid x_n - 0 \mid\geq \frac{1}{2}\}) = \delta(\{1, 2, 4, 9, 16, \ldots\}) = 0$$

dır. Bu ise $st - \lim x_n = 0$ demektir. Çift indisler için bakılırsa,

$$\delta(\{n \in N :\mid x_{2n} - 0 \mid\geq \frac{1}{2}\}) = \delta(\{2, 4, 16, 36, 64, \ldots\}) = 0$$

bulunur. Bu ise $st - \lim x_{2n} = 0$ demektir. Tek indisler için bakıldığında da,

$$\delta(\{n \in N :\mid x_{2n-1} - 0 \mid\geq \frac{1}{2}\}) = \delta(\{1, 9, 25, 49, 81, \ldots\}) = 0$$

bulunur. Bu ise $st - \lim x_n = 0$ demektir.

Önerme 3.28: $x = (x_n)$ reel sayı dizisi verilsin.

i) Eğer $st - \lim x_n = L$ ise $st - \lim \mid x_n \mid = \mid L \mid$ dir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

ii) $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel sıfır dizisi olması için gerek ve yeter koşul $(\mid x_n \mid)$ dizisinin istatistiksel sıfır dizisi olmasıdır (Tripathy, 1997).

Şimdi istatistiksel Cauchy dizisinin tanımını vereceğiz.

Tanım 3.29: (İstatistiksel Cauchy Dizisi) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \mid \{k \leq n :\mid x_k - x_N \mid\geq \varepsilon\} \mid= 0$$

olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi bir istatistiksel Cauchy dizisidir denir. Bu ifade, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için,

$$\mid x_k - x_N \mid< \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır şeklinde de yazılabilir (Fridy, 1985).

İstatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizilerinin denkliğini göstermek için üçüncü bir ifadeyi kullanmak yararlı olacak. Şimdi bununla ilgili teoremi verelim.

Teorem 3.30: (Cauchy Yakınsaklık Kriteri) Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) x istatistiksel yakınsak bir dizidir;

(ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir;

(iii) x dizisi verilsin. Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy, 1985).

4. İSTATİSTİKSEL MONOTONLUK VE İSTATİSTİKSEL SINIRLILIK

Bu bölümde, istatistiksel monotonluk ve sınırlılık kavramları incelenerek bu kavramların klasik analizde kullanıldığı monoton yakınsaklık teoremi ve ayrıca Bolzano-Weierstrass teoreminin benzeri istatistiksel yakınsak diziler için verilmiştir. İlk olarak istatistiksel monotonluk kavramını aşağıdaki şekilde tanımlayacağız.

Tanım 4.1: $x = (x_n)$ dizisi verilsin. (x_{k_n}) monoton artan ve $\delta(K) = 1$ olacak şekilde

$$K = \{k_1 < k_2 < \ldots\} \subseteq N,$$

altkümesi varsa (x_n) reel sayı dizisine istatistiksel monoton artandır (s.m.i) denir. Benzer şekilde istatistiksel monoton azalma (s.m.d.) da tanımlanabilir (Tripathy, 1997).

Üçüncü bölümde verdiğimiz Ayrışım teoreminin monoton diziler için bir benzerini aşağıdaki formda verebiliriz.

Teorem 4.2: Bir $x = (x_k)$ reel sayı dizisinin istatistiksel monoton artan (veya azalan) olması için gerek ve yeter koşul x dizisinin $(x_k) = (y_k) + (z_k)$ olacak şekilde $\delta(\{k \in N : z_k \neq 0\}) = 0$ ve $y = (y_k)$ monoton artan (veya azalan) dizilerinin toplamı şeklinde yazılabilmesidir. Eğer (y_k) sınırlı ise (x_k) istatistiksel yakınsaktır ve $st-\lim_k x_k = \lim_k y_k$ dır (Tripathy, 1997).

İspat: $x = (x_k)$ monoton artan bir dizi olsun. Tanım 4.1. den,

$$K = \{k \in N : x_k \leq x_{k+1}\}$$

için $\delta(K) = 1$ yazabiliriz. $q = \min\{k \in K,\ k \geq n\}$ olmak üzere (y_n) ve (z_n) dizileri $y_n = x_q$ ve $z_n = x_n - x_q$ şeklinde inşa edilsin. Bu halde $(x_k) = (y_k) + (z_k)$, (y_k) monoton artan ve $\delta(\{k \in N : z_k \neq 0\}) = 0$ dır. Ayrıca (y_k) sınırlı olduğundan yakınsak dolayısıyla (x_k) da aynı değere istatistiksel yakınsaktır.

