



**SÜREKLİ ORTAM HASAR MEKANİĞİ
YARDIMIYLA MEKANİK DAVRANIŞIN
BELİRLENMESİ**

ERGÜN KORKMAZ

**Yüksek Lisans Tezi
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
ISPARTA 2001**

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİ ORTAM HASAR MEKANİĞİ YARDIMIYLA
MEKANİK DAVRANIŞIN BELİRLENMESİ

ERGÜN KORKMAZ

10 6016

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2001

106016

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. A. Ünal ERDEM
Üye : Doç. Dr. Akemal YAKUT
Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Reşit USAL

ONAY

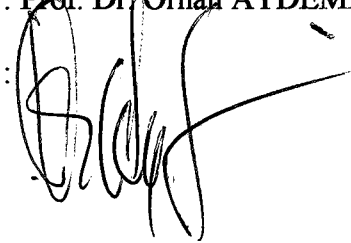
Bu tez 29/08/2001 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

29/08/2001

S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Adı Soyadı : Prof. Dr. Orhan AYDEMİR

İmza :



ÖZET

Genel bir yaklaşım olarak hasar terimi, malzemelerin bozulmasını veya tahrip olmasını ifade eder. Mekanikte hasar üç M ölçeğinde karakterize edilebilir: Mikro, mezo ve makro seviye. Bu çalışmada, farklı olayların ortalama etkilerini dikkate alan sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde orta ölçek göz önüne alınmıştır. \underline{D} olarak tanımlanan hasar tansörü simetrik olup, ikinci dereceden bir tansördür. Ayrıca ele alınan ortamın; homojen, üniform ve elastik olduğu kabulüyle ortamın nonlineer davranışı modern sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. Mekaniğin denge kanunları ile tutarlı olan termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarının birleştirilmiş şekli, gerilme potansiyelinin zamana göre maddesel türevi cinsinden ifade edilmiştir. Gerilme potansiyelinin bağımsız değişkenleri, Green deformasyon tansörü, hasar tansörü ve sıcaklık olarak belirlenmiştir. Maddesel ortamın esas yapısı itibariyle izotrop olduğu, hasardan dolayı anizotropi özelliği gösterdiği varsayılmıştır.

Termodinamik kısıtlamaların neticesinde gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızı olarak tanımlanan ifadenin bünye denklemleri ortaya konulmuştur. Ortamın sıkışmazlığı makul bir kabul olduğundan, ortam sıkışmaz kabul edilerek bünye denklemlerinin aldığı formlar belirlendikten sonra maddesel simetri aksiyomunun bünye fonksiyoneli üzerine getirdiği kısıtlamalar verilmiştir. Matris malzemesinin izotrop olma özelliği dikkate alınıp, invaryantlar teorisini kullanarak, incelenen ortamın nonlineer mekanik davranışını belirleyen bünye denklemleri elde edilmiştir. Bünye fonksiyoneli olan Σ , bağlı olduğu invaryantları cinsinden ikinci dereceden bir polinomla temsil edilmiş, elde edilen nonlineer bünye denklemlerindeki Σ nın invaryantlarına göre türevleri hesaplanarak gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemlerinin daha somut bir şekli ortaya konulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Sürekli Ortam Hasar Mekaniği, Hasar Tansörü, Temsili Hacim Elemanı, Helmholtz Serbest Enerjisi, İzotropi, Deformasyon, Gerilme, Gerinme Enerjisi Yoğunluğu Değişim Hızı, Bünye Denklemleri.

ABSTRACT

In a general approach, the term of damage shows to degradation or break-up of materials. It is accepted that damage in solid mechanics can be identified on three M-scales: The micro, the meso, the macro level. In this study, meso scale is the building block of continuum mechanics in which different phenomena can be smeared into mean effects. Damage tensor has been termed $\underline{\underline{D}}$ and assumed as second order symmetric tensor. Assuming that an homogen, uniform and elastic medium, we study nonlinear behaviour of damaged material in the frame of modern continuum mechanics. Second law of thermodynamics, combined with the first law and consistent with mechanical balance laws, has been written in terms of the time rate of free energy function Independent variables of stress potential have been furnished with Green deformation tensor, damage tensor and temperature. The material is supposed to be strongly anisotropic due to void and other discontinuities, with the matrix material being supposed to have any material symmetry.

Following the thermodynamical constraints, the constitutive equations of stress and strain energy density release rate have been obtained. Considering the incompressibility of medium, forms of constitutive equations have been determined and have been given constraints of material symmetry axioms on the constitutive functional. Considering of isotropic property for matrix material and using invariant theory, constitutive equations which is determining of nonlinear behaviour of materials have been obtained. Constitutive functional Σ , depend on its invariants, has been represented as second degree polynomial. Derivatives of this functional in according to the invariants was found and then explicit and definite forms of stress and strain energy density release rate have been determined.

KEY WORDS: Continuum Damage Mechanics, Damage Tensor, Representative Volume Element, Helmholtz Free Energy, Isotropy, Deformation, Stress, Strain Energy Density Release Rate, Constitutive Equations.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

İstenmeyen mekanik şartlara ve çevre koşullarına maruz kalan modern mühendislik malzemeleri, mikro yapılarındaki bozulmaların artması nedeniyle dayanımlarını kaybederler. Bunun bir neticesi olarak da malzemenin mekanik özelliklerinde zayıflamalar görülür. Güvenilir yapılar dizayn edilirken hasar derecesini tahmin etmek için, hasar olayının mekanik terimler cinsinden formüle edilmesi gerekmektedir. Böylece analitik ve cebirsel teknikler kullanılarak çeşitli mühendislik problemlerini analiz etmek mümkün olur.

Son yıllarda dünyada sürekli ortamlar mekaniğinin temel prensiplerinden faydalanılarak, özellikle orta ölçekli seviyede (mesoscale) hasar mekaniği problemlerinin çözümü konusunda oldukça önemli gelişmeler meydana gelmiştir. Bu konuda bir çok bilimsel makale yayımlanmış, konferanslar düzenlenmiş ve hasar mekaniği, kırılma mekaniğinin hızla gelişen bir dalı haline gelmiştir.

Ülkemizde ise hasar mekaniği konusunda yeterli bir çalışmanın yapılmamış olması son derece üzücü ve düşündürücüdür. Bunun en önemli nedeninin kaynak sıkıntısı (özellikle Türkçe kaynak) olduğu da acı bir gerçektir. Bu çalışmanın bu konuda çalışma yapacak olan araştırmacılara bir nebze de olsa yardımcı olacağını ümit ederek, bu konuda çalışma yapacak olan arkadaşlara başarılar dilerim.

Böyle bir konuda çalışmamı öneren ve çalışmanın her safhasında çeşitli kaynak, bilgi ve teşvikleriyle yardımlarını esirgemeyen kıymetli danışman hocam Yrd.Doç.Dr. M. Reşit USAL'a şükranlarımı sunarım. Ayrıca, görüş ve önerileriyle katkıda bulunan Dr. Melek USAL'a da teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri bulunan anne ve babama, kardeşlerime, eşime ve mesai arkadaşlarıma şükranlarımı sunuyorum. Hayatının baharında kansere yenik düşerek aramızdan ayrılan kardeşim Serpil'i de rahmetle anıyorum.

Ergün KORKMAZ

Temmuz 2001, Isparta

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Hasarın Fiziksel Yapısı ve Mekanik Temsili.....	6
1.1.1. Katı Halin ve Hasarın Fiziksel Yapısı.....	6
1.1.1.1. Bazı Hasar Tipleri.....	10
1.1.1.1.1. Gevrek Hasar.....	10
1.1.1.1.2. Sünek Hasar.....	10
1.1.1.1.3. Sürünme Hasarı.....	11
1.1.1.1.4. Çeliklerin Gevrekleşmesi.....	11
1.1.1.1.5. Kimyasal-Mekanik Hasar.....	11
1.1.1.1.6. Çevrenin Etkisiyle Bozulma.....	12
1.1.1.1.7. Betonun Hasarı.....	12
1.1.1.1.8. Düşük Tekrarlı Yorulma Hasarı.....	12
1.1.1.1.9. Yüksek Tekrarlı Yorulma Hasarı.....	13
1.1.2. Hasarın Mekanik Temsili.....	13
1.1.2.1. Bir Boyutlu Yüzey Hasar Değişkeni.....	15
1.1.2.2. Efektif Gerilme Kavramı.....	17
1.1.2.3. Gerinme Eşdeğerliği İlkesi.....	19
1.1.2.4. Gerinmeler ve Hasar Arasında Birleşik Etki, Yırtılma Kriteri ve Hasar Başlangıcı.....	20
1.1.2.4.1. Elastisite kanunu.....	20
1.1.2.4.2. Plastisite.....	21
1.1.2.4.3. Yırtılma kriteri.....	23
1.1.2.4.4. Hasar başlangıcı.....	24
1.1.2.5. Efektif Hasar Alanının Mikromekanikliği.....	24
1.1.3. Anizotropik Hasar Analizi.....	26
1.1.3.1. Maksimum Asal Gerilme Hasarı Kavramı.....	27
1.1.3.2. İkinci Dereceden Hasar Tansörünün Geometrik Olarak Belirlenmesi... ..	27
1.1.3.3. Dördüncü Dereceden Hasar Tansörünün Termodinamik Tanımı.....	31
1.2. Maddesel Hasarın Genel Bir Tanımı.....	33
1.2.1. Maddesel Hasarın Temel Kavramları ve Tanımı.....	34
1.2.1.1. n Tane Tek Atomik Bağ İçeren Sistem.....	36
1.2.1.2. m Tane Alt Sistem İçeren Sistem.....	39
1.2.2. Önerilen Tanımın Özellikleri.....	40
1.2.3. Maddesel Hasarın Mikromekanikliği.....	41
1.2.4. Fenomenolojik (Makro) Teori.....	43
1.2.5. Kesin Geometriye ve Yere Sahip Çatlaklar Tarafından Oluşturulan Hasar.....	44
1.3. Hasar Geometrisi.....	46
1.3.1. Gerçek Hasarlı Duruma Göre Hasar Durumlarının Temsil Edilmesi.....	48

1.3.2. Elastik Olarak Yüksüz Hasarlı Konfigürasyona Göre Hasar Durumunun İfade Edilmesi.....	51
1.3.3. Hasar Tansörlerinin Yorumlanması ve Bu Tansörler Üzerindeki Kısıtlamalar.....	53
1.3.4. Efektif Gerilmenin Tanımlanması.....	58
1.3.4.1. Mevcut Hasarlı Konfigürasyona Göre Efektif Gerilmeler.....	58
1.3.4.2. Başlangıç Hasarsız Konfigürasyona Göre Efektif Gerilme.....	59
1.4. Deformasyon.....	61
1.4.1. Sürekli Ortamın Hareketi.....	61
1.4.2. Şekil Değiştirme ve Şekil Değiştirme Tansörü.....	64
1.5. Denge Denklemleri.....	72
1.5.1. Kütleinin Korunumu.....	72
1.5.2. Lineer Momentumun Dengesi.....	72
1.5.3. Açısal Momentumun Dengesi.....	73
1.5.4. Enerjinin Korunumu.....	74
1.5.5. Clausius-Duhem Eşitsizliği.....	74
2. KAYNAK BİLGİSİ.....	76
3. MATERYAL VE METOT.....	83
3.1. Materyal.....	83
3.1.1. Hasarlı Elastik Ortamın Termodinamiği.....	83
3.2. Metot.....	92
3.2.1. Hasarlı-Elastik-İzotrop Ortam İçin Bünye Modelinin Oluşturulması.....	92
4. BULGULAR.....	96
5. SONUÇLAR.....	105
6. KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	110

SİMGELER (KISALTMALAR) DİZİNİ

a	Çatlak uzunluğu
a_{ijkl}	Elastisite tansörü
α_i, β_i	Denklemleri kısaltmak amacıyla kullanılan katsayılar
C_{KL}, C_{KL}^{-1}	Green ve Piola deformasyon tansörleri
c_{kl}, c_{kl}^{-1}	Cauchy ve Finger deformasyon tansörleri
d_{kl}	Şekil değiştirme (genleme) hızı tansörü
D	Hasar değişkeni
D_s, D_n	Kayma ve çekmede hasar değişkenleri
$\underline{\underline{D}}, D_{ij}$	İkinci dereceden anizotropik hasar tansörü ve bileşenleri
D_{ijkl}	Dördüncü dereceden anizotropik hasar tansörünün bileşenleri
D_c	Çatlak başlangıcında kritik hasar
D_{1c}	Çekme de kritik hasar
$\frac{D^*}{Dt} = \frac{\partial^*}{\partial t} + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\nabla}}^*$	Zaman göre hareketi takiben türev
E	Elastisite modülü
\tilde{E}	Efektif hasar modülü
$\underline{\underline{f}}$	Birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet
$\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{t}}$	Kuvvet
$F_{kK} \equiv x_{k,K} = \frac{\partial x_k(\underline{\underline{X}}, t)}{\partial X_K}$	Deformasyon gradyanı
h	Birim kütle başına ısı kaynağı
I_{kl}	İkinci dereceden birim tansör bileşenleri
I_{ijkl}	Dördüncü dereceden birim tansör bileşenleri
$j = \det \underline{\underline{F}}$	Deformasyon gradyentine ait matrisin determinanı
k	Düzeltilme faktörü

l	Orta ölçekli hacim elemanının uzunluğu
m	Kütle
\underline{n}, \bar{n}	Dış birim normal vektör
N	Çevrim sayısı
N_R	Kırılma (Yırtılma) çevrim sayısı
p	Hidrostatik basınç
p_D	Plastik gerinme başlangıç hasarı
\underline{q}	Isı akısı vektörü
\underline{Q}	Maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal transformasyon matrisi
$Q_K(\underline{X}) = X_{K,k} q_k$	Maddesel koordinat sisteminde ısı vektörü
r	İzotropik sertleşme gerinmesi
R	İzotropik sertleşme gerinmesi değişkeni
R_a, R_o	Katılık
s	Özgül entropi
S, A	Kesit alanı
S_D	Hasarlı bölgenin kesit alanı
\underline{S}	Simetri grubuna ait dönüşüm matrisi
t	Zaman
\underline{t}	Gerilme tansörü
T	Sıcaklık
$\underline{T}, \underline{\underline{T}}$	T tansörü, T matrisi
\underline{u}	Yer değiştirme vektörü
V, v	Deformasyondan önceki ve sonraki hacim
$v_{k,l} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$	Deformasyon hızları tansörü
ω_e	Elastik gerinme enerjisi yoğunluğu
X	Kinematik sertleşme gerilmesi değişkeni
Y	Gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızı

Y_{ijkl}	Gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızı tansörünün bileşenleri
δ_{KL}	Maddesel koordinatlarda kronecker-delta
ε	Birim kütle başına iç enerji
$\varepsilon_{KLM}, \varepsilon_{klm}$	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda permütasyon tansörleri
$\varepsilon_e, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon^e$	Tek eksenli ve tansörel elastik gerinmeler
$\varepsilon_p, \varepsilon_{ij}^p, \varepsilon^p$	Tek eksenli ve tansörel plastik gerinmeler
ε_{eq}	Eşdeğer toplam gerinme
ε_{pD}	Saf çekmede plastik gerinme başlangıç hasarı
ϕ	Disipasyon (Kayıp)
Γ	Toplam entropi üretimi
η	Birim kütle başına entropi yoğunluğu
ν	Poisson oranı (Elastik büzülme)
ρ_0, ρ	Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
$\rho \gamma$	Birim kütle başına entropi üretimi
$\theta(\underline{X}, t)$	t anında X maddesel noktasının sıcaklığı
σ	Sürekli ortam içinde yer alan süreksizlik yüzeyi
$\sigma, \sigma_{ij}, \underline{\sigma}$	Tek eksenli ve tansörel gerilmeler
σ_H	Hidrostatik gerilme
σ_{eq}	Von mises eşdeğer gerilmesi
$\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_{ij}, \underline{\tilde{\sigma}}$	Tek eksenli ve tansörel efektif gerilmeler
σ_y	Akma gerilmesi
σ_s	Plastik başlangıç gerilmesi
σ_u	Maksimum gerilme
σ_R	Kırılma (Yırtılma, kopma) gerilmesi
$\Sigma \equiv \rho_0 \psi$	Gerilme potansiyeli

$X_K, x_k (K, k = 1, 2, 3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
$\psi = \varepsilon - \theta \eta$	Genelleştirilmiş serbest enerji yoğunluğu
∇	Gradyan operatörü



ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa	
Şekil 1.1.	Konvansiyonel metotlar ile sürekli ortam hasar mekaniğinde ömür tahmininin karşılaştırılması.....	3
Şekil 1.2.	Hasar mekaniğinden kırılma mekaniğine geçiş.....	4
Şekil 1.3.	Yorulma çatlaklarının başlangıç ve gelişiminin şematik gösterimi	4
Şekil 1.4.	Dislokasyon hareketleri nedeniyle kayma sonucu ortaya çıkan plastik deformasyonun basit gösterimi.....	6
Şekil 1.5.	Dislokasyon yığılmaları nedeniyle mikro çatlakın çekirdeklenmesiyle hasarın oluşumu.....	7
Şekil 1.6.	Hasarın mikro ve orta ölçekli tanımı.....	16
Şekil 1.7.	Bir boyutlu hasarlı eleman.....	17
Şekil 1.8.	Bakır için hasarla birlikte elastisite modülünün değişimi.....	21
Şekil 1.9.	Hasarla birlikte plastisite akma kriterinin şematik bir değerlendirmesi.....	22
Şekil 1.10.	Tek bir çatlak ihtiva eden orta ölçekli bir hacim elemanı.....	25
Şekil 1.11.	Bir boyutlu izotropik hasar ve üç boyutlu anizotropik hasar.....	28
Şekil 1.12.	Hasar tansörünün asal değerleri.....	29
Şekil 1.13.	a) Basit kristal yapıda atomlar ve bağların konfigürasyonu. b) Atomlar arası enerjiyle iki atom arası mesafenin değişimi.....	35
Şekil 1.14.	a) Bağların karakteristik alanı. b) Birim normal vektörü \underline{N} olan düzlem üzerine \mathcal{G}^i nin izdüşüm alanı.....	38
Şekil 1.15.	Tek eksenli çekme altında bir çubuğun hasarı.....	47
Şekil 1.16.	Üç boyutlu durumda hasarın belirlenmesi.....	49
Şekil 1.17.	Hasar tansörü $\underline{\tilde{D}}$ nin yorumu.....	55
Şekil 1.18.	Mevcut ve başlangıç konfigürasyonlara göre efektif gerilme tansörleri.....	56
Şekil 1.19.	Maddesel ve uzaysal koordinatlar.....	62
Şekil 1.20.	Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme.....	64
Şekil 1.21.	Paralelyüzlüye dönüşebilen dik paralelyüzlü.....	69
Şekil 1.22.	Dik paralelyüzlüye dönüşen paralelyüzlü.....	70

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 1.1. Orta ölçekli mekanik skala için Temsili Hacim Elemanı büyüklük mertebeleri.....	9
Çizelge 1.2. Hasarlı bir malzeme ile hasarsız bir malzemenin karşılaştırılması.	20
Çizelge 1.3. Hasar mekaniğinde kullanılan temel kriterler.....	24



1. GİRİŞ

Bilindiği üzere bir sistemi tasarlamak, projelendirmek ve hayata geçirmek kadar önemli olan bir diğer konu da bu sistemin varlığını ve fonksiyonlarını devam ettirebilmesi için gerekli şartları sağlamaktır. Bunu gerçekleştirebilmek için ele alınan sistemin ömrünü etkileyen gerçek parametrelerin açıkça ortaya konulması ve mümkün olan maksimum ömür süresini sağlayabilecek şartların oluşturulması gerekir. Bu nedenle malzemeyi tanımak, mekanik davranışlarını bilmek, sistemin çalışma şartlarını çok iyi belirlemek ve hesapta olmayan ekstra yüklerin ortaya çıkma ihtimallerini dikkatli bir şekilde ele almak gerekmektedir. Bu çalışmada; sistem tasarımının daha başlangıcında malzemenin mekanik davranışını etkileyebilecek ve etkisinde kaldığı mekanik yükler nedeniyle ortaya çıkabilecek davranışları belirleyebilmek amacı ile sistematik bir yaklaşım takip edilmiştir. Modern sürekli ortamlar mekaniğinin temel kavramları hasar mekaniği ile birleştirilmiş ve hasarın genel davranışı bünye denklemlerine değişken bir parametre olarak yerleştirilmiştir. Çok geniş bir literatür taraması ve yoğun bir emeğin sonunda ortaya konulan bu çalışma kendi alanında Türkçe literatürde ilk defa yer almaktadır. Geliştirilmeye açık ve sonuçları itibarı ile önemli bir konu olmaya devam edecektir.

Malzemelerin hasarı, malzemelerde kırılma veya kopma dediğimiz nihai durum gerçekleşinceye kadar sürekli olarak ilerleyen ve gelişen fiziksel bir prosestir. Hasar mekaniği değişik yüklerin etkisi altında kalan malzemelerde bozulma, gerileme ve işe yaramama durumlarını içeren mekanizmaları mekanik değişkenlere bağlı olarak inceler. Mikro ölçekte bu durum kusurların veya ara yüzeylerin yakın civarında mikro gerilmelerin birikmesi ve bağların kopmasıdır, bu iki durumda da malzeme hasara uğramış olacaktır. Orta ölçekli seviyede ise, temsili bir hacim elemanı ele alınır, bu eleman büyür ve mikroçatlakların veya mikroboşlukların birlikte hareket etmesi ve büyümesi ile beraber bir çatlak başlangıcı oluşmaya başlar. Makro ölçekli seviyede ise bu çatlağın büyümesi söz konusudur. İlk iki aşama orta ölçekli seviyede (mesoscale) tanımlanan sürekli ortamlar mekaniğinin hasar değişkenleri vasıtası ile incelenebilir. Üçüncü aşama ise genellikle makro ölçekte tanımlanan değişkenlerle

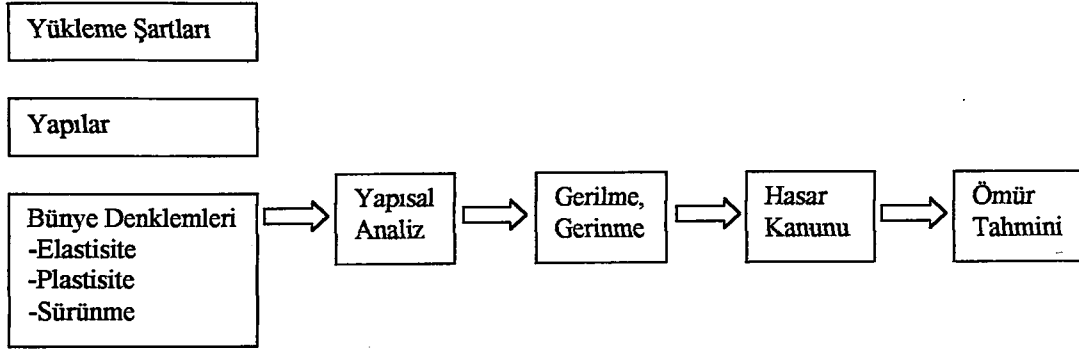
incelenmekte olup kırılma mekaniğinin konusudur (Lemaitre, 1996). Bu nedenle bu çalışmada makro ölçek göz önüne alınmayacaktır.

Güvenilir yapılar dizayn edilirken hasar derecesini tahmin etmek için, hasar olayının mekanik terimler cinsinden formüle edilmesi gerekmektedir. Böylece analitik ve cebirsel teknikler kullanarak çeşitli mühendislik problemlerini analiz etmek mümkün olur (Korkmaz, 2000).

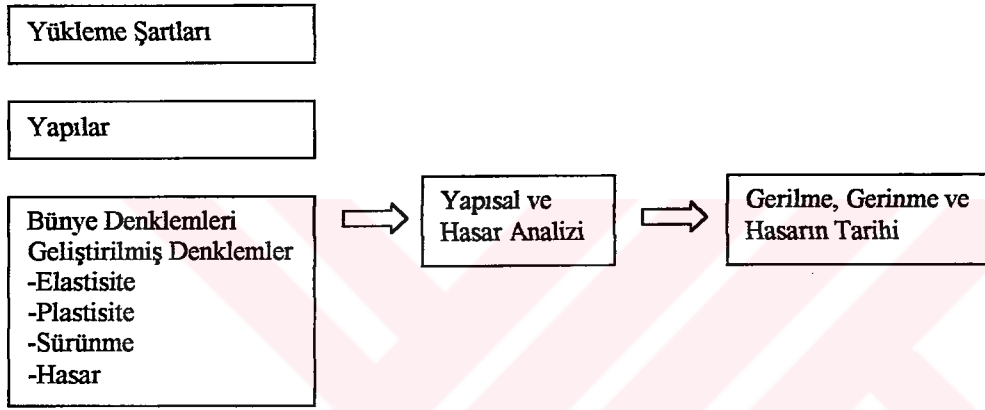
Malzeme yapısındaki değişimler ve hasar olayı genellikle tersinmez bir olaydır ve hasar arttıkça entropide de bir artma söz konusudur. Hasar birikimi (yığılması); elastik deformasyon altında (yüksek tekrar sayılı yorulma durumundaki gibi), elastik-plastik deformasyon altında (düşük tekrar sayılı yorulma ve yumuşak plastik hasar durumundaki gibi) ve sürünme durumu altında (sürünme hasarı) meydana gelebilir (Kachanov, 1986).

Hasar olayı; elastik ve elastik-plastik deformasyon altında hızlanır. Mikro yapısal değişikliklerin tanımlanabilmesi için, hasardan önceki durumun termodinamik parametrelerine ek olarak bazı iç değişkenlerinde dikkate alınması gerekir. Hasar, "D" olarak simgelenen matematiksel bir büyüklükle karakterize edilmiş olup, $D=0$ ise malzeme de hasar söz konusu değildir. En basit halde D skaler bir büyüklük olup, daha karmaşık durumlar için vektörel veya ikinci dereceden simetrik tansörel büyüklükler olarak alınmalıdır. Hasar parametrelerinin belirlenmesi basit bir işlem değildir. Fiziksel ve mikro yapısal analizle veya deneysel verilerin doğrudan genelleştirilmesiyle tespit edilebilir. Hasar değişkeni olarak malzemedeki çatlak ve boşlukların yüzey yoğunluğu kabul edilebilir. Ancak farklı kusur tipleri ve bunların dağılımı için farklı matematiksel hasar yaklaşımları kullanılabilir. Genelde hasar, malzemenin elastik özelliklerine etki eder ve hasar ilerledikçe malzeme anizotrop hale gelir (Akkaya, 1994).

Mühendislikte kullanılan malzemelerin ömürlerinin tahmini özellikle mukavemet açısından önemli bir işlemdir. Malzeme ömrünün tahmin edilmesi için bugüne kadar daha çok konvansiyonel metotlar kullanılmıştır.



a) Konvansiyonel metotlarla ömür tahmini.



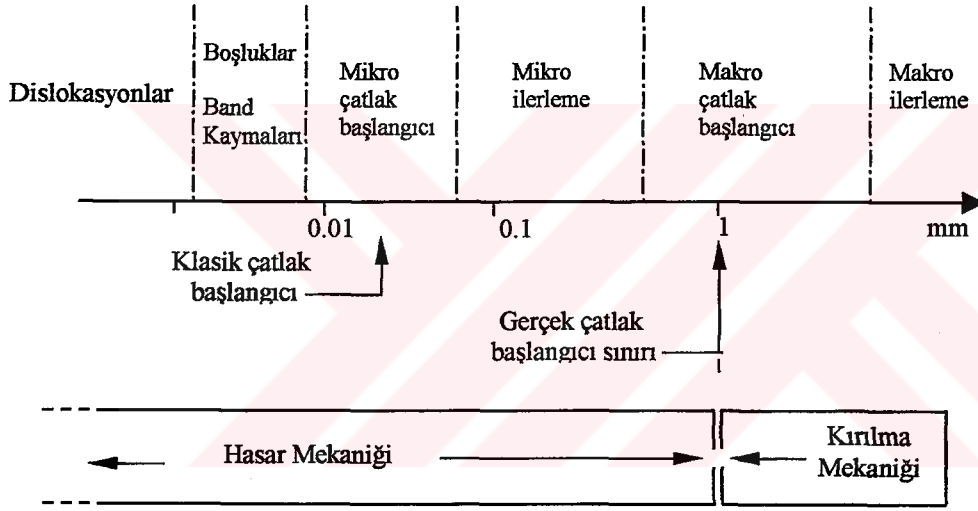
b) Sürekli ortam hasar mekaniğinde ömür tahmini.

Şekil 1.1. Konvansiyonel metotlar ile sürekli ortam hasar mekaniğinde ömür tahmininin karşılaştırılması (Chaboche, 1988 b)

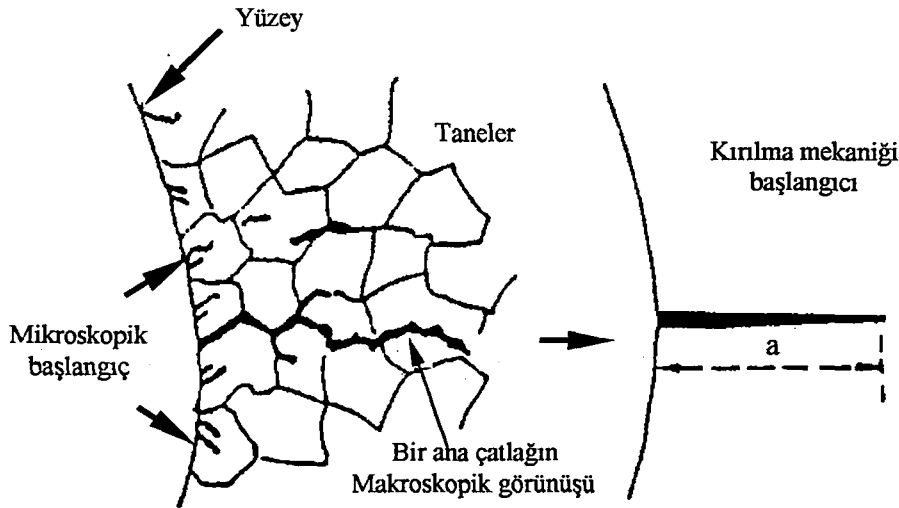
Malzemedeki bozulma prosesi ve mekanik davranış arasındaki birleşik etkileri dikkate alan hasar mekaniği yardımıyla da malzeme ömrü tahmini yapmak mümkündür. Şekil 1.1’de konvansiyonel metotlarla yapılan malzeme ömrü tahmini ile, sürekli ortam hasar mekaniği yardımıyla yapılan malzeme ömrü tahmini karşılaştırılmıştır. Bu sınıflandırmada dikkati çeken husus, hasar değişkeninin bünye denklemlerinde ele alınması ve daha başlangıçta teoriye dahil edilmesidir. Konvansiyonel metotlar hasarı daha sonra ortaya çıkacak bir proses olarak dikkate almakta ve malzemenin yapısal hasar davranışını göz ardı etmektedir.

Klasik anlamda sürekli ortamlar mekaniği, makro ölçekte malzemelerin ve yapıların deformasyonu esnasında ortaya çıkan heterojen mikro prosesleri tanımlamamıza imkan tanır. Elastik ve plastik deformasyonlar ve bunlara karşı gelen sertleşme

etkileri genellikle global sürekli ortam değişkenleri olarak kabul edilebilir. Hatta; mikro kusurlar, dislokasyonlar ve malzemenin tane yapıları homojen olmadığından asıl neden bunlar olarak gösterilebilir. Gerilmelerin yerelleştirilmesine ve çoğalmasına karşı gelen hasar prosesi genellikle kalıcı ve tersinmez bir prostedir. Makro ölçek göz önüne alındığında sürekli ortam kavramlarıyla hasarı ifade etmek oldukça dikkat gerektirir. Malzemede dağılmış olan kusurlar yalnızca çatlak başlangıcına ve sonuçta bir çatlağa yol açmaz. Aynı zamanda; mukavemetin, katılığın, tokluğun, kararlılığın ve geriye kalan dayanma süresinin bir göstergesi olarak ifade edilebilen, malzemenin gerileme (bozulma) prosesini de içine alır.



Şekil 1.2. Hasar mekaniğinden kırılma mekaniğine geçiş (Chaboche, 1988 a)



Şekil 1.3. Yorulma çatlağının başlangıç ve gelişiminin şematik gösterimi (Chaboche, 1981; 1988 a)

Mikroçatlak sürecinin mekanik etkileri olan çekirdeklenme ve ilerleme, malzemenin makroskopik seviyedeki elastik veya plastik davranışı üzerinde etkili olan bir durum değişimi ile temsil edilmektedir (Fichant vd., 1997).

Hasar olayı incelenirken hasarın derecesi, dolayısıyla ölçümü de oldukça önemli bir prosestir. Hasarın ölçülmesinde birçok direkt ve dolaylı metotlar kullanılmaktadır. Direkt ölçümler içerisinde; Elastisite modülünün değişimi, ultrasonik dalga ilerlemesi, mikrosertliğin değişiminin incelenmesi, geriye kalan ömür cinsinden de ifade edilebilen yorulma sınırındaki değişim gibi metotlar yer alırken, dolaylı metotlar içerisinde ise; sünek aşınma durumunda yoğunluğun değişimi, elektrik direncinin dolayısıyla iletkenliğin değişimi, plastik davranışın değişimi (gerilme genliğinde azalma), sürünme davranışının incelenmesi, akustik emisyon olayını dikkate alan malzeme içerisinde ilerleyen ses hızındaki değişimin incelenmesi gibi metotlar sayılabilir (Eryürek, 1993).

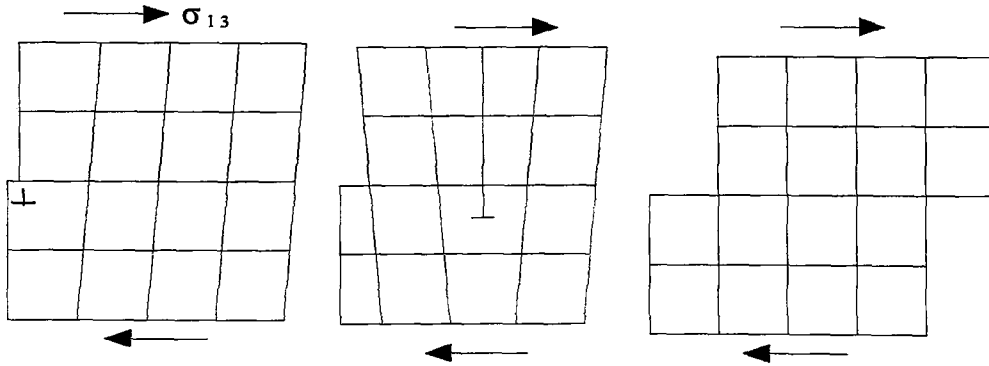
Metaller ve alaşımlar, polimerler ve kompozitler, seramikler, kayalar, beton ve ağaç gibi mühendislik malzemelerini incelerken farklı fiziksel yapılara sahip olan bu malzemelerin sayısal olarak değil de nitelik olarak benzer mekanik davranışlar göstermeleri oldukça şaşırtıcı gelebilir. Bu malzemelerin hepsi de bir dereceye kadar elastik davranış gösterir sonra akar, plastik veya kalıcı deformasyonlar gösterir. Gerinmeyle yüklenmiş bir anizotropi gösterir, çevrimsel bir histerisis eğrisi çizebilir. Monoton yüklerle hasara uğrar veya yorulur, sonuçta da statik veya dinamik yükler altında çatlak büyümesi ortaya çıkar. Yani, orta ölçekli seviyede ortak özellikler bütün bu malzemeler için benzer olan birkaç enerji mekanizması ile açıklanabilir. Malzemenin fiziksel mikroyapılarının karmaşasını dikkate almaksızın onları modelleyen sürekli ortamlar mekaniği ve tersinmez olaylar termodinamiğinin oldukça başarılı bir şekilde malzemelerin davranışını açıklayabilmelerinin altında yatan esas neden de budur (Lemaitre, 1996).

1.1. Hasarın Fiziksel Yapısı ve Mekanik Temsili

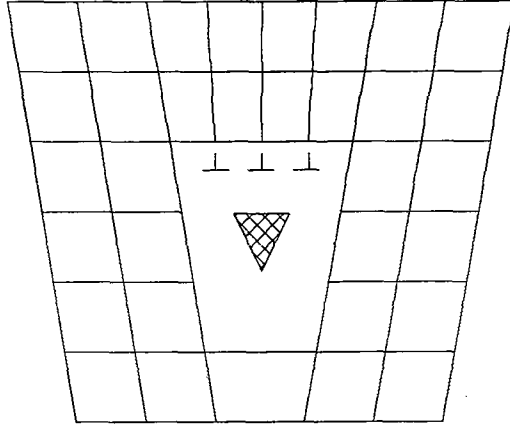
1.1.1. Katı Halin ve Hasarın Fiziksel Yapısı

Bütün malzemeler elektromanyetik alanların etkileşiminden kaynaklanan bağlarla birbirine sıkıca tutturulmuş atomlardan teşekkül etmiştir. Elastisite doğrudan doğruya atomların bağıl hareketleri ile ilgilidir. Atomik bir kafese ait özelliklerin fiziksel incelemesi elastisite teorisine yol açar fakat çok daha kolay bir yol deformasyonların kalıcı olmadığını kabul ederek orta ölçekli seviyede doğrudan doğruya matematiksel bünye denklemlerini yazmaktır. Deformasyonların tersinirliğini kabul eden bu görüş malzemenin deformasyondan önceki ve sonraki durumları arasında her noktada bire-bir bir ilişkinin mevcut olduğunu, bunun gereği olarak da lineerlik ve izotropi özelliklerinin olması gerektiğini ifade eder.