Not 4.3: Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi teoremin koşullarından yalnızca (z_k) nın istatistiksel sıfır dizisi olarak kabul edilmesi halinde teorem doğru değildir.

$z_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N$ ve $y_n = 0$ alalım. Buradan görülür ki, (x_n) reel dizisi istatistiksel monoton artan(veya azalan) değildir.

$z_n = (-\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots)$, $y_n = 0$ olduğundan $x_n = y_n + z_n$ ve $x_n = z_n$ dir.

$x_{2k-1} = (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \ldots\}$ alınırsa $K = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ ve dolayısıyla $\delta(K) = \frac{1}{2}$ elde edilir. Halbuki $\delta(K) = 1$ olmalıydı (Tripathy, 1997).

Tanım 4.4: $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için,

$$\delta(\{n \in N : \mid x_n \mid > A\}) = 0$$

olacak şekilde en az bir sonlu $A > 0$ reel sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır denir (Orhan ve Fridy, 1997).

Teorem 4.5: $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri istatistiksel sınırlı ise xy çarpım dizisi de istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri istatistiksel sınırlı olsun. En az bir $A \geq 1$ ve en az bir $B \geq 1$ var $\ni$ $\delta\{n \in N : |x_n| > A\} = 0$ ve $\delta\{n \in N : |y_n| > B\} = 0$ dır. Doğal sayılar kümesinde,

$$\{n \in N : |x_n y_n| > A \cdot B\} \subseteq \{n \in N : |x_n| > A\} \cup \{n \in N : |y_n| > B\}$$

kapsamasını yazabiliriz ve yoğunluğa geçersek,

$$\delta(\{n \in N : |x_n y_n| > A \cdot B\}) \leq \delta(\{n \in N : |x_n| > A\}) + \delta(\{n \in N : |y_n| > B\})$$

dir. Buradan $A,\ B \geq 1$ için $\delta(\{n \in N : |x_n y_n| > A \cdot B\}) = 0$ elde edilir ki bu ise xy dizisinin istatistiksel sınırlılığını verir.

Örnek 4.6: $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizilerini

$$x_n = \begin{cases} n & , k^2 = n \ , k \in N \\ 0 & , k^2 \neq n \ , k \in N \end{cases} .$$

$$y_n = \begin{cases} n & , k^2 + 1 = n \ , k \in N \\ 1 & , k^2 + 1 \neq n \ , k \in N \end{cases} .$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$ için $\delta(\{n \in N : |x_n| > A\}) = \delta\{1, 4, 9, 16, 25, ...\} = 0$ ve $\delta(\{n \in N : |y_n| > B\}) = \delta(\{2, 5, 10, 17, 26, ...\}) = 0$ dır, yani $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri istatistiksel sınırlıdır. Aynı zamanda $\delta(\{n \in N : |x_n y_n| > A \cdot B\}) = 0$ olduğundan çarpım dizisi de istatistiksel sınırlıdır.

Şimdi klasik analizin, monoton yakınsaklık teoreminin benzerini istatistiksel yakınsak diziler için vereceğiz.

Teorem 4.7: Bir istatistiksel monoton dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul dizinin istatistiksel sınırlı olmasıdır (Tripathy, 1998).

İspat: İlk olarak teoremin gerekliliğini ispatlayalım. (x_n) istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(\{k \in N :| x_k - L |\geq \varepsilon\}) = 0$ yazabiliriz. Bu halde

$$\delta(\{k \in N : L - \varepsilon \leq x_k \leq L + \varepsilon\}) = 0$$

dır. Bu ise bize (x_k) dizisinin istatistiksel sınırlı olduğunu verir.

Şimdi (x_n) dizisi istatistiksel monoton ve istatistiksel sınırlı ise bu dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu gösterelim. Teorem 4.2. ye göre (x_n) dizisi

$$x = y + z$$

gösterimine sahiptir. Eğer biz (y_n) dizisinin adi anlamda sınırlı olduğunu gösterirsek (y_n) dizisi monoton artan ve sınırlı olduğundan adi anlamda yakınsak olacaktır. Aynı zamanda (z_n) de bir istatistiksel sıfır dizisi olduğundan $x = y + z$ de istatistiksel yakınsak olacaktır.

Şimdi (y_n) in sınırlı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki (y_n) dizisi sınırsız, yani $\delta(\{n \in N :| y_n |> A\}) = 1$ olsun.

$$\{n \in N :| y_n |> A\} \subseteq \{n \in N :| x_n |> A\}$$

dır ve yoğunluğa geçersek,

$$1 = \delta(\{n \in N :| y_n |> A\}) \leq \delta(\{n \in N :| x_n |> A\})$$

olduğundan $\delta(\{n \in N :| x_n |> A\}) = 1$ buluruz ki bu (x_n) dizisinin istatistiksel sınırlı olmadığını gösterir. Bu ise çelişkidir. O halde (y_n) dizisi yakınsaktır. Her yakınsak dizi istatistiksel yakınsak olacağından $st - \lim y_n = L$ diyelim. Şimdi ise $st - \lim x_n = L$ olduğunu göstereceğiz. $\{n :| x_n - L |< \varepsilon\}$ kümesi,

$$\{n :| x_n - L |< \varepsilon, x_n = y_n, z_n = 0\} \cup \{n :| x_n - L |< \varepsilon, x_n \neq y_n, z_n \neq 0\}$$

birleşimine eşit olduğundan,

$$\{n :| x_n - L |< \varepsilon\} = \{n :| y_n - L |< \varepsilon,\ z_n = 0\} \cup \{n : z_n \neq 0\}$$

ve

$$\delta(\{n :| x_n - L |< \varepsilon\}) = \delta(\{n :| x_n - L |< \varepsilon,\ z_n = 0\}) + \delta(\{n : z_n \neq 0\})$$

dır. Burada $\delta(\{n :| x_n - L |< \varepsilon\}) = 1$ olduğundan, $\delta(\{n :| x_n - L |\geq \varepsilon\}) = 0$ dır. Bu ise bize (x_n) dizisinin L ye istatistiksel yakınsak olduğunu verir.

Şimdi yukarıdaki teoremin bir başka ifadesini vereceğiz.

Teorem 4.8: Bir istatistiksel monoton dizinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul dizinin sadece bir tane istatistiksel yığılma noktasına sahip olmasıdır (Tripathy, 1998).

İspat: İlk olarak teoremin gerekliliğini ispatlayalım. (x_n) dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta(\{n :| x_n - L |\geq \varepsilon\}) = 0$ yazabiliriz.

Kabul edelim ki (x_n) dizisinin a ve b gibi iki tane istatistiksel yığılma noktası $a \neq b$ şeklinde olsun. $\varepsilon <| \frac{b-a}{4} |$ için en az bir $\delta > 0$ vardır ki ya,

(i) $(L - \delta, L + \delta) \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

ya da,

(ii) $(L - \delta, L + \delta) \subset (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$

durumlarından birisi vardır.

Şayet (i) durumu varsa $\varepsilon <| \frac{b-a}{4} |$ ve en az bir $\delta > 0$ için,

$$\{n :| x_n - L |\geq \delta\} \supseteq \{n :| x_n - b |< \varepsilon\},$$

dır ve yoğunluğa geçersek,

$$\delta(\{n :| x_n - L |\geq \delta\}) \geq \delta(\{n :| x_n - b |< \varepsilon\}) \neq 0$$

dır. Buradan $\delta(\{n :| x_n - L |\geq \delta\}) \neq 0$ elde edilir. Bu ise (x_n) in istatistiksel yakınsaklığı ile çelişir.

Şayet (ii) durumu varsa benzer şekilde işlemler yapıldığında yine çelişki elde edilir. O halde (x_n) dizisi istatistiksel yakınsak ise sadece bir tane istatistiksel yığılma noktası vardır.

Yeterliliğini ispatlamak için (x_n) monoton artan bir dizi ve istatistiksel yığılma noktası a olsun. (x_n) dizisinin istatistiksel yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu halde üç durum söz konusudur;

(i) $st - \lim x_n = \infty$,

(ii) $st - \lim x_n = -\infty$,

(iii) (x_n) sınırlı olabilir ve L_1, L_2 gibi iki tane istatistiksel limiti olabilir.

Eğer (i) durumu varsa en az bir Q reel sayısı vardır ve $\delta(\{n \in N : x_n > Q\}) = 1$ dır. Özel olarak $Q = a + \varepsilon$ için $\delta(\{n \in N : x_n > a + \varepsilon\}) = 1$ dır ve tümleyeninden $\delta(\{n \in N : x_n \leq a + \varepsilon\}) = 0$ bulunur.

$$\{n \in N : x_n \leq a + \varepsilon\} \supseteq \{n \in N :| x_n - a |< \varepsilon\},$$

olduğundan,

$$\delta(\{n \in N : x_n \leq a + \varepsilon\}) \geq \delta(\{n \in N :| x_n - a |< \varepsilon\})$$

elde edilir. Buradan da $\delta(\{n \in N :| x_n - a |< \varepsilon\}) = 0$ bulunur ki bu da a nın istatistiksel yığılma noktası olmasıyla çelişir.