Bağlar çözülmeye başladığı zaman hasar prosesi de başlamış demektir. Örneğin; metaller, kristaller veya taneler halinde organize edilmişlerdir. Kayıp atomların yer aldığı bir çok dislokasyon çizgilerinin bulunmadığı bir durumda atomların dizilişi ve sıralanışı gayet düzenlidir.



Şekil 1.4. Dislokasyon hareketleri nedeniyle kayma sonucu ortaya çıkan plastik deformasyonun basit gösterimi (Lemaitre, 1996)



Şekil 1.5. Dislokasyon yığılmaları nedeniyle mikro çatlağın çekirdeklenmesiyle hasarın oluşumu (Lemaitre, 1996)

Eğer malzeme üzerine bir kayma gerilmesi uygulanırsa bağların yer değiştirmesi ile dislokasyonlar hareket edebilir, böylece Şekil 1.4'de gösterildiği gibi bağların çözülmesi söz konusu olmadan kayma vasıtası ile plastik bir deformasyon oluşturulabilir.

Eğer dislokasyon bir mikro kusur veya bir mikro gerilme konsantrasyonu tarafından durdurulmuş ise kısıtlanmış bir bölge meydana gelebilir. Bu bölgede başka dislokasyonlar da durdurulabilir. Bu ikinci proses Şekil 1.5'de gösterildiği gibi, bağların çözülmesi ile gerçekleşen hasar olmaksızın gerçekleşmeyebilir. Bu şekilde durdurulmuş ve engellenmiş birkaç dislokasyon bir mikroçatlağın çekirdeğini veya nüvesini oluşturur. Metallerdeki diğer hasar mekanizmaları, taneler arası bağ çözümleri ve matris yapı ile diğer kısımlar arasındaki kohezyon kuvvetlerinin bir şekilde ortadan kaldırılması neticesinde ortaya çıkar. Bütün bu mekanizmalar plastik yani kalıcı mikro gerilmeleri ortaya çıkarır.

Polimerlerde hasar, uzun molekül zincirleri arasında mevcut olan bağların kırılması ile oluşur. Kompozitlerde hasar, polimerik matris ve fiberler arasındaki bağların çözülmesidir. Seramiklerde hasar, esas olarak matris yapı ve kaplama arasındaki mikro kohezyon kuvvetlerinin ortadan kalkmasıdır. Betonda ilk hasar mekanizması, suyun kompleks etkisi ile agregalar ve çimento arasındaki kohezyonun azalmaya başlaması ile ortaya çıkar. Ahşap malzemelerde ise, en zayıf nokta olan selülozik

hücrelerin bağlarında görülür. Bütün bu durumlarda elastiklik doğrudan doğruya hasar mekanizmaları tarafından etkilenmektedir. Çünkü elastiklikten sorumlu olan atomik bağların sayısı hasarla birlikte önemli ölçüde azalır. Bu birleşik durum elastik gerinme ve hasarla birlikte ortaya çıkmakta ve malzemenin yapısına göre gelişmekte olduğu için "durumun birleşik etkisi veya durum kaplingi" olarak isimlendirilebilir.

Plastisite doğrudan doğruya kaymalarla ilgilidir. Metallerde, kaymalar Şekil 1.4'de şematik olarak gösterildiği gibi dislokasyonların hareketi veya dislokasyonların çoğalması ve ikizlenme ile oluşur. Hiçbir durumda ciddi bir hacim değişikliği gözlenmez. Diğer malzemelerde, tersinmez gerinmeler farklı mekanizmalarla oluşabilir. Bu mekanizmalar;

- Polimerlerde moleküllerin yeniden düzenlenmesi ile;
- Büyük kafes dirençlerinin dislokasyonların hareketlerine izin vermediği seramiklerde mikroçatlaklar ile;
- Betonda kohezyonun yok olmasının yüzeyler boyunca kayması ile;
- Ahşapta hücrelerin yeniden düzenlenmesi

şeklinde ortaya çıkar. Bunlar hacimsel bir değişim ortaya çıkarabilir. Bütün bu durumlarda, hasar yalnızca plastik veya tersinmez gerinmeleri etkiler çünkü bağların sayısı azaldığı ölçüde elemanter direnç alanı da azalır. Hasar kendi kendine kayma mekanizmasını doğrudan doğruya etkileyemez. Çünkü, burada "Durumun birleşik etkisi" söz konusu değildir. Efektif gerilmedeki bir artmadan dolayı, dolaylı bir birleşik hal yalnızca kinetik bünye denkleminde ortaya çıkar, bu da "Kinetik birleşik hal veya kinetik kapling" adını alır.

Elastisite atomik seviyelerde ele alınır ve değerlendirilir. Plastisite, kristal veya moleküler seviyede kaymalar tarafından yönetilir. Hasar ise, atomik seviyeden çatlak başlangıcı için geçerli olan orta ölçekli seviyeye kadar bir çözülmeyi ifade eder.

Sürekli ortamlar mekaniği makroskopik açıdan tanımlanmış büyüklüklerle ilgilenir. Fiziksel bakış açısından bu büyüklükler belirli bir hacim üzerindeki ortalamaları temsil eder. "Temsili Hacim Elemanı (THE)" yüksek gradyentlerin düzgünlüğünden kaçınacak kadar küçük mikro proseslerin bir ortalamasını temsil edecek kadar büyük olmak zorundadır. Deneysel maksatlar ve nümerik analiz için Temsili Hacim Elemanına ait büyüklük mertebeleri orta ölçekli mekanik skala dikkate alınarak Çizelge 1.1'de gösterilmiştir.

Çizelge 1.1. Orta ölçekli mekanik skala için Temsili Hacim Elemanı büyüklük mertebeleri (Lemaitre, 1996)

Malzeme	THE Büyüklük Mertebesi
Metaller ve Seramikler	0.1 mm ³
Polimerler ve Kompozitler	1 mm ³
Ahşap	10 mm ³
Beton	100 mm ³

Hasar için diğer bir önemli özellik de her zaman gerinmeden çok daha fazla yerleştirilmiş veya lokalize edilmiş olmasıdır. Gerinmeler hacim boyunca oluşan pek çok kayma veya onların mesafelerindeki değişimler neticesinde atomların hareketi tarafından oluşturulmasına rağmen, hasar veya atomların çözülmesi bir yüzeyle kısıtlanmıştır. Eğer hasar orta ölçekte bir tek düzlemde mevcut ise klasik sürekli ortam mekaniği ile onu incelemek mümkün değildir. Sevindirici bir durum şudur ki; genellikle hasar mikro ölçekte bir çok düzlemde görülmekte fakat yüksek uzay gradyentleri ile ortaya çıkmaktadır. Daha ileride bahsedileceği gibi hasar davranışını modellemek için mikro mekanik oldukça yardımcı ve faydalı bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Sonuç olarak;

- Mikro ölçek, gerinmeleri ve hasarı düşünmek için kullanılan mekanizmaların ölçeğidir,
- Orta ölçek, mekanik analiz için bünye denklemlerinin yazılmasında kullanılır,
- Makro ölçek, mühendislik yapılarının ölçeğidir (Lemaitre, 1996).

1.1.1.1. Bazı Hasar Tipleri

Ağır mekanik ve çevre şartları altında kalan modern mühendislik malzemeleri, onların mukavemetlerini azaltan mikroyapısal değişikliklere uğrarlar. Bu değişiklikler, bu malzemelerin mekanik özelliklerini zayıflattığından, hasar terimi kullanılmıştır. Çoğunlukla metal olan bu malzemelerin hasarına ait bazı örnekleri inceleyelim.

1.1.1.1.1. Gevrek Hasar

Hasar, mikro ölçekte genel bir çözülme mekanizması ile yönetilir. Orta ölçekte ise; malzemelerin yapısına, yükleme tipine ve sıcaklığa bağlı olarak değişik yollarla kendini ifade edebilir. Büyük miktarlarda plastik gerinme olmaksızın orta ölçekte bir çatlak başladığı zaman hasar gevrek hasar olarak adlandırılır. Onun şiddetinin mertebesini ifade etmek için plastik gerinmenin elastik gerinmeye oranının; $\frac{\epsilon_p}{\epsilon_e} < 1$

şeklinde ifade edildiğini belirtmek gerekir. Bunun anlamı, ayırıcı veya bölücü kuvvetler kaymaları üreten kuvvetlerden daha küçüktür fakat çözülme kuvvetlerinden daha yüksektir. Yerleştirme derecesi yüksektir (Lemaitre, 1996).

1.1.1.1.2. Sünek Hasar

Hasar, belirli bir eşik değerden (P_D) daha büyük olan plastik deformasyonlarla eş zamanlı olarak oluştuğu zaman sünek hasar adını alır. Bu durum kaplamalar ve matris arasındaki kohezyonların azalmasından dolayı boşlukların çekirdeklenmeye başlamasından kaynaklanır ve plastik kararsızlık olayı boyunca boşlukların büyümesi devam eder. Sonuç olarak, sünek hasarın yerleştirilme derecesi plastik gerinme derecesi ile kıyaslanmaktadır .

1.1.1.1.3. Sürünme Hasarı

Yüksek sıcaklıkta gerilmenin etkisi altında metal tanelerindeki mikroboşlukların çoğalması ve büyümesi meydana gelir (sünek tanelerarası sürünme çatlakları). Aynı zamanda tanelerarası sınırlar üzerinde mikroçatlakların çoğalması ve büyümesi de ortaya çıkar (gevrek tanelerarası sürünme çatlakları). Böylece iki farklı çatlak mekanizması eşzamanlı olarak oluşmaya başlar (Kachanov, 1986).

Bir metal erime sıcaklığının 1/3'ünden daha yüksek sıcaklıklara maruz kaldığı zaman plastik gerinme, viskoz etkileri gerekli kılar, malzeme sabit bir gerilmeye deforme olabilir. Gerinme yeterince büyük olduğu zaman, hasar üreten ve üçüncü sürünme periyodu boyunca gerinme hızını arttıran taneler arası kohezyon etkilerinin yok olması söz konusudur. Nitekim sünek hasar için sürünme hasarının gradyentleri, visko-plastik gerinme gradyentlerine benzerdir (Lemaitre, 1996).

1.1.1.1.4. Çeliklerin Gevrekleşmesi

Atomik radyasyonun etkisi altında çeliğin yapısı değişebilmektedir, böylece çeliğin plastik bölgeye geçme sınırı küçülmekte (yani plastisitesi azalmakta) ve gevrek bir yapıya doğru yönelmektedir. Serbest hidrojen atomlarıyla temas halinde olan çelik malzemede, hidrojen atomları çeliğin atomik kafes yapısı içerisine yayılmakta (difüzyon yoluyla) ve yapının tehlikeli bir şekilde gevrekleşmesine yol açmaktadır (hidrojen gevrekliği).

1.1.1.1.5. Kimyasal-Mekanik Hasar

Deniz suyu veya endüstri atmosferleri gibi saldırgan ortamlarda çalışan metaller özellikle tekrarlı yük ve çekme gerilmesinin etkisinde de kalmaktadırlar ve gerilme korozyonu denilen bir hasar mekanizması ortaya çıkmaktadır.

1.1.1.1.6. Çevrenin Etkisiyle Bozulma

Jeo-malzemeler, polimerler gibi bazı malzemeler gerilmenin etkisi olmasa bile, çevrenin etkisi altında mekanik özelliklerini değiştirmektedirler. Örneğin, toprak, ağaç ve benzeri diğer malzemelerin mekanik özellikleri nem seviyesine bağlı olarak değişebilmektedir.

1.1.1.1.7. Betonun Hasarı

Beton homojen bir malzeme olmadığından bünyesinde zayıf mekanik direnç bölgeleri vardır. Değişik yüklemeler altında bu bölgelerde çatlakların ortaya çıkması çok sık görülen bir olaydır (Kachanov, 1986).

1.1.1.1.8. Düşük Tekrarlı Yorulma Hasarı

Tekrarlı yüklemelerin etkisi altında mikro ve makro çatlakların çoğalması ve büyümesi ile malzemenin yapısında yavaş yavaş bozulma ve gerileme başlar.

Bir malzeme gerilme ve gerinme için yüksek değerlerde tekrarlanan bir yükün etkisinde kaldığı zaman, mikroçatlakların yayılması ve çekirdeklenme fazının ilerlemesi ile gerçekleşen bir kuluçka döneminden sonra tekrarlanan plastik gerinme ile birlikte hasar gelişmeye başlar. Hasar yerelleşmesinin derecesi sünek veya sürünme hasarından çok daha fazladır. Çünkü yüksek gerilme değerlerinden dolayı, düşük tekrarlı yorulma, yırtılmaya kadar tekrar sayısının (N_R) düşük değerleri ile karakterize edilmiştir.

$$N_R < 10\ 000 \text{ (çevrim sayısı)}$$

Eğer malzeme gerinme yüklenmiş ise, kararlı bir çevrime karşılık gelen iki gerilme-gerinme çevrimi için hasar mekanizması, gerilme genliğini azaltıcı yönde bir etki gösterir. Metaller için hasar; engellenmiş bant kaymalarını müteakip, ya taneler arası veya taneler boyunca mikroçatlaklar şeklinde görünür.

1.1.1.1.9. Yüksek Tekrarlı Yorulma Hasarı

Gevrek hasar veya yüksek çevrim sayılı yorulma hasarında malzeme içinde bazı noktalarda gerilmeler yüksek değerler alabilir. Yorulma için çevrim sayısı çok yüksek değerler alabilir:

$$N_R > 100\ 000 \text{ (çevrim sayısı)}$$

Sonuç olarak, belirli bölgelerde yerel hasar oldukça yüksek olmasına rağmen orta ölçekli seviyede gerilme değeri düşüktür. Orta ölçekli seviyede klasik bir çekme – basma testinden elde edilen gerilme-gerinme eğrisi, gerinme ve hasar için doğru bir davranışı temsil etmez, çünkü lokalize edilmiş malzemenin çok küçük kısımlarında ciddi boyutlarda mikro plastik ve hasar bölgeleri ortaya çıkar. Her şeye rağmen bu test sonuçları kullanılır çünkü mikro ölçekte mekanik deneyleri gerçekleştirmek gerçekten çok zordur. Hatırlanması gereken nokta şudur: Elde edilen sonuçlar orta ölçekli bir hacim üzerinde üniform olmayan büyüklüklerin ortalama değerleridir. Mikro sertlik testi, mikron mertebesinde ölçüleri ihtiva eden bir mikro hacmi karakterize etmede yardımcı olabilir fakat bu durumda ortaya çıkan gerilmeler oldukça kompleks ve karmaşıktır.

1.1.2. Hasarın Mekanik Temsili

En genel anlamda hasar terimi malzemelerin bozulmasına veya kopup kırılmasına işaret eder. Hasar; yaşlanma veya mekanik proseslerden dolayı parçalanma veya zayıflama, mekanik ayrılma, oksitlenme veya korozyon gibi çok farklı olaylardan kaynaklanabilir. Uygulamalı mekanik alanında yorulma hasarı kavramını ilk olarak Palmgren (1924) ortaya atmıştır ve şimdi Palmgren-Miner kuralı olarak bilinmektedir (Mariano ve Augusti, 1997). Sürünme hasarı kavramını ise 1952 de Robinson ileri sürmüştü ve bu tip bir hasarın fenomenolojik temsili vermiştir (Cauvin ve Testa, 1999).

Daha önce de belirtildiği gibi, genellikle mekanik açıdan hasar mikro, meso ve makro olmak üzere üç M- skalasında karakterize edilmektedir. Çatlak mekaniğinde ele alınan, izole edilmiş çatlaklar veya korozyondan dolayı kesitteki azalmalar gibi görünür veya hemen hemen görünür seviyedeki ayrık hasar mekanizmaları makro ölçekte ele alınırken, atomik boşluklar ve dislokasyonlar mikro ölçekte ele alınmışlardır. Meso ölçek ise sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde ele alınmakta olup, ortalama etkileri dikkate alarak modelleme yapmaktadır (Örneğin bir kompozitteki takviye elemanının boyutlarını veya betondaki agreganın boyutlarını dikkate alır).

Sürekli ortam hasar mekaniğinde, mikro ölçekten makro ölçeğe bir geçiş sağlanmakta ve malzeme biliminde ortaya çıkan bazı engeller sürekli ortamlar mekaniği alanına taşınmaktadır. Diğer taraftan meso ölçekli formülasyon sürekli ortamlar mekaniğinde görüldüğü gibi makro ölçekli hasar tanımlamasına doğrudan uygulanabilecek bir potansiyele sahiptir ve bütün yapı iskeletine uygulanması mümkündür.

Son zamanlarda önerilen bir çok model hasarın etkilerini meso ölçekte formüle etmekte ve bugün hasar mekaniği olarak bilinen yaklaşımı dikkate alarak bu yaklaşıma katkıda bulunmaktadır. Bu tip çalışmaların içerisinde iki tamamlayıcı yaklaşım vardır. Birinci yaklaşım; mikroçatlaklar gibi hasar görüntülerinin mekaniği üzerinde yoğunlaşmıştır ve meso ölçekte birleşik net (efektif) etkileri belirlemeye çalışmaktadır. Bu yaklaşım mikromekanik yaklaşımdır. Diğer yaklaşım fenomenolojik yaklaşım olup, sanki homojen bir ortam varmış gibi bu ortamın belirli özelliklerine sahip bir elemanı incelemeye yönelir, hasardan kaynaklanan bazı özelliklerin nasıl ortaya çıktığını dikkate almaz (Cauvin ve Testa, 1999). Bu son yaklaşım sürekli ortam hasar mekaniği olarak isimlendirilmiş olup, bizim takip edeceğimiz yaklaşımdır. Ancak ihtiyaç duyduğumuz durumlarda mikromekanik kavramlardan da bahsedeceğiz.

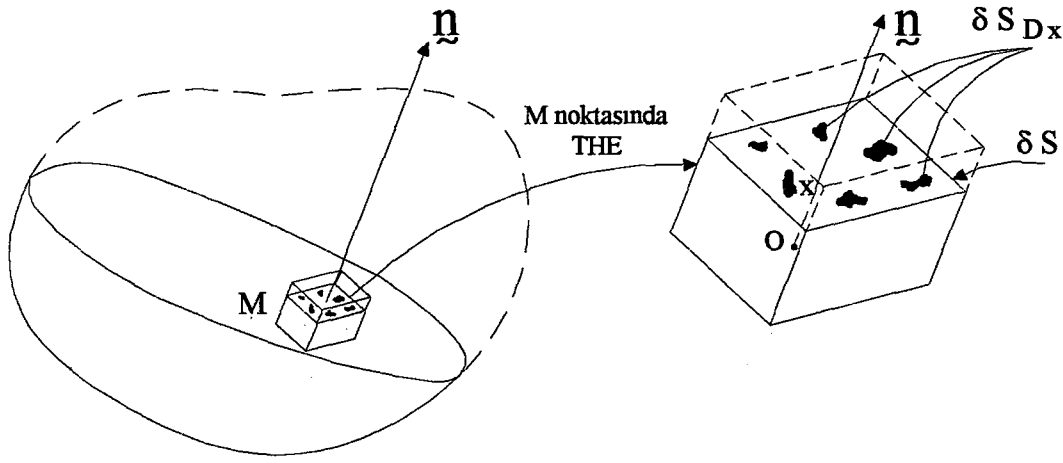
Mikromekanik hasar teorilerinin amacı rasgele ve heterojen mikroyapılar arasındaki fonksiyonel bağımlılığı belirleyen modeller geliştirmek ve malzemelerin makro

davranışını tahmin etmektir. Boşlukların ve mikroçatlakların dağılımı, konsantrasyonu, şekilleri ve yönelimlerini ilgilendiren bilgiler bu modeller için vazgeçilmez şekilde bilinmesi gereken verileri oluşturur. Bir Temsili Hacim Elemanı (THE) kavramı orta ölçekte ve bu yaklaşımda oldukça önemlidir. Literatürde (Bonora, 1997); THE yerine, "referans hacim elemanı (RVE)" kavramını, (Chow ve Lu, 1989) ise "lokal malzeme elemanı (LME)" kavramını kullanmışlardır. Hasarın farklı ve göze çarpan büyüklüklerinin katkıları THE içerisinde göz önüne alınır ve THE üzerindeki ortalamalar iç değişkenler olarak göz önüne alınan hasar değişkenlerinin alanını verir.

THE tipik bir sürekli ortam elemanı gibi düşünülebildiği için fenomenolojik yaklaşımda da önemlidir. THE içerisinde hasarın farklı büyüklükleri açık bir şekilde gözükmez fakat onların etkileri makroskopik iç değişkenler vasıtasıyla temsil edilir. Farklı hasar proseslerinin bu basitleştirmelerinin bir avantajı da üretmelerin yalnızca fiziksel şartlara değil, aynı zamanda iç değişkenli tersinmez olayların termodinamiğinin birleşik teorisine dayandırılabilmesidir (Cauvin ve Testa, 1999).

1.1.2.1. Bir Boyutlu Yüzey Hasar Değişkeni

Mikro ölçekte hasar, mikro süreksizlik yüzeylerinin meydana gelmesi olarak yorumlanabilir. Bu olay ise atomik bağların kırılması ve mikroboşlukların plastik genişlemesi şeklinde ortaya çıkmaktadır. Orta ölçekte, kırılmış bağların veya mikro boşluk çiftlerinin sayısı, bütün kusur ve çatlakların herhangi bir düzlemle yaptıkları ara kesit bölgelerinde tahmin edilebilir. Boyutsuz bir büyüklük kullanabilmek için, bu alan temsili bir hacim elemanının ölçüsü ile ölçeklendirilmiştir. Bu ölçü sürekli ortamlar mekaniği kapsamında bir değişkeni kullanabilmek için temel bir öneme sahiptir. Bu ölçekli değişken bir noktada, orta ölçekli bir hacim elemanı üzerinde mikro kusurlar hakkında temsili bir etkiye sahip olmalıdır, yani mikro kusur veya çatlakları temsil edebilecek yapıya sahip olmalıdır. Bu değişken plastisite de bir çok kaymanın bir noktadaki ortalama değerini temsil eden plastik gerinmeye (ϵ_p) benzer bir kavram olarak düşünülebilir.



Şekil 1.6. Hasarın mikro ve orta ölçekli tanımı (Lemaitre, 1996)

Şekil 1.6'da gösterildiği gibi hasarlı bir cismin içerisindeki bir M noktasında temsili bir hacim elemanı göz önüne alalım. M noktası yüzeyinin normali \underline{n} birim vektörü ile gösterilen bir düzlemde yer almaktadır ve x eksenini ile yüzeyin normali aynı doğrultuda seçilmiştir.

- δS , THE ile düzlemin ara kesit alanı olsun
- δS_{Dx} , δS üzerinde yer alan bütün mikroçatlakların veya mikroboşlukların efektif arakesitlerinin alanını gösterebilir. Bu durumda;
- x ekseninde, \underline{n} yönünde, M noktasında yer alan hasarın $D(M, \underline{n}, x)$ değeri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$D(M, \underline{n}, x) = \frac{\delta S_{Dx}}{\delta S} \quad (1.1)$$

İki parçada da malzemenin aşınmasına neden olan, THE üzerinde bir süreklilik değişkeni tanımlamak için x ile değişen bütün düzlemlere bakmak ve en hasarlı durumu dikkate almak gerekir (Lemaitre, 1996).

$$D_{(M, \underline{n})} = \text{Max}_{(x)} [D_{(M, \underline{n}, x)}] \quad (1.2)$$

x koordinatını n yönünde seçildiği için dikkate alınmayabilir ve ortadan kaldırılır ise;

$$D_{(M,g)} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (1.3)$$

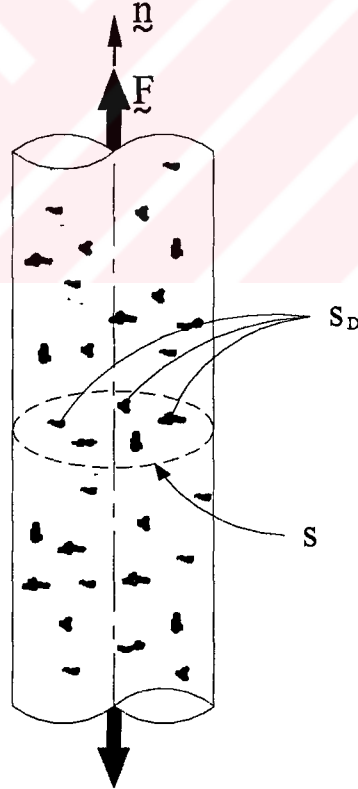
ifadesi yazılabilir. Tanımdan da görüleceği üzere dikkate alınan yöne ve noktaya bağlı olan skaler değişken D 'nin değeri 0 ve 1 arasında sınırlandırılmıştır.

$$0 \leq D \leq 1$$

$D = 0$ ise hasarsız THE söz konusu edilmektedir.

$D = 1$ ise tamamen hasarlı ve ikiye ayrılmış (kopmuş hal) THE dikkate alınmaktadır (Murakami, 1988). Aslında, hasar işlemler esnasında $D < 1$ iken oluşur (Lemaitre ve Chaboche, 2000).

1.1.2.2. Efektif Gerilme Kavramı



Şekil 1.7. Bir boyutlu hasarlı eleman (Lemaitre, 1996)

Şekil 1.7'de, mikro kusurların efektif yüzey yoğunluğu olarak dikkate alındığı hasarın basit bir tanımına imkan sağlayan basit ve bir boyutlu homojen hasar şematik olarak ifade edilmiştir. Bu durumda hasarın tanımı;

$$D = \frac{S_D}{S} \quad (1.4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer Şekil 1.7'de gösterilen THE, $F = \eta F$ şeklinde bir kuvvetle yüklenmiş ise klasik tek eksenli gerilme;

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.5)$$

olarak ifade edilir. S_D ile ifade edilen mikroçatlak veya mikroboşlukların yüzeyleri üzerine etkiyen hiçbir mikro kuvvetin bulunmadığı bir durumda bütün kusurlar açıkça görülür. Yüke etkin bir şekilde direnen yüzey ($S - S_D$) hasarsız yüzey olacağı için bu yüzey sayesinde oluşan efektif gerilme ($\tilde{\sigma}$) aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (1.6)$$

Hasar değişkenini tanımladıktan sonra efektif gerilmeyi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S} \right)} \quad \text{veya;} \quad (1.7)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (1.8)$$

Bu tanım tek eksenli (çekme) hal için malzeme üzerinde bulunan efektif gerilmeyi ifade eder (Bhattacharya ve Ellingwood, 1998). Basma veya sıkıştırma halinde bazı kusurlar veya boşluklar kapanır, hasar değişmeden kalır. Yüke direnen efektif yüzeyden ($S - S_D$) daha büyüktür. Özellikle, bütün kusurlar kapanıp boşluklar sıfırlanırsa basma halindeki efektif gerilme ($\tilde{\sigma}^+$) terimi, klasik gerilme terimi σ 'ya karşılık gelir. Bu etki ileride detaylı bir şekilde incelenecektir.

Mikroçatlakların "Efektif" yüzeyi (δS_D) üzerindeki tanıma geri dönecek olursak, "Efektif" kelimesi "Dayanım veya mukavemet" olarak anlaşılmalıdır. Çünkü, çekme veya kayma halinde yüklenmiş malzemede mikro gerilme konsantrasyonları ve kusurların karşılıklı etkileşimleri dikkate alınarak "Efektif" terimi kullanılmıştır. Yalnızca mikro mekanik incelemeler yapıldığında efektif kelimesi tam istenen

anlamda kullanılmış olur. Orta ölçekli seviyedeki incelemeleri dikkate alan sürekli ortam mekaniğinde bu kavram elastisite veya plastisite ile birleştirilmiş anlamda hasar değişkeninin içinde yer aldığından genel bir mana ifade eder (Lemaitre, 1996).

1.1.2.3. Gerinme Eşdeğerliği İlkesi

Her bir kusur tipi veya herhangi bir hasar mekanizması için mikro mekanik analiz yapmaktan kaçınmanın bir yolu orta ölçekli seviyede bazı ilkeleri ifade etmeyi zorunlu kılar. Termodinamikte yerel durum metodu, düşünülen noktaya bağımlı sürekli durum değişkenlerine ait bir cümlenin zamana göre değişimi ile tam olarak tanımlanmaktadır. Bu yaklaşım, bir mikro hacim elemanı için yazılan gerinme bünye denkleminin komşu hacim elemanında bulunan bir mikroçatlağı dikkate almadığını ifade eder. Dolayısıyla efektif gerilme ($\tilde{\sigma}$) terimi artık klasik anlamdaki gerilme σ ile aynı anlamda kullanılamaz. Bu ilke sayesinde aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Hasarlı bir malzeme için herhangi bir gerinme bünye denklemi, "Efektif gerilme" yerine klasik gerilme teriminin kullanıldığı durum hariç tutulmak kaydı ile hasarsız bir malzeme için yazılan şekilde türetilebilir.

Hasarsız malzeme

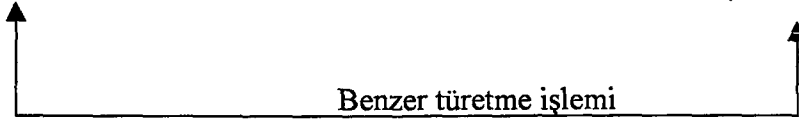
$$D = 0$$

$$\varepsilon = F(\sigma, \dots)$$

Hasarlı malzeme

$$0 < D < 1$$

$$\varepsilon = F\left(\frac{\sigma}{1-D}, \dots\right)$$



Homojenleştirme teknikleri ile birlikte yalnızca hasarın bazı özel durumları için açıklanmış olan bu ifade aslında bir prensiptir. Bu prensip elastisite veya plastisiteye uygulanabilir.

1.1.2.4. Gerinmeler ve Hasar Arasında Birleşik Etki, Yırtılma Kriteri ve Hasar Başlangıcı

Hasar mekaniğinin tanımı uyarınca ve gerinme eşdeğerlik ilkesinin direkt bir uygulaması olarak, hasarlı bir malzemenin elastisite ve plastisitesine ait tek eksenli kuralları yazabiliriz.

1.1.2.4.1. Elastisite kanunu

Bu kanun efektif gerilme kavramı dikkate alınarak yapılan direkt bir durum (veya hal) birleştirmesidir. Çizelge 1.2’de hasarlı bir malzeme ile, hasarsız bir malzemenin karşılaştırılması yapılmıştır. Hasarlı malzemenin elastisite modülü;

$$\tilde{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_e} \quad (1.9)$$

şeklindeki bir oranla tanımlanmıştır. Buradan;

$$\tilde{E} = E(1-D) \quad (1.10)$$

olarak elde edilir. Burada E, hasarsız malzemenin Young (Elastisite) modülüdür.

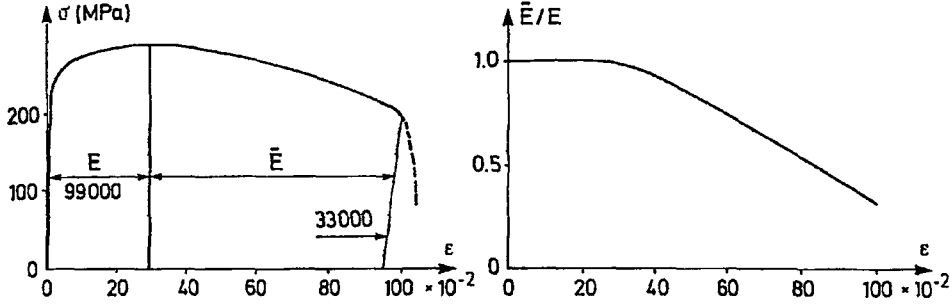
Çizelge 1.2. Hasarlı bir malzeme ile hasarsız bir malzemenin karşılaştırılması

Hasarsız malzeme	Hasarlı malzeme
$D = 0$	$0 < D < 1$
$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E}$	$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)}$

ν ; Poisson oranı olmak üzere, izotropik hasar için kısıtlama;

$$\epsilon_{22}^e = \epsilon_{33}^e = -\nu \epsilon_e; \quad (1.11)$$

şeklindedir.



Şekil 1.8. Bakır için hasarla birlikte elastisite modülünün değişimi (Lemaitre, 1996)

Şekil 1.8’de, sünek bir hasar ilerlemesi esnasında elastisite modülünün değişimine ait bir örnek gösterilmiştir. Bu örnekte ifade edilen sonuçlar aynı zamanda mikro mekanik metotlar vasıtası ile bir mikroçatlak çiftinden de elde edilebilir.

1.1.2.4.2. Plastisite

Bu durum, kinetik bünye denklemlerini türetmek için kullanılan plastisite kriterinde yazılmış plastik gerinmenin değerlendirilmesi üzerinde kinetik bir birleştirmeyi ifade eder. Plastisiteyi modellemek için genellikle iki tip gerinme sertleşmesi dikkate alınır:

- Dislokasyon yoğunluğunun veya akışın durdurulması ile ilgili izotropik sertleşme,
- İç mikro gerilme konsantrasyonlarının durumu ile ilgili kinematik sertleşme. Bu duruma karşılık gelen ikincil gerilme (akma gerilmesinden hemen sonra izotropik sertleşme başlangıcına kadar olan gerilme) çekme veya basmada (veya üç boyutta) elastik bölgenin merkezini tanımlar.

Eğer σ_y akma gerilmesi ise, R izotropik sertleşmeden dolayı oluşan gerilme ve X ise ikincil gerilmeyi göstermektedir, her iki plastik gerinme fonksiyonu da akma sınırının hemen başlangıcını tanımlayan bir boyutlu plastisite kriteri olarak düşünülebilir ve Şekil 1.9’da gösterildiği gibidir. Bu gerilme ifadelerini formülize edecek olursak;

$$\sigma = \sigma_y + R + X \quad \text{veya} \quad (1.12)$$

$$f = |\sigma - X| - R - \sigma_y = 0$$

yazılabilir. Burada f plastik gerinme için kinetik bünye denklemlerinden elde edilen akma fonksiyonudur ve aşağıdaki kısıtlamaların etkisinde türetilmiştir.

$$\exists \dot{\epsilon}_p \neq 0 \text{ eğer } \begin{cases} f=0 \\ \text{ve} \\ \dot{f}=0 \end{cases} \text{ ise, } \dot{\epsilon}_p = 0 \text{ eğer } \begin{cases} f < 0 \\ \text{ve} \\ \dot{f} < 0 \end{cases} \text{ ise}$$

Bu duruma ulaşmak için toplam gerilmeyi aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (1.13)$$

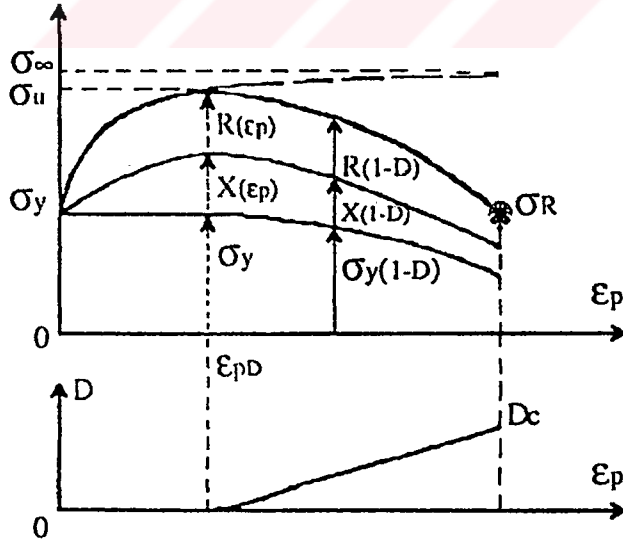
Hasar oluşmaya başladığı zaman, eşdeğerlik ilkesine göre akma fonksiyonu f aşağıdaki gibi yazılmalıdır.

$$f = \left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_y = 0 \quad (1.14)$$

Buradan toplam gerilme;

$$\sigma = (\sigma_y + R + X)(1-D) \quad (1.15)$$

olarak elde edilir.



Şekil 1.9. Hasarla birlikte plastisite akma kriterinin şematik bir değerlendirmesi (Lemaitre, 1996)

Şekil 1.9'dan da görüleceği gibi akma gerilmesi, izotropik gerinme sertleşme gerilmesi ve ikincil gerilme, hasarla orantılı olarak azalır.