Eğer (ii) durumu varsa benzer şekilde işlemler yapılarak çelişki elde edilir.

Eğer (iii) durumu varsa (x_n) dizisi istatistiksel sınırlı olduğundan Teorem 4.7. ye göre (x_n) istatistiksel monoton artan ve sınırlı olduğundan (x_n) dizisi istatistiksel yakınsak olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.9: $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $st - \lim x_n = L$ ve $L \neq 0$ olsun. Eğer $\delta(\{n \in N : x_n = 0\}) = 0$ ise $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır.

İspat: Herhangi bir $x = (x_n)$ reel sayı dizisi için $st - \lim x_n = L \neq 0$ ve $L > \varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki kapsamayı yazabiliriz;

$$\{n \in N :| x_n - L |\geq \varepsilon\} \supseteq \{n \in N : x_n > L + \varepsilon\} = \{n \in N : \frac{1}{x_n} < \frac{1}{L + \varepsilon}\},$$

yoğunluğa geçerek,

$$\delta(\{n \in N : \mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\}) \geq \delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} < \frac{1}{L+\varepsilon}\})$$

bulunur. Buradan $\delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} < \frac{1}{L+\varepsilon}\}) = 0$ olur. $L \neq 0$ olduğundan $\frac{1}{L+\varepsilon} > -\infty$ olur. Biz $\frac{1}{L+\varepsilon} > -\infty$ için $\delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} < \frac{1}{L+\varepsilon}\}) = 0$ sonucunu bulduk. Bu sonuç bize $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisinin alttan istatistiksel sınırlı olduğunu verir.

Benzer şekilde $\varepsilon > 0$, $L > \varepsilon$ için,

$$\{n \in N : \mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\} \supseteq \{n \in N : x_n < L - \varepsilon\} = \{n \in N : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{L-\varepsilon}\}$$

dır, yoğunluğa geçersek,

$$\delta(\{n \in N : \mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\}) \geq \delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{L-\varepsilon}\})$$

bulunur. Buradan $\delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{L-\varepsilon}\}) = 0$ olur. $L \neq 0$ ve $L > \varepsilon$ olduğundan $\frac{1}{L-\varepsilon} < \infty$ olur. Biz $\frac{1}{L-\varepsilon} < \infty$ için $\delta(\{n \in N : \frac{1}{x_n} > \frac{1}{L-\varepsilon}\}) = 0$ sonucunu bulduk. Bu sonuç bize $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisinin üstten istatistiksel sınırlı olduğunu verir.

$x = (x_n)$ dizisi alttan ve üstten istatistiksel sınırlı olduğundan istatistiksel sınırlıdır diyebiliriz.

Örnek 4.10: $x = (x_n)$ dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$x_n = \begin{cases} 0 & , k^2 = n \ , \quad k \in N \\ \frac{1}{n} & , k^2 + 1 = n \ , \quad k \in N \\ 2 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases} .$$

Burada $st-\lim x_n = 2 \neq 0$, $\delta(\{n \in N : x_n = 0\}) = 0$ ve $\delta(\{n \in N : \mid \frac{1}{x_n} \mid > 1\}) = 0$ dır. Bu ise $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olduğunu verir.

Yardımcı Teorem 4.11: Eğer $x = (x_k)$ sayı dizisi sınırlı seyrek olmayan bir altdiziye sahipse o zaman $x = (x_k)$ dizisinin en az bir istatistiksel yığılma noktası vardır (Fridy, 1993).

İspat: $x = (x_k)$ reel sayı dizisi verilsin. Yardımcı Teorem 3.14 e göre bir y sayı dizisi $\delta(\{k \in N : y_k \neq x_k\}) = 0$ olacak şekilde vardır ve burada $L_y = \Gamma_x$ dir.

x dizisinin sınırlı seyrek olmayan bir altdizisi olduğundan y de sınırlı seyrek olmayan bir altdiziye sahiptir. Klasik analizdeki Bolzano-Weierstrass teoreminden y sınırlı bir altdiziye sahipse y nin limit noktası vardır yani $L_y \neq \emptyset$ dur. $L_y = \Gamma_x$ olduğundan da $\Gamma_x \neq \emptyset$ yazabiliriz. Bu ise x in bir istatistiksel yığılma noktasının var olduğunu gösterir.

İstatistiksel sınırlı diziler için Ayrışım teoremini aşağıdaki formda vereceğiz.

Teorem 4.12: $x = (x_k)$ reel sayıların istatistiksel sınırlı bir dizisi ise

$$x = y + z$$

olacak şekilde bir z istatistiksel sıfır dizisi ve sınırlı bir y dizisi vardır (Tripathy, 1997).

İspat: $x = (x_k)$ reel sayıların istatistiksel sınırlı bir dizisi olsun. Yeterince büyük $A > 0$ sayısı için $P = \{k \in N : | x_k | > A\}$ ve $\delta(P) = 0$ olsun. Şimdi y ve z dizileri aşağıdaki şekilde inşa edilsin;

$$y_n = \begin{cases} x_n & , n \in P^c \\ 0 & , n \notin P^c \end{cases},$$

$$z_n = \begin{cases} 0 & , n \in P^c \\ x_n & , n \notin P^c \end{cases}.$$

Burada $x = y + z$, y sınırlı bir dizi ve z istatistiksel sıfır dizisidir.

Önerme 4.13: Reel sayıların bir $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ olacak şekilde bir $K = \{k_1 < k_2 < \ldots\} \subseteq N$ kümesinin var olmasıdır. Burada $(x_{k_n}) \in l_\infty$ dur (Šalǎt, 1980).

Teorem 4.14: Reel sayıların herbir istatistiksel sınırlı dizisi yakınsak bir altdiziye sahiptir (Tripathy, 1997).

İspat: Reel sayıların bir $x = (x_k)$ istatistiksel sınırlı dizisi verilsin. Önerme 4.13 den $K = \{k_1 < k_2 < \ldots\}$ kümesi $\delta(K) = 1$ olacak şekilde vardır ve $(x_{k_n}) \in l_\infty$ dur. Sınırlı her dizi yakınsak bir altdizi bulunduracağından (x_{k_n}) in de bir (y_n) gibi altdizisi vardır ve bu dizi yakınsaktır.

Teorem 4.15: Reel sayıların istatistiksel sınırlı bir dizisi sadece bir tane istatistiksel yığılma noktasına sahipse istatistiksel yakınsaktır (Tripathy, 1997).

5. İSTATİSTİKSEL LİMİT İNFİMUM VE SUPREMUM

Bu bölümde bir reel sayı dizisi için istatistiksel limit infimum ve supremum kavramları ve bunlarla ilgili teoremler verilmiştir (Fridy ve Orhan, 1997). İlk olarak istatistiksel limit infimum ve supremum kavramlarını tanımlayacağız.

Tanım 5.1: Herhangi bir x reel sayı dizisi için A_x kümesi,

$$A_x = \{a \in R : \delta(\{k : x_k < a\}) \neq 0\}$$

olmak üzere istatistiksel limit infimum,

$$st - \liminf x = \begin{cases} \inf A_x & , A_x \neq \phi \\ +\infty & , A_x = \phi \end{cases}$$

şeklide tanımlanır (Fridy ve Orhan, 1997).

Benzer şekilde istatistiksel limit supremum tanımını da aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 5.2: Herhangi bir x reel sayı dizisi için B_x kümesi

$$B_x = \{b \in R : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\}$$

olmak üzere istatistiksel limit supremum

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , B_x \neq \phi \\ -\infty & , B_x = \phi \end{cases}$$

şekilde tanımlanır (Fridy ve Orhan, 1997).

Bu kavramların klasik analizdeki limit infimum ve supremum kavramlarından farklı olduğunu aşağıdaki örnek bize verir.

Örnek 5.3: x reel sayı dizisi,

$$x_k = \begin{cases} k & , k \text{ tek kare ise} \\ 2 & , k \text{ çift kare ise} \\ 1 & , k \text{ tek kare değilse} \\ 0 & , k \text{ çift kare değilse} \end{cases},$$

şeklinde tanımlansın. Bu dizi üstten sınırlı değildir, fakat sınırsız olduğu indekslerin yoğunluğu sıfır olduğundan dolayı istatistiksel sınırlıdır. Bu dizi için $B_x = \{(-\infty, 1)\}$ ve $A_x = \{(0, \infty)\}$ dur. Tanım 5.1 ve Tanım 5.2 ye göre,

$$\begin{aligned} st-\limsup x &= \sup B_x = 1 \\ st-\liminf x &= \inf A_x = 0 \end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda x dizisinin 0 a ve 1 e yakınsayan seyrek olmayan iki altdizisi olduğundan istatistiksel yakınsak değildir.

x dizisinin yığılma noktalarının kümesi $\Gamma_x = \{0, 1\}$ dir. Burada dizinin en büyük istatistiksel yığılma noktası istatistiksel limit supremuma, en küçük istatistiksel yığılma noktası da istatistiksel limit infimuma eşittir (Fridy ve Orhan, 1997).