1.1.2.4.3. Yırtılma kriteri

Orta ölçekte yırtılma Temsili Hacim Elemanının bütün yüzeyini işgal eden bir çatlak başlangıcıdır. Bu durumda $D = 1$ olmaktadır. Bir çok durumlarda bu yırtılma olayı gerilmeye direnen bölgede yer alan atomlara ait kohezyon kuvvetlerinin aniden ortadan kalkmasına sebep olan kararsız bir proses tarafından oluşturulur. Bu durum malzemeye ve yükleme şartlarına bağlı olan kritik bir hasar D_c değerine karşı gelir.

Atomlarda bulunan kohezyon kuvvetlerinin tamamen ortadan kalkması direnen alan üzerine etkiyen efektif gerilmenin kritik bir değeri ile karakterize edilmektedir. σ_∞ malzemeye uygulanabilen maksimum gerilme olarak adlandırılın (Şekil 1.9).

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D_c} = \sigma_\infty \quad (1.16)$$

Pratik olarak σ_∞ değeri en büyük gerilme (σ_u) ile tahmin edilebilir ve bunu belirlemek daha kolaydır. Ancak bu σ_u değeri daima diğerinden biraz daha küçüktür.

$$D_c \cong 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u} \quad (1.17)$$

ifadesi ise bir boyutlu gerilme için orta ölçekte çatlak başlangıcının oluşması esnasında hasarın kritik değerini verir. En büyük gerilme değeri σ_u bir malzeme özelliği olarak tanımlanmıştır. D_c ise 0 ile 1 arasında değişen değerler alabilir. Tamamen gevrek çatlama durumunda $D_c \cong 0$ ve tamamen sünek çatlama durumunda $D_c \cong 1$ olarak değerlendirilebilir. Ancak genellikle D_c , 0.2 ile 0.5 civarındaki değerleri almaktadır. Tamamen monotonik çekme testinin uygulandığı durumun referans olarak alındığı bu bağıntı kritik bir hasar (D_{1c}) değerini tanımlar ve bir malzeme özelliği olarak düşünülebilir.

$$D_{1c} = 1 - \frac{\sigma_R}{\sigma_u} \quad (1.18)$$

Burada; σ_R değeri yırtılma esnasında ortaya çıkan gerilme değerini ifade etmektedir.

1.1.2.4.4. Hasar başlangıcı

Mikroçatlaklar başlamadan önce D ile modellenen hasar meydana gelirken, metallerde dislokasyonların çoğalması ile veya mikro gerilmelerin tutarsız ve uygunsuz birleşmeleri nedeniyle oluşan mikro gerilmelerin artması ile hasar çekirdekçiklerinin oluşması gerekmektedir. Bu durum saf çekme halinde plastik gerinmenin belirli bir değerinin (ϵ_{pD}) altındaki bir değere karşılık gelir ve bu gerilme değerinde mikroçatlaklarla herhangi bir hasar oluşmaz.

$$\epsilon_p < \epsilon_{pD} \rightarrow D = 0$$

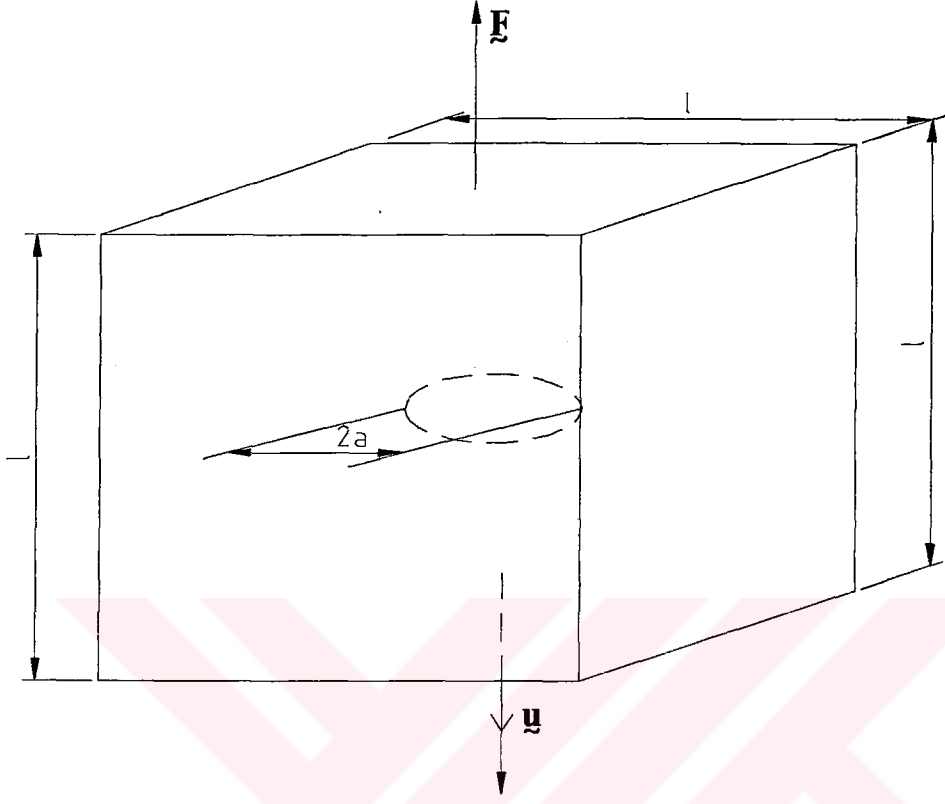
Sonuç olarak hasar mekaniğinin temellerini kapsayan dört ana bağıntı Çizelge 1.3'de gösterildiği gibi özetlenebilir.

Çizelge 1.3. Hasar mekaniğinde kullanılan temel kriterler (Lemaitre, 1996)

$\epsilon_e = \frac{\sigma}{E(1-D)}$	Elastisite için
$\left \frac{\sigma}{1-D} - X \right - R - \sigma_y = 0$	Plastik akma kriteri olarak
$\epsilon_p < \epsilon_{pD} \rightarrow D = 0$	Hasar başlangıcı olarak
$D = D_C$	Çatlak başlangıcı olarak

1.1.2.5. Efektif Hasar Alanının Mikromekaniği

Daha önce bir boyutlu yüzey hasarı değişkeni, en hasarlı bölgede mikroçatlakların ve boşlukların "Efektif" ara kesit yüzey yoğunluğu olarak tanımlanmıştı. Özel bir örnek kullanarak bunun anlamını açıklamaya çalışalım.



Şekil 1.10. Tek bir çatlak ihtiva eden orta ölçekli bir hacim elemanı (Lemaitre, 1996)

Çatlak düzlemine dik bir F yükü ile I modunda yüklenmiş bir tek dairesel çatlak içeren üç boyutlu ve orta ölçekli bir hacim elemanı dikkate alalım (Şekil 1.10). Sürekli ortam hasar teorisi ile tanımlanan genel hasar, çatlak düzlemindeki hasardır.

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \text{ idi.}$$

yani,

$$D = \frac{\pi a^2}{l^2} k \quad (1.19)$$

şeklindedir. Burada k , efektif hasarlı alanı tanımlamak için çatlak ucu çizgisi civarında gerilme konsantrasyonundan dolayı kullanılan bir düzeltme faktörüdür.

1.1.3. Anizotropik Hasar Analizi

Hasarın izotropik olarak ele alınması kabulü birçok durumda, özellikle gerilmelerin asal doğrultuları sabit kaldığı zaman düzgün (orantılı) yükleme şartlarında oldukça mantıklıdır. Bu kabul mühendislik uygulamalarında kabul edilebilir bir doğrulukla çatlak başlangıcı şartlarını önceden tahmin etmemize imkan tanır. Burada %10~50 arasındaki bir belirsizlikle ömür tahmininin yapılabileceğini söylemek yerinde olur. Bununla birlikte özel yükleme şartları altındaki bütün malzemeler ve oldukça gevrek malzemeler izotropik olmayan bir hasar gösterir. Bu durumdaki hasar değişkeni artık skaler değildir (Lemaitre, 1996).

Hasar durumlarının ifade edilmesinde; en basit halde skaler, daha karmaşık durumlarda ise vektörel ve tansörel olarak ifadelerin mevcut olduğu literatürde yapılan çalışmalardan görülmektedir. Hasarın tansörel olarak tanımları göz önüne alındığında ise; ikinci dereceden, dördüncü dereceden ve sekizinci dereceden tansör olarak tanımlamaların yapıldığı görülmektedir.

Hasar durumlarının skaler olarak ifade edildiği yaklaşımlarda, hasarlı ve hasarsız konfigürasyonlar dikkate alınır. Hasarlı konfigürasyonda hasar nedeniyle kaybolan alanın, hasarsız (başlangıç) konfigürasyondaki kesit alanına oranı skaler bir değer olarak hasarı ifade eder.

Hasar durumu ikinci dereceden ve dördüncü dereceden bir tansör olarak ifade edildiğinde, mevcut hasarlı konfigürasyon ve gerinme eşdeğerli hasarsız konfigürasyon dikkate alınır. Bu iki konfigürasyon arasındaki transformasyon ikinci dereceden bir tansörle ilişkilendirilmiştir.

Hasar durumunun sekizinci dereceden bir tansör olarak ifade edildiği yaklaşım ise; $(3)^8 = 6561$ elemanlı bir tansör ile çalışmayı gerektireceğinden, pratik anlamda bu yaklaşımı kullanmak adeta mümkün değildir. Ancak bazı simetriler dikkate alınarak, bu tansörün derecesi düşürülerek kullanılabilir bir forma getirilebilir. (Cauvin ve Testa, 1999) tarafından yapılan bir incelemede, hasarlı ve hasarsız malzemenin

elastisite modülleri dördüncü dereceden bir tansör olarak ifade edilmiş ve bunlar arasındaki ilişki yardımıyla hasar durumu sekizinci dereceden bir tansör olarak ortaya konulmuştur.

1.1.3.1. Maksimum Asal Gerilme Hasarı Kavramı

Anizotropik hasarı modellemek için basit bir yol hasarın yalnızca maksimum asal gerilmeye dik düzlemde oluştuğunu kabul etmektir. Hasar bu durumda D ile gösterilen bir yoğunlukla karakterize edilmiştir ve maksimum asal gerilmenin yönüne ait birim vektör \bar{n}_p ile belirlenmiştir. Bu durumda hasar vektörü,

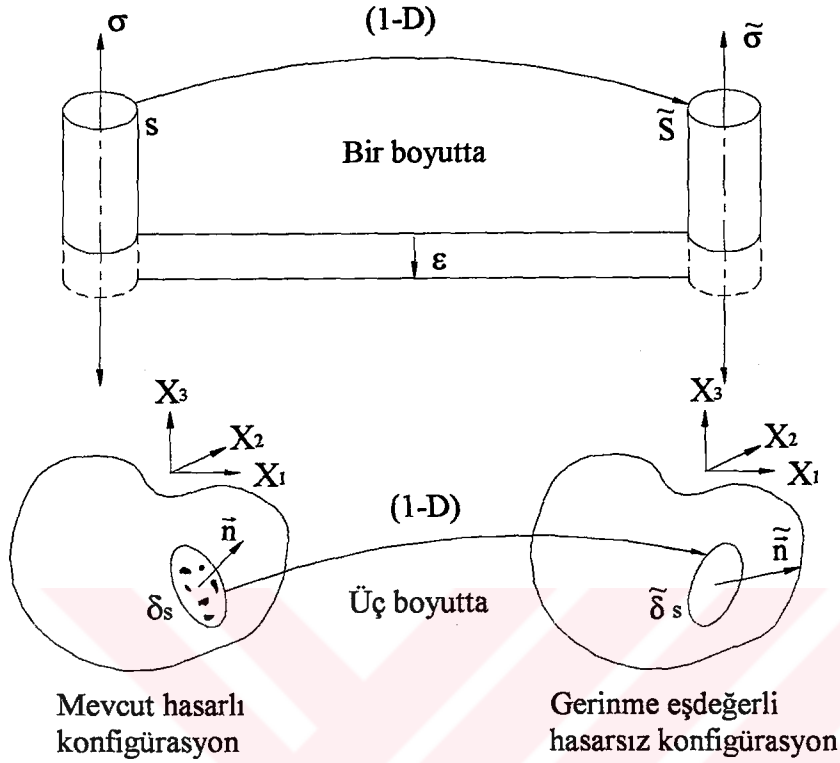
$$\bar{D} = D \bar{n}_p \quad (1.20)$$

ile ifade edilir. Efektif gerilme, asal gerilme koordinatlarından aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[\tilde{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1-D} \end{bmatrix} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \text{ ise} \quad (1.21)$$

1.1.3.2. İkinci Dereceden Hasar Tansörünün Geometrik Olarak Belirlenmesi

Oldukça kompleks bir anizotropi tipi ve orantılı (düzgün) olmayan bir yükleme tipi kullanıldığı zaman bölüm 1.1.2.1’de bir boyutlu durum için takdim edilen yüzeysel hasarın tanımını biraz daha genişletmek gerekir. Mevcut konfigürasyonun yüzey alanını δS ile, yüzeydeki hasarı da δS_D ile gösterdiğimizizi hatırlayacak olursak; $\delta S - \delta S_D = \delta S(1-D)$ ifadesinin hasarsız konfigürasyonun gerilme eşdeğerli hasarsız alanını temsil eder. Bu yaklaşımı anizotropik hasara genişletmeye çalışalım.



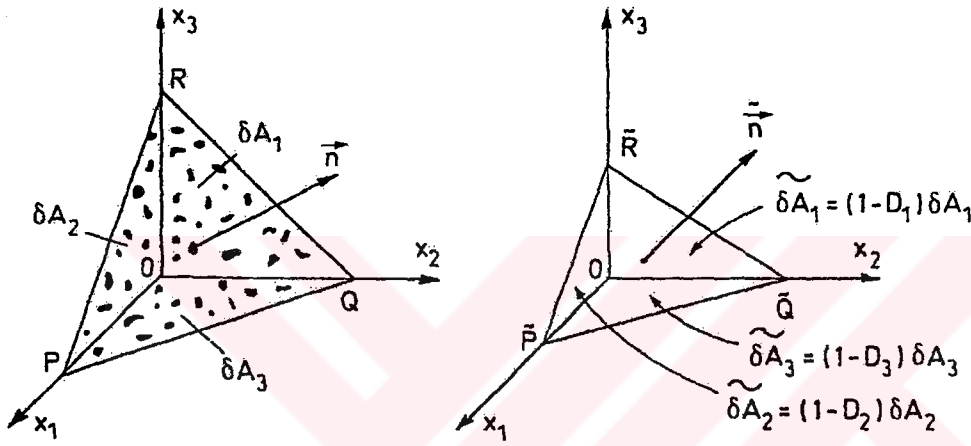
Şekil 1.11. Bir boyutlu izotropik hasar ve üç boyutlu anizotropik hasar (Lemaitre, 1996)

Mevcut konfigürasyonda yüksüz, hasarlı bir malzemenin Temsili Hacim Elemanını göz önüne alalım. Şekil 1.11'de gösterildiği gibi bu konfigürasyonun yüzeyi δS ve kesit alanını tanımlayan birim normal vektör veya yönelim \tilde{n} ile tanımlanmıştır. Aynı koordinat sisteminde gerinme eşdeğerli hasarsız konfigürasyonu da göz önüne alalım. Bu durumda Temsili Hacim Elemanı değişmiştir ve özellikle kesit alanı, hasarın anizotropisinden dolayı daha küçük bir alana $(\delta \tilde{S})$ dönüştürülmüş ve bu alanın yönelimi de \tilde{n} ile gösterilmiştir. Şeklin aynı kaldığını kabul edelim, bu kabulün ortotropik hasara karşılık geldiğini daha sonra göreceğiz. $\tilde{n} \delta S \rightarrow \tilde{n} \delta \tilde{S}$ alanına dönüştürülmüştür. Bir boyutlu durumdaki ile benzer şekilde ikinci dereceden bir tansör $\tilde{n} \delta S$ vektörünü, hasarı karakterize eden $\tilde{n} \delta \tilde{S}$ vektörüne dönüştürmüştür. Bu dönüşüm $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})$ ile gösterilmiştir. Burada $\underline{\underline{I}}$; ikinci dereceden birim tansörü ifade eder.

$$(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}) \cdot \bar{n} \delta S = \tilde{n} \delta \tilde{S} \quad (1.22)$$

veya indis notasyonu ile $(I_{ij} - D_{ij}) n_j \delta S = \tilde{n}_i \delta \tilde{S}$

şeklinde yazılabilir. Burada $\underline{\underline{D}}$, ikinci dereceden hasar tansörüdür. Hasar tansörü simetriktir ve X_1, X_2, X_3 koordinatlarında çizilen bir dörtyüzlünün alanlarının indirgenmesine karşılık gelen asal koordinatlarda (X_1, X_2, X_3) üç asal değere yani, D_1, D_2, D_3 'e sahiptir.



Şekil 1.12. Hasar tansörünün asal değerleri (Lemaitre, 1996)

Mevcut konfigürasyonda bir OPQR dörtyüzlüsünde δS alanının büyük üçgen yüzeyi PQR olsun. Bu yüzeyin gerinme eşdeğerli hasarsız konfigürasyonda $\delta \tilde{S}$ alanına sahip bir $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ üçgenine dönüştüğünü kabul edelim (Şekil 1.12). Bu şartlar altında aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} PQR &\rightarrow \tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R} \rightarrow (I_{ij} - D_{ij}) \cdot n_j \delta S = \tilde{n}_i \delta \tilde{S} \\ \bar{n} = \bar{X}_1 \quad OQR &\rightarrow O\tilde{Q}\tilde{R} \rightarrow (1 - D_1) \delta A_1 = \delta \tilde{A}_1, \\ \bar{n} = \bar{X}_2 \quad ORP &\rightarrow O\tilde{R}\tilde{P} \rightarrow (1 - D_2) \delta A_2 = \delta \tilde{A}_2, \\ \bar{n} = \bar{X}_3 \quad OPQ &\rightarrow O\tilde{P}\tilde{Q} \rightarrow (1 - D_3) \delta A_3 = \delta \tilde{A}_3 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Üç düzleme göre simetrinin bu özelliği hasarı ortotropik hale getirir. Bu kısıtlamaya rağmen hasarın bu tipi geniş bir uygulama alanını kapsar. Efektif gerilmeyi tanımlamak için, gerilme vektörü \bar{T} 'yi iki konfigürasyonda da yazalım. Bir boyutlu durum için;

$$T_i \delta S = \tilde{T}_i \delta \tilde{S} \quad (1.24)$$

Efektif gerilme tansörü $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ ' yı aşağıdaki gibi takdim ederek;

$$\tilde{\sigma}_{ij} \tilde{n}_j = \tilde{T}_i, \quad (\text{Cauchy gerilme prensibi}) \quad (1.25)$$

ifadesini yazabiliriz (Lemaitre, 1985). Bu ifadeyi yukarıdaki denklemden kullanacak olursak;

$$\sigma_{ij} n_j \delta S = \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{n}_j \delta \tilde{S}, \quad (1.26)$$

veya $(\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}})$ 'nin tanımını kullanarak

$$\begin{aligned} \tilde{n}_j \delta \tilde{S} &= (\mathbf{I}_{ij} - \mathbf{D}_{ij}) n_i \delta S, \\ \sigma_{ij} n_j &= \tilde{\sigma}_{ij} (\mathbf{I}_{kj} - \mathbf{D}_{kj}) n_k \quad \forall \tilde{n} \end{aligned} \quad (1.27)$$

elde edilir. Bu durumda efektif gerilme tansörü de aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}})^{-1}, \quad (1.28)$$

fakat bu ifade simetrik olmayan bir tansörün oluşmasına yol açar. Elastisite ve plastisitenin bünye denklemleri için yalnızca simetrik kısmı göz önüne alacağımızdan efektif gerilme tansörünü aşağıdaki gibi yalnızca simetrik kısmıyla göz önüne alalım.

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = \frac{1}{2} \left[\underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}})^{-1} + (\underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{D}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right] \quad (1.29)$$

Gerilmenin asal yönleriyle hasar çakıştığı zaman aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$[\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1-D_3} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Simetrik ikinci dereceden bir tansör olarak $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ 'nin tanımı ve efektif gerilmeyle ilgili durumu, izotropik durumda yapılarına benzer şekilde tam bir ortotropik hasar mekaniği teorisi geliştirmek için temel teşkil eder. Yalnız buradaki işlemler biraz daha karmaşıktır. Özellikle ilgili değişkenler $\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$ gibi ikinci dereceden bir tansör olarak ortaya çıkar. Hasarla birleştirilmiş lineer elastisite için Helmholtz serbest enerji potansiyeli bir skaler olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\psi = \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{2} (I_{ij} - D_{ij}) a_{imkl} \varepsilon_{jm}^e \varepsilon_{kl}^e \right] + \psi_p, \quad (1.31)$$

Burada, ψ_p , \underline{D} 'ye bağımlı olmayan plastik kısmı göstermektedir. Şimdi, aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\bar{Y}_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial D_{ij}} = -\frac{1}{2} a_{imkl} \varepsilon_{jm}^e \varepsilon_{kl}^e \quad (1.32)$$

veya daha önceki tanımlamalarımızdan faydalanarak;

$$Y_{ij} = \frac{1}{2} a_{imkl} \varepsilon_{jm}^e \varepsilon_{kl}^e \quad (1.33)$$

şeklinde yazabiliriz.

1.1.3.3. Dördüncü Dereceden Hasar Tansörünün Termodinamik Tanımı

Hasar değişkenini tanımlamak için bir diğer yol, elastisite için gerinme eşdeğerliği ilkesiyle ilgili efektif gerilme kavramını kullanmaktır. Hasarla birleştirilmiş elastisite denklemlerinin bir boyutlu durum için aşağıdaki ifadelerle verildiğini hatırlarsak;

$$\tilde{\sigma} = E \varepsilon_e,$$

veya,

$$\sigma = \tilde{E} \varepsilon_e,$$

$$(1 - D) = \frac{\tilde{E}}{E}$$

Gerinme eşdeğerliği ilkesini kullanarak yukarıdaki yaklaşım doğrultusunda hasarlı bir Temsili Hacim Elemanın üç boyutlu durumda elastisite denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tilde{\sigma}_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (1.34)$$

Bu ifade aynı zamanda durum potansiyelinden de türetilebilir.

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \tilde{a}_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e + \psi_p, \quad (1.35)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = \tilde{a}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (1.36)$$

Burada $\tilde{\underline{\underline{a}}}$ hasar tarafından düzeltilmiş elastisite tansörüdür. $\tilde{\underline{\underline{a}}}$ 'nın tersinin mevcut olduğunu kabul ederek;

$$\varepsilon_{kl}^e = \tilde{\underline{\underline{a}}}_{klij}^{-1} \sigma_{ij} \quad (1.37)$$

ifadesini yazabiliriz. Sağır indisleri değiştirerek $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_{ij}$ için bir önceki denklemde bu ifadeyi yerine yazacak olursak,

$$\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}_{ij} = a_{ijkl} \tilde{\underline{\underline{a}}}_{klrs}^{-1} \sigma_{rs} \quad (1.38)$$

Efektif gerilmenin tanımıyla birlikte $(a_{ijkl} \cdot \tilde{\underline{\underline{a}}}_{klrs}^{-1})$ hasar operatörünü ifade eder. Bir boyutlu durumla bir kıyaslama yapacak olursak dördüncü dereceden bir tansörle karşı karşıya olduğumuzu görürüz. Bu tansörü aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz.

$$(\underline{\underline{I}}_{ijkl} - \underline{\underline{D}}_{ijkl})^{-1} = a_{ijrs} \tilde{\underline{\underline{a}}}_{rskl}^{-1}, \quad (1.39)$$

Burada $\underline{\underline{D}}_{ijkl}$ dördüncü dereceden bir tansör olan hasar değişkeninin bileşenini, $\underline{\underline{I}}$ dördüncü dereceden simetrik birim tansörü ifade eder.

$$\underline{\underline{D}}_{ijkl} = \underline{\underline{I}}_{ijkl} - a_{ijrs} \tilde{\underline{\underline{a}}}_{rskl}^{-1}, \quad (1.40)$$

veya $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{I}} - \tilde{\underline{\underline{a}}} : \underline{\underline{a}}^{-1}$,

Burada $(:)$ sembolü, iki indis üzerinden kısıtlanmış bir çarpımı ifade eder. Bu durumda ilgili $\underline{\underline{Y}}$ değişkeni de dördüncü dereceden bir tansördür.

$$\psi = \frac{1}{2\rho} \tilde{\underline{\underline{a}}}_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e + \psi_p,$$

$$\tilde{\underline{\underline{a}}}_{ijkl} = (\underline{\underline{I}}_{ijrs} - \underline{\underline{D}}_{ijrs}) a_{rskl} = a_{ijkl} - \underline{\underline{D}}_{ijrs} a_{rskl}; \quad (1.41)$$

$$\psi = \frac{1}{2\rho} (\underline{\underline{I}}_{ijrs} - \underline{\underline{D}}_{ijrs}) a_{rskl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e + \psi_p,$$

veya,

$$\bar{\underline{\underline{Y}}}_{ijkl} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{D}}_{ijkl}} = -\frac{1}{2} a_{klrs} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{rs}^e \quad (1.42)$$

$$\underline{\underline{Y}}_{ijkl} = \frac{1}{2} a_{klrs} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{rs}^e$$

Bu teori en genel anizotropik duruma karşılık gelir. Hasara yol açan genel mikroçatlak çiftlerinin mikromekaniği bir skaler, ikinci dereceden bir tansör ve dördüncü dereceden bir tansör şeklinde hasarı ifade eder (Lemaitre, 1996).

1.2. Maddesel Hasarın Genel Bir Tanımı

Bu bölümde, maddesel hasarın fiziksel olarak tutarlı bir tanımı ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bu tanım; atomlar arası enerjinin fiziksel kavramları, atomik bağların kırılması ve yeniden oluşturulması üzerine oturtulmuştur. Maddesel hasar durumları fiziksel olarak genel anlamda atomik bağların konfigürasyonu ile belirlenmektedir. Boşluklar, dislokasyonlar, küçük gözenekler, kaymalar, mikroboşluklar, mikroçatlaklar vb. gibi orta ölçekli karakteristikler, her biri özel bir konfigürasyona karşılık gelen alt sistemlerin kullanılmasıyla nicel olarak ifade edilebilir. Buradaki tanımla temsil edilen maddesel hasara ait bünye denklemleri hem nonlokal, hem de lokal teoriler yardımıyla geliştirilmiştir.

Pratikte karşılaştığımız pek çok mühendislik malzemelerinin veya yapılarının aşınma olayı zaman ve çevreye bağlı hasarın sonucudur. Son otuz yılda, araştırmacılar bu prosesi nicel olarak (miktar yönünden) açıklamak için teoriler ve analitik modeller geliştirmeye çalışmaktadırlar. Bu teoriler ve modeller; mikro, meso ve makro davranışları içeren geniş bir fiziksel karakteristik aralığını tanımlamak için farklı ölçekteki parametrelerin tanımlanmasına ihtiyaç duymaktadırlar. Mikro, meso ve makro davranışları içeren bu modeller güçlü veya zayıf, nonlokal veya lokal teorilere göre sınıflandırılmaktadır.

Lokalleştirme özelliği yani ortamın elemanlarını "Sonsuz küçük almak" şeklinde düşünmek Sürekli Ortamlar Mekaniği ve Makro Sürekli Hasar Mekaniğinin bütün klasik teorilerinin doğasında mevcuttur. Nonlokaliteden lokaliteye geçiş, nispeten küçük matematiksel ifadeleri dikkate almayarak matematiksel analizde büyük oranda basitleştirmeler yapmıştır.

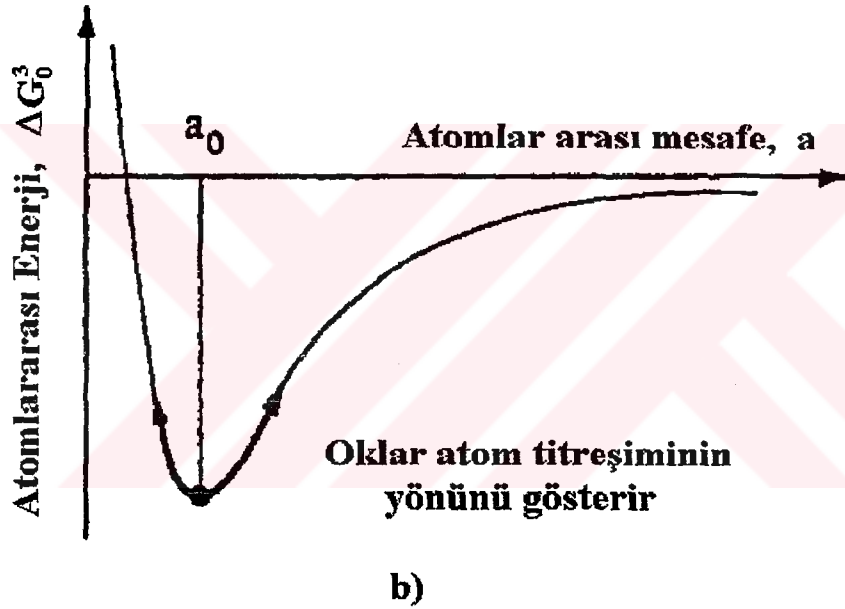
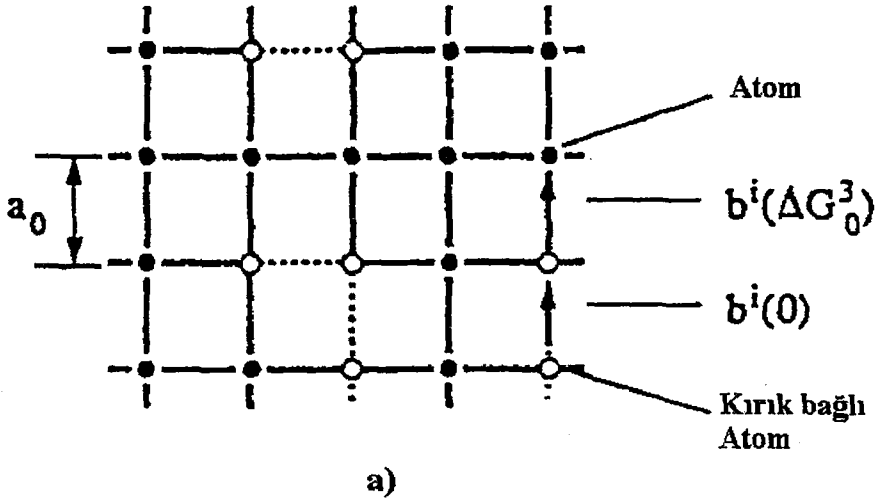
Yarı-Sürekli Ortam ve Ayrık Ortam arasındaki birebir karşılık şartı öyle bir şekilde sağlanmaktadır ki, tamamen analitik fonksiyonların özel bir sınıfına karşılık gelmektedir ve ayrık bir argümanın interpolasyon fonksiyonları olarak Yarı-Sürekli Ortam ifade edilebilmektedir. Fiziksel basitleştirmelerin örneği, kendi kendisiyle tutarlı olan ve efektif alan teorileri olarak adlandırılan teorilerle yapılmıştır.

Teoriden, ölçek parametreleri ile temsil edilen hücreler (kayma düzlemi, kusur veya çatlak vs.) bitişik veya komşu hücrelerin etkisini dikkate alacak şekilde uygun bir tarzda, homojen bir ortam içerisinde göz önüne alınmaktadır. Bu teoriler Ayrık ve Sürekli Ortamları birleştirilmiş bir düzen içerisinde tanımlayıp, gerilme ve gerinme gibi Sürekli Ortamlar Mekaniğine ait kavramları genelleştirebilmektedirler. Bununla beraber hasar; malzemenin bünye teorisi içinde bir iç değişken olarak takdim edildiği zaman, hasarın fiziksel ve geometrik olarak tutarlı bir tanımının eksikliğinden dolayı karışıklıklar ortaya çıkmaktadır.

1.2.1. Maddesel Hasarın Temel Kavramları ve Tanımı

1920'li yıllarda, malzemelerin gerçek mukavemetinin, mükemmel bir kristal yapıya sahip malzemeden hesaplanan teorik mukavemetlerinden çok daha zayıf olduğu belirlenmiştir. Bunun sebebi olarak; malzemenin mekanik ve çevresel olarak hasara uğramadan önce belirli derecede bir hasara sahip olduğu gösterilmektedir. Bu yüzden, hasarı tanımlamak için bir katının atomik yapısını göz önüne almak mantıklı görülmektedir.

Kuantum Mekaniği teorisine göre; yoğunlaşmış fazlardaki atomlar denge pozisyonlarını işgal eder ve atomlar arası enerji eğrisinin bulunduğu bir ortamda (ortam civarında) titreşimlerini sürdürürler (Şekil 1.13). Dışarıdan bir iş uygulandığı zaman atomlar kendilerine ait denge pozisyonlarından ayrılırlar ve böylece sistemin potansiyel enerjisi değiştirilmiş olur (Woo ve Li, 1993).



Şekil 1.13. a) Basit kristal yapıda atomlar ve bağların konfigürasyonu. b) Atomlar arası enerjiyle iki atom arası mesafenin değişimi (Woo ve Li, 1993)

Eğer gerilme tarafından üretilen bir dış iş varsa ve sonuç deformasyon elastik ise, sistemin potansiyel enerjisi tersinir bir tarzda depolanmış olur. Gerilme ortadan kaldırıldığında ise atomlar denge pozisyonlarına geri döner ve sistemin potansiyel enerjisindeki artma azalır. Bu tersinir prosesin zamana bağımlı ve termal olarak aktive edilmiş durumu tersinmez bir proses olarak düşünülebilir. Bu şartlar altında, atomlar daha önceki bağların kırılması neticesinde kendi enerji engellerini aşar ve bağların yeni konfigürasyonunu tesis eder ve serbest enerjinin yeni bir denge aralığına hareket ederler. Diğer bir deyişle, tersinmez bir yapısal değişim veya hasar

oluşur. Bu temel gerçekten dolaydır ki; kristal yapılı malzemelerde ve polimerlerde hasar prosesi kimyasal bir reaksiyon olarak göz önüne alınmalıdır. Bu kimyasal reaksiyonda malzemenin kompozisyonu sabit kalır ancak atomların bağ yapıları değişir. Dolayısıyla bir iç değişken olarak D rasyonel bir şekilde tanımlandığı sürece hasar prosesini tanımlamak için tersinmez proseslerin termodinamik teorisi uygun görülmektedir.

1.2.1.1. n Tane Tek Atomik Bağ İçeren Sistem

Şekil 1.13 de gösterildiği gibi "Konfigurasyon uzayında" hareket eden atomları düşünelim, gerçek bir malzemenin iki atomu arasındaki bağ bir aksiyal vektörle belirlenmelidir.

$$\underline{b}^i(\Delta G^s) = b^i(\Delta G^s) \underline{L}_b^i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.43)$$

Burada; $b^i(0) = 0$, olmak üzere,

\underline{L}_b^i : Karakteristik yön vektörü,

ΔG^s : Atomlar arası tek enerjiyi gösterir (iki atom arası).

$\underline{b}^i(\Delta G^s)$: Atomlar arası enerjiye bağlı olan iki atom arasındaki kohezyon yoğunluğu olup, malzemenin fiziksel ve mikroyapısal karakteristiğinin bir göstergesidir.

$b^i(0) = 0$: İki atomu birleştiren i. bağı yok olduğunu ortadan kalktığını ifade eder.