Teorem 5.4: x bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $st-\limsup x = \beta$ sonlu ise $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k : x_k > \beta - \varepsilon\}\right) \neq 0 \text{ ve } \delta\left(\{k : x_k > \beta + \varepsilon\}\right) = 0 \tag{9}$$

dır. Tersine $\forall\varepsilon > 0$ için (9) koşulu gerçeklenirse $st-\limsup x = \beta$ sonludur (Fridy ve Orhan, 1997).

Şimdi de benzer teoremi istatistiksel limit infimum için verebiliriz.

Teorem 5.5: x bir reel sayı dizisi olsun. Eğer $st-\liminf x = \alpha$ sonlu ise $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k : x_k < \alpha - \varepsilon\}\right) = 0 \text{ ve } \delta\left(\{k : x_k < \alpha + \varepsilon\}\right) \neq 0 \tag{10}$$

dır. Tersine $\forall\varepsilon > 0$ için (10) koşulu gerçeklenirse $st-\liminf x = \alpha$ sonludur (Fridy ve Orhan, 1997).

Herhangi bir x sayı dizisi için Tanım 3.10., Teorem 5.4 ve Teorem 5.5 e göre $st-\liminf x$ in en küçük istatistiksel yığılma noktası ve $st-\limsup x$ in en büyük istatistiksel yığılma noktası olduğu söylenebilir, yani

$$\max\Gamma_x = st-\limsup x \text{ ve } \min\Gamma_x = st-\liminf x$$

dir.

Şimdi, bu teoremlerden yararlanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 5.6: Herhangi iki x ve y dizileri için $\delta\{k : x_k \neq y_k\} = 0$ ise

i) $st - \limsup x = st - \limsup y$,

ii) $st - \liminf x = st - \liminf y$

dir.

İspat: Biz sadece (i) şıkkını ispatlayacağız. Benzer şekilde işlemler yapılarak (ii) şıkkı da ispatlanabilir. İspatı üç durum için yapacağız. $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ olduğunu kabul edelim.

(a) $st - \limsup x = \beta_1$ ve $st - \limsup y = \beta_2$ olsun. Teorem 5.4. den $st{-}\limsup x = \beta_1$ sonlu olduğundan $\delta(\{k : x_k > \beta_1 - \varepsilon\}) \neq 0$ ve $\delta(\{k : x_k > \beta_1 + \varepsilon\}) = 0$ dır. Buradan $\delta(\{k : |x_k - \beta_1| < \varepsilon\}) \neq 0$ olur ki bu da $\beta_1 \in \Gamma_x$ olduğunu verir. $\delta(\{k : x_k > \beta_1 + \varepsilon\}) = 0$ olduğundan $\forall t > \beta_1$ için $\delta(\{k : |x_k - t| < \varepsilon\}) = 0$ dır. Yani $\beta_1 = \max \Gamma_x$ dir.

Benzer şekilde işlemler yapıldığında $\beta_2 = \max \Gamma_y$ bulunur.Teorem 3.12. de $\Gamma_x = \Gamma_y$ olduğundan $\beta_1 = \max \Gamma_x = \max \Gamma_y = \beta_2$ dir.

(b) $\beta_1 = -\infty$ olsun. Tanım 5.2. den $B_x = \{b \in R : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\} = \phi$ dur. $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ olduğundan $B_y = \{b \in R : \delta(\{k : y_k > b\}) \neq 0\} = \phi$ ve Tanım 5.2 den $\beta_2 = -\infty$ olur.

(c) $\beta_1 = \infty$ olsun. Tanım 5.2. den $c \in R$ için,

$$B_x = \{b \in R : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\} = (c, \infty)$$

dur. En az bir $b \in R$ var $\ni \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0$ ve $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ olduğundan $\delta(\{k : y_k > b\}) \neq 0$ dır. Böylece $B_y = \{b \in R : \delta(\{k : y_k > b\}) \neq 0\} = (c, \infty)$ ve $\beta_2 = \infty$ olur.