$\underline{b}^i(\Delta G^s)$ bağıntısıyla, hasar iki şekilde tanımlanabilir. Birinci yol; $\underline{b}^i(\Delta G^s)$ in hasarın bir ölçüsü olarak $\underline{b}^i(\Delta G_0^s)$ ile kıyaslanmasının yapılmasıdır. Burada; ΔG_0^s , mükemmel malzemelerin atomlar arası enerjisini ifade eder. İkinci yol ise; kırılmış bağların sayısını yani $b^i(0) = 0$ şartını sağlayan bağların sayısını hasarın bir ölçüsü olarak dikkate almaktır. İlk bahsedilen durum için; hasar, mikroyapının bir karakteristiği olan atomlar arası enerji kavramına dayandırılmıştır. Bu durumda, $\underline{b}^i(\Delta G_0^s)$ ile temsil edilen ideal veya mükemmel durum, referans (hasarsız durum) olarak göz önüne alınmalıdır. Sonuç olarak, n tane atomik bağ ihtiva eden sistem için katı hasarın skaler ölçüsü olan D; ideal bir malzemenin atomlar arası enerjisinin

ağırlıklı toplamı ile pratikte kullanılan bir malzemenin atomlar arası enerjisinin toplamı arasındaki fark olarak tanımlanmıştır (İdeal bir malzemenin atomlar arası enerjisinin ağırlıklı toplamları üzerinde boyutsuzlaştırma yapılmıştır). Yani;

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (b^i(\Delta G_0^s) - b^i(\Delta G^s)) \underline{N}}{\sum_{i=1}^n b^i(\Delta G_0^s) \underline{N}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n b^i(\Delta G^s) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}{\sum_{i=1}^n b^i(\Delta G_0^s) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}, \quad (1.44)$$

burada ağırlık fonksiyonu; her bir atomik bağın birim yön vektörü \underline{L}_b^i ile göz önüne alınan düzlemin birim normal vektörü \underline{N} nin skaler çarpımı olduğu düşünülmüştür. Bu tanım, metalurjik veya sentetik proseslerle yüklenmiş malzemelerin nicel veya nitel hasar analizinde faydalı olabilir. Mekanik hasarın tanımı için çok daha uygun olabilecek bir yol, maddesel hasarın bir ölçüsü olarak bağların kırılıp kırılmadığını dikkate almaktır. Bu durum için, birim normal vektörü \underline{N} olan maddesel bir hücre düzleminde hasarın skaler ölçüsü D aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n s(b^i(\Delta G^s)) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}{\sum_{i=1}^n \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}, \quad (1.45)$$

burada n; göz önüne alınan düzlem ve seçilen fonksiyon boyunca bağların sayısını gösterir.

$$S(b^i(\Delta G^s)) = \begin{cases} 1, & b^i(\Delta G^s) = b^i(0) = 0 \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi taktirde} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.46)$$

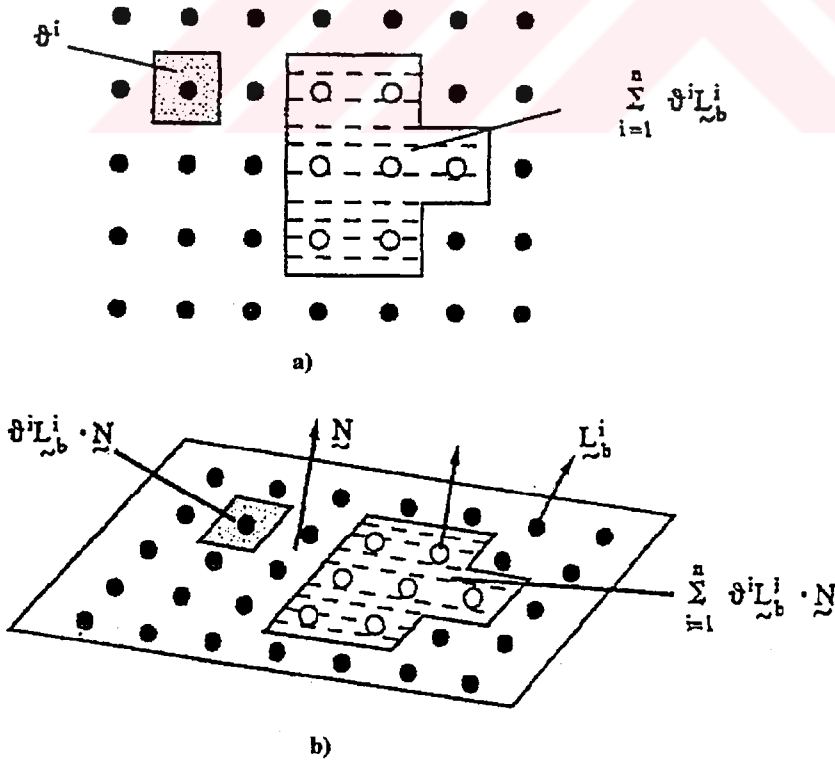
$S(b^i(\Delta G^s))$ terimi, tam ve sağlam bağlardan kırılmış-kopmuş bağları ayıran bir seçici gibi davranır. $\underline{L}_b^i \cdot \underline{N}$ ise göz önüne alınan düzlemin normal doğrultusu boyunca atomik bağın yön vektörünün izdüşümüdür ve hasar üzerinde bağların yön değişimi olarak davranır. i. bağın karakteristik alanı olarak; normal vektörü \underline{L}_b^i olan bir düzlem üzerine sistem konfigürasyon uzayında yer kaplayan bir atomik bağın efektif uzayının izdüşümü tanımlanmış ve \mathcal{S}^i olarak gösterilmiştir. Birim normal vektörü \underline{N} olan düzlem üzerine \mathcal{S}^i nin izdüşüm alanı $\mathcal{S}^i \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}$ dir (Şekil 1.14). Dolayısıyla, düzlemi geçen n tane atomik bağın toplam alanı A, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$A = \sum_{i=1}^n \vartheta^i L_b^i \cdot \underline{N} \quad (1.47)$$

Eğer, $\vartheta =$ ortalama $(\vartheta^i) = \langle \vartheta^i \rangle$, $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ şeklinde alınırsa;

$$A = \vartheta \sum_{i=1}^n L_b^i \cdot \underline{N} \quad (1.48)$$

yazılır. (1.48) denkleminde $L_b^i \cdot \underline{N}$ nin anlamı açıkça görülmektedir. Eğer istatistiksel anlamda ortalama alma prosesi benimsenirse, boşlukların, dislokasyonların, kaymaların, mikroboşlukların, mikroçatlakların vb. nin etkilerini içeren malzemelerin orta ölçekli karakteristikleri tamamen gizlenmiş olacaktır. Bundan kaçınmak için, bağları orta ölçekli karakteristiklerine göre gruplandırmak ve birebir bağların toplamını düşünmek yerine bu bağların gruplarını göz önüne almak tavsiye edilmektedir. Bunu yapmak için; her bir grubu bir alt sistem olarak göz önüne alalım. Sistemin konfigürasyonu, alt sistemlerin toplam konfigürasyonlarının konfigürasyonu olarak ele alınacaktır.



Şekil 1.14. a) Bağların karakteristik alanı. b) Birim normal vektörü \underline{N} olan düzlem üzerine ϑ^i nin izdüşüm alanı (Woo ve Li, 1993)

1.2.1.2. m Tane Alt Sistem İçeren Sistem

Kullanılan ölçüğe bağımlı olarak, bir alt sistem çok değişik şekillerde ortaya konulabilmektedir. Örneğin;

- a) Birbirlerine komşu olan ve aynı atomlar arası enerjeye sahip olan bağları bir alt sistem olarak birlikte gruplandırarak,
- b) Birbirlerine komşu olan ve aynı yönelime sahip olan bağları bir alt sistem olarak birlikte gruplandırarak,
- c) Aynı atomlar arası enerjeye sahip olan ancak bütün sistem içerisinde rasgele dağılmış olan bağları bir alt sistem olarak gruplandırarak.

Özetlemek gerekirse, her bir alt sistem için katının bir tek orta ölçekli karakteristiği vardır. Malzeme düzlemindeki bir hücrede hasar; düzlem boyunca geçen bağlara sahip bu alt sistemlerin konfigürasyonlarından oluşmuş bir sistem konfigürasyonu tanımlanabilmelidir. Bununla beraber, pratik şartlar için, sıfır kalınlıklı çok hassas bir düzleme tercihen, karakteristik kalınlığı $2t$ olan bir düzlem bandında alt sistem oluşturulmalıdır. Dolayısıyla da, $2t$ kalınlıklı bir düzlem hücrede malzemenin orta ölçekli karakteristiklerini tanımlayan m tane vektörel fonksiyonla belirlenmiştir.

$$g^i(\Delta G^g, \chi) = g^i(\Delta G^g, \chi) \underline{L}_g^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.49)$$

burada, χ ; sistemin konfigürasyon uzayında alt sistemlerin yeriyle ilgili karakteristik bir değişkendir, \underline{L}_g^i ; alt sistemin karakteristik birim yön vektörüdür ve ΔG^g ; göz önüne alınan alt sistemin serbest enerjisini gösterir, bu serbest enerjiden enerji bariyerinin yoğunluğu belirlenmiştir. Çok kristalli bir katının tane sınırının bir kısmını temsil etmek için bir grup bağlardan bir alt sistem oluşturulduğu zaman, enerji bariyeri dış iş tarafından aşılması gereken bir direnci belirler ve \underline{L}_g^i tane düzleminin birim normal vektörüdür. Bir mikroçatlağı temsil etmek için $\Delta G^s = 0$ olacak şekilde bir alt sistem özel bağlarla gruplandırılmış ise, ΔG^g sifira eşittir ve \underline{L}_g^i mikroçatlak düzleminin birim normal vektörünü gösterir.

Bölüm 1.2.1.1 de belirtilen tanıma karşılık, göz önüne alınan düzlemdeki hasar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^m (g^i(\Delta G_0^s, \chi) - g^i(\Delta G^s, \chi)) \mathbb{N}}{\sum_{i=1}^n g^i(\Delta G_0^s, \chi) \mathbb{N}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m g^i(\Delta G^s, \chi) \mathbb{L}_g^i \cdot \mathbb{N}}{\sum_{i=1}^m g^i(\Delta G_0^s, \chi) \mathbb{L}_g^i \cdot \mathbb{N}} \quad (1.50)$$

ve

$$D = \frac{\sum_{i=1}^m s(g^i(\Delta G^s, \chi)) \mathbb{L}_g^i \cdot \mathbb{N}}{\sum_{i=1}^m g^i(\chi) \mathbb{L}_g^i \cdot \mathbb{N}} = \frac{\sum_{i=1}^m s(g^i(\Delta G^s, \chi)) \mathbb{L}_s^i \cdot \mathbb{N}}{\sum_{i=1}^m \mathbb{L}_s^i \cdot \mathbb{N}} \quad (1.51)$$

burada, birim normal vektörü \mathbb{N} olan ve $2t$ kalınlığında düzlem hücredeki alt sistemlerin sayısı m ile gösterilmiştir. Seçilen fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$s(g^i(\Delta G^s, \chi)) = \left\{ \begin{array}{l} g_1^i(\chi), \quad \Delta G^s = 0 \text{ olduğunda} \\ 0, \quad \text{aksi takdirde} \end{array} \right\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.52)$$

burada $g_1^i(\chi)$ yerin bir fonksiyonudur.

1.2.2. Önerilen Tanımın Özellikleri

(1.44) ve (1.50) denklemleriyle tanımlanan maddesel hasar, atomik bağların atomlar arası enerjisine ait fiziksel bir kavram üzerine oturtulmuştur. Bu fiziksel kavram katıların mikroyapılarının karakteristiğidir. Aktif enerjisi (bağ enerjisi) ΔG_0^s olan ideal veya mükemmel bir kristal yapı, maddesel hasarın nicel bir temsili için referans noktası olarak alınmıştır. Böyle yapmanın asıl avantajı; malzemede metalurjik veya sentetik prosesler tarafından oluşturulan hasarın nicel olarak temsil edilme zorunluluğuna cevap vermiş olmasıdır. Nitekim, $b^i(\Delta G_0^s)$ daima $b^i(\Delta G^s)$ 'e eşit veya daha büyüktür ve $b^i(\Delta G^s)$ bütün "i" ler için sıfıra eşit veya daha büyüktür. (1.44) ve (1.50) denklemleriyle tanımlanan hasar daima sıfır ve bir arasında bir değer alır. (1.45) denklemiyle tanımlanan hasar, dış yükleme ve/veya çevresel etkiler tarafından oluşturulan maddesel hasarın tanımlanması için çok daha uygun olabilir. Kayma düzlemi, mikroboşluklar, mikroçatlaklar vb. durumları içeren orta ölçekli

karakteristikler (1.51) denklemiyle matematiksel olarak açıklanan bir alt sistem kavramının takdim edilmesiyle kullanışlı bir şekilde tanımlanmış olabilir. (1.45) ve (1.51) denklemleriyle tanımlanan hasarın sıfır ve bir arasında değerlere sahip olduğu açıkça görülmektedir, zira bu denklemlerin paylarının toplamındaki bazı pozitif terimler seçilen fonksiyonlarla ihmal edilmişlerdir.

Önerilen tanıma göre hasar durumu, yalnızca sistemin atomik bağlarının durumuyla belirlenmiştir. Katının mikroyapısındaki değişiklikler belirli ölçülerde hasara katkıda bulunacaktır. Bozulma; mikroyapılardaki bazı değişikliklerden kaynaklanan mikroçatlakların bir sonucu olarak ortaya çıkmasına rağmen, o basitçe gerilme iletme kapasitesindeki bir azalma olarak hasarı belirlemeye (ifade etmeye) çalışmaz. Malzemenin iç yapısındaki bir değişim olarak hasar; fizikte çok daha geniş bir anlama sahip olmalıdır. Maddesel katılık veya gerilme yumuşamasında bir azalma olsun veya olmasın herhangi bir inelastik olay burada önerilen tanımla geniş anlamda tanımlanmış olmalıdır (Woo ve Li, 1993).

1.2.3. Maddesel Hasarın Mikromekaniği

Bir katıda mikroçatlakların çekirdeklenmesi ve büyümesinin yalnızca mikroyapıdaki tersinmez değişiklikler modunda meydana geldiğini düşünelim. İzdüşümlerin herhangi bir üst üste gelme durumuna müsaade etmeyecek şekildeki konsantrasyonlarda, düz (düzlemsel) mikroçatlakların rasgele bir dağılımı ile katı malzeme modellenmiştir. Bu mikroçatlakların, komşu mikroçatlakların etkisini yansıtacak şekilde homojenleştirilmiş efektif bir ortamla çevrelenmiş olduğunu kabul ediyoruz. Böyle bir katının nonlinear davranışları (Krajcinovic, 1985) tarafından incelenmiştir.

İlk önce, bir sistem olarak (1.43) denklemi ile tanımlanan n tane atomik bağın geçtiği A alanına sahip bir düzlem hücreli elemanter bir hacmi düşünelim. Bu hacim yeterli sayıda mikroçatlak içerecek kadar büyük ve hala bir maddesel nokta üzerinde

işaretlenecek kadar küçüktür. Bu sistem $m+1$ tane alt sistemden teşekkül etmiştir. $m+1$ tane alt sistem arasında, m tanesi aşağıdaki ifadeyle temsil edilmektedir.

$$g^i(\Delta G^g, \chi) = \left(\sum_{j=1}^{n_i} L_s^j \cdot L_g^i \right) L_g^i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.53)$$

burada n_i ; birim normal vektörü L_g^i olan düzlemden geçen i . alt sistem için bağların sayısını gösterir. Açıkça, i . alt sistem ile temsil edilen i . mikroçatlağın alanı, (1.48) denklemine göre;

$$\xi^i = \vartheta \sum_{j=1}^{n_i} L_s^j \cdot L_g^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (1.54)$$

ifadesiyle verilmektedir. ($m+1$). Alt sistem ise aşağıdaki ifadeyle temsil edilmektedir;

$$g^{(m+1)}(\Delta G^g, \chi) = \left(\sum_{i=1}^n L_b^i \cdot N - \sum_{j=1}^m g^j(\Delta G^g, \chi) \cdot N \right) N \quad (1.55)$$

(1.51) no'lu denkleme göre, hasar aşağıdaki ifadeyle tanımlanabilir;

$$D = \frac{\sum_{i=1}^m s(g^i(\Delta G^g, \chi)) L_g^i \cdot N}{\sum_{i=1}^n L_s^i \cdot N} = \frac{\sum_{i=1}^m \xi^i L_g^i \cdot N}{A} \quad (1.56)$$

Eğer, $L_g^i = L_g$ ise, $i=1$ den m 'e kadar, paralel mikroçatlıklar sistemi söz konusudur ve Krajinovic (1985) tarafından önerilen "Ortalama değişkenler" kavramı kullanılır. m adet mikroçatlaktan oluşan bir alan $\omega^i L_g$ ($j = 1, 2, 3, \dots, k$) ile ifade edilen k adet aksenal vektörle gruplandırılmış olabilir. Ayrıca; eğer yarım karakteristik kalınlık t , Krajinovic (1985) tarafından kullanılan karakteristik uzunluk l 'ye eşitse (1.56) denklemini aşağıdaki formda yazılır;

$$D = \frac{\sum_{i=1}^m \xi^i L_g^i \cdot N}{A} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{\xi}^j L_g \cdot N}{A} = \sum_{j=1}^k \omega^j L_g \cdot N \quad (1.57)$$

burada $\bar{\xi}^j$ terimi, ω^j ye karşılık gelen $(-1,1)$ bandı içerisinde mikroçatlak alanlarının toplamıdır. Bu temsil Krajinovic (1985) tarafından önerilen modelle aynıdır ve genel bir mikroçatlak alanına genelleştirilebilir.

1.2.4. Fenomenolojik (Makro) Teori

İç değişken olarak bir makro hasar değişkeni D 'yi takdim ettikten sonra, Hasar mekaniği; katılık ve mukavemet gibi katıların makroskopik mekanik özellikleri üzerindeki tersinmez mikroyapısal değişikliklerin etkilerini tanımlamak için kullanılabilir. Kachanov (1958) ve Rabotnov (1963) tarafından yapılan ilk ve öncü çalışmalardan beri Hasar Mekaniği teorisi hızlı bir şekilde gelişmiş ve makroskopik sürekli ortam seviyesinde mühendislik malzemelerinin ve yapılarının hasar proseslerini modellemek için pratik bir araç olarak kullanılmaya başlanmıştır (Woo ve Li, 1993).

Maddesel hasarı temsil etmek için, bir makro iç değişken olarak kullanılabilen, fiziksel olarak tutarlı bir tanım ortaya koyarken yalnızca tek alt sistemden oluşan atomik bağların bir sistemi, hasar değişkenini tanımlamak için dikkate alınmıştır. Şüphesiz sistem bir elemanter bir hacim kapsayacak ve bu hacim Hasar Mekaniğinde bir maddesel nokta olarak tanımlanacaktır.

Elemanter bir hacimden geçen birim normal vektörü \underline{N} olan bir düzlem hücre göz önüne alalım, düzlemden geçen n sayıdaki bütün bağlar için karakteristik alan \mathcal{G}^i nin aynı olduğunu düşünelim. (1.45) denkleminde hasar aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n s(b^i(\Delta G^s)) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}{\sum_{i=1}^n \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}} = \frac{\mathcal{G} \sum_{i=1}^n s(b^i(\Delta G^s)) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N}}{A}, \quad (1.58)$$

burada A , göz önüne alınan elemanın genel kesit alanıdır ve $s(b^i(\Delta G^s))$, (1.46) no'lu denkleminde tanımlanmıştır. Eğer \tilde{A} ; mikroçatlakların ve mikroboşlukların varlığı nedeniyle oluşan hasardan sonra dış yükü taşıyan efektif alanı gösteriyorsa, (1.48) denklemini dikkate alınarak;

$$\tilde{A} = A - \mathcal{G} \sum_{i=1}^n s(b^i(\Delta G^s)) \underline{L}_b^i \cdot \underline{N} \quad (1.59)$$

yazılabilir, dolayısıyla;

$$D = \frac{A - \tilde{A}}{A} = 1 - \frac{\tilde{A}}{A} \quad (1.60)$$

olur. Bu ifade Kachanov (1958) tarafından önerilen orijinal tanımla aynıdır. Çok daha karmaşık matematiksel formlara sahip tanımlar için, hasarın kinetik kanunları ile ilgili ileri derecede incelemeler için Li ve Woo (1993)'nun çalışmalarından yararlanılabilir.

1.2.5. Kesin Geometriye ve Yere Sahip Çatlaklar Tarafından Oluşturulan Hasar

Bir katıda bir veya daha fazla sayıda çatlağın geometrisi ve yeri kesin bir şekilde belirlendiği zaman, katının hasarı bu çatlakların büyümesiyle belirlenebilir. Bu durumda, bazı matematiksel formülasyonlar belirli bir katının genel karakteristik çatlak direncini tespit eden karakteristik değerlerin pratik ölçümleri için kaba bir temel sağlamak amacıyla geliştirilmiştir. Buna basit bir örnek, lineer elastik çatlak mekaniğidir. Bu modelde; homojen lineer elastik izotropik bir katıda mevcut olan çatlakların bir alanla çevrelenmiş olduğu kabul edilmiştir. Özel bir durum için, çatlak ucunda gerilme tekilliği olarak adlandırılan ve çok basit yükleme şartında bile çatlak ucuna bitişik kompleks gerilme alanlarının varlığı kabul edilmiştir (Woo ve Li, 1993). Bununla beraber, yerel bir karakteristik parametre olan gerilme yoğunluğu faktörü olan K , çatlak ucuna yakın kompleks gerilme alanını tanımlamak için takdim edilmiş ve çatlak kinetiğinin bünye denklemi oluşturulmuştur. Çatlağın bir elastik-plastik, plastik veya viskoplastik malzeme ile çevrelenmiş olduğu kabul edilerek çok daha pratik modeller geliştirilmiştir.

Çatlak mekaniği ve Hasar mekaniği ile geliştirilen teorilerde uygunluk sağlamak için makro ve mikroçatlakların karakteristik ölçüleri birbirleri ile irtibatlandırılmıştır, bunlar arasındaki bağıntı, bir ölçeklendirme sorunu şeklinde göz önüne alınabilir. Bununla birlikte, eğer çatlak mekaniği tarafından benimsenen K ve J gibi hemen hemen bütün karakteristik parametrelerin sürekli ortamların klasik teorileri tarafından geliştirildiği göz önüne alınırsa, çatlak mekaniğindeki ölçek sorunun yalnızca çatlak tarafından çevrelenen ortama işaret ettiği ve bunu dikkate aldığı

gözlenebilir. Diğer bir ifadeyle, ölçek sorunu göz önüne alınan çatlakların ölçüsüyle belirlenmemeli ancak çatlakları çevreleyen ortamla birlikte ele alınmalıdır. Aslında hem çatlak mekaniği hem de makro sürekli ortamlar mekaniği yerel teoriler üzerine oturtulmuştur. Hasar mekaniği ve çatlak mekaniği arasında iki temel fark vardır:

- 1) Hasar mekaniği için, katıların hasarını tanımlamak için bir iç değişken klasik sürekli ortamlar mekaniğine dayanan bünye denklemi içinde takdim edilmiştir.
- 2) Çatlak mekaniği için, keskin bir çatlağı içeren özel geometrik sınır şartları göz önüne alınmıştır, fakat bu durum Hasar mekaniğinde gerekli değildir.

Bir mikroçatlak yalnızca özel bir geometrik sınır değer problemi olarak ele alınabildiğinden, ölçek parametreleri çatlağın ölçüsünden bağımsız olacaktır. Bu durumda, çatlaklı bölgeyle ilgili hasarlı alan önerilen tanımla temsil edilebilir (Woo ve Li, 1993).

1.3. Hasar Geometrisi

Bünye denklemlerini elde edebilmek ve bu sayede de mekanik davranışın belirlenebilmesi için hasar değişkeninin öncelikle tespit edilmesi gerekmektedir. Serbest enerjinin hasar değişkeninin bir fonksiyonu olarak ele alınması ve invariantsların belirlenmesi gerekmektedir. Bu amaçla, hasar değişkeninin yapısının çok iyi anlaşılması gerekir. Başlangıçta lineer, homojen ve izotrop olarak kabul edilen malzeme, hasar nedeniyle anizotrop bir hale gelmektedir.

Literatürde yapılan çalışmalara baktığımızda hasarın en basit halde skaler, daha karmaşık durumlarda ise vektörel ve tansörel olarak ifade edilebildiği açıkça görülmektedir. (Weitsman, 1988) tarafından viskoelastik malzemeler için sürekli ortam hasar modeli başlığı altında yayınlanan makale de hasar, bir çok çatlak bulunduran malzemenin temsili bir hacim elemanı içerisinde "aktif" ve "pasif" mikroçatlakların toplam alanları ile ilgili iki adet simetrik ikinci dereceden tansörle ifade edilmiştir.

(Murakami, 1988) tarafından yapılan bir başka çalışmada da hasar bir tansör olarak ifade edilmiş; gerçek hasarlı konfigürasyon için ve elastik olarak yüksüz hasarlı konfigürasyon için ayrı ayrı tansör tanımlamasında bulunulmuş ve hasar durumu simetrik ikinci dereceden bir tansör olarak ele alınmıştır.

Bu bölümde; malzemelerin anizotropik hasar durumlarını tanımlamak ve efektif gerilme tansörlerinin tutarlı bir tanımını yapmak için sistematik bir teori, sürekli ortamlar hasar mekaniği çerçevesinde geliştirilmiştir. Hayali bir hasarsız konfigürasyon dikkate alınarak (gerçek hasarlı konfigürasyona mekanik olarak eşdeğer) klasik sürünme hasar teorisi, malzemelerin üç boyutlu genel hasar durumuna genelleştirilmiştir. Hasar durumunun simetrik ikinci dereceden bir tansör ile ifade edilebileceği gösterilmiştir. Fiziksel zorunluluklar, matematiksel kısıtlamalar ve bu hasar tansörünün sınırlamalarının, hasarlı durumdaki malzemenin sonlu deformasyonlarını nasıl etkilediği incelenmiştir. Hayali bir hasarsız konfigürasyon yaklaşımı aynı zamanda efektif gerilme tanımına da uygulanmıştır. Sonuç olarak; çatlak ucunun (civarının) etkilerine karşılık gelen efektif gerilmelerin

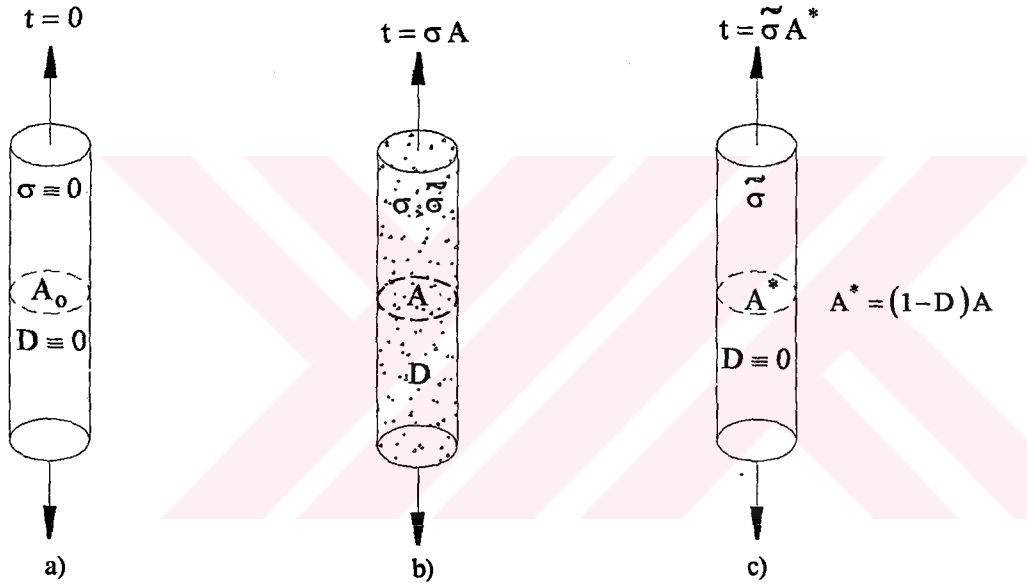
dağılımı tartışılmıştır. Çatlaklı elastik-gevrek bir malzemenin elastik davranışının gerilme-yörünge bağımlılığını incelemek için bileşke efektif gerilme tansörü kullanılmıştır.

$\underline{\underline{D}}$: Gerçek hasarlı konfigürasyon için (B_t) hasar tansörü,

$\underline{\underline{\tilde{D}}}$: Elastik olarak yüksüz hasarlı konfigürasyon için (\tilde{B}_t) hasar tansörü,

A_0 : σ gerilmesi altında hasarsız başlangıç durumu için kesit alanı,

A : Gerçek hasarlı durum için kesit alanı



Şekil 1.15. Tek eksenli çekme altında bir çubuğun hasarı (Murakami, 1988)

$$0 \leq D \leq 1$$

$$D=0 \text{ (Başlangıç hasarsız durum)} \quad (1.61)$$

$$D=1 \text{ (Son kopmuş, kırılmış durum)} \quad (1.62)$$

(1.61) ve (1.62) ifadelerinden; malzemedeki hasardan dolayı dağılı mikroskopik çatlaklar ve boşlukların, efektif alanın azalmasına neden olduğu ve hasar değişkeni D 'nin yani Şekil 1.15 (b) de görülen çubuğun yük taşıyan alanı, dağılmış boşlukların oluşumundan dolayı daha küçük belli bir A^* alanına indirgenmektedir. Dolayısıyla hasar değişkeni D doğrudan doğruya A^* ile aşağıdaki gibi ilişkilidir.

$$(1-D) = \frac{A^*}{A} \quad (1.63)$$

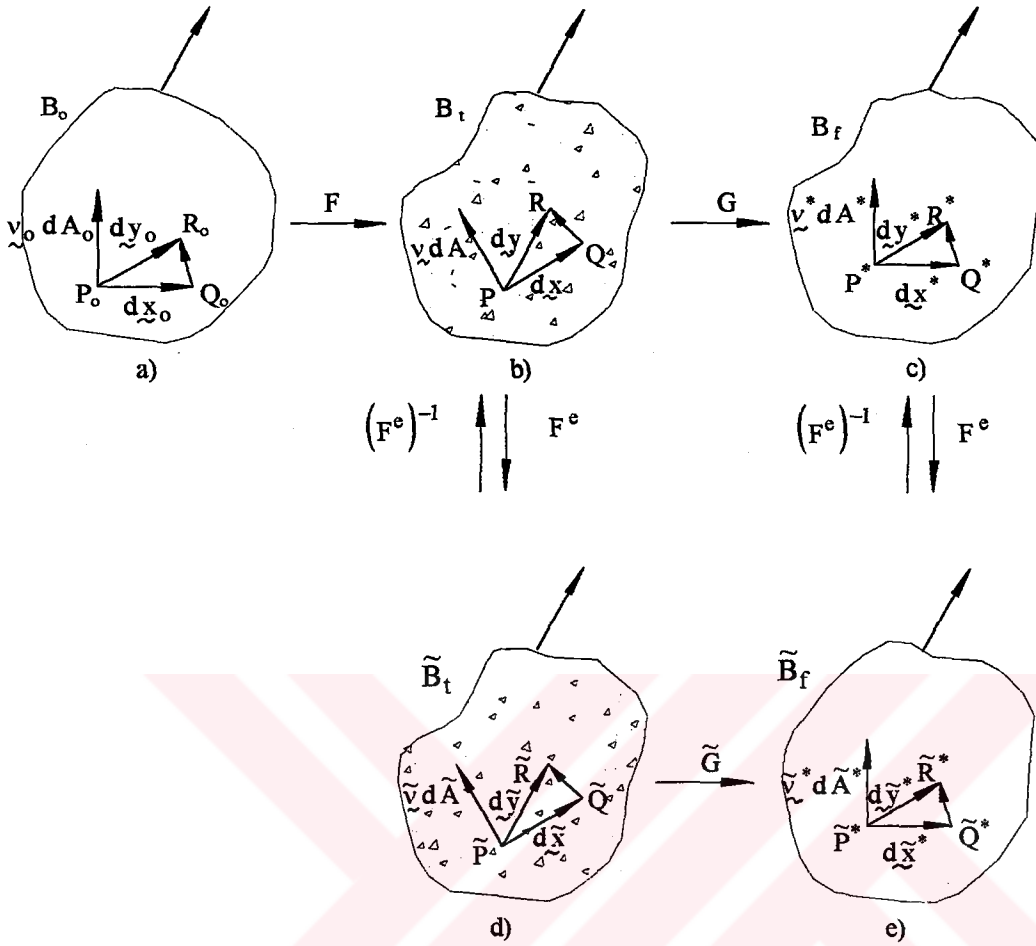
Yük taşıyan toplam alandaki bu azalma, dış kuvvet t ile yüklenen σ gerilmesinin etkilerini belirler.

$$\tilde{\sigma} = \frac{t}{A^*} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (1.64)$$

Burada; $\tilde{\sigma}$ net gerilme veya efektif gerilme, A^* ise gerçek hasarlı durumda yük taşıyan efektif alan olarak adlandırılmıştır. Şimdi, hayali hasarsız durumu tanımlamak için gerçek hasarlı duruma mekanik olarak eşdeğer, A^* kesit alanlı ve uygulanan t yükünün etkisinde hayali bir çubuk düşünebilir ve bu durumu hasarsız durum olarak adlandırabiliriz [Şekil 1.15 (c)]. Eğer mekanik olarak eşdeğer olan iki durumdaki A ve A^* alanları arasındaki ilişki bir şekilde belirlenebilir ise hasar değişkeni D , (1.63) denklemi yardımıyla tanımlanabilir.

1.3.1. Gerçek Hasarlı Duruma Göre Hasar Durumlarının Temsil Edilmesi

Maddesel hasarın asıl nedeninin mikroçatlakların veya mikroboşlukların üç boyutlu dağılımından dolayı toplam alandaki azalmadan meydana geldiğini kabul edecek olursak yukarıdaki incelememizi biraz daha genişletebiliriz.



Şekil 1.16. Üç boyutlu durumda hasarın belirlenmesi (Murakami, 1988)

Şekil 1.16 (b) da gösterildiği gibi hasarlı malzemede herhangi bir doğrultuda PQR alan elemanını göz önüne alalım ve bunu gerçek hasarlı konfigürasyon olarak adlandıralım (B_t). Gerilme, gerinme ve hasar durumlarının B_t de üniform olduğunu kabul edelim. PQ, PR çizgi elemanlarının ve PQR'nin alanının $d\tilde{x}$, $d\tilde{y}$ ve $\tilde{v}d\tilde{A}$ vektörleriyle üç boyutlu Euclidean uzayında temsil edildiğini düşünelim. Bu elemanın başlangıçtaki hasarsız durumunu B_0 ve yukarıdaki vektörlere başlangıç durumunda karşılık gelen vektörleri de $d\tilde{x}_0$, $d\tilde{y}_0$ ve $\tilde{v}_0 dA_0$ ile gösterelim. B_0 dan B_t ye şekil değiştirme (deformasyon) gradyanı $\underline{\underline{F}}$ ile gösterilecektir. Mikroboşlukların üç boyutlu dağılımından dolayı PQR'nin yük taşıyan toplam alanı azalacaktır. Şimdi aynen bir boyutlu durumda olduğu gibi B_t ye mekanik olarak eşdeğer hayali bir hasarsız konfigürasyonun mevcut olduğunu [Şekil 1.16 (c)] ve PQR'nin yük taşıyan net alanının B_f deki $P^* Q^* R^*$ yüzey elemanına eşit olduğunu

düşünebiliriz. P^*Q^* ve P^*R^* parçaları ve $P^*Q^*R^*$ alanı, üç boyutlu Euclid uzayında $d\underline{x}^*$, $d\underline{y}^*$ ve $\underline{v}^* dA^*$ ile gösterilmektedir. Hasardan dolayı toplam alandaki azalma yalnızca PQR düzleminde değil, aynı zamanda farklı yönelimlere sahip diğer düzlemlerden de kaynaklandığı için $\underline{v} dA$ ve $\underline{v}^* dA^*$ vektörlerinin yönü birbiri ile daima çakışmaz.

(1.63) denklemdeki ifadeye göre, genel hasar durumları için hasar değişkeni (\underline{D}) uygun şekilde tanımlanabilir. Ancak, Şekil 1.16 da verilen B_t ve B_f konfigürasyonlarının $\underline{v} dA$ ve $\underline{v}^* dA^*$ alanları arasındaki transformasyon bir şekilde belirlenmelidir. Bu iki konfigürasyonun alan vektörleri arasındaki bu transformasyon, gerçek hasarlı konfigürasyona (B_t) karşılık gelen hayali hasarsız konfigürasyona (B_f), P noktasında hayali bir deformasyon takdim ederek (kullanarak) belirlenebilir. Eğer (B_t) den (B_f) ye hayali bir deformasyon gradyenti (\underline{G}) kabul edersek, (B_f) üzerindeki $d\underline{x}^*$, $d\underline{y}^*$ parçaları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$d\underline{x}^* = \underline{G} d\underline{x} \text{ ve } d\underline{y}^* = \underline{G} d\underline{y} \quad (1.65)$$

Nanson teoremine göre; B_f deki $\underline{v}^* dA^*$ alan vektörü, B_t deki $\underline{v} dA$ vektörü ile aşağıdaki gibi bağıntılıdır.

$$\underline{v}^* dA^* = \left(\frac{1}{2}\right) d\underline{x}^* \times d\underline{y}^* = \left(\frac{1}{2}\right) (\underline{G} d\underline{x}) (\underline{G} d\underline{y}) = K (\underline{G}^{-1})^T (\underline{v} dA), \quad (1.66)$$

Burada, $K = \det \underline{G}$ olarak ifade edilmektedir. Buraya kadar ifade edilen ve geliştirilen tartışma B_t nin hasar durumunun, (1.66) denklemine verilen $K(\underline{G}^{-1})^T$ lineer transformasyonu ile ifade edilebileceğini gösterir.

$K(\underline{G}^{-1})^T$ tansörünü temsil etmek için aşağıdaki formda verilen;

$$K(\underline{G}^{-1})^T = \underline{I} - \underline{D} \quad (1.67)$$

veya

$$\underline{G} = K \left[(\underline{I} - \underline{D})^T \right]^{-1} = K (\underline{I} - \underline{D})^{-T} \quad (1.68)$$

şeklinde yeni bir $(\underline{I} - \underline{D})$ tansörü tanımlayalım. Bu durumda (1.66) denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz.

$$\underline{v}^* dA^* = (\underline{I} - \underline{D})(\underline{v} dA) \quad (1.69)$$

burada $\underline{\underline{I}}$ ikinci dereceden birim tansörü göstermektedir. Böylece (1.69) denklemindeki ikinci dereceden bir tansör olan $\underline{\underline{D}}$ malzemelerin genel hasar durumunu (anizotropik hasar) temsil eden bir iç değişken olarak ifade edilmektedir.

1.3.2. Elastik Olarak Yüksüz Hasarlı Konfigürasyona Göre Hasar Durumunun İfade Edilmesi

Önceki bölümdeki inceleme B_t konfigürasyonu ile ilgiliydi. Bu durumda malzeme hasarın ve makroskopik deformasyonun etkisi altında idi. Yani, (1.69) denklemi ile tanımlanan hasar tansörü $\underline{\underline{D}}$ aynı zamanda gerçek deformasyon durumuna bağımlıdır. Bu durumda eğer büyük makroskopik deformasyonlar mevcut ise $\underline{\underline{D}}$ tansörü artık bir iç değişken olarak hasarı uygun şekilde tanımlayamaz.

B_t gerçek konfigürasyonunda maddesel bir elemanın hasarlı durumunu dikkate alacak olursak, B_0 dan B_t ye geçişi sağlayan proseste esas faktör tersinmez iç yapı değişimi olarak değerlendirilebilir. Böylece, Şekil 1.16 (d) da gösterildiği gibi B_t den elastik olarak yüksüz konfigürasyonu (\tilde{B}_t) ele alıp, B_t den \tilde{B}_t ye elastik deformasyon gradyentini $(\underline{\underline{F}}^e)^{-1}$ ile gösterebiliriz. Ayrıca, \tilde{B}_t nin $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ alan elemanının yük taşıyan yük taşıyan net alanının boşluk oluşumundan dolayı azaldığını ve net alanın Şekil 1.16 (e) da gösterilen hayali hasarsız konfigürasyon \tilde{B}_f nin $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ alan elemanına mekanik olarak eşdeğer olduğunu düşünebiliriz. B_t ve B_f konfigürasyonları arasındaki eşdeğerliği dikkate alacak olursak, B_f den \tilde{B}_f ye yüksüz duruma karşılık gelen elastik deformasyon gradyenti önceden de ifade edildiği gibi $(\underline{\underline{F}}^e)^{-1}$ ile verilmektedir. Bir önceki bölümde belirtilen benzer bir prosedür yardımıyla $\tilde{\underline{v}} dA$ ve $\tilde{\underline{v}}^* d\tilde{A}^*$ alan vektörleri arasındaki ilişki \tilde{B}_t den \tilde{B}_f ye hayali bir deformasyon gradyenti $\tilde{\underline{G}}$ yi ifade ederek gerçekleştirilebilir. O zaman (1.65) ve (1.66) denklemlerinde olduğu gibi benzer bir operasyonla aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$d\tilde{\underline{x}}^* = \tilde{\underline{G}} d\tilde{\underline{x}}, \quad d\tilde{\underline{y}}^* = \tilde{\underline{G}} d\tilde{\underline{y}} \quad (1.70)$$

$$\tilde{\underline{y}}^* d\tilde{\underline{A}}^* = \left(\frac{1}{2}\right) d\tilde{\underline{x}}^* \times d\tilde{\underline{y}}^* = \tilde{\underline{K}} \left(\tilde{\underline{G}}^{-1}\right)^T (\tilde{\underline{y}} d\tilde{\underline{A}}), \quad \tilde{\underline{K}} = \det \tilde{\underline{G}} \quad (1.71)$$

$\tilde{\underline{K}} \left(\tilde{\underline{G}}^{-1}\right)^T$ tansörünü temsil etmek için yeni bir $\tilde{\underline{D}}$ tansörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\tilde{\underline{K}} \left(\tilde{\underline{G}}^{-1}\right)^T = \underline{\underline{I}} - \tilde{\underline{D}} \quad (1.72)$$

bu ifadeyi kullanarak (1.71) denklemini aşağıdaki formda yeniden;

$$\tilde{\underline{y}}^* d\tilde{\underline{A}}^* = \left(\frac{1}{2}\right) d\tilde{\underline{x}}^* \times d\tilde{\underline{y}}^* = (\underline{\underline{I}} - \tilde{\underline{D}}) (\tilde{\underline{y}} d\tilde{\underline{A}}) \quad (1.73)$$

şeklinde yazabiliriz. $\underline{\underline{D}}$ tansöründen farklı olarak $\tilde{\underline{D}}$ tansörü, B_1 konfigürasyonunda elastik deformasyondan bağımsız olarak B_1 nin hasarlı durumunu temsil eder. Yani $\tilde{\underline{D}}$ tansörü, mikroskopik boşlukların gelişmesi ile oluşan net alandaki azalmayı ifade eder. Bundan sonra $\tilde{\underline{D}}$ tansörü, hasar tansörü veya elastik olarak yüksüz konfigürasyona göre (B_1 ye göre) hasar tansörü olarak adlandırılacaktır. B_1 konfigürasyonundan \tilde{B}_1 ye olan deformasyonu, B_f den \tilde{B}_f ye olan deformasyonla birlikte ele alacak olursak; $\tilde{\underline{G}}$ ve $\underline{\underline{G}}$ ile $\tilde{\underline{D}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi belirleyebiliriz;

$$\tilde{\underline{K}} \left(\tilde{\underline{G}}^{-1}\right)^T = (\underline{\underline{F}}^e)^T [\underline{\underline{K}} \underline{\underline{G}}^{-1}]^T (\underline{\underline{F}}^e)^T \quad (1.74)$$

$$\tilde{\underline{D}} = (\underline{\underline{F}}^e)^T \underline{\underline{D}} (\underline{\underline{F}}^e)^{-T} \quad (1.75)$$

$\tilde{\underline{D}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ tansörlerinin asal değerlerini ve bunlara karşılık gelen asal yönleri \tilde{D}, \tilde{v} ve D, v ile ifade edecek olursak, $\tilde{\underline{D}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ ye ait özdeğer denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$(\tilde{\underline{D}} - \tilde{D}\underline{\underline{I}}) \tilde{v} = 0 \quad (1.76)$$

$$(\underline{\underline{D}} - D\underline{\underline{I}}) v = 0 \quad (1.77)$$

(1.75) denklemini (1.76) da yerine koyarak;

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \underline{\underline{D}} \left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{I}} \right] \underline{\underline{v}} = 0 \\
& \left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \left[\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{I}} \right] \left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \underline{\underline{v}} = 0 \\
& \left(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \underline{\underline{I}} \right) \left[\left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \underline{\underline{v}} \right] = 0
\end{aligned} \tag{1.78}$$

yazılabileceğini görürüz. (1.78) ve (1.77) denklemleri arasında bir kıyaslama yapılırsa $\underline{\underline{D}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ nin asal yönleri arasında aşağıdaki bağıntı ortaya çıkar.

$$\underline{\underline{v}} = \frac{\left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \underline{\underline{v}}}{\left\| \left(\underline{\underline{F}}^e \right)^T \underline{\underline{v}} \right\|} \tag{1.79}$$

burada, $\| \cdot \|$ gösterimi Euclidean uzayında bir vektörün normunu ifade etmektedir. Daha öncede bahsedildiği gibi, elastik deformasyon küçük olmadıkça hasar durumları $\underline{\underline{D}}$ tansörü ile belirlenmelidir. Ancak, $\underline{\underline{D}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ tansörleri birbirleri ile (1.75) denklemindeki gibi ilişkilidir ve deformasyon gradyenti $\underline{\underline{F}}$ in elastik kısmı $\underline{\underline{F}}^e$ küçük olduğu zaman özellikle bu iki tansör birbiri ile çakışır.

1.3.3. Hasar Tansörlerinin Yorumlanması ve Bu Tansörler Üzerindeki Kısıtlamalar

Hasar durumunun genellikle (1.73) denkleminde ifade edilen $\underline{\underline{D}}$ tansörü ile tanımlanabileceğini daha önce göstermiştik. Şimdi de $\underline{\underline{D}}$ üzerindeki matematiksel kısıtlamalardan bahsedelim. (1.73) denklemindeki $\underline{\underline{v}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}^*$ vektörü; Şekil 1.16 (d,e) da gösterildiği gibi boşluk dağılımlarından dolayı net alandaki azalmanın sonucu olarak $\tilde{\underline{\underline{B}}}_f$ de $\underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}$ dan, $\tilde{\underline{\underline{B}}}_f$ de eşdeğer bir alan vektörüne dönüşmektedir. Böylece, $\underline{\underline{v}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}^*$ ve $\underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}$ vektörlerinin skaler çarpımı pozitif olmak zorundadır, yani;

$$\left(\underline{\underline{v}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}^* \right) \cdot \left(\underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}} \right) > 0, \quad \left[\forall \underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}} \in E \text{ için} \right] \tag{1.80}$$

(1.73) denkleminin (1.80) denkleminde yerine konulmasıyla;

$$\left[\left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}} \right) \left(\underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}} \right) \right] \cdot \underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}} > 0, \quad \left[\forall \underline{\underline{v}} d\tilde{\underline{\underline{A}}} \in E \text{ için} \right] \tag{1.81}$$

ifadeleri elde edilir. Bunun anlamı; $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})$ tansörünün pozitif bir tansör olması demektir. $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})$ tansörünün kartezyen ayrıştırmasını yapacak olursak;

$$(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}}) = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^s + (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A \quad (1.82)$$

şeklinde simetrik ve antisimetrik kısımları ile ifade edebiliriz. Burada; $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^s$ simetrik kısmı, $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A$ ise antisimetrik kısmı göstermektedir. (1.73) transformasyonunda $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A$ nın katkısını açığa çıkarmak için aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

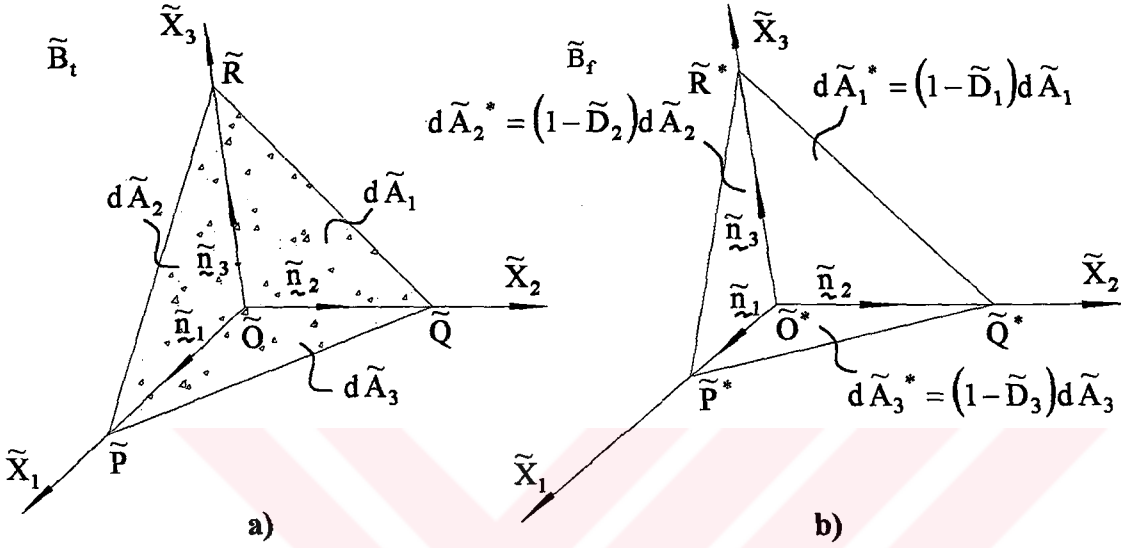
$$\begin{aligned} (\tilde{\underline{\underline{v}}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}) \cdot (\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}) &= [(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A (\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}})] \cdot (\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}) \\ &= -(\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}) \cdot [(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A (\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}})] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.83)$$

Burada iki temel matematiksel bağıntı kullanılmıştır. Birincisi skaler çarpımın yer değiştirme özelliği, diğeri ise antisimetrik bir tansörün bir vektör ile sağdan ve soldan ayrı ayrı çarpılması halinde ortaya çıkan vektörlerin birbirlerinin ters işaretlisine eşit olduğudur. Dolayısıyla da bir değer negatif işaretlisi kendisine eşit olamayacağına göre sonucun sıfır olduğu görülmektedir.

(1.83) bağıntısına göre; $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A$ tansörü; hasarlı bir malzemede herhangi bir yüzey elemanının $\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}$ alan vektörünü, eşdeğer yüzey elemanı $\tilde{\underline{\underline{v}}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}^*$ ya dönüştürür. $\tilde{\underline{\underline{v}}}^* d\tilde{\underline{\underline{A}}}^*$ vektörü, $\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}$ nın yönünden bağımsız olarak daima $\tilde{\underline{\underline{v}}} d\tilde{\underline{\underline{A}}}$ ya diktir. Yani, bu $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A$ tansörü hasardan dolayı toplam alandaki azalmayı ifade eden bir transformasyonla fiziksel olarak ilgisizdir. O halde (1.82) denkleminin antisimetrik kısmı olan $(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^A$ terimini çıkartıp $\underline{\underline{D}}$ tansörünü simetrik olarak kabul edebiliriz. Böylece, $\underline{\underline{D}}$ tansörü daima üç tane ortogonal asal yöne $[\tilde{\underline{\underline{n}}}_i (i = 1, 2, 3)]$ sahiptir ve bu asal yönler $\tilde{\underline{\underline{D}}}_i$ asal değerlerine karşılık gelir. Bu durumda $\underline{\underline{D}}$ tansörünü aşağıdaki kanonik formda ifade edebiliriz.

$$\underline{\underline{D}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{\underline{\underline{D}}}_i \tilde{\underline{\underline{n}}}_i \otimes \tilde{\underline{\underline{n}}}_i \quad (1.84)$$

$\underline{\underline{D}}$ nin özelliklerini incelemek için; Şekil 1.16 da gösterilen \tilde{B}_t ve \tilde{B}_r de $\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}$ ve $\tilde{P}^*, \tilde{Q}^*, \tilde{R}^*$ noktalarından geçen $\underline{\underline{D}}$ tansörünün $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ ve $O^*\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ asal koordinat sistemlerini göz önüne alalım.



Şekil 1.17 (a,b) Hasar tansörü $\underline{\underline{D}}$ nin yorumu. a) Elastik olarak yüksüz (yükü boşaltılmış) hasarlı konfigürasyon b) Elastik olarak yüksüz hayali hasarsız konfigürasyon (Murakami, 1988)

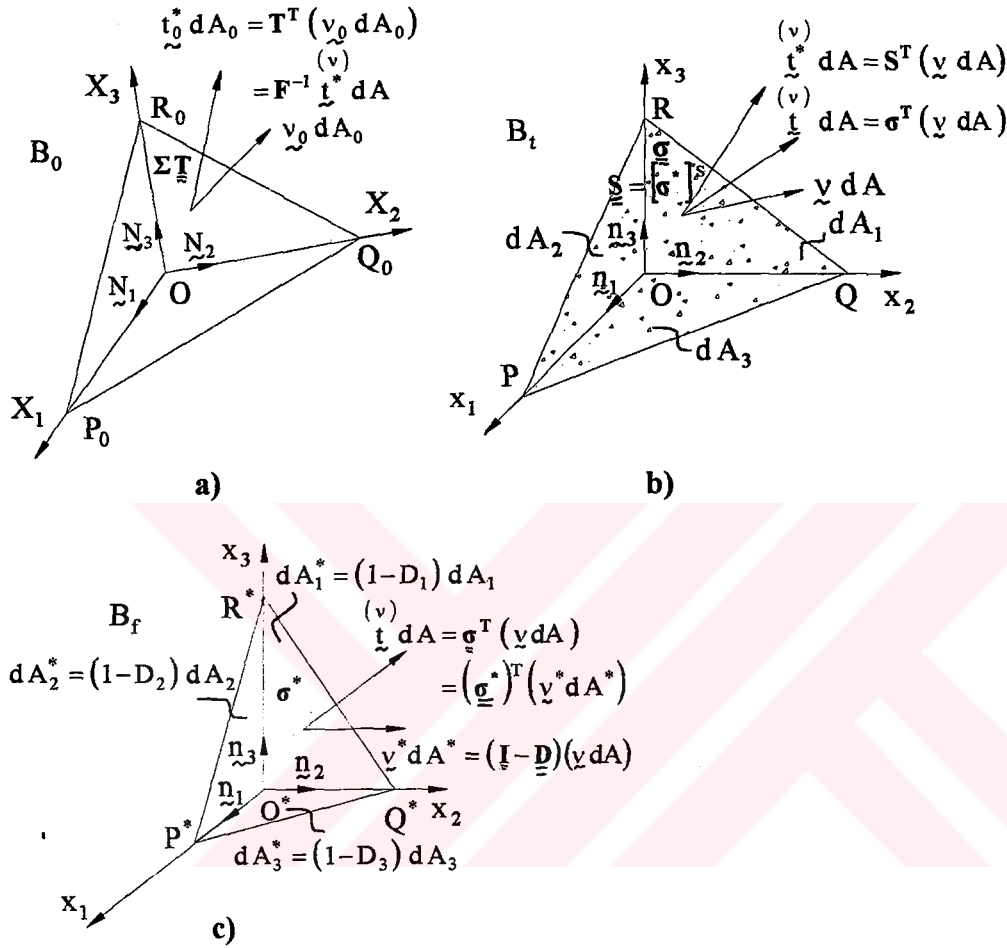
Şekil 1.17 (a,b) de gösterildiği gibi büyük yüzeyleri \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 ve \tilde{x}_3 asal koordinatlarına dik olan $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}, \tilde{P}^*\tilde{Q}^*\tilde{R}^*$ alan elemanlarından oluşmuş iki $\tilde{O}\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}$ ve $\tilde{O}^*\tilde{P}^*\tilde{Q}^*\tilde{R}^*$ dörtyüzlüyü dikkate alalım. (1.73) denklemini (1.84) denkleminde yerine koyacak olursak;

$$\tilde{v}^* d\tilde{A}^* = \sum_{i=1}^3 (1 - \tilde{D}_i) d\tilde{A}_i \tilde{n}_i = \tilde{n}_1 d\tilde{A}_1^* + \tilde{n}_2 d\tilde{A}_2^* + \tilde{n}_3 d\tilde{A}_3^* \quad (1.85)$$

$$d\tilde{A}_i^* = (1 - \tilde{D}_i) d\tilde{A}_i \quad (i \text{ üzerinden toplama yok } i = 1, 2, 3) \quad (1.86)$$

burada, $d\tilde{A}_i = \tilde{v}_i d\tilde{A}$ ve $d\tilde{A}_i^* = \tilde{v}_i^* d\tilde{A}^*$ ($i = 1, 2, 3$) sırasıyla \tilde{B}_t ve \tilde{B}_r deki koordinat düzlemleri üzerinde dörtyüzlülerin küçük alanlarını gösterir [Şekil 1.17 (a,b)]. (1.84) denkleminde $\underline{\underline{D}}$ tansörünün asal değerleri olan \tilde{D}_i değerleri, Şekil 1.17 de gösterildiği gibi, \tilde{B}_t ve \tilde{B}_r konfigürasyonlarında $\underline{\underline{D}}$ nin üç asal düzlemi

üzerinde toplam alan azalmaları veya efektif boşluk alan yoğunlukları olarak yorumlanabilir.



Şekil 1.18. Mevcut ve başlangıç konfigürasyonlara göre efektif gerilme tansörleri. a) Başlangıç hasarsız konfigürasyon b) Mevcut hasarlı konfigürasyon. c) Hayali hasarsız konfigürasyon (Murakami, 1988)

Yukarıda bahsedilen bu yaklaşım aynı zamanda B_t konfigürasyonundaki hasar tansörü \underline{D} ye de uygulanır. Yani; $(\underline{I} - \underline{D})$ tansörü pozitif bir tansördür ve (1.84), (1.85) ve (1.86) denklemleri bu durumda aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\underline{D} = \sum_{i=1}^3 D_i \underline{n}_i \otimes \underline{n}_i \quad (1.87)$$

$$\underline{v}^* dA^* = \sum_{i=1}^3 (1-D_i) dA_i \underline{n}_i = \underline{n}_1 dA_1^* + \underline{n}_2 dA_2^* + \underline{n}_3 dA_3^* \quad (1.88)$$

$$d A_i^* = (1 - D_i) d A_i \quad (i \text{ üzerinden toplama yok } i = 1, 2, 3) \quad (1.89)$$

burada; $d A_i = v_i d A$ ve $d A_i^* = v_i^* d A^*$, B_t ve B_f üzerindeki dörtyüzlülerin küçük alanlarını göstermektedir [Şekil 1.18 (b,c)].

Buraya kadar yapılan açıklamalar düşünüldüğünde; maddesel hasarın dağılı çatlaklardan ve boşluklardan kaynaklanan toplam alandaki azalmayla karakterize edilebileceğini görüyoruz, bu boşlukların rasgele dağılımına karşılık gelen hasar durumu komplike (karmaşık) olabiliyordu ve (1.84) denklemi ile verilen ikinci dereceden simetrik bir tansör olan $\tilde{\underline{\underline{D}}}$ ile veya (1.87) denklemi ile verilen $\underline{\underline{D}}$ tansörü ile tanımlanabiliyordu. Bu durumlarda (1.84) ve (1.87) denklemleri hasar durumlarının genel bir tanımlamasını sağlar. Diğer taraftan, (1.84) ve (1.87) denklemleri ile verilen kanonik ifadeler $\tilde{\underline{\underline{D}}}$ ve $\underline{\underline{D}}$ tansörlerinin ortotropik simetriden daha komplike simetrilere sahip hasar durumlarını tanımlayamayacağını gösterir. Murakami ve Ohno (1981) sürünmenin anizotropik hasar teorisini geliştirdikleri zaman, B_t konfigürasyonunu göz önüne alarak (1.87) denklemindeki ikinci dereceden simetrik bir $\underline{\underline{D}}$ tansörü geliştirdiler. Bu tansör, ilgili sınırdaki birim normal vektörün bir diyadik çarpımı cinsinden tane sınırlarındaki mikroskopik boşlukların etkilerini temsil ediyordu. Onlar aynı zamanda, hasarlı bir malzemedeki Cauchy tetrahedronundan eşdeğer bir hayali hasarsız malzemeye olan toplam alandaki azalmayı da incelediler ve (1.69) denklemiyle verilen bağıntıyı ortaya koydular. Benzer bir hasar tansörü Kachanov (1980) tarafından çatlaklı elastik malzemelerin sürekli ortam modelini geliştirmek için kullanılmıştır. Murakami ve Ohno'nun tersine, Betten (1983) hasar değişkenini tanımlamak için mevcut hasarlı konfigürasyonda bir Cauchy tetrahedronunun buna karşılık gelen hayali bir hasarsız konfigürasyona transformasyonundan başlayarak, malzeme içerisinde, hasarla birlikte yönünü değiştirmeyen özel bir düzlemin varlığını kabul ederek (1.87) denklemini türetmiştir.

1.3.4. Efektif Gerilmenin Tanımlanması

1.3.4.1. Mevcut Hasarlı Konfigürasyona Göre Efektif Gerilmeler

Maddesel hasar iç durum değişkeni olarak, (1.84) denklemiyle verilen hasar tansörü $\underline{\underline{\tilde{D}}}$ nin (veya (1.75) denklemiyle $\underline{\underline{\tilde{D}}}$ ile irtibatlandırılan $\underline{\underline{D}}$ tansörünün) kullanılmasıyla hasarlı malzemeler için bünye denklemi ve daha sonraki gelişen denklemler elde edilmiştir. Bu ifadeler normal elastisite teorisi çerçevesinde kalınarak ortaya konulmuştur. Sürekli ortam hasar mekaniğinin geleneksel prosedürünü kullanarak, hasardan kaynaklanan gerilmenin çarpıcı etkileri bir efektif gerilme notasyonu ile temsil edilmiştir. Yani, hasarlı bir malzemenin bünye denklemi hasarsız malzemenin bünye denkleminde türetilmiştir (Lemaitre, 1985; Lemaitre ve Chaboche, 1978, 1985). Bu türetme işlemi; denklemdeki Cauchy gerilmesinin, gerilme eşdeğerliği ilkesine dayanarak, kendisine karşılık gelen efektif gerilme ile yer değiştirmesiyle sağlanmıştır. Efektif gerilme aynı zamanda hasar için geliştirilen denklemi formüle etmek için de kullanılmıştır.

(1.64) denkleminde verilen efektif gerilme notasyonuna göre, mevcut hasarlı konfigürasyon B_t yi referans alarak ifade edilen efektif gerilme (Cauchy gerilmesi $\underline{\underline{\sigma}}$ için efektif gerilme), toplam hasar durumları için bir $\underline{\underline{\sigma}}^*$ gerilmesi olarak tanımlanabilir. $P^* Q^* R^*$ yüzey elemanı, $\underline{\underline{t}}^{(\nu)} dA$ özdeş bir kuvvet vektörünün etkisinde kaldığı zaman B_f konfigürasyonunda $O^* P^* Q^* R^*$ tetrahedronunda da $\underline{\underline{\sigma}}^*$ gerilmesi ortaya çıkar [Şekil 1.18 (c)]. Bu $\underline{\underline{\sigma}}^*$ gerilmesi B_f referans konfigürasyonunu ilgilendiren birinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörüne tam olarak karşı gelir ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = K^{-1} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (1.91)$$

(1.68) ifadesinden faydalanarak bu denklem aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^* &= K^{-1} K \left[(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-T} \right] \underline{\underline{\sigma}} \\ &= (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-1} \underline{\underline{\sigma}} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Burada, bir önceki bölümde tartışılan $\underline{\underline{D}}$ nin simetrisi kullanılmıştır. Şekil 1.18 (c), $\underline{\underline{\sigma}}^*$ nın mekanik yorumunu ifade eder. (1.92) denklemi ile verilen efektif gerilme $\underline{\underline{\sigma}}^*$ simetrik değildir. $\underline{\underline{\sigma}}^*$ gibi bir antisimetrik tansör kullanarak hasarlı malzemelerin bünye denklemlerini ve daha sonra ortaya konulan denklemleri formüle etmek uygun olmadığından bu antisimetrik tansörü uygun bir şekilde simetrik yapma ihtiyacı duyulur. Bunun için uygun yollardan birisi $\underline{\underline{\sigma}}^*$ nın kartezyen dekompozisyonunun simetrik kısmını benimsemektir.

$$\underline{\underline{S}} = [\underline{\underline{\sigma}}^*]^S = (1/2) \left[(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-1} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-1} \right] \quad (1.93)$$

(1.93) denkleminde yapılan simetrikleştirme işlemi farklı şekillerde de yapılabilir. Örneğin, Cordebois ve Sidoroff (1982), aşağıdaki gibi bir yaklaşım önermişlerdir:

$$\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2} \underline{\underline{\sigma}} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2} \quad (1.94)$$

Şimdiye kadar, mevcut hasarlı konfigürasyon B_t de malzemenin mekanik durumunu hayali hasarsız konfigürasyondakine (B_f) eşdeğer kabul ettik. Böylece, B_t deki Cauchy gerilmesi $\underline{\underline{\sigma}}$ nın mekanik etkisinin, hasardan dolayı efektif alan azalmasının bir sonucu olarak (1.93) denklemindeki efektif gerilme $\underline{\underline{S}}$ yi vurguladığını yorumlayabiliriz.

1.3.4.2. Başlangıç Hasarsız Konfigürasyona Göre Efektif Gerilme

Başlangıçtaki hasarsız konfigürasyon B_0 'a göre, ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörüne benzer şekilde,

$$\underline{\underline{\Sigma}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}} (\underline{\underline{F}}^{-1})^T, \quad J = \det \underline{\underline{F}} \quad (1.95)$$

şeklinde B_0 ile ilgili efektif gerilmeyi tanımlayabiliriz. B_t deki gerilmenin belirgin etkisi, efektif gerilme $\underline{\underline{S}}$ ile verilmektedir. Şekil 1.18 (b) de gösterildiği gibi $\underline{\underline{S}}$ 'e karşılık gelen bir gerilme vektörünü aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\underline{\underline{t}}^* dA = \underline{\underline{S}}^T (\underline{\underline{v}} dA) \quad (1.96)$$

Şimdi, Σ gerilmesi içinde benzer bir kabul yapabiliriz ve Şekil 1.18 (a) deki B_0 konfigürasyonunda $P_0 Q_0 R_0$ yüzey elemanının (1.96) denkleminde dönüştürülen bir kuvvet vektörünün etkisi altında olduğunu ifade edebiliriz:

$$\underline{\underline{t}}_0^* dA_0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{t}}^* dA \quad (1.97)$$

B_0 konfigürasyonunu ilgilendiren efektif gerilmeyi $\underline{\underline{T}}$ ile göstererek B_0 için Cauchy formülünü;

$$\underline{\underline{t}}_0^* dA_0 = \underline{\underline{T}}^T (\underline{\underline{v}}_0 dA_0) \quad (1.98)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.97) ve (1.98) denklemlerini Nanson formülü ile kullanarak B_0 konfigürasyonundaki efektif gerilme;

$$\underline{\underline{T}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{S}} (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \quad (1.99)$$

bağıntısı ile (1.95) denkleminde benzer şekilde verilmiştir. Efektif gerilme $\underline{\underline{S}}$ ve $\underline{\underline{T}}$ hasardan kaynaklanan gerilmenin belirgin etkisini temsil eden hayali gerilmelerdir. Böylece, bu gerilmelerin ilgili konfigürasyondaki denge şartını sağlamadığını belirtmek gerekmektedir.

Bölüm 1.3.4.1 ve 1.3.4.2 de tartışılan $\underline{\underline{S}}$ ve $\underline{\underline{T}}$ efektif gerilmeleri hasardan dolayı, yük taşıyan toplam alan tarafından oluşturulan belirgin gerilme etkilerini temsil eder. Daha açıkça ifade etmek gerekirse, bu efektif gerilmeler, hasar ve çatlak gibi yerel dekohezyon etkileri (çözülmüş veya zayıflamış kohezyon etkileri) ile ilgili olmalıdır. Malzemenin deformasyonu genellikle yalnızca belli düzlemlerdeki boşluk dağılımına bağlı değildir, aynı zamanda boşlukların uzaysal dağılımına da bağlıdır. Böylece, deformasyonları da dikkate alarak, $\underline{\underline{S}}$ ve $\underline{\underline{T}}$ den başka efektif gerilmeler tanımlamak mantıklı görünmektedir. Bu problem; Murakami ve Imaizumi (1982), Murakami ve Ohno (1981) ve Murakami vd. (1986) tarafından da tartışılmıştır.

1.4. Deformasyon

Bir maddesel cisim içerisinde alacağımız tamamen keyfi her hacim bu cismin kütesinin bir kısmını içeriyorsa bu cisim bir sürekli ortam olarak nitelendirilir. Buna göre sürekli bir ortamın bir noktası etrafında keyfi bir Δv hacmini göz önüne aldığımızda bu hacimde cismin bir Δm kütlesi bulunacaktır. Bu nokta civarındaki ortalama yoğunluk ise;

$$\rho_{\text{ort}} = \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad (1.100)$$

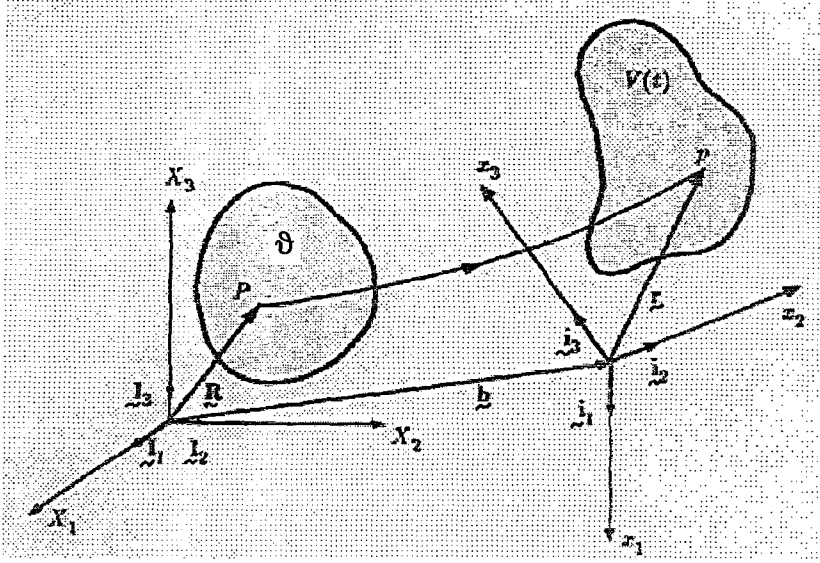
şeklinde tanımlanır. Sürekli ortam varsayımına göre Δv ne kadar küçük olursa olsun içinde kütle bulunacağından yukarıdaki ifadenin $\Delta v \rightarrow 0$ için bir limiti olacaktır. Dolayısıyla ortamın göz önüne alınan noktadaki yoğunluğu bu limitin sonucu olarak;

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (1.101)$$

şeklinde ifade edilmesi gerekir.

1.4.1. Sürekli Ortamın Hareketi

Bir sürekli ortamın hareketini belirlemek için öncelikle bu ortamı oluşturan sonsuz sayıdaki bütün parçacıkların uzaysal konumlarını tespit etmek gerekir.



Şekil 1.19. Maddesel ve uzaysal koordinatlar (Şuhubi, 1993)

Ortamın belli bir andaki konumunu (referans konumu) bildiğimizi kabul edip, bu konumu belirli kılmak amacıyla X_1, X_2, X_3 kartezyen koordinat takımını seçelim. Referans konumun oluşturduğu hacimsel bölgeyi Θ ile gösterelim. Ortamın bir parçacığı, referans konumunda işgal ettiği P noktasının yerini tanımlayan \underline{R} yer vektörü veya eşdeğer olarak X_K ($K=1,2,3$) koordinatlarıyla tamamen belirlenir. P noktası Θ bölgesi içinde kalmak üzere bu üçlü koordinat sayıları listesi göz önüne aldığımız sürekli ortamın tüm parçacıklarını tek olarak belirler. Ortamı oluşturan parçacıkların tanınmasını, birbirlerinden ayırt edilmesini sağladığı için X_K koordinatlarına Maddesel Koordinatlar (Lagrange Koordinatları) adı verilir. Sürekli bir ortamın hareketini belirlemek için referans konumundaki herhangi bir P maddesel noktasının t anında uzayda bulunduğu konumu, yani p noktasının belirlemek gerekir (Şekil 1.19). Bu amaçla x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinat takımını seçelim. Bu koordinat takımında p uzaysal noktası \underline{r} yer vektörü veya eşdeğer olarak x_k ($k=1,2,3$) koordinatlarıyla belirlenir. Bu koordinatlara da Uzaysal Koordinatlar (Euler Koordinatları) adı verilir. Gerekli görüldüğü taktirde maddesel ve uzaysal koordinatlar çakışık olarak seçilebilir. Bir t anında her P parçacığının işgal ettiği p noktaları zamanla değişebilen bir $V(t)$ bölgesini oluşturur. Bu bölge ortamın t anındaki konumunu belirler. Buna göre sürekli ortamın hareketini, her P noktasına

bir t anında hangi p noktasının karşılık geldiğini gösteren bir dönüşüm olarak tanımlayabiliriz. Böyle bir dönüşüm;

$$\underline{r} = \underline{r}(\underline{R}, t), \quad \underline{x}_k = \underline{x}_k(\underline{X}_K, t) \quad (1.102)$$

sürekli bağıntıları yardımıyla tanımlanabilir. Ters söylenmediği sürece referans konumunun $t=0$ anına karşılık geldiğini ve bu durumun daima geçerli olduğunu kabul edeceğiz.