Örnek 5.7: x ve y dizileri,

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{2k}{k+1} & , k \text{ tam kare ise} \\ (-1)^k \frac{k}{k+1} & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ve

$$y_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{3k}{k+1} & , k \text{ tam kare ise} \\ (-1)^k \frac{k}{k+1} & , \text{diğer yerlerde} \end{cases} ,$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\delta\left(\{k : x_k \neq y_k\}\right) = \delta\left(\{1, 4, 9, ...\}\right) = 0$ ve

$$st - \limsup x = st - \limsup y = 1, \quad st - \liminf x = st - \liminf y = -1$$

dir. Ayrıca bu dizi için $\limsup x = 2$, $\limsup y = 3$, $\liminf x = -2$ ve $\liminf y = -3$ dür.

Teorem 5.8: Herhangi bir x dizisi için,

$$st - \liminf x \leq st - \limsup x$$

dir (Fridy ve Orhan, 1997).

İspat: İspatı üç durum için yapacağız.

(i) $st - \limsup x = -\infty$ olsun. Tanım 5.2. den,

$$B_x = \{b \in R : \delta(\{k : x_k > b\}) \neq 0\} = \phi$$

dur. $\forall b \in R$ için $\delta\left(\{k : x_k > b\}\right) = 0$ olduğundan $\delta\left(\{k : x_k \leq b\}\right) = 1$ yazabiliriz. Aynı zamanda $\forall b \in R$ için,

$$A_x = \{b \in R : \delta(\{k : x_k < b\}) = 1\} = R$$

dir. Tanım 5.1. den $st - \liminf x = -\infty$ buluruz.

(ii) $st - \limsup x = \infty$ olsun. $st - \liminf x \leq \infty$ olacağından bu durumda da eşitsizlik sağlanır.

(iii) $st - \limsup x = \beta$ sonlu olsun. $st - \liminf x = \alpha$ diyelim. Biz $\alpha \leq \beta$ veya yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 5.4 den dolayı β sonlu olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta\left(\left\{k : x_k > \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$ yazabiliriz. Tümleyenini alırsak, $\delta\left(\left\{k : x_k \leq \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 1$ ve $\delta\left(\{k : x_k \leq \beta + \varepsilon\}\right) = 1$ dir. A_x kümesinin tanımından $\beta + \varepsilon \in A_x$ yazarız. Aynı zamanda $\alpha = \inf A_x$ olduğundan $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ dur. ε keyfi olduğundan dolayı $\alpha \leq \beta$ yazabiliriz.

İstatistiksel limit infimum ve supremum kavramlarıyla klasik analizdeki limit infimum ve supremum kavramlarını karşılaştırırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 5.9: Herhangi bir x dizisi için,

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x$$

dir (Fridy ve Orhan, 1997).

Sonucun ispatı Teorem 5.8., Tanım 5.1. ve Tanım 5.2. den açıktır. Şimdi bu eşitsizliklerin gerçeklendiği bir örnek verebiliriz.

Örnek 5.10: x sayı dizisi,

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k \frac{3k}{k+1} & , k \text{ kare ise} \\ (-1)^k \frac{k}{k+1} & , \text{diğer hallerde} \end{cases},$$

şeklinde tanımlansın. $A_x = (-1, \infty)$ ve $B_x = (-\infty, 1)$ dir. Buradan $st - \limsup x = \sup B_x = 1$ ve $st - \liminf x = \inf A_x = -1$ bulunur. x dizisinin limit infimum ve supremumu da sırasıyla -3 ve 3 dür.

Aşağıdaki Örnek 5.11 de bir dizinin en büyük istatistiksel limit noktasının her zaman istatistiksel limit supremuma eşit olamayacağı ve Örnek 5.12 de en küçük istatistiksel limit noktasının her zaman istatistiksel limit infimuma eşit olamayacağı gösterilmiştir.

Örnek 5.11: $u = (0, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1, ...)$ dizisi Örnek 3.12. deki gibi düzgün dağılımlı bir dizi olsun. Bu dizide $\Lambda_u = \phi$, $\Gamma_u = [0, 1]$ ve herbir aralığa düşen dizinin terimlerinin yoğunluğunun aralığın boyuna eşit olduğu Örnek 3.12 de belirtilmişti. x dizisi de $x_{2k-1} = 0$, $x_{2k} = u_k$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\Lambda_x = \{0\}$, $\Gamma_x = [0, 1]$ ve $\delta(\{k : x_k > 1 - \varepsilon\}) = \frac{\varepsilon}{2}$ dir. B_x kümesi $(-\infty, 1)$ aralığına ve istatistiksel limit supremumu 1 e eşit olduğu halde dizinin en büyük istatistiksel limit noktası 0 dır (Fridy ve Orhan, 1997).