Sürekli ortamın hareketini tanımlayan (1.102) dönüşümünün bir fiziksel harekete karşılık gelebilmesi için sürekli olması gerekir. Ayrıca bu dönüşümün hacmi sonlu olan bir bölgeyi; hacmi sıfır veya sonsuz olan bir bölgeye dönüştürmesi de mümkün değildir. Bu şartın sağlanabilmesi için dönüşüm jakobyenin de sıfırdan ve sonsuzdan farklı olması gerekir. Yani;

$$J(\underline{X}, t) = \det(x_{k,K}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0, \infty \quad (1.103)$$

şartının sağlanması gerekir. Bir $J(\underline{X}, t)$ fonksiyonunu (1.103) ifadesinin mutlak değeri

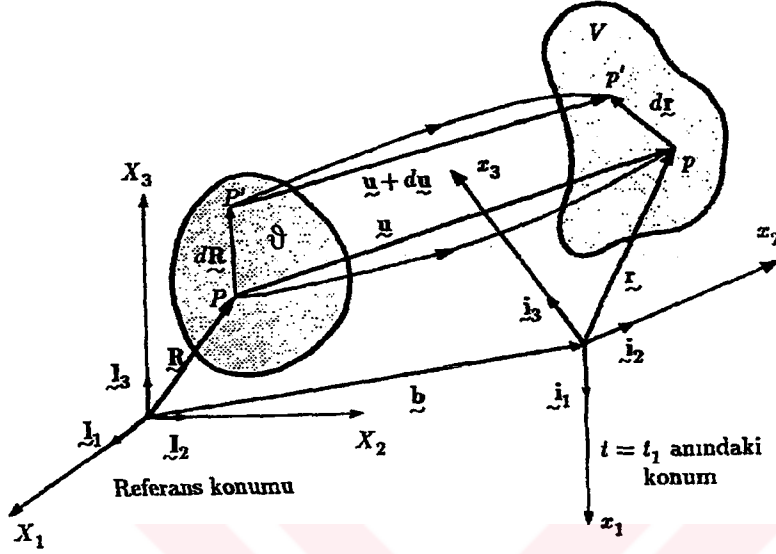
$$j(\underline{X}, t) = |J(\underline{X}, t)| = \left| \det(x_{k,K}) \right|, \quad 0 < j < \infty \quad (1.104)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $j = \text{sgn } J$ yazabiliriz. $\text{sgn } J$ fonksiyonu, $J=0$ dışında tanımlıdır ve -1 veya $+1$ değerlerini alır. Temel kabulümüz $J \neq 0$ olduğundan j ile J arasındaki fark çoğu zaman pratik bakımdan ortadan kalkar. Kapalı fonksiyon teoremi uyarınca (1.103) veya (1.104) koşulu (1.102) dönüşümünün sürekli bir tersinin de varolacağını ifade eder. Bu teorem uyarınca (1.102) dönüşümünden yararlanarak;

$$\underline{R} = \underline{R}(\underline{r}, t), \quad \underline{X}_K = \underline{X}_K(\underline{x}_k, t) \quad (1.105)$$

dönüşümünü yazabiliriz. Fiziksel olarak bu bağıntılar, seçilmiş belli bir uzay noktasından çeşitli zamanlarda ortamın hangi parçacıklarının geçtiğini belirler ve $V(t)$ uzaysal bölgeler ailesini tek bir ϑ maddesel bölgesine dönüştürür.

1.4.2. Şekil Değişirme ve Şekil Değişirme Tansörü



Şekil 1.20. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değişirme (Şuhubi, 1993)

Referans konumunda verilen bir θ bölgesini dolduran bir sürekli ortamın belli bir t , örneğin t_1 anında V uzay bölgesine dönüştüğünü ve bu sürekli dönüşümün (1.102) ve (1.105) ifadelerinde verilen hareket denklemlerindeki t parametresinin t_1 değeriyle tamamen belirlenmiş olduğunu varsayalım. Dolayısıyla başlangıçtaki, yani referans konumundaki herhangi bir P parçacığı, t_1 anında p uzay noktasına taşınmış olur. P ve p noktalarının yer vektörleri;

$$\underline{R} = X_K \underline{I}_K, \quad \underline{r} = x_k \underline{i}_k \quad (1.106)$$

şeklinde verilmiş olup (1.102) ve (1.105) bağıntıları ile ilişkilendirilmiştir (Şekil 1.20). Uzaysal ve maddesel koordinat takımları arasındaki dönüşüm;

$$\underline{i}_k = \lambda_{kK} \underline{I}_K, \quad \underline{I}_K = \Lambda_{Kk} \underline{i}_k \quad (1.107)$$

bağıntılarıyla belirlenir. λ ve Λ katsayı matrisleri birbirinin tersidir ve

$$\lambda_{kK} = \underline{i}_k \cdot \underline{I}_K, \quad \Lambda_{Kk} = \underline{I}_K \cdot \underline{i}_k \quad (1.108)$$

olarak tanımlanmıştır. Her iki koordinat takımı da dik olduğundan bu dönüşüm ortogonaldir. Yani;

$$\Lambda = \lambda^{-1} = \lambda^T \quad \text{veya} \quad \Lambda_{Kk} = \lambda_{kK} \quad (1.109)$$

yazılabilir. Λ_{kK} matrisi λ_{kK} matrisinin transpozu olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bu katsayılar;

$$\lambda_{kK} \lambda_{lK} = \delta_{kl}, \quad \lambda_{kK} \lambda_{kL} = \delta_{KL} \quad (1.110)$$

bağıntılarını sağlamak zorundadır. Burada δ_{kl} ve δ_{KL} büyüklükleri Kronecker delta olup, birim matrisi temsil etmektedir. $\underline{\lambda}$ matrisi yardımıyla uzaysal koordinat takımında tanımlanmış bir vektör kendisine paralel kalarak maddesel koordinat takımına kaydırılabilir, bu işlemin tersi de mümkündür. Bir \underline{y} vektörünü uzaysal ve maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden v_k ve v_K ile gösterecek olursak;

$$\underline{y} = v_k \underline{j}_k = v_K \underline{I}_K \quad (1.111)$$

ifadesinden (1.107) ve (1.109) bağıntılarını kullanarak;

$$v_k = \lambda_{kK} v_K, \quad v_K = \lambda_{kK} v_k \quad (1.112)$$

ilişkilerini elde ederiz. Bu özellikleri nedeniyle λ_{kK} katsayıları shifter (kaydırıcılar) olarak adlandırılır.

Şekil 1.20 de referans konumu üzerindeki P parçacığına çok yakın bir başka P' parçacığını göz önüne alalım. P' nün P'ye göre konumunu sonsuz küçük $d\underline{R}$ vektörüyle belirleyelim. P' maddesel noktası hareketle t_1 anında p' uzay noktasına taşınmış olsun. p' notasının P nin görüntüsü olan p noktasına göre konumu da yine sonsuz küçük olan $d\underline{r}$ vektörüyle belirleyelim. Bu vektörler maddesel ve uzaysal koordinatları cinsinden;

$$d\underline{R} = dX_K \underline{I}_K, \quad d\underline{r} = dx_k \underline{j}_k \quad (1.113)$$

şeklinde yazılabilirler. Ayrıca (1.102)₂ ve (1.105)₂ ifadelerinin zamanın sabit olduğunu göz önüne alarak diferansiyelini alırsak;

$$dx_k = x_{k,K} dX_K, \quad dX_K = X_{K,k} dx_k \quad (1.114)$$

ifadelerini elde ederiz. Burada alt indisten önceki virgül o indisin belirttiği değişkene göre kısmi türevi göstermektedir. Yani;

$$x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K}, \quad X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K}{\partial x_k} \quad (1.115)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Bir P parçacığında (örneğin bir t_1 anında), hesaplanmış $x_{k,K}$ büyüklüklerine o maddesel noktada ve o andaki şekil değiştirme gradyanı adı verilir ve boyutsuz $\underline{\underline{F}}$ matrisi ile gösterilmiştir.

$$\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t_1) = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.116)$$

Ayrıca; $j = |\det \underline{\underline{F}}| \neq 0$ olduğundan $\underline{\underline{F}}$ matrisinin bir tersi ($\underline{\underline{F}}^{-1}$) vardır. (1.102) ve (1.105) bağıntılarını göz önüne alır ve belli bir anda kısmi türevin zincir kuralını uygularsak;

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl}, \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL} \quad (1.117)$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = [X_{K,k}] \quad (1.118)$$

sonucunu elde etmiş oluruz. Bilindiği gibi bir matrisin tersini bulabilmek için, Matrisin kofaktörünün transpozunu, matrisin determinantına bölmemiz gerekir. Yani;

$$X_{K,k} = \frac{\text{Kofaktör}[x_{k,K}]}{J} \quad (1.119)$$

şeklinde yazılır. Yine bildiğimiz gibi bir determinanı hesaplariken bir satırdaki (veya sütundaki) elemanları kofaktörleriyle çarpıp işaret kuralına uygun şekilde toplarız. Buna göre determinantın açılımı o satırdaki elemanlara göre birinci derecedendir ve determinantın bir elemanına göre türevini alırsak bu elemanın kofaktörünü elde ederiz. Bu sonuç bize;

$$\frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} = \text{Kofaktör}[x_{k,K}] = J X_{K,k} \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = j X_{K,k} \quad (1.120)$$

özdeşliğini verir. Bu bağıntıdan yararlanarak;

$$(j X_{K,k})_{,K} = 0, \quad \left(\frac{1}{j} x_{k,K} \right)_{,k} = 0 \quad (1.121)$$

özdeşliklerinin de sağlandığını gösterebiliriz. Zincir kuralını ardışık olarak uygulayarak ve tekrarlanan indisleri gerektiği gibi değiştirerek;

$$\begin{aligned} (jX_{K,k})_{,K} &= \frac{\partial j}{\partial x_{1,L}} x_{1,LK} X_{K,k} + jX_{K,kl} x_{1,K} \\ &= j(X_{L,1} x_{1,LK} X_{K,k} + jX_{K,kl} x_{1,K}) = j(X_{K,1} x_{1,K})_{,k} = j(3)_{,k} = 0 \end{aligned} \quad (1.122)$$

ifadesini elde ederiz. $d\underline{R}$ vektörünün boyunu dS , $d\underline{r}$ vektörünün boyunu ise ds ile gösterecek olursak;

$$dS^2 = d\underline{R} \cdot d\underline{R} = dX_K dX_K, \quad ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r} = dx_k dx_k \quad (1.123)$$

yazabiliriz. (1.114) ifadesini kullanarak yukarıdaki ifadeleri;

$$\begin{aligned} ds^2 &= x_{k,K} x_{k,L} dX_K dX_L = C_{KL} dX_K dX_L, \\ dS^2 &= X_{K,k} X_{K,l} dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l \end{aligned} \quad (1.124)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Burada bir t anında hesaplanmış bileşenleri;

$$C_{KL}(\underline{X}, t) = x_{k,K} x_{k,L}, \quad c_{kl}(\underline{x}, t) = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.125)$$

ile verilen boyutsuz \underline{C} ve \underline{c} matrisleri sırasıyla Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörleri veya matrisleri adını alır. Bu matrislerin simetrik olduğu ve

$$C_{KL} = C_{LK}, \quad c_{kl} = c_{lk} \quad (1.126)$$

bağıntılarının sağlandığı görülmektedir.

\underline{C} ve \underline{c} büyüklüklerinin matrisin yanı sıra tansör olarak da nitelendirilmesinin nedeni sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatları dönüştürüp yeni koordinat takımlarına geçtiğimizde bileşenlerinin belirli bir kurala göre değişmesidir. X_K koordinat eksenlerini yine dik X'_K koordinat eksenlerine dönüştürdüğümüzü varsayalım. Bu dönüşüm bir \underline{Q} ortogonal matrisi yardımıyla gerçekleştirilebilir ve koordinat eksenleri arasında;

$$X'_K = Q_{KL} X_L, \quad X_K Q_{LK} X'_L \quad (1.127)$$

ilişkileri yazılabilir. Buna göre C tansörünün yeni koordinat takımındaki bileşenleri;

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= \frac{\partial x_k}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X'_L} = \frac{\partial x_k}{\partial X_M} \frac{\partial X_M}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_N} \frac{\partial X_N}{\partial X'_L} \\ &= Q_{KM} Q_{LN} x_{k,M} x_{k,N} = Q_{KM} Q_{LN} C_{MN} \end{aligned} \quad (1.128)$$

şeklinde bulunur. Bu da \underline{C} 'nin ikinci dereceden bir maddesel tansör olduğunu gösterir. Burada (1.128) bağıntısının; \underline{Q} ortogonal bir matris olmasa da, yani koordinatları dik olmayan bir takıma dönüştürdüğümüzde de \underline{Q}^T yerine \underline{Q}^{-1} matrisini

almak şartıyla geçerli kalacağına dikkat etmeliyiz. Benzer olarak uzaysal koordinatları da;

$$x'_k = Q_{kl} x_l \quad (1.129)$$

ile dönüştürecek olursak \underline{c} 'nin ikinci dereceden bir uzaysal tansör olduğunu gösteren;

$$c'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} c_{mn} \quad (1.130)$$

ifadesini elde ederiz. Buraya kadar yazılan ifadeleri matris notasyonunu kullanarak yazacak olursak; $d\underline{X}$ ve $d\underline{x}$ sütun vektörlerini,

$$d\underline{X} = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}, \quad d\underline{x} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad (1.131)$$

şeklinde tanımlarsak (1.114) bağıntılarını matris notasyonu ile

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}, \quad d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad (1.132)$$

şeklinde yazabiliriz. (1.123) ve (1.132) ifadelerinden;

$$ds^2 = d\underline{x}^T d\underline{x} = d\underline{X}^T \underline{F}^T \underline{F} d\underline{X}, \quad dS^2 = d\underline{X}^T d\underline{X} = d\underline{x}^T \underline{F}^T \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad (1.133)$$

ifadelerini yazabiliriz.

(1.124) ifadesi göz önüne alındığında Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörlerinin şekil değiştirme gradyanlarına bağlı olarak;

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}, \quad \underline{c} = \underline{F}^T \underline{F}^{-1} \quad (1.134)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Bazı durumlarda (1.134) ile verilen matrisler yerine terslerini kullanmamız gerekebilir. Bu durumda bu matrisler;

$$\underline{c}^{-1} = \underline{F} \underline{F}^T, \quad \underline{C}^{-1} = \underline{F}^{-1} \underline{F}^{-T} \quad (1.135)$$

veya bileşenleri cinsinden;

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}, \quad C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k} \quad (1.136)$$

şeklinde ifade edilir. \underline{c}^{-1} ve \underline{C}^{-1} tansörleri sırasıyla Finger ve Piola şekil değiştirme tansörleri olarak bilinir. Hareket denklemlerini $\underline{r} = \underline{r}(\underline{R}, t)$ şeklinde vermek yerine P parçacığının \underline{u} yer değiştirme vektörüne bağlı olarak ifade edebiliriz (Şekil 1.20). Yer değiştirme vektörünü;

$$\underline{u} = \underline{r} - \underline{R} + \underline{b} \quad (1.137)$$

olarak tanımlayarak, \underline{u} vektörünü;

$\underline{u} = u_k \underline{i}_k = U_K \underline{I}_K$ şeklinde yazarak maddesel ve uzaysal bileşenlerini belirleyebiliriz.

Şimdi hareket denklemlerinden (1.102) ve (1.105) yararlanarak uzaysal ve maddesel yer vektörlerini $\underline{r} = \underline{r}(X_K, t)$ ve $\underline{R} = \underline{R}(x_k, t)$ olarak ifade ederek;

$$d\underline{r} = \underline{C}_K dX_K, \quad d\underline{R} = \underline{c}_k dx_k \quad (1.138)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada \underline{C}_K ve \underline{c}_k vektörleri;

$$\underline{C}_K = \frac{\partial \underline{r}}{\partial X_K} = x_{k,K} \underline{i}_k, \quad \underline{c}_k = \frac{\partial \underline{R}}{\partial x_k} = X_{K,k} \underline{I}_K \quad (1.139)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu vektörler cinsinden şekil değiştirme tansörleri;

$$\underline{C}_{KL} = \underline{C}_K \cdot \underline{C}_L, \quad c_{kl} = \underline{c}_k \cdot \underline{c}_l \quad (1.140)$$

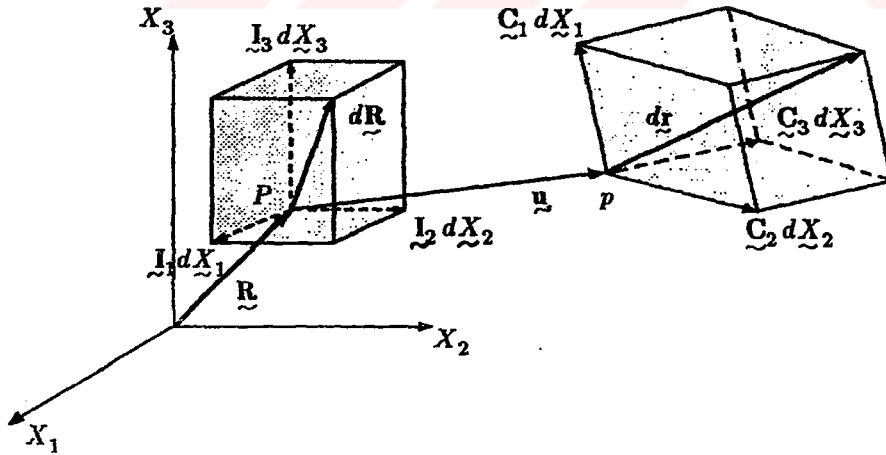
olarak bulunur. (1.139)₁ ifadesinden;

$$\underline{C}_K \cdot \underline{C}_L = x_{k,K} \underline{i}_k \cdot x_{l,L} \underline{i}_l = x_{k,K} x_{l,L} \delta_{kl} = x_{k,K} x_{k,L} \quad (1.141)$$

ve benzer şekilde (1.139)₂ ifadesinden;

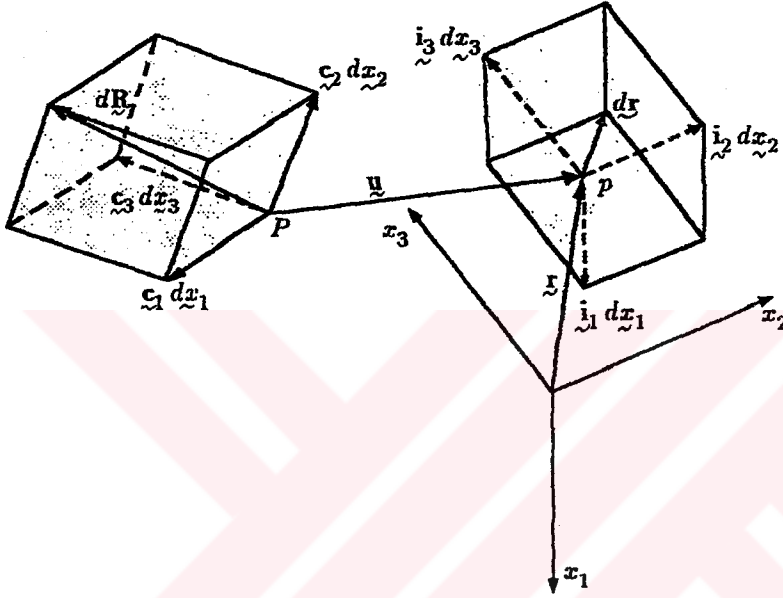
$$\underline{c}_k \cdot \underline{c}_l = X_{K,k} \underline{I}_K \cdot X_{L,l} \underline{I}_L = X_{K,k} X_{L,l} \delta_{KL} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.142)$$

ifadeleri elde edilir.



Şekil 1.21. Paralelyüzlüye dönüşebilen dik paralelyüzlü (Şuhubi, 1993)

\underline{c}_K ve \underline{c}_k vektörlerinin fiziksel anlamı tanımlarından da açıkça görülmektedir. Referans konumunda P noktasında $\underline{i}_1 d\underline{x}_1$, $\underline{i}_2 d\underline{x}_2$ ve $\underline{i}_3 d\underline{x}_3$ kenar vektörlerini koordinat eksenlerine paralel aldığımız elemanter bir dik paralelyüzlü şekil değiştirme ile p noktasında kenar vektörleri $\underline{c}_1 d\underline{x}_1$, $\underline{c}_2 d\underline{x}_2$ ve $\underline{c}_3 d\underline{x}_3$ ile verilen bir paralelyüzlüye dönüşür (Şekil 1.21).



Şekil 1.22. Dik paralelyüzlüye dönüşen paralelyüzlü (Şuhubi, 1993)

Benzer şekilde p noktasında $\underline{i}_1 d\underline{x}_1$, $\underline{i}_2 d\underline{x}_2$ ve $\underline{i}_3 d\underline{x}_3$ kenar vektörlerini uzaysal koordinat eksenlerine paralel aldığımız elemanter bir dik paralelyüzlü referans konumunda P noktasında kenarları $\underline{c}_1 d\underline{x}_1$, $\underline{c}_2 d\underline{x}_2$ ve $\underline{c}_3 d\underline{x}_3$ olan bir paralelyüzlünün şekil değiştirmiş halini oluşturur (Şekil 1.22).

(1.139) ifadelerine benzer olarak;

$$\underline{c}_k^{-1} = x_{k,K} \underline{i}_K, \quad \underline{c}_K^{-1} = X_{K,k} \underline{i}_k \quad (1.143)$$

vektörlerini tanımlayalım. \underline{c}_k^{-1} vektörlerinin \underline{c}_k vektörlerine karşıt olduğu, yani;

$$\underline{c}_k^{-1} \cdot \underline{c}_j = \delta_{kj} \quad (1.144)$$

bağıntısını sağladıkları görülür. (1.139) ve (1.143) ifadelerinden;

$$\underline{c}_k^{-1} \cdot \underline{c}_1 = x_{k,K} \underline{i}_K \cdot X_{L,1} \underline{i}_L = x_{k,K} X_{L,1} \delta_{KL} = x_{k,K} X_{K,1} = \delta_{k1} \quad (1.145)$$

olduğu görülür. Benzer şekilde C_K^{-1} vektörlerinin de C_K vektörlerine karşıt olduğu ve

$$C_K^{-1} \cdot C_L = \delta_{KL} \quad (1.146)$$

bağıntılarının sağlandığı görülebilir. (1.136) ifadesinden yararlanarak;

$$c_{k1}^{-1} = c_k^{-1} \cdot c_1^{-1}, \quad C_{KL}^{-1} = C_K^{-1} \cdot C_L^{-1} \quad (1.147)$$

yazabiliriz. c^{-1} ile c ve C^{-1} ile C tansörleri birbirlerinin tersleri olduğu için;

$$c_{km}^{-1} c_{m1} = \delta_{k1}, \quad C_{KM}^{-1} C_{ML} = \delta_{KL} \quad (1.148)$$

bağıntılarının da geçerli olacağı açıktır.



1.5. Denge Denklemleri

Sürekli ortamlar mekaniğinde; ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olmaksızın geçerli olan termomekanik davranışı yöneten denklemler, global ve yerel denge (balans) denklemleri olarak adlandırılır. Termomekanik balans denklemleri yazılırken; denge denklemleri önce global olarak yazılmış sonra da genelleştirilmiş Green-Gauss ve Stokes teoremleri yardımıyla elde edilen denklemler yerelleştirilmiştir. Global denklemlerde V ve S maddesel hacim ve yüzeyi, $C.V.$ ve $C.S.$ ise kontrol hacmi ve kontrol yüzeyini göstermektedir. Ayrıca ortamın bir σ süreksizlik yüzeyi içerdiği kabul edilmiştir.

1.5.1. Kütlein Korunumu

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0, \quad \rho = \rho(\underline{X}, t), \quad \underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (1.149)$$

$$\int_{C.V.} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right) dV + \int_{\sigma} \llbracket \rho \underline{v} \rrbracket \cdot \underline{n} da = 0 \quad (1.150)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \quad V - \sigma \text{ içinde geçerli} \quad (1.151)$$

$$\underline{n} \cdot \llbracket \rho \underline{v} \rrbracket = 0 \quad \sigma \text{ üzerinde geçerli} \quad (1.152)$$

Burada; ρ kütle yoğunluğu, \underline{v} hız, V maddesel hacim, $C.V.$ kontrol hacmi olarak göz önüne alınmıştır.

1.5.2. Lineer Momentumun Dengesi

Bir serbest cismin lineer momentumunun zamana göre türevi ona tesir eden tüm kuvvetlerin bileşkesine eşittir.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \underline{v} dV = \int_V \rho \underline{f} dV + \oint_S \underline{t}(\underline{n}) da \quad (1.153)$$

Burada; $(\rho \underline{f})$ birim hacim başına mekanik gövdesel (kütlesel) kuvvet, $\underline{t}_{(\underline{n})} = \underline{n} \cdot \underline{t}$ gerilme tansörünün normalı \underline{n} olan bir yüzeye etkisi veya gerilme vektörü olarak değerlendirilir. (1.153) denkleminin genelleştirilmiş Reynolds transport teoremi uygulanırsa,

$$\int_{C.V-\sigma} \left[\frac{\partial(\rho \underline{y})}{\partial t} \right] dV + \int_{\sigma} \underline{n} \cdot \left[(\rho \underline{y} \underline{y}) - \underline{t} \right] da = \int_{C.V-\sigma} (\rho \underline{f}) dV + \int_{C.S-\sigma} \underline{n} \cdot \underline{t} da \quad (1.154)$$

elde edilir. Bu ifadenin süreksizlik yüzeylerinin dikkate alınarak yerelleştirilmesiyle,

$$\rho \underline{a} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{t} \quad (1.155)$$

$$\underline{n} \cdot \left[\rho \underline{y} \underline{y} - \underline{t} \right] = 0 \quad (1.156)$$

$$\underline{a} \equiv \frac{D \underline{y}}{D t} = \frac{\partial \underline{y}}{\partial t} + \underline{y} \cdot \nabla \underline{y} \quad (\text{ivme}) \quad (1.157)$$

şeklinde yerel denge denklemleri bulunur.

1.5.3. Açısal Momentumun Dengesi

Serbest cismin açısal momentumunun zamana göre türevi serbest cisme tesir eden tüm kuvvet çiftleri ile tüm kuvvetlerin sabit bir noktaya göre momentlerinin bileşkesine eşittir. Global korunum ifadesi;

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \underline{x} \times \rho \underline{y} dV = \int_{V-\sigma} (\underline{x} \times \rho \underline{f}) dV + \int_{S-\sigma} \underline{x} \times \underline{t}_{(\underline{n})} da \quad (1.158)$$

şeklindedir. Burada; \underline{x} yer vektörüdür.

$$\begin{aligned} & \int_{C.V} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\underline{x} \times \rho \underline{y}) + \nabla \cdot (\underline{x} \times \rho \underline{y} \underline{y}) \right] dV - \int_{\sigma} \underline{n} \cdot \left[\underline{x} \times \{ \underline{t} - \rho \underline{y} \underline{y} \} \right] da \\ & = \int_{C.V-\sigma} [\underline{x} \times (\rho \underline{f})] dV + \int_{C.S-\sigma} \underline{x} \times (\underline{n} \cdot \underline{t}) da \end{aligned} \quad (1.159)$$

elde edilir. Buradan açısal momentumun yerel denge denklemi;

$$\epsilon_{klm} t_{lm} = 0 \quad (V-\sigma \text{ içindeki noktalarda geçerli}) \quad (1.160)$$

olarak bulunur. Sıçrama şartı olarak da;

$$\underline{x} \times \underline{n} \cdot \left[\{ \underline{t} \} - \rho \underline{y} \underline{y} \right] = 0 \quad (1.161)$$

elde edilir. Bu ifade (1.156) ile verilen lineer momentumun korunumundaki sıçrama şartından dolayı sağlandığından denge denklemlerine ilave getirmez.

1.5.4. Enerjinin Korunumu

Toplam iç ve kinetik enerjinin zamana göre artışı serbest cisme giren ısı ve elektrostatik tüm kuvvet ve kuvvet çiftlerinin cisim üzerinde yaptıkları işin toplamına eşittir ve global korunum ifadesi;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \right) dV &= \int_{V-\sigma} \rho h dV + \int_{V-\sigma} (\rho \underline{f} \cdot \underline{v}) dV \\ &+ \oint_{S-\sigma} (\underline{t}_{(\underline{n})} \cdot \underline{v}) da + \oint_{S-\sigma} (-\underline{q} \cdot \underline{n}) da \end{aligned} \quad (1.162)$$

şeklinde yazılır. Reynolds transport teoremi yardımıyla,

$$\begin{aligned} \int_{C.V-\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) + \underline{v} \cdot \left(\rho \varepsilon \underline{v} + \frac{1}{2} \rho \underline{v} \cdot \underline{v} \underline{v} \right) \right] dV \\ + \int_{\sigma} \underline{n} \cdot \left[\left[\left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \underline{v} - (\underline{t} \underline{v}) + \underline{q} \right] \right] da \\ + \int_{C.V-\sigma} (\rho h + \rho \underline{f} \cdot \underline{v}) dV + \oint_{C.S-\sigma} (\underline{n} \cdot \underline{t} \cdot \underline{v} - \underline{q} \cdot \underline{n}) da = 0 \end{aligned} \quad (1.163)$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik her V ve σ için geçerli olduğundan, yerelleştirildiğinde,

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + \rho h \quad (V-\sigma \text{ da geçerli}) \quad (1.164)$$

$$\underline{n} \cdot \left[\left[\left(\rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \underline{v} - (\underline{t} \underline{v}) + \underline{q} \right] \right] = 0 \quad (\sigma - \text{üzerinde geçerli}) \quad (1.165)$$

$$\dot{\varepsilon} \equiv \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_k \partial_k \varepsilon \quad (1.166)$$

eşitlikleri bulunur.

1.5.5. Clausius-Duhem Eşitsizliği

Serbest cisim içindeki entropinin zamana göre artışı, cisme hacim kaynaklarından ve yüzeyden giren entropiden daha büyüktür veya en az ona eşittir.

$$\frac{d}{dt} \int_{V-\sigma} \rho \eta dV - \left[\int_{V-\sigma} \rho \frac{h}{\theta} dV - \oint_{S-\sigma} \underline{n} \cdot \left(\frac{\underline{q}}{\theta} \right) da \right] \equiv \Gamma \geq 0 \quad (1.167)$$

şeklinde ifade edilir. Burada; η birim kütle başına entropi, h birim kütle başına enerji kaynağı ve \underline{q} ise ısı akı yoğunluğunu temsil etmektedir. Daha önceki işlemler burada da tekrarlanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\int_{C.V-\sigma} \left[\frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} + \underline{v} \cdot (\rho \eta \underline{v}) \right] dV + \int_{\sigma} \left[\rho \eta \underline{v} \right] \cdot \underline{n} da - \int_{C.V-\sigma} \rho \frac{h}{\theta} dV + \oint_{C.S-\sigma} \underline{n} \cdot \left(\frac{\underline{q}}{\theta} \right) da = \Gamma \geq 0 \quad (1.168)$$

(1.168) denkleminin yerleştirilmesi sonucunda,

$$\rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \eta \right) - \rho \frac{h}{\theta} + \underline{\nabla} \cdot \left(\frac{\underline{q}}{\theta} \right) = \rho \gamma \geq 0 \quad (V-\sigma \text{ içinde geçerli}) \quad (1.169)$$

$$\underline{n} \cdot \left[\rho \eta \underline{v} - \frac{\underline{q}}{\theta} \right] \geq 0 \quad (\sigma \text{ üzerinde geçerli}) \quad (1.170)$$

ifadeleri elde edilir. Yukarıdaki ifadelerdeki integrallerde yer alan $(CV-\sigma)$ açık sistem için, (σ) süreksizlik yüzeyi için yazılmış ifadelerdir. Buraya kadar olan kısımda, ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olmaksızın (katı, sıvı veya gaz gibi bir ayırım gözetmeden) termomekanik davranışı yöneten denge denklemlerini belirlemiş oluyoruz.

Yukarıda verilen denge denklemlerinde yer alan ve bilinmeyen olarak göz önüne alacağımız büyüklükleri şöyle sıralayabiliriz:

$$t_{kl}, q_k, \varepsilon, \eta, \rho, v_k, \theta, \quad (1.171)$$

Burada, \underline{f} ve h gibi dış kaynakların bilindiğini kabul ediyoruz. (1.170) ifadesinde gösterilen bilinmeyenleri topladığımız zaman 15 tane skaler bilinmeyen büyüklüğün bulunması gerektiğini görüyoruz. Buna karşılık bu bilinmeyenleri tespit etmek için elimizde mevcut ifadeler ise bize 6 denklem sunmaktadır. Bilinmeyen sayısı ile denklem sayısı arasındaki farkı kapatabilmek ilave denklemlere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu denklemler bundan sonraki bölümlerde verilecek olan ve ortamın karakterini belirleyen bünye denklemleri olarak isimlendirilecektir.

2. KAYNAK BİLGİSİ

Hasar mekaniği konusunda dikkate değer ilk orijinal çalışmaları Kachanov (1958) ve Rabotnov (1969) metallerin sürünmesi konusunda yapmışlar ve makroskopik hasar değişkenleri kavramını geliştirmişlerdir. Sürekli ortam hasar mekaniğinin gelişmesini başlatan yeni kavramlara, malzeme içerisinde yer alan dağılı kusurlarla sürekli ortamlar mekaniğini birleştiren ve sistematik bir yaklaşım geliştiren çalışmalara Chaboche (1981), Hult (1979), Krajcinovic (1984), Lemaitre (1978) ve Murakami (1983) gibi araştırmacıların makalelerinde rastlanmaktadır. Bu çalışmalarda, malzemenin hasar durumu uygun mekanik değişkenler cinsinden ifade edilmiştir.

Chaboche (1988) tarafından yapılan bir çalışmada; sürekli ortam hasar mekaniği genel kavramları ile ortaya konulmuş, hasarın ölçüleri ve tanımları verilmiş, uygun mekanik değişkenler cinsinden mikroyapısal hasarlı bir durumun nasıl tanımlanacağı belirtilmiştir. Hasarlı bir malzemenin mekanik davranışı hasar anizotropisini de içerecek şekilde genel termodinamik çerçevede ele alınarak değerlendirilmiştir. Sürekli ortam hasar mekaniğinin önemli özelliklerinden birisinin hasar prosesleri ile gerilme-gerinme davranışları arasında birleşik etkilerin dikkate alınması gereği olduğunu vurgulamıştır. Chaboche aynı yıl bir sonraki çalışmasında, malzemelerin gerilme-gerinme davranışları üzerinde hasarın etkisini sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde kalarak sürünme, yorulma, sürünme-yorulma etkileşimi, sünek hasar ve gevrek hasar gibi alt alanlarda daha detaylı olarak incelemiştir. Ayrıca çatlak başlangıcı ve çatlak ilerlemesi konularını da bu makalede tartışmıştır (Chaboche, 1988). Yapılarda ömür tahmini ile ilgilenen bu çalışma malzemedeki bozulma ve gerileme prosesleri ile mekanik davranış arasındaki birleşik etkileri dikkate almaktadır. Bu çalışma aynı zamanda sürekli ortamlar mekaniği ile çatlak mekaniği arasında geçişi sağlayan tamamlayıcı bir köprü görevi yapmaktadır.

(Krajcinovic, 1983) tarafından hasarlı malzemelerin bünye denklemleri üzerine yapılan bir çalışmada; düz mikroçatlaklar içeren bir malzemenin bünye denklemlerinin türetilmesi incelenmiştir. Hasar kanunu, ortogonalite şartına bağlı

olarak kayıp potansiyelden türetilmiştir. Gerilme yoğunluğu faktörleriyle ilişkili olarak eşlenik termodinamik kuvvetler uzayında kayıp potansiyelinin mevcut olduğu gösterilmiştir. Küçük deformasyonlar teorisi ve zamandan bağımsız prosesler çerçevesinde hem gevrek hem de sünek malzemeler göz önüne alınmıştır.

Malzemedeki hasarın mekanik modellenmesi hakkında Murakami (1988) tarafından yapılan incelemede, malzemelerin anizotropik hasar durumlarını tanımlamak için sürekli ortam hasar mekaniği çerçevesinde kalınarak sistematik bir teori geliştirilmiştir. Gerçek hasarlı konfigürasyona mekanik olarak eşdeğer hayali bir hasarsız konfigürasyon takdim edilerek klasik sürünme hasarına ait teori genel üç boyutlu duruma genelleştirilmiştir. Hasar durumunun ikinci dereceden simetrik bir tansörle ifade edilebileceği gösterilmiştir. Fiziksel karışıklıklar, matematiksel kısıtlamalar ve bu hasar tansörünün sınırları ve hasarlı durumdaki sonlu deformasyonların etkileri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Hayali hasarsız konfigürasyon kavramı aynı zamanda efektif gerilmenin tanımına da uygulanmıştır. Sonuç olarak, çatlak ucunun etkilerine karşılık gelen efektif gerilmenin genişletilmesi tartışılmıştır. Bileşke efektif gerilme tansörü çatlaklı elastik-gevrek bir malzemenin elastik davranışının gerilme-yörünge bağımlılığını incelemek için kullanılmıştır.

Weitsman (1988) da viskoelastik malzemeler için sürekli ortam hasar modeli başlığı altında bir makale yayınlamıştır. Bu çalışmada, hasar bir çok çatlak bulunduran malzemenin temsili bir hacim elemanı içerisinde “aktif” ve “pasif” mikroçatlakların toplam alanları ile ilgili iki adet simetrik ikinci dereceden tansörle ifade edilmiştir. Malzemenin viskoelastik özelliği ise uzun polimerik zincir moleküllerinin hareketi ile ilgili iç serbestlik derecelerini temsil eden skaler değerli iç durum değişkenleri ile ifade edilmiştir. Bünye bağıntıları; başlangıçta izotropik malzemeler için türetilen detaylı ifadelerle sürekli ortamlar mekaniği ve tersinmez olayların termodinamiğinin temel şartlarından oluşturulmuştur. Hasarın, malzeme simetrisindeki değişikliklerle birlikte malzeme modülünün yumuşamasına sebep olduğu da gösterilmiştir. Tek eksenli gerilme altında, tek eksenli hasarın özel durumları ve hasarın nem difüzyonu ile etkileşimi de göz önüne alınmıştır. Genellikle gevrek davranış gösteren kaya ve

beton gibi malzemeler veya metallerin plastik bölgeye ulaşıncaya kadar olan mekanik davranışları ile ilgili modeller incelenmiş olmasına rağmen viskoelastik olarak sürünme gösteren polimerik malzemelerin hasar modelleri pek incelenmemiştir. Bu konuda bazı çalışmalar Schapery (1980; 1981; 1984) tarafından yapılmış ve viskoelastik gerilme-gerinme bağıntıları hasarın etkilerini içerecek şekilde düzenlenmiştir. Bu bağıntılar bir serbest enerjiden türetilmediği için ve hasar değişkeni tansörel karakterde ele alınmadığından malzeme simetrisindeki değişiklikler hasarlı konfigürasyonda görülmemektedir. Weitsman'ın çalışmaları sonucunda; hasarın mevcudiyeti halinde viskoelastik malzemelerin davranışının zamana bağımlı iki farklı olayı içerdiği görülmüştür. Bunlardan birincisi, hasarsız malzemenin viskoelastik davranışının tabiatında var olan özelliklerden kaynaklanırken ikincisi ise zamana bağlı hasar gelişmesi olayından kaynaklanmaktadır. Ayrıca, hasar olayının malzemenin global simetrisindeki değişiklikleri de yönlendirdiği belirtilmektedir.

Weitsman (1988), bir başka çalışmasında tek eksenli olarak takviye edilmiş bir ortamda ısı iletimi ile hasarın birleşik etkilerini incelemiştir. Bu çalışmada da tersinmez olaylar termodinamiği ve sürekli ortamlar mekaniğinin temel kavramlarından faydalanmıştır. Hasar parametresi yine ikinci dereceden simetrik bir tansörle tanımlanmış ve hasarın mevcudiyeti altında hem mekanik davranış hem de ısı akısı için gerekli bünye bağıntıları türetilmiştir. Hasardaki artmanın birleşik ısı iletimi prosesindeki kayıplara katkıda bulunduğu gözlenmiştir. Mikro seviyedeki çatlak büyümesi prosesi makro seviyedeki hasar büyümesi ifadeleri ile ilişkili hale getirilerek özel bir çatlak mekaniği problemi çözülmüştür. Hasar ve sıcaklığın birlikte ele alınması ve bu konuda ilerlemeler kaydedebilmek için mikroçatlakların mevcudiyeti halinde temel termoelastik çözümlerin gerekli olduğu vurgulanmıştır.

Fichant vd. (1997), malzemenin elastik katılığı üzerine hasarın etkilerini incelemişler ve çalışmalarını fenomenolojik bir model üzerinde yoğunlaştırmışlardır. Hasarı ifade eden çatlaklar, boşluklar ve bunların ölçüsel ve yönsel dağılımları hakkında kesin yapıyı ortaya koyabilmek için homojenleştirme tekniklerini kullanmışlardır. Bu çalışmada, hasarlı yüzeylerin gelişmesi ile birlikte hasarın büyümesinden dolayı

elastik katılığın azaldığı ifade edilmektedir. Enerji kaybı daima pozitif işaretle denklemlerde yer aldığından hasarlı yüzeylerin gelişmesi termodinamiğin ikinci kanunu ile tutarlı olmaktadır. Bu yaklaşımda izotermal şartlar için hasar sabit kabul edildiği zaman enerji kaybı oranının iç enerji değişimi ve serbest enerji değişimi arasındaki farktan kaynaklandığı gösterilmektedir. Sonuç olarak, mikroçatlaklar sayesinde anizotrop hale gelmiş olan hasarlı modelin elastik davranışı hasarın büyümesinden dolayı lineer olmayan bir matematiksel formda ortaya çıkmaktadır. Eğer her bir düzleme uygulanan gerilme mikroçatlakları büyütme eğiliminde ise hasarın malzemenin elastik davranışını etkilemek zorunda kaldığı ifade edilmektedir. Efektif gerilmenin pozitif ve negatif olmak üzere iki kısma ayrılabilceği gösterilmiş ve hasar yüzeyi iki kısma ayrılarak takdim edilmiştir. Yükün boşaltılması esnasında ve özelliklede basınç durumunda tersinmez gerilmelerin arttığı gözlenmiştir.

Bhattacharya ve Ellingwood (1998), tahmini hasar büyümesine dayalı bir sürekli ortam hasar mekaniği modeli geliştirmişlerdir. Bu çalışmada yapısal hasar büyümesi esas olarak rasgele bir olay şeklinde göz önüne alınmıştır. Hasar mekanizmasını rasgele bir olay şeklinde ele alıp istatistiksel hesaplarla yorumlamaya çalışan araştırmalara ait referanslar bu makalede verilmiştir. Oldukça genel termodinamik şartlar altında rasgele oluşan bir izotropik hasar büyümesi için tahmini bir diferansiyel denklemler cümlesi türetilmiştir. Bu diferansiyel denklemler tek eksenli sünek deformasyonlar, yüksek sıcaklıkta sürünme ve yorulma çevrimleri için hasar büyümesini ve emniyet sınırlarını belirlemek maksadı ile çözülmüşlerdir. Geliştirilen modelin deneysel sonuçlarla da uyumlu olduğu ifade edilmektedir.

Onat ve Leckie (1988) tarafından değişen iç yapının mevcudiyeti halinde mekanik davranışın temsili konusunda yapılan bir çalışmada, iç yapının temsil edilmesinde indirgenebilen çift ranklı tansörlerin oynadığı rol tartışılmış ve bünye denklemleri üzerine termodinamik tarafından getirilen kısıtlamalar göz önüne alınarak bu denklemlerde potansiyellerin kullanılması incelenmiştir.

Wu ve Nanakorn (1998) tarafından yapılan bir araştırma ise hasar prosesi ile plastik deformasyon prosesi arasındaki etkileşimi dikkate alacak şekilde bünye

denklemlerinin geliştirilmesi üzerine olmuştur. İnşa edilen model, gerçek hasarlı bir sürekli ortamın hayali bir hasarsız sürekli ortamla termodinamik eşdeğerliği oluşturularak geliştirilmiştir. Bu model hasara ait iç durum değişkenlerinin hasarın ölçüsünden bağımsız olduğunu kabul etmektedir. Kesin denklemleri elde etmek için iç bünyeye ait bir teori kullanılmıştır. Bu teorinin yapısında iki farklı zaman dikkate alınmaktadır. Birincisi, malzemenin plastik deformasyon tarihini tanımlamak için kullanılırken, ikincisi hasar tarihini tarif etmek için kullanılmaktadır. Teoriye ait bünye denklemleri süreksizlikleri dikkate almayarak sürekli bir ortam teorisi şeklinde elde edilmekte, dolayısıyla da sayısal hesaplamalarda akma şartına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu çalışmada önerilen modelin, tek eksenli çekme ve sıkıştırma testlerine tabi tutulmuş beton ve kireçli harç malzemesinin bir boyutlu, monoton ve tekrarlanan yükleme durumlarına ait sonuçlarla tutarlı olduğu belirtilmektedir.

Hult ve Rammerstorfer'in editörlüğünde uluslararası mekanik bilimleri merkezi tarafından hazırlanan "Fiber Takviyeli Polimerler ve Kompozit yapıların Mühendislik Mekaniği" (1994) adlı çalışma; monograf kompozit kabuklar, tabakalar ve plakların aşınma mekanizmaları, yorulmaları, çatlak ve hasar mekaniği hakkında dikkate değer analitik modeller ve nümerik metotları içermektedir. Bu incelemelerde mikro mekanik kavramlardan yola çıkılarak malzemenin sürekli ortam bazındaki makroskopik özelliklerine ulaşılmıştır.

Burr vd. (1997) tarafından yapılan seramik-matris kompozit malzemelerde hasar mekanizmasının sürekli ortam modellemesi hakkındaki çalışmada ise; fiber takviyeli bir seramik-kompozit malzemede matris malzemesindeki çatlaklar, ara yüzlerdeki bağların etkileşimi, fiberlerin kopması ve matris fiber etkileşimleri hakkında bir bünye kanunu geliştirilmiştir. Malzemenin katılığındaki azalmadan, elastik olmayan deformasyonlardan, histerisis çevrimlerden ve çatlak oluşumundan farklı mekanizmaların sorumlu olduğu düşünülmektedir. Burada geliştirilen prosedür iki tabaka yönelimine sahip SiC/SiC [0/90] kompozit malzemeye sadece çekme deneyinden elde edilen sonuçları kullanarak uygulanmıştır. Her bir deney, bir seri yükleme ve boşaltma aşamalarından oluşmuştur. Sonlu elemanlar yöntemi

kullanılarak tahmin edilen sonuçlar deneylerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve iyi bir uyumun sağlandığı gözlenmiştir.

Literatür araştırmalarımız esnasında sürekli ortam hasar mekaniği yaklaşımının biyomekanik incelemelerde de kullanıldığını gördük. Zysset ve Curnier (1996), gözenekli (bölmeçikli) kemik yapısı için yapı tansörleri üzerine bina edilmiş üç boyutlu bir hasar modeli oluşturmuşlardır. Bu çalışmada, bölmeçikli kemiğin normal ve patolojik şartlarda hasar mekanizmaları tarafından nasıl motive edildiği, bölmeçikli dokudaki çatlak veya boşlukların büyümesinden kaynaklanan mekanik özelliklerdeki azalma ve buna uygun anizotropik elastisitenin belirlenmesi için yeni bir üç boyutlu bünye yasası geliştirilmiştir. Sürekli ortam hasar mekaniği çerçevesinde formülize edilen teorik model yerel bölmeçik morfolojisini karakterize eden iki yapı tansörü üzerine oturtulmuştur. Bu modelin tek eksenli çekme ve burulma deneylerinden elde edilen sonuçlarla tutarlı olduğu ifade edilmektedir.

Jepsen ve Davy (1997) tarafından yapılan bir başka incelemede ise sert insan kemiğinde hasar birikmesinin ölçülmesi ele alınmıştır. Sert kemikteki hasar prosesini incelemek için seçilen özellikler; elastisite modülündeki azalma, mukavemet azalması ve enerji kaybı olarak belirlenmiştir. Bu özellikleri inceleyerek kemiğin kompleks mekanik yapısında oluşan hasar prosesine çok sınırlı bir yaklaşım sağlanmıştır. Sert kemik hasarlı bir viskoelastik malzeme olarak ele alınmış ve hasar, malzeme özelliklerindeki gerilemeler dikkate alınarak sürekli değişen bir özellik olarak tanımlanmıştır.

Burr vd. (1998) tarafından yapılan bir incelemede de mikro hasar birikiminin kemiğin mekanik özelliklerini nasıl etkilediği deneysel bir metotla izah edilmeye çalışılmıştır. Bu araştırmada mikro hasar birikimini, kemiğin elastisite modülündeki azalma ile pozitif ve lineer olarak irtibatlandırılan bir eş ilişki kurulmuştur. Bu hipoteze dayanarak gerçekleştirilen deneylerde çekme esnasında hasar birikiminin arttığı, basma esnasında ise çatlak büyümesinin daha hızlı gerçekleştiği görülmüştür. Mikroçatlakların sayısı, uzunlukları ve hasarlı kemik bölgesinin alanı mikroskop altında ölçülmüş, bu bilgilere dayanarak sayısal çatlak yoğunluğu, çatlağın yüzeysel

yoğunluğu, ortalama çatlak uzunluğu ve hasarlı bölgenin alanı yüzde olarak hesaplanmıştır. Çatlak yoğunluğu ve malzemenin katılığı arasındaki ilişki kuadratik, hasarlı alan ve malzeme katılığı arasındaki ilişki ise lineer olarak tespit edilmiştir. Bu çalışmanın sonucunda, sadece mikroçatlakların uzunluğunu veya sadece mikroçatlak sayısını dikkate alarak mekanik özelliklerdeki gerilemenin derecesini tahmin etmenin çok zor olduğu vurgulanmıştır.

Biyomekanik alanında sürekli ortam hasar mekaniği ile ilgili olarak sayısız yayın mevcuttur. İlginç olanlardan birisi de Hokanson ve Yazdani (1997) tarafından yapılan ve hasarlı damarların bünye denklemleri hakkında olan incelemedir. Bu çalışmada, damarlar sıkıştırılmaz, nonlineer ve homojen olmayan bir malzeme olarak ele alınmıştır. Ayrıca yine fiberli kompozit bir malzeme olarak düşünülen damar, kalınlık ve kompozisyon olarak üç farklı tabakadan meydana gelmiş gibi modellenmiştir. Büyük deformasyonlara uğrayan damar için yeni bir anizotropik hasar formülasyonu geliştirilmiştir. Burada yine hasar parametresini içeren bir kayıp eşitsizliği oluşturulmuş ve genel termodinamik çerçevede kalınarak teori tesis edilmiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Materyal

Bu çalışmada, mekanik bir yüklemeye maruz, mikroboşluklu, elastik bir ortam için matematiksel bir model geliştirilmiştir. Materyal olarak, mikroboşluklu elastik bir ortam ele alınmış ve mekanik yüklemeler sonucunda böyle bir ortamda oluşan gerilmenin ve hasar derecesine bağlı olarak değişen gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızının bünye denklemleri ortaya konulmuştur.

3.1.1. Hasarlı Elastik Ortamın Termodinamiği

Daha önce bahsettiğimiz gibi denge denklemleri, herhangi bir fiziksel ortam için geçerli olan denklemlerdir. Bu bölümde Termodinamiğin birinci kanunu ve Termodinamiğin ikinci kanunu birleştirilerek ve gerekli olan bünye aksiyomları kullanılarak; gerilme, entropi yoğunluğu, iç enerji ve ısı akı yoğunluğunu tespit edeceğiz. Yine bu bölümde ilk önce bahsedilen bu büyüklükler üzerindeki termodinamik kısıtlamaları kullanarak, ortamın fiziksel ve topolojik özellikleri de dikkate alınıp bünye denklemlerine ait genel formüller çıkarılacak daha sonrada bünye aksiyomlarının ilgili olanları kullanılarak bu formüller somutlaştırılacaktır.

Bölüm 1.5.4 de (1.164) denklemi ile verilen enerji denkleminde ρh terimini çekip, (1.169) denklemi ile verilen entropi eşitsizliğinde yerine yazdığımız zaman aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\rho \dot{\gamma} = -\frac{\rho}{\theta} (\dot{\epsilon} - \theta \dot{\eta}) + \frac{1}{\theta} \underline{t} \cdot \underline{d} - \frac{1}{\theta^2} \underline{q} \cdot \underline{\nabla} \theta \geq 0$$

veya

$$\rho \dot{\gamma} = -\frac{\rho}{\theta} (\dot{\epsilon} - \theta \dot{\eta}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{(l,k)} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\underline{d} = d_{kl} = v_{(k,l)} = v_{(l,k)}$, şekil değiştirme hızı tansörü olarak adlandırılır ve

$$d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = v_{(k,l)} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k})$$

olarak ifade edilir. Entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içinde kontrol edilemeyeceğinden, bu türevi (3.1) denkleminde ortadan kaldırmak için Helmholtz serbest enerjisi;

$$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılarak yeniden yazılabilir. Burada, Ψ genelleştirilmiş Helmholtz serbest enerjisi adını alır ve termodinamik bakımdan enerjinin kullanılabilir kısmını temsil eder. Daha sonra göreceğimiz gibi, serbest enerji yoğunluğunun hangi büyüklüklere bağlı olduğunu malzemenin bünyesi belirleyecektir. (3.3) denkleminde ε 'u çekip maddesel türevini alarak (3.1) denkleminde yerine koyarsak, kontrol edilebilir bağımsız değişkenler cinsinden entropi eşitsizliği aşağıdaki şekli alır.

$$\rho \gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta} (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{(l,k)} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.4)$$

(3.4) ifadesindeki terimleri θ ile çarparsak;

$$-\rho (\dot{\psi} + \eta \dot{\theta}) + t_{kl} v_{(l,k)} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir. Burada semboller üzerindeki noktalar, ilgili büyüklüğün hareketi takiben türevini göstermektedir ve ayrıca;

$$v_{(l,k)} = d_{lk} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \quad C_{KL} \equiv x_{k,K} x_{k,L}, \quad \dot{C}_{KL} \equiv \frac{DC_{KL}}{Dt} \quad (3.6)$$

olup, kütle korunumunun maddesel koordinatlardaki ifadesi olan

$$\rho = \rho_0 j^{-1} \quad (\text{Kütle korunumu}), \quad j \equiv \det [x_{k,K}] = \det \underline{\underline{F}} \quad (3.7)$$

denklemini yardımıyla (3.5) ve (3.6) ifadeleri kullanılarak;

$$-\rho_0 (\dot{\Psi} + \eta \dot{\theta}) + j t_{kl} d_{lk} - \frac{j}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.8)$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizliği aşağıda gösterildiği gibi,

$$\Sigma \equiv \rho_0 \Psi \quad (3.9)$$

bir gerilme potansiyeli tanımlayarak,

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}\right) + j t_{kl} v_{(l,k)} - \frac{j}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Bundan böyle (3.9) denklemini ile tanımlanan Σ yı serbest enerji ismi ile kullanacağız. Yukarıdaki eşitsizlik entropi üretiminin genel bir ifadesidir. Bu

eşitsizliğin kullanılabilmesi için Σ serbest enerjisinin hangi bağımsız değişkenlere bağımlı olduğunun ve ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Buna göre Σ nın argümanlarını seçmek, formal olarak belli bir malzeme seçmek demektir. Şu aşamada problem, yukarıdaki entropi eşitsizliğinde Σ serbest enerjisinin nelere bağlı olduğunu tespit etmektir.

Kozalite ve Determinizm aksiyomlarına göre Σ , \underline{X} maddesel noktasının t anındaki serbest enerjisi cisimi meydana getiren tüm maddesel noktaların hareket ve sıcaklık tarihine bağlıdır. Buna göre;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[\underline{x}(\underline{X}', t), \theta(\underline{X}', t), \underline{X}] , \underline{X}' \in B , -\infty < t' \leq t \quad (3.11)$$

olmalıdır. Malzemenin hafızasının olmadığını düşünürsek bu ifade;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[\underline{x}(\underline{X}', t), \theta(\underline{X}', t), \underline{X}] \quad (3.12)$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan objektivite aksiyomuna göre Σ ; \underline{X}' maddesel noktalarının hareketlerine bağımlı olmayıp, \underline{X}' ve \underline{X} in hareketlerinin farkına bağlı olduğunu gösterir. Yani objektivite aksiyomuna göre Σ aşağıdaki gibi yazılmalıdır:

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[\underline{x}(\underline{X}', t) - \underline{x}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}', t), \underline{X}] \quad (3.13)$$

Argüman içerisindeki bu hareket farkını \underline{X} civarında Taylor serisine açacak olursak;

$$\begin{aligned} \underline{x}(\underline{X}', t) - \underline{x}(\underline{X}, t) &= (\underline{X}'_K - \underline{X}_K)_{x,K} + \frac{1}{2!} (\underline{X}'_K - \underline{X}_K) (\underline{X}'_L - \underline{X}_L)_{x,KL} \\ &+ \frac{1}{3!} (\underline{X}'_K - \underline{X}_K) (\underline{X}'_L - \underline{X}_L) (\underline{X}'_M - \underline{X}_M)_{x,KLM} + \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde Taylor serisi ile temsil edilebilir. Bu temsilin mümkün olabilmesi için hareketin tüm gradyanlarının mevcut olması gerekir. Diğer taraftan yakın civarsallık aksiyomuna göre Σ nın argümanlarına olan bağımlılığı \underline{X}' ve \underline{X} arasındaki mesafe arttıkça hızla sönümlenmektedir. Bu aksiyom (3.14) Taylor seri temsiline kaç terimi dikkate alacağımızı tespit eder. Basit termomekanik malzemelerde olduğu gibi bu aksiyoma dayanarak (3.14) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terimden sonraki terimlerin etkilerinin olmadığı farz edilecektir. Buna göre serbest enerji aşağıdaki formu alır.

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[x_{,K}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t), \underline{X}, D_K] \quad (3.15)$$

Burada D_K vektörleri (3.14) denkleminin sağındaki ilk terimden kaynaklanıp maddesel tasvir vektörleri adını alır ve ortamın anizotropisini belirlemeye yarar. Buradan da görüldüğü gibi objektivite aksiyomu ortamın anizotropisini temsil etme imkanını ortaya çıkarmaktadır. Diğer taraftan sıcaklığın uzaysal tarihini \underline{X} civarında

$$\theta(\underline{X}', t') = \theta(\underline{X}, t) + (\underline{X}'_K - \underline{X}_K)\theta_{,K} + \frac{1}{2!}(\underline{X}'_K - \underline{X}_K)(\underline{X}'_L - \underline{X}_L)\theta_{,KL} + \dots \quad (3.16)$$

şeklindeki Taylor serisi temsiline yakın civarsallık aksiyomunu uygulayıp sağdaki ikinci terimden sonraki terimlerin etkilerini sıfırlarsak;

$$\theta(\underline{X}', t) = \theta(\underline{X}, t) + (\underline{X}'_K - \underline{X}_K)\theta_{,K} \quad (3.17)$$

ifadesini yazabiliriz. İncelenen ortamda gerçekleşen termodinamik proseslerin izotermal şartlarda ele alındığını düşünerek;

$$\theta_{,K} = 0 \quad (3.18)$$

yazabiliriz. Bu durumda;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[x_{,K}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t), \underline{X}, D_K] \quad (3.19)$$

ifadesini yazabiliriz. (3.19) ifadesini,

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma[x_{k,K}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t), \underline{X}, D_K] \quad (3.20)$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada büyük indisler ilgili alanların Maddesel koordinatlardaki bileşenlerini göstermektedir. Objektivite aksiyomuna göre, Σ serbest enerji fonksiyonu deforme olmuş malzemenin rijit hareketleri altında invariant kalmalıdır. Bu da uzaysal koordinat sisteminin zamana bağlı transformasyonları altında Σ nın invariant kalması demektir. Cauchy teoremine göre bu şartın sağlanması ve Σ nın ilk argümanının tek değerli bir fonksiyon olabilmesi için, $x_{,k} = x_{k,K} i_k$ ya olan bağımlılığı $x_{,k}$ vektörlerinin ikişer ikişer skaler ve üçlü karışık çarpımlarına, yani;

$$x_{,K} \cdot x_{,L} \quad (3.21)$$

$$x_{,K} \cdot x_{,L} \times x_{,M} \quad (3.22)$$

çarpımlarına bağlı olması gerekmektedir. Diğer argümanlar maddesel koordinatlarda ifade edildiğinden Cauchy teoremi bu argümanlar için söz konusu değildir ve bu argümanlar aynen kalır. (3.21) denklemini ile verilen ifade Green deformasyon tansörünü tanımlar (Usal, 1994).

$$C_{KL} = x_{,K} \cdot x_{,L} = x_{k,K} x_{k,L} \quad (3.23)$$

(3.22) denklemi ile verilen ifade ise, deformasyon gradyanının determinantını tanımlamakta olup;

$$j = \det x_{k,K} = \frac{1}{6} x_{,K} \cdot x_{,L} \times x_{,M} = \frac{1}{6} \varepsilon_{KLM} \varepsilon_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.24)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan kütle korunumundan $\rho = \rho_0 j$ şeklinde yazılabileceğinden (3.22) ifadesini argümanlardan çıkarırsak, temsili bir \underline{X} maddesel noktasının t anındaki serbest enerji yoğunluğu;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma [C_{KL}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t), \underline{X}, D_K] \quad (3.25)$$

şekline indirgenir. Bunlara ilave olarak, malzememiz mikroboşlukların varlığı nedeniyle yönlü bir ortam özelliği kazanmış yani hasardan dolayı malzeme anizotropik bir yapıya kavuşmuştur. Normalde (başlangıç durumunda) malzemenin izotrop olduğunu farz ediyor ve anizotropinin sadece mikroboşlukların dağılımından kaynaklandığını düşünüyoruz. Ayrıca bu boşluklar zamanla büyümese de, şekil değişikliğine uğradıkları farz edilmiştir. Bu durumda, böyle bir ortam için maddesel tasvir vektörlerinin rolünü $\underline{A}(\underline{X}, t)$ alan vektörü ile \underline{A} vektörünün zamanla değişimini gösteren $\dot{\underline{A}}(\underline{X}, t)$ vektörü üstlenecektir. O halde mekanik bir yüklemeye maruz, boşluklu ve bu boşlukların zamanla şekillerinin değiştiği düşünülen elastik bir ortamın serbest enerji yoğunluğu;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma [C_{KL}(\underline{X}, t), \theta(\underline{X}, t), \underline{X}, \underline{A}(\underline{X}, t), \dot{\underline{A}}(\underline{X}, t)] \quad (3.26)$$

ile ifade edilir. Ayrıca malzeme mikroboşluk alanlarının ve bu boşlukların şekil değişimlerinin yönünü göremeyeceği için $\underline{A}(\underline{X}, t)$ ve $\dot{\underline{A}}(\underline{X}, t)$ vektörüne olan bağımlılığı, aşağıda tanımlanan tansörlere olan bağımlılıkla;

$$\underline{\underline{D}} \equiv \underline{\underline{A}} \underline{\underline{A}} \quad , \quad \underline{\underline{D}} = \dot{\underline{\underline{A}}} \dot{\underline{\underline{A}}} \quad (3.27)$$

şeklinde ifade edebiliriz. İndis formda ise aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$D_{KL} = A_K A_L \quad , \quad \dot{D}_{KL} = \dot{A}_K \dot{A}_L \quad (3.28)$$

Buna göre serbest enerji fonksiyonu;

$$\Sigma(\underline{X}, t) = \Sigma (C_{KL}, D_{KL}, \dot{D}_{KL}, \theta) \quad (3.29)$$

olup malzemenin homojen olduğu dikkate alınarak \underline{X} e olan doğrudan bağımlılık ortadan kaldırılmıştır.

Bu noktada serbest enerji yoğunluğunun incelediğimiz mikroboşluklu ortamlar için hangi argümanlara bağlı olduğu ortaya çıkmıştır. Ancak bu argümanlara nasıl bağlı olduğu bilinmemektedir. Σ nın (3.10) ile verilen ifadesindeki argümanların tümü maddesel koordinatlara bağımlı olduğundan, bunun objektif olduğunu hatırlayarak (3.10) ifadesindeki diğer terimleri de objektif olacak tarzda ifade edelim. Bunun için aşağıdaki tanımları kullanarak;

$$T_{KL} = j X_{K,k} X_{L,l} t_{kl} \quad (3.30)$$

$$Q_K = j X_{K,k} q_k \quad (3.31)$$

$$\Sigma = \rho_0 \Psi = \rho_0 (\varepsilon - \theta \eta) \quad (3.32)$$

ve buradan elde ettiğimiz

$$t_{kl} = j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2} \dot{C}_{KL} = d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (3.34)$$

$$\theta_{,K} = \theta_{,k} x_{k,K} \quad (3.35)$$

$$q_k = j^{-1} x_{k,K} Q_K \quad (3.36)$$

büyükliklerini (3.10) denklemi ile verilen entropi eşitsizliğinde yerine yazdığımız zaman vektörel ve tansörel büyüklüklerin maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden entropi eşitsizliği,

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}) + j \left(j^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} d_{lk} \right) - \frac{j}{\theta} \left(j^{-1} x_{k,K} Q_K \theta_{,k} \right) \geq 0 \quad (3.37)$$

$$-(\dot{\Sigma} + \rho_0 \eta \dot{\theta}) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta} Q_K \theta_{,K} \geq 0 \quad (3.38)$$

şeklini alır. (3.29) denkleminde Σ nın maddesel türevini;

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial D_{KL}} \dot{D}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{D}_{KL}} \dot{\dot{D}}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (3.39)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi (3.38) denkleminde yerine yazıp düzenlediğimiz taktirde,

$$\left(\frac{1}{2} T_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \right) \dot{C}_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial D_{KL}} \dot{D}_{KL} - \frac{\partial \Sigma}{\partial \dot{D}_{KL}} \dot{\dot{D}}_{KL} - \rho_0 \left(\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} - \frac{1}{\theta} Q_K \theta_{,K} \geq 0 \quad (3.40)$$

ifadesini elde ederiz. (3.40) eşitsizliğindeki argümanları sağdan başlayarak θ yı $\dot{\theta}$ ve $\theta_{,K}$ şeklinde, $\underline{\underline{D}}$ nın türevini $\underline{\underline{D}}$ şeklinde ve $\underline{\underline{C}}$ yi $\underline{\underline{C}}$ şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden, $\dot{\theta}$ nın, $\theta_{,K}$ nın, $\underline{\underline{D}}_{KL}$ nin ve $\underline{\underline{C}}_{KL}$ nin katsayıları sıfır olacaktır. $\underline{\underline{D}}_{KL}$ nin katsayısı sıfır olamaz, çünkü $\underline{\underline{D}}_{KL}$, Σ nın argümanlarında mevcut olduğu için $\underline{\underline{D}}_{KL}$ keyfi olarak değiştirilemez. O halde $\underline{\underline{D}}_{KL}$ nin katsayısına, gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızı olarak adlandırılan Y_{KL} şeklinde bir atama yapılırsa, Y_{KL} aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Lemaitre, 1996; Xiao vd., 1998).

$$\bar{Y}_{KL} \equiv -\frac{\partial \Sigma}{\partial D_{KL}} \quad (3.41)$$

Gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızı için, (Chow ve Lu, 1989; Dhar vd., 2000; Hansen ve Schreyer, 1994; Wu ve Nanakorn, 1999) tarafından "Hasar enerjisi değişim hızı", (Ramtani ve Zidi, 2001) tarafından "Uyarlanabilir hasar enerjisi değişim hızı" tabirleri kullanılmıştır.

Pozitif bir büyüklükle uğraşmak için;

$$Y_{KL} \equiv -\bar{Y}_{KL} \quad (3.42)$$

ifadesi kullanılarak, gerinme enerjisi yoğunluğunun değişim hızı aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$Y_{KL} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial D_{KL}} \quad (3.43)$$

(3.40) eşitsizliğindeki $\underline{\underline{C}}_{KL}$, $\underline{\underline{D}}_{KL}$, $\dot{\theta}$ ve $\theta_{,K}$ nın katsayıları sıfıra eşitlenerek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$T_{KL} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \underline{\underline{D}}_{KL}} = 0 \quad (3.45)$$

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \quad (3.46)$$

$$Q_K = 0 \quad (3.47)$$

şeklinde ifade edilebilen bünye denklemlerini elde etmemizi sağlar. (3.47) denkleminde ortamda ısı iletiminin olmadığını görüyoruz. Ayrıca (3.45) denkleminde de serbest enerji yoğunluğunun, hasarın değişim hızına bağlı olmadığı görülmektedir. Buna göre serbest enerji yoğunluğunun bağlı olduğu argümanlar ve iç enerji aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma (C_{KL}, D_{KL}, \theta) \quad (3.48)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} (\Sigma + \rho_0 \theta \eta) \quad (3.49)$$

Ortamın sıkışmaz kabul edilmesi durumunda gerilmenin bünye denklemini ortaya koymak gerekmektedir. Ortamın sıkışmazlığı katı malzemeler için makul bir kabuldür. Gerilme bünye denkleminin Kirchhoff şekli Şuhubi (1994) tarafından,

$$T_{Kk}(\underline{F}, \underline{X}) = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \quad (3.50)$$

şeklinde verilmekte ve bu bağıntı Cauchy gerilme tansörü ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilmektedir.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} x_{l,K} \quad (3.51)$$

Ortam sıkışmaz olduğu takdirde,

$$j = \det \underline{C} = 1 \quad \text{veya} \quad III = 1 \quad (3.52)$$

şartı sağlanmalıdır. Buna göre (3.51) denkleminde Σ yerine kendisine eşdeğer olan ve fakat sözü edilen kısıtlamayı içeren aşağıdaki fonksiyon alınabilir.

$$\Sigma - p(\underline{x}, t) (j - 1) \quad (3.53)$$

(3.53) ifadesindeki p , Lagrange çarpanı adını almaktadır (Usal, 2001). Bu ifadedeki fonksiyonun $x_{k,K}$ ya göre türevi alınıp (3.51) denkleminde yerine yazılırsa,

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + 2 x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.54)$$

denklemini elde edilir. Bu ifadenin maddesel formu,

$$T_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.55)$$

şeklinde elde edilir. Gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızı, bilindiği gibi daha önce $Y_{KL} \equiv \frac{\partial \Sigma}{\partial D_{KL}}$ şeklinde tanımlanmıştı. Bu ifadede Σ nın deformasyon gradyanına göre türevi yer almadığı için Lagrange çarpanı sıfır olur.

Bu durumda elde etmemiz gereken bünye denklemleri, yapılan kabule bağlı olarak T_{KL} ve Y_{KL} dir ve bunların serbest enerji fonksiyonu Σ ya bağlı olduğu (3.55) ve (3.43) denklemlerinden açıkça görülmektedir. O halde yapılacak ilk iş Σ nın açık formunu ortaya koymak olacaktır.

Bu aşamada incelenen malzemenin uymak zorunda kaldığı maddesel simetri kısıtlamasından bahsetmek uygun olacaktır. \mathfrak{S} , tercihli doğrultulara karşılık gelen bir maddesel koordinat takımını yeni bir maddesel koordinat takımına dönüştüren ve yapının fiziksel özelliklerini invaryant bırakan ortogonal matrislerden oluşmuş sonlu bir grup olsun. Bu gruba incelenen kristal yapının simetri grubu denir ve ortogonal grubun bir alt grubunu oluşturur, dolayısıyla $\mathfrak{S} \subseteq O(3)$ yazılabilir. Simetri grubu tam ortogonal gruba eşitse malzeme izotropdur. \mathfrak{S} simetri grubunun üyesi olan ve sonlu sayıda $\underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S}$ matrislerinden oluşmuş bir simetri grubu dikkate alındığında, bünye fonksiyoneli Σ 'nın, aşağıdaki koordinat dönüşümleri altında şeklen-değişmez kalması gerektiği görülmektedir (Şuhubi, 1994).

$$X'_K = S_{KL} X_L, \quad X_L = S_{LK}^T X'_K, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T, \quad \forall \underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S} \quad (3.56)$$

(3.56) ile verilen maddesel simetri kısıtlaması, $\Sigma = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}, \theta)$ bünye fonksiyoneli aşağıdaki gibi ifade etmeyi gerektirir.

$$\Sigma' = \Sigma \Rightarrow \Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{D}}', \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}, \theta) \quad (3.57)$$

Bu bünye fonksiyonelinin argümanları ise (3.56) ile verilen dönüşüm dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= S_{KM} S_{LN} C_{MN} \Rightarrow \underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T \\ D'_{KL} &= S_{KM} S_{LN} D_{MN} \Rightarrow \underline{\underline{D}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{S}}^T \end{aligned} \quad (3.58)$$

3.2. Metot

Bu çalışmada ele alınan mekanik yüklemeye maruz mikroboşluklu elastik ortamın izotrop olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda bünye fonksiyoneli olarak ortaya çıkan Σ nın argümanlarının somut olarak tayini için, invaryantlar teorisine ait bulgular kaçınılmaz bir yöntem olarak kullanılmıştır.