Örnek 5.12: u dizisi Örnek 3.12. de tanımlandığı gibi düzgün dağılımlı bir dizi olsun. x dizisi $x_{2k-1} = 1$, $x_{2k} = u_k$ şeklinde tanımlansın. Bu dizi için $\Lambda_x = \{1\}$, $\Gamma_x = [0, 1]$ ve $\delta(\{k : x_k > 1 - \varepsilon\}) = \frac{\varepsilon+1}{2}$ dir. A_x kümesi $(0, \infty)$ aralığına ve istatistiksel limit infimumu 0 a eşit olduğu halde dizinin en küçük istatistiksel limit noktası 1 dir.

İstatistiksel yakınsaklığın diğer bir tanımı aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 5.13: İstatistiksel sınırlı bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$st - \limsup x = st - \liminf x$$

olmasıdır (Fridy ve Orhan, 1997).

İspat: İlk önce teoremin gerekliliğini ispatlayalım. x dizisi istatistiksel sınırlı ve istatistiksel yakınsak olsun. $\alpha = st - \liminf x$ ve $\beta = st - \limsup x$ diyelim. x dizisi istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta \{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$ dır.

$\delta (\{k : x_k > L + \varepsilon\}) = 0$ ve Tanım 5.2 den $\beta \leq L$ dir.

$\delta (\{k : x_k < L - \varepsilon\}) = 0$ ve Tanım 5.1 den $L \leq \alpha$ dir.

Teorem 5.8 den de $\alpha \leq \beta$ olduğundan $L = \alpha = \beta$ dır.

Şimdi de teoremin yeterliliğini ispatlayalım. $L = \alpha = \beta$ olsun. Biz $st - \lim x = L$ olduğunu göstereceğiz. α ve β sonlu olduğundan Teorem 5.4. ve Teorem 5.5 e göre $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta \left(\left\{k : x_k > L + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = \delta \left(\left\{k : x_k < L - \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$ dır. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta \left(\left\{k : |x_k - L| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0$ yazabiliriz. Bu da ispatı tamamlar.

6. KAYNAKLAR

Buck, R.C., 1953, Generalized asymptotic density, Amer. J. Math., 75, 335.

Connor, J.S., 1985, Some applications of functional analysis to summability theory, Ph. D., Kent State University.

Connor, J.S., 1988, The statistical and strong P-Cesáro convergence of sequences, Analysis, 8, 47.

Fast, H., 1951, Sur la convergence statistique, Collog. Math., 2, 241.

Freedman A.R., Sember I.J., 1981, Densities and summability, Pacific J. Math., 95, 293-305.

Fridy, J.A., 1985, On statistical convergence, Analysis, 5, 301.

Fridy, J.A., 1993, Statistical limit point, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1187.

Fridy, J.A., Orhan C., 1997, Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625.

Kolk, E., 1991, The statistical convergence in Banach spaces, Acta et Comentationes Universitaties Tartuensis, 928, 41.

Kostyrko, P., Mağaj, M., Śalăt, T., Strauch, O., 2001, On statistical limit points, Proc. Amer. Math. Soc., 129, 2505.

Kupers, L., Neiderreiter, M., 1974, Uniform Distribution of Sequences, Wiley, New york.

Maddox, I.J., 1988, Statistical convergence in a locally convex sequence space, Math. Proc. Camp. Phil. Soc., 104, 141.

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991, An Introduction to the Theory of Numbers, fifty edition, Wiley.

Pehlivan, S., Mamedov, M., 2000, Statistical cluster point and turnpike, Optimization, 48, 93.

Rath D., Tripathy, B.C., 1994, On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, Ind. J. Pure Appl. Math., 25, 381.

Śalăt, T., 1969, On ratio sets of sets of natural numbers, Acta Arithmetica, 15, 18.

Śalăt, T., 1980, On Statistically convergent sequences of real numbers, Math. Slovaca, 30, 139.

Schoenberg, I.J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361.

Tripathy, B.C., 1997, On statistically convergent and statistically bounded sequences, Bull. Cal. Math. Soc., 20, 31.

Tripathy, B.C., 1998, On statistically convergent sequences, Bull. Cal. Math. Soc., 90, 259.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Salih AYTAR
Doğum yeri	:	Antalya
Doğum Yılı	:	1975
Medeni Hali	:	Bekâr

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise	1990-1994 Antalya Teknik Lisesi
Lisans	1994-1998 Süleyman Demirel Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1998-1999 MEB- Karaman Merkez Yeşildere Lisesi Matematik Öğretmenliği

1999- .... SDÜ- Fen Edebiyat Fakültesi Arş. Gör.