3.2.1. Hasarlı-Elastik-İzotrop Ortam İçin Bünye Modelinin Oluşturulması

Literatür taramasının yer aldığı 2. bölümde de belirtildiği gibi ortamın anizotropisi sadece mikroçatlaklar veya mikroboşluklardan kaynaklanmaktadır (Fichant vd., 1997). Buna göre Σ serbest enerjisinin maddesel koordinat sisteminin ful-ortogonal grup transformasyonları altında invaryant kalması gerekir. Bu da bu fonksiyon üzerine izotropiden gelen bir kısıtlamadır. Bunu matematiksel olarak ifade edersek Σ nın aşağıdaki kısıtlamayı sağlaması gerekir.

$$\Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}, \theta) = \Sigma(\underline{\underline{MCM}}^T, \underline{\underline{MDM}}^T, \theta) \quad (3.59)$$

Burada $\underline{\underline{M}}$, maddesel koordinat sistemlerinin ful-ortogonal transformasyonlarını gösterdiğinden,

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \underline{\underline{M}}^T \quad (3.60)$$

şartını sağlamaktadır. İnvaryantlar teorisinden biliyoruz ki, bu argümanların skaler bir fonksiyonu olan Σ nın bu argümanlara müşterek invaryantları vasıtası ile bağlı olması gerekir (Eringen, 1967). Buna göre, $\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}$ simetrik matrislerinin birbirinden bağımsız 8 adet müşterek invaryantlarının olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \text{tr} \underline{\underline{C}} = C_{KK} \\
I_2 &= \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 = C_{KL} C_{LK} \\
I_3 &= \text{tr} \underline{\underline{C}}^3 = C_{KL} C_{LM} C_{MK} \\
I_4 &= \text{tr} \underline{\underline{D}} = D_{KK} = A_K A_K \\
I_5 &= \text{tr} \underline{\underline{D}}^2 = D_{KL} D_{LK} = A_K A_L A_L A_K \\
I_6 &= \text{tr} \underline{\underline{D}}^3 = D_{KL} D_{LM} D_{MK} = A_K A_L A_L A_M A_M A_K \\
I_7 &= \text{tr} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} = C_{KL} D_{LK} = C_{KL} A_L A_K \\
I_8 &= \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 \underline{\underline{D}} = C_{KL} C_{LM} D_{MK} = C_{KL} C_{LM} A_M A_K \\
I_9 &= \text{tr} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}}^2 = C_{KL} D_{LM} D_{MK} = C_{KL} A_L A_M A_M A_K \\
I_{10} &= \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 \underline{\underline{D}}^2 = C_{KL} C_{LM} D_{MN} D_{NK} = C_{KL} C_{LM} A_M A_N A_N A_K
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Eğer $\underline{\underline{D}}$ hasar tansörünü bir $\underline{\underline{A}}$ vektörünün kendisi ile tansör çarpımı olacak şekilde seçersek $I_9 = I_4 I_7$ ve $I_{10} = I_4 I_8$ olacağından I_9 ile I_{10} invaryantlarını, buna dayanarak invaryantlar listesinden çıkarabiliriz. İnvaryantların kendisini teşkil eden birimlerin simetrik bir fonksiyonu olması gereğine dayanarak, yukarıda hasar tansörü için yaptığımız bu kabul genelliğe hanel getirmez. Bu durumda serbest enerji fonksiyonumuz yukarıda tanımlanan argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \tag{3.62}$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invaryantlarının

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \text{tr} \underline{\underline{C}} = \text{tr} \underline{\underline{c}}^{-1} \\
I_2 &\equiv \text{tr} \underline{\underline{C}}^2 = \text{tr} \underline{\underline{c}}^{-2} \\
I_3 &\equiv \text{tr} \underline{\underline{C}}^3 = \text{tr} \underline{\underline{c}}^{-3}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
I &= I_1 \\
II &= \frac{1}{2} (I_1^2 - I_2)
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$III = \frac{1}{6} (I_1^3 - 3 I_1 I_2 + 2 I_3)$$

şeklinde olduğu (Şuhubi, 1994) dikkate alınarak (3.61) ifadesindeki (I_1, I_2, I_3) invaryantları yerine, (3.64) denkleminde verilen asal invaryantlar kullanılır. Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden III asal invaryantı 1 olur. Bu durumda Σ nın bağlı olduğu invaryantlar, (3.61) ve (3.64) yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\Sigma = \Sigma (I, \Pi, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8) \quad (3.65)$$

Ortam sıkışmaz olduğundan gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemi aşağıdaki gibi ortaya konulmuştur.

$$T_{PQ} = -p C_{PQ}^{-1} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} \quad (3.66)$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial D_{PQ}} \quad (3.67)$$

Bu ifadelerdeki kısmi türevler (3.65) ifadesinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial C_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial C_{PQ}} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial D_{PQ}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \frac{\partial I_4}{\partial D_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \frac{\partial I_5}{\partial D_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial D_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \frac{\partial I_7}{\partial D_{PQ}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \frac{\partial I_8}{\partial D_{PQ}} \quad (3.69)$$

(3.61) ve (3.64) ifadeleriyle verilen invariantların C_{PQ} ya göre sıfır olmayan türevleri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial C_{PQ}} &= \delta_{KP} \delta_{KQ} = \delta_{PQ} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial C_{PQ}} &= \delta_{PQ} C_{KK} - C_{PQ} \\ \frac{\partial I_7}{\partial C_{PQ}} &= D_{PQ} \\ \frac{\partial I_8}{\partial C_{PQ}} &= C_{PK} D_{KQ} + C_{QK} D_{KP} = C_{PK} D_{KQ} + D_{PK} C_{KQ} \end{aligned} \quad (3.70)$$

(3.61) ve (3.64) ifadeleriyle verilen invariantların D_{PQ} ya göre sıfır olmayan türevleri de benzer şekilde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_4}{\partial D_{PQ}} &= \delta_{KP} \delta_{KQ} = \delta_{PQ} \\ \frac{\partial I_5}{\partial D_{PQ}} &= \delta_{KP} \delta_{LQ} D_{LK} + D_{KL} \delta_{LP} \delta_{KQ} = D_{QP} + D_{QP} = 2 D_{PQ} \\ \frac{\partial I_6}{\partial D_{PQ}} &= \delta_{KP} \delta_{LQ} D_{LM} D_{MK} + D_{KL} \delta_{LP} \delta_{MQ} D_{MK} + D_{KL} D_{LM} \delta_{PM} \delta_{KQ} \\ &= D_{QM} D_{MP} + D_{KP} D_{QK} + D_{QL} D_{LP} = D_{QM} D_{MP} + D_{QM} D_{MP} + D_{QM} D_{MP} \\ &= 3 D_{QM} D_{MP} = 3 D_{PM} D_{MQ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_7}{\partial D_{PQ}} &= C_{KL} \delta_{PL} \delta_{QK} = C_{QP} = C_{PQ} \\ \frac{\partial I_8}{\partial D_{PQ}} &= C_{KL} C_{LM} \delta_{MP} \delta_{KQ} = C_{QL} C_{LP} = C_{PL} C_{LQ}\end{aligned}\quad (3.71)$$

(3.70) deki ifadeler, (3.68) de yerine yazıldıktan sonra (3.66) denklemine taşınırsa, mekanik bir yüklemeye maruz, mikroboşluklu ve sıkışmaz olarak kabul edilen, elastik bir ortamda gerilmenin bünye denklemi, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned}T_{PQ} &= -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \delta_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\delta_{PQ} C_{KK} - C_{PQ}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} D_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{PK} D_{KQ} + D_{PK} C_{KQ}) \right]\end{aligned}\quad (3.72)$$

Benzer şekilde (3.71) deki ifadeler, (3.69) da yerine yazıldıktan sonra (3.67) denklemine taşınırsa, gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemi, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiş olur.

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \delta_{PQ} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} D_{PQ} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} D_{PM} D_{MQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} C_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} C_{PL} C_{LQ} \quad (3.73)$$

(3.72) ve (3.73) ifadelerinin matris formdaki ifadeleri de aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{\underline{T}} = -p \underline{\underline{C}}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \underline{\underline{I}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\text{tr} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{C}}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \underline{\underline{D}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (\underline{\underline{C}} \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{C}}) \right] \quad (3.74)$$

$$\underline{\underline{Y}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \underline{\underline{I}} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} \underline{\underline{D}} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \underline{\underline{D}}^2 + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} \underline{\underline{C}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} \underline{\underline{C}}^2 \quad (3.75)$$

(3.74) denkleminde gözüken Lagrange çarpanı $-p$, hidrostatik basınç olarak bilinir ve alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenecektir. (3.74) ve (3.75) denklemlerinin daha somut şeklini elde etmek için bu denklemlerdeki Σ nın invaryantlarına göre türevlerinin bilinmesi gerekir. Bu işlemler bundan sonraki bulgular bölümünde yapılmıştır.

4. BULGULAR

Mekanik bir yüklemeye maruz, sıkışmaz ve mikroboşluklu elastik bir ortamda gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri Σ nın invariantslarına göre türevlerine bağlı olarak bölüm 3.2 de (3.72) ve (3.73) denklemleri ile verilen ifadeler uygun indis değişikliği yapılarak aşağıdaki gibi verilebilir.

$$T_{PQ} = -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \delta_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\delta_{PQ} C_{RR} - C_{PQ}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} D_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{PR} D_{RQ} + D_{PR} C_{RQ}) \right] \quad (4.1)$$

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \delta_{PQ} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} D_{PQ} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} D_{PM} D_{MQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} C_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} C_{PL} C_{LQ} \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) denklemindeki Σ nın bağlı olduğu invariantslar daha önce (3.65) ifadesi ile verilmişti. Ancak bu invariantslara nasıl bağlı olduğu bilinmemektedir. Σ bu invariantsların analitik bir fonksiyonu ise bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Ancak kuvvet serisinin kaçınıcı mertebeden olacağı ve kaç teriminin dikkate alınacağı, başka bir ifadeyle Σ nın kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği; deformasyon invariantsının büyüklüğüne, olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlinearlik mertebelerine bağlıdır.

Diğer taraftan iç enerjisi pozitif-tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif-tanımlı olması gerekir. Ayrıca invariantsların sırasının Σ yı etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması, yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Buna göre bir polinom yaklaşımının seçilmesi durumunda, serbest enerji fonksiyonu Σ için mevcut invariantslar cinsinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j \quad (i,j=1,2,4,5,6,7,8), \quad a_{ij} = a_{ji} \\
&= a_{11} I^2 + 2 a_{12} I \Pi + 2 a_{14} I I_4 + 2 a_{15} I I_5 + 2 a_{16} I I_6 + 2 a_{17} I I_7 \\
&\quad + 2 a_{18} I I_8 + a_{22} \Pi^2 + 2 a_{24} \Pi I_4 + 2 a_{25} \Pi I_5 + 2 a_{26} \Pi I_6 \\
&\quad + 2 a_{27} \Pi I_7 + 2 a_{28} \Pi I_8 + a_{44} I_4^2 + 2 a_{45} I_4 I_5 + 2 a_{46} I_4 I_6 \\
&\quad + 2 a_{47} I_4 I_7 + 2 a_{48} I_4 I_8 + a_{55} I_5^2 + 2 a_{56} I_5 I_6 + 2 a_{57} I_5 I_7 \\
&\quad + 2 a_{58} I_5 I_8 + a_{66} I_6^2 + 2 a_{67} I_6 I_7 + 2 a_{68} I_6 I_8 + a_{77} I_7^2 \\
&\quad + 2 a_{78} I_7 I_8 + a_{88} I_8^2 + a_{00}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Bu ifadedeki a_{ij} katsayıları, \underline{X} parçacığına ve ortamın θ sıcaklığına bağlıdır. (3.74) ve (3.75) ifadelerindeki Σ nın invaryantlara göre türevleri (4.3) polinom açılımından faydalanılarak bulunabilir. (4.3) ifadesinin ihtiva ettiği invaryantlara göre Σ nın kısmi türevleri alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial I} &= 2 a_{11} I + 2 a_{12} \Pi + 2 a_{14} I_4 + 2 a_{15} I_5 + 2 a_{16} I_6 + 2 a_{17} I_7 + 2 a_{18} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} &= 2 a_{12} I + 2 a_{22} \Pi + 2 a_{24} I_4 + 2 a_{25} I_5 + 2 a_{26} I_6 + 2 a_{27} I_7 + 2 a_{28} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} &= 2 a_{14} I + 2 a_{24} \Pi + 2 a_{44} I_4 + 2 a_{45} I_5 + 2 a_{46} I_6 + 2 a_{47} I_7 + 2 a_{48} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} &= 2 a_{15} I + 2 a_{25} \Pi + 2 a_{45} I_4 + 2 a_{55} I_5 + 2 a_{56} I_6 + 2 a_{57} I_7 + 2 a_{58} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} &= 2 a_{16} I + 2 a_{26} \Pi + 2 a_{46} I_4 + 2 a_{56} I_5 + 2 a_{66} I_6 + 2 a_{67} I_7 + 2 a_{68} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} &= 2 a_{17} I + 2 a_{27} \Pi + 2 a_{47} I_4 + 2 a_{57} I_5 + 2 a_{67} I_6 + 2 a_{77} I_7 + 2 a_{78} I_8 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} &= 2 a_{18} I + 2 a_{28} \Pi + 2 a_{48} I_4 + 2 a_{58} I_5 + 2 a_{68} I_6 + 2 a_{78} I_7 + 2 a_{88} I_8
\end{aligned} \tag{4.4}$$

(3.72) denkleminle verilen gerilmenin bünye denklemi indis değişikliği yapılarak aşağıdaki formda yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T_{PQ} &= -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I} \delta_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \Pi} (\delta_{PQ} C_{RR} - C_{PQ}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} D_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} (C_{PR} D_{RQ} + D_{PR} C_{RQ}) \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Daha önce (3.61), (3.64) ve (3.65) ifadeleri ile verilen invaryantları (4.4) de, (4.4) ifadesini de (4.5) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left\{ \left[2 a_{11} C_{KK} + a_{12} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) \right. \right. \\
& + 2 a_{14} D_{KK} + 2 a_{15} D_{KL} D_{LK} + 2 a_{16} D_{KL} D_{LM} D_{MK} \\
& \left. \left. + 2 a_{17} C_{KL} D_{LK} + 2 a_{18} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] \delta_{PQ} \right. \\
& + \left[2 a_{12} C_{KK} + a_{22} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) \right. \\
& + 2 a_{24} D_{KK} + 2 a_{25} D_{KL} D_{LK} + 2 a_{26} D_{KL} D_{LM} D_{MK} \\
& \left. + 2 a_{27} C_{KL} D_{LK} + 2 a_{28} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] (\delta_{PQ} C_{RR} - C_{PQ}) \\
& + \left[2 a_{17} C_{KK} + a_{27} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + 2 a_{47} D_{KK} \right. \\
& + 2 a_{57} D_{KL} D_{LK} + 2 a_{67} D_{KL} D_{LM} D_{MK} + 2 a_{77} C_{KL} D_{LK} \\
& \left. + 2 a_{78} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] D_{PQ} + \left[2 a_{18} C_{KK} \right. \\
& + a_{28} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + 2 a_{48} D_{KK} + 2 a_{58} D_{KL} D_{LK} \\
& + 2 a_{68} D_{KL} D_{LM} D_{MK} + 2 a_{78} C_{KL} D_{LK} \\
& \left. + 2 a_{88} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] (C_{PR} D_{RQ} + D_{PR} C_{RQ}) \left. \right\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

(4.6) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left\{ 2 a_{11} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{12} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} \right. \\
& - a_{12} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{14} D_{KK} \delta_{PQ} + 2 a_{15} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{16} D_{KL} D_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} + 2 a_{17} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{18} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{12} C_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2 a_{12} C_{KK} C_{PQ} + a_{22} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - a_{22} C_{KK} C_{LL} C_{PQ} - a_{22} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} + a_{22} C_{KL} C_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{24} D_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2 a_{24} D_{KK} C_{PQ} + 2 a_{25} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - 2 a_{25} D_{KL} D_{LK} C_{PQ} + 2 a_{26} D_{KL} D_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - 2 a_{26} D_{KL} D_{LM} D_{MK} C_{PQ} + 2 a_{27} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& \left. - 2 a_{27} C_{KL} D_{LK} C_{PQ} + 2 a_{28} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} C_{RR} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 a_{28} C_{KL} C_{LM} D_{MK} C_{PQ} + 2 a_{17} C_{KK} D_{PQ} + a_{27} C_{KK} C_{LL} D_{PQ} \\
& -a_{27} C_{KL} C_{LK} D_{PQ} + 2 a_{47} D_{KK} D_{PQ} + 2 a_{57} D_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 2 a_{67} D_{KL} D_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 2 a_{77} C_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 2 a_{78} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 2 a_{18} C_{KK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{18} C_{KK} D_{PR} C_{RQ} + a_{28} C_{KK} C_{LL} C_{PR} D_{RQ} \\
& + a_{28} C_{KK} C_{LL} D_{PR} C_{RQ} - a_{28} C_{KL} C_{LK} C_{PR} D_{RQ} \\
& - a_{28} C_{KL} C_{LK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{48} D_{KK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{48} D_{KK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{58} D_{KL} D_{LK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{58} D_{KL} D_{LK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{68} D_{KL} D_{LM} D_{MK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{68} D_{KL} D_{LM} D_{MK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{78} C_{KL} D_{LK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{78} C_{KL} D_{LK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{88} C_{KL} C_{LM} D_{MK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{88} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PR} C_{RQ} \}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.7) denkleminde deformasyon tansörü $\underline{\underline{C}}$ ve hasar tansörü $\underline{\underline{D}}$ nin ikinci dereceye kadar terimlerini dikkate alıp, (4.7) ifadesini aşağıdaki haliyle yeniden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + 2 \left\{ 2 a_{11} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{12} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} \right. \\
& - a_{12} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{14} D_{KK} \delta_{PQ} + 2 a_{15} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{17} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{18} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{12} C_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2 a_{12} C_{KK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{24} D_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2 a_{24} D_{KK} C_{PQ} + 2 a_{25} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - 2 a_{25} D_{KL} D_{LK} C_{PQ} + 2 a_{27} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - 2 a_{27} C_{KL} D_{LK} C_{PQ} + 2 a_{17} C_{KK} D_{PQ} + a_{27} C_{KK} C_{LL} D_{PQ} \\
& - a_{27} C_{KL} C_{LK} D_{PQ} + 2 a_{47} D_{KK} D_{PQ} + 2 a_{77} C_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 2 a_{78} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 2 a_{18} C_{KK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{18} C_{KK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{48} D_{KK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + 2 a_{48} D_{KK} D_{PR} C_{RQ} + 2 a_{78} C_{KL} D_{LK} C_{PR} D_{RQ} \\
& \left. + 2 a_{78} C_{KL} D_{LK} D_{PR} C_{RQ} \right\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.8) denklemindeki katsayılar, α_i ($i=1,2,3,\dots,13$) gibi katsayılarla yeniden tanımlanacak olursa aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &\equiv 4 a_{11} \\
\alpha_2 &\equiv 2 a_{12} \\
\alpha_3 &\equiv 4 a_{14} \\
\alpha_4 &\equiv 4 a_{15} \\
\alpha_5 &\equiv 4 a_{17} \\
\alpha_6 &\equiv 4 a_{18} \\
\alpha_7 &\equiv 4 a_{24} \\
\alpha_8 &\equiv 4 a_{25} \\
\alpha_9 &\equiv 2 a_{27} \\
\alpha_{10} &\equiv 4 a_{47} \\
\alpha_{11} &\equiv 4 a_{77} \\
\alpha_{12} &\equiv 4 a_{78} \\
\alpha_{13} &\equiv 4 a_{48}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Bu katsayıları kullanarak gerilmenin bünye denklemi yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T_{PQ} = & -p C_{PQ}^{-1} + \alpha_1 C_{KK} \delta_{PQ} + \alpha_2 C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - \alpha_2 C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} \\
& + \alpha_3 D_{KK} \delta_{PQ} + \alpha_4 D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} + \alpha_5 C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + \alpha_6 C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} + 2 \alpha_2 C_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} \\
& - 2 \alpha_2 C_{KK} C_{PQ} + \alpha_7 D_{KK} \delta_{PQ} C_{RR} - \alpha_7 D_{KK} C_{PQ} \\
& + \alpha_8 D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} - \alpha_8 D_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 \alpha_9 C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} C_{RR} - 2 \alpha_9 C_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + \alpha_5 C_{KK} D_{PQ} + \alpha_9 C_{KK} C_{LL} D_{PQ} - \alpha_9 C_{KL} C_{LK} D_{PQ} \\
& + \alpha_{10} D_{KK} D_{PQ} + \alpha_{11} C_{KL} D_{LK} D_{PQ} + \alpha_{12} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} \\
& + \alpha_6 C_{KK} C_{PR} D_{RQ} + \alpha_6 C_{KK} D_{PR} C_{RQ} + \alpha_{13} D_{KK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + \alpha_{13} D_{KK} D_{PR} C_{RQ} + \alpha_{12} C_{KL} D_{LK} C_{PR} D_{RQ} \\
& + \alpha_{12} C_{KL} D_{LK} D_{PR} C_{RQ}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

(4.10) denklemi mekanik bir yüklemeye maruz, sıkışmaz ve mikroboşluklu elastik bir ortamda, mekanik etkileşimlerin nonlinear kabul edildiği durumda gerilmenin bünye denklemini veren ifadedir. Bu ifadede ilk terim sıkışmazlık kabulünden kaynaklanmaktadır. İkinci terim deformasyon tansörünün lineer etkisinden, 5. terim hasar tansörünün lineer etkisinden, 3, 4, 9 ve 10. terimler deformasyon tansörünün nonlinear etkisinden, 6 ve 20. terimler hasar tansörünün nonlinear etkisinden, 7, 11,

12 ve 17. terimler deformasyon tansörü ile hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 8, 15, 16, 18, 19, 23 ve 24. terimler deformasyon tansörünün nonlineer ve hasar tansörünün lineer etkileşimlerinden, 13, 14, 21, 25 ve 26. terimler deformasyon tansörünün lineer hasar tansörünün nonlineer etkileşiminden, 22, 27 ve 28. terimler de deformasyon tansörü ile hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerinden kaynaklanmaktadır. Eğer deformasyon tansörü ve hasar tansörünün etkileşimlerini lineer kabul etseydik bu ifadedeki nonlineer terimlerden bazıları daha ihmal edilebilirdi.

(3.73) denklemleriyle verilen gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemi indis değişikliği yapılarak aşağıdaki formda yazılabilir.

$$Y_{PQ} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} \delta_{PQ} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_5} D_{PQ} + 3 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} D_{PM} D_{MQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_7} C_{PQ} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_8} C_{PL} C_{LQ} \quad (4.11)$$

Daha önce (3.61), (3.64) ve (3.65) ifadeleri ile verilen invaryantları (4.4) de, (4.4) ifadesini de (4.11) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} Y_{PQ} = & 2 \left\{ \left[a_{14} C_{KK} + a_{24} \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + a_{44} D_{KK} \right. \right. \\ & + a_{45} D_{KL} D_{LK} + a_{46} D_{KL} D_{LM} D_{MK} + a_{47} C_{KL} D_{LK} \\ & \left. \left. + a_{48} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] \delta_{PQ} \right. \\ & + 2 \left[a_{15} C_{KK} + a_{25} \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + a_{45} D_{KK} \right. \\ & + a_{55} D_{KL} D_{LK} + a_{56} D_{KL} D_{LM} D_{MK} + a_{57} C_{KL} D_{LK} \\ & \left. \left. + a_{58} C_{KL} C_{LM} D_{MK} + \right] D_{PQ} \right. \\ & + 3 \left[a_{16} C_{KK} + a_{26} \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + a_{46} D_{KK} \right. \\ & + a_{56} D_{KL} D_{LK} + a_{66} D_{KL} D_{LN} D_{NK} + a_{67} C_{KL} D_{LK} \\ & \left. \left. + a_{68} C_{KL} C_{LN} D_{NK} \right] D_{PM} D_{MQ} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[a_{17} C_{KK} + a_{27} \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) + a_{47} D_{KK} \right. \\
& + a_{57} D_{KL} D_{LK} + a_{67} D_{KL} D_{LM} D_{MK} + a_{77} C_{KL} D_{LK} \\
& \left. + a_{78} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \right] C_{PQ} \\
& + \left[a_{18} C_{KK} + a_{28} \frac{1}{2} (C_{KK} C_{NN} - C_{KN} C_{NK}) \right. \\
& + a_{48} D_{KK} + a_{58} D_{KN} D_{NK} + a_{68} D_{KN} D_{NM} D_{MK} \\
& \left. + a_{78} C_{KN} D_{NK} + a_{88} C_{KN} C_{NM} D_{MK} \right] C_{PL} C_{LQ} \} \tag{4.12}
\end{aligned}$$

(4.12) denkleminde gerekli düzenlemeler yapılacak olursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
Y_{PQ} = & 2 a_{14} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{24} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - a_{24} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{44} D_{KK} \delta_{PQ} + 2 a_{45} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{46} D_{KL} D_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} + 2 a_{47} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{48} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} + 4 a_{15} C_{KK} D_{PQ} \\
& + 2 a_{25} C_{KK} C_{LL} D_{PQ} - 2 a_{25} C_{KL} C_{LK} D_{PQ} \\
& + 4 a_{45} D_{KK} D_{PQ} + 4 a_{55} D_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 4 a_{56} D_{KL} D_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 4 a_{57} C_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 4 a_{58} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 6 a_{16} C_{KK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 3 a_{26} C_{KK} C_{LL} D_{PM} D_{MQ} - 3 a_{26} C_{KL} C_{LK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 6 a_{46} D_{KK} D_{PM} D_{MQ} + 6 a_{56} D_{KL} D_{LK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 6 a_{66} D_{KL} D_{LN} D_{NK} D_{PM} D_{MQ} + 6 a_{67} C_{KL} D_{LK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 6 a_{68} C_{KL} C_{LN} D_{NK} D_{PM} D_{MQ} + 2 a_{17} C_{KK} C_{PQ} \\
& + a_{27} C_{KK} C_{LL} C_{PQ} - a_{27} C_{KL} C_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{47} D_{KK} C_{PQ} + 2 a_{57} D_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{67} D_{KL} D_{LM} D_{MK} C_{PQ} + 2 a_{77} C_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{78} C_{KL} C_{LM} D_{MK} C_{PQ} + 2 a_{18} C_{KK} C_{PL} C_{LQ} \\
& + a_{28} C_{KK} C_{NN} C_{PL} C_{LQ} - a_{28} C_{KN} C_{NK} C_{PL} C_{LQ} \\
& + 2 a_{48} D_{KK} C_{PL} C_{LQ} + 2 a_{58} D_{KN} D_{NK} C_{PL} C_{LQ} \\
& + 2 a_{68} D_{KN} D_{NM} D_{MK} C_{PL} C_{LQ} + 2 a_{78} C_{KN} D_{NK} C_{PL} C_{LQ} \\
& + 2 a_{88} C_{KN} C_{NM} D_{MK} C_{PL} C_{LQ} \tag{4.13}
\end{aligned}$$

(4.13) denkleminde deformasyon tansörü $\underline{\underline{C}}$ ve hasar tansörü $\underline{\underline{D}}$ nin ikinci dereceye kadar terimlerini dikkate alıp, (4.13) ifadesini aşağıdaki haliyle yeniden yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
Y_{PQ} = & 2 a_{14} C_{KK} \delta_{PQ} + a_{24} C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - a_{24} C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{44} D_{KK} \delta_{PQ} + 2 a_{45} D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + 2 a_{47} C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} + 2 a_{48} C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} \\
& + 4 a_{15} C_{KK} D_{PQ} + 2 a_{25} C_{KK} C_{LL} D_{PQ} - 2 a_{25} C_{KL} C_{LK} D_{PQ} \\
& + 4 a_{45} D_{KK} D_{PQ} + 4 a_{57} C_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 4 a_{58} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} + 6 a_{16} C_{KK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 3 a_{26} C_{KK} C_{LL} D_{PM} D_{MQ} - 3 a_{26} C_{KL} C_{LK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + 2 a_{17} C_{KK} C_{PQ} + 2 a_{47} D_{KK} C_{PQ} + 2 a_{57} D_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + 2 a_{77} C_{KL} D_{LK} C_{PQ} + 2 a_{48} D_{KK} C_{PL} C_{LQ} \\
& + 2 a_{58} D_{KN} D_{NK} C_{PL} C_{LQ}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) denklemindeki katsayıları β_i ($i=1,2,3,\dots,14$) gibi katsayılarla yeniden tanımlayacak olursak aşağıdaki ifadeleri yazılabiliriz.

$$\begin{aligned}
\beta_1 & \equiv 2 a_{14} & \beta_8 & \equiv 2 a_{25} \\
\beta_2 & \equiv a_{24} & \beta_9 & \equiv 2 a_{57} \\
\beta_3 & \equiv 2 a_{44} & \beta_{10} & \equiv 2 a_{58} \\
\beta_4 & \equiv 2 a_{45} & \beta_{11} & \equiv 6 a_{16} \\
\beta_5 & \equiv 2 a_{47} & \beta_{12} & \equiv 3 a_{26} \\
\beta_6 & \equiv 2 a_{48} & \beta_{13} & \equiv 2 a_{17} \\
\beta_7 & \equiv 4 a_{15} & \beta_{14} & \equiv 2 a_{77}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Bu katsayıları kullanarak gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemini, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden yeniden aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
Y_{PQ} = & \beta_1 C_{KK} \delta_{PQ} + \beta_2 C_{KK} C_{LL} \delta_{PQ} - \beta_2 C_{KL} C_{LK} \delta_{PQ} \\
& + \beta_3 D_{KK} \delta_{PQ} + \beta_4 D_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} + \beta_5 C_{KL} D_{LK} \delta_{PQ} \\
& + \beta_6 C_{KL} C_{LM} D_{MK} \delta_{PQ} + \beta_7 C_{KK} D_{PQ} + \beta_8 C_{KK} C_{LL} D_{PQ} \\
& - \beta_8 C_{KL} C_{LK} D_{PQ} + 2 \beta_4 D_{KK} D_{PQ} + 2 \beta_9 C_{KL} D_{LK} D_{PQ} \\
& + 2 \beta_{10} C_{KL} C_{LM} D_{MK} D_{PQ} + \beta_{11} C_{KK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + \beta_{12} C_{KK} C_{LL} D_{PM} D_{MQ} - \beta_{12} C_{KL} C_{LK} D_{PM} D_{MQ} \\
& + \beta_{13} C_{KK} C_{PQ} + \beta_5 D_{KK} C_{PQ} + \beta_9 D_{KL} D_{LK} C_{PQ} \\
& + \beta_{14} C_{KL} D_{LK} C_{PQ} + \beta_6 D_{KK} C_{PL} C_{LQ} + \beta_{10} D_{KN} D_{NK} C_{PL} C_{LQ}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

(4.16) denklemini, bu çalışmada ortaya koymaya çalıştığımız gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının söz konusu kabuller altında elde edilen bünye

denklemdir. Bu denklemde ilk terim deformasyon tansörünün lineer etkisinden, 4. terim hasar tansörünün lineer etkisinden, 6, 8 ve 18. terimler deformasyon ve hasar tansörünün lineer etkileşiminden, 2, 3 ve 17. terimler deformasyon tansörünün nonlineer etkisinden, 5 ve 11. terimler hasar tansörünün nonlineer etkisinden, 7, 9, 10, 20 ve 21. terimler deformasyon tansörünün nonlineer, hasar tansörünün lineer etkileşiminden, 12, 14 ve 19. terimler hasar tansörünün nonlineer, deformasyon tansörünün lineer etkileşiminden, 13, 15, 16 ve 22. terimler ise deformasyon ve hasar tansörünün nonlineer etkileşimlerinden kaynaklanmaktadır.



5. SONUÇLAR

Ülkemizde nispeten yeni bir konu olan sürekli ortam hasar mekaniği; mekaniğin birçok dallarını, malzeme bilimini ve matematiği bir arada kullanmayı gerekli kılan bir araştırma alanıdır.

Bu çalışmada, hasar mekaniğinin temel kavramları ele alınmış ve hangi ölçeklendirmelerin kullanıldığı açıkça belirtilmiştir. Ölçeklendirme ilişkilerinde, hasar mekaniğinin metalurjik incelemelerdeki sürekli ortam mekaniği kapsamındaki yeri ve kırılma mekaniği ile olan ilişkisi netleştirilmiştir. Teknik anlamda kırılma mekaniği öncesi en uygun ölçeklendirmenin sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde incelenebileceği görülmüştür. Sürekli ortam hasar mekaniğinde önemli bir yer tutan "Efektif gerilme" ve "Gerilme eşdeğerliği ilkesi" kavramları irdelenmiştir. Uygun mekanik değişkenler cinsinden mikro yapısal olarak hasarlı bir durumu ifade eden tanımları ve ölçüleri ortaya koymak amaçlanmıştır.

Mekanik yüklemeye maruz, mikroboşluklu elastik-izotrop bir ortamın nonlinear davranışını modellemeye imkan oluşturacağı beklentisine dayanarak modern sürekli ortamlar mekaniği kapsamında bir yol izlenmiştir. Bu modellemeyi gerçekleştirirken, genel termodinamik balans denklemleri, Clausius-Duhem eşitsizliği, bünye teorisi aksiyomlarından özellikle objektivite ve maddesel simetri aksiyomları ile malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar, bünye fonksiyonelinin bulunması ve argümanlarının somut olarak tayini için invaryantlar teorisine ait bulgular, ele alınan malzemenin nonlinear davranışının modellenmesinin teorik temellerini oluşturmuştur.

Ele alınan malzeme için bünye fonksiyoneli; argümanları Green deformasyon tansörü ve hasar tansörü olarak ortaya çıkan gerilme potansiyeli olarak belirlenmiştir. Bu bünye fonksiyoneli vasıtasıyla malzemedeki mekanik yüklemeye ile oluşan gerilme ve gerilme enerjisi yoğunluğunun değişim hızına ait bünye denklemleri maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden elde edilmiştir. İncelenen malzeme esas yapısı itibarı ile izotrop olup, mikroboşlukların varlığı nedeniyle yani hasardan dolayı

malzemenin anizotrop bir özellik kazandığı düşünülmüştür. Bu nedenle matris malzeme izotrop alınarak, gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, invariants teorisine ait bulgular kullanılarak (3.72) ve (3.73) denklemleriyle nonlinear bir formda ortaya konulmuştur. Bu bünye denklemlerinin daha somut bir şekilde elde edilmesi için, Σ nın bağlı olduğu invariantslarına göre türevlerinin bilinmesi gerektiğinden gerilme potansiyeli Σ , ikinci dereceden bir polinomla temsil edilerek invariantslarına göre türevleri hesaplanmıştır. Bu işlemler yapılırken deformasyon tansörü $\underline{\underline{C}}$ ve hasar tansörü $\underline{\underline{D}}$ nin ikinci dereceye kadar olan etkileri dikkate alınmıştır. Bu durumda gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemleri, maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden (4.10) ve (4.16) ifadeleriyle verilmiştir. Bu denklemlerden gerilme bünye denklemini veren (4.10) ifadesi, deformasyon tansörünün etkisinin lineer olan katkılarının ve hasar tansörünün lineer yada ikinci mertebeye kadar olan terimlerinin dikkate alınması durumunda daha basit formlara indirgenebilir.

Bu çalışmanın devamında, hasar tansörünün maddesel ve uzaysal formları birbirine uygun şekilde bağlanarak elde edilen bünye denklemlerinin uzaysal koordinatlardaki bileşenleri ortaya konulabilir. Bunun yanı sıra hasarı temsil eden birden fazla hasar tansörü dikkate alınarak yeni modellemeler geliştirilebilir. Ayrıca plastik bölgede hasar etkileşimleri dikkate alınabilir ve viskoelastik, termoelastik ve piezoelektrik malzemelerin bağımsız değişkenlerine, hasar tansörünün yerleştirilmesi sonucunda farklı etkileşimleri içeren bünye denklemleri geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Akkaya, Y., 1994. Zararlı Bir Ortamda Betonun Uğradığı Hasarın Hasar Mekanikliği ile İncelenmesi. İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 80 s, İstanbul.
- Bhattacharya, B., ve Ellingwood, B., 1998. Continuum Damage Mechanics-Based Model of Stochastic Damage Growth. *Journal of Engineering Mechanics*, 124, 1000-1009.
- Bonora, N., 1997. A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 58, (1/2), 11-28.
- Burr, A., Hild, F., ve Leckie, F. A., 1997. Continuum Description of Damage in Ceramic-Matrix Composites. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 16, (1), 53-78.
- Burr, D.B., Turner, C.H., Naick, P., Forwood, M.R., Amrosius, W., Hasan, M.S., Pidaparti, R., 1998. Does Microdamage Accumulation Affect the Mechanical Properties of Bone. *Journal of Biomechanics*, 31, 337-345.
- Cauvin, A., ve Testa, R. B., 1999. Damage Mechanics: Basic Variables in Continuum Theories. *International Journal of Solids and Structures*, 36, 747-761.
- Chaboche, J.L., 1981. Continuous Damage Mechanics-A Tool to Describe Phenomena Before Crack Initiation. *Nuclear Engineering and Design*, 64, 233-247.
- Chaboche, J.L., 1988 a. Continuum Damage Mechanics: Part I-General Concepts. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 59-64.
- Chaboche, J.L., 1988 b. Continuum Damage Mechanics: Part II-Damage Growth, Crack Initiations, and Crack Growth. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 65-72.
- Chow, C.L., ve Lu, T.J., 1989. On Evolution Laws of Anisotropic Damage. *Engineering Fracture Mechanics*, 34, (3), 679-701.
- Dhar, S., Dixit, P.M., ve Sethuraman, R., 2000. A Continuum Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 77, 335-344.
- Eringen, A.C., 1967. *Mechanics of Continua*. John Wiley and Sons, 502 p, New York.
- Eryürek, İ.B., 1993. *Hasar Analizi*. Birsen Yayınları, 171 s, İstanbul.

- Fichant, S., Cabot, G.P., ve La Borderie, C., 1997. Continuum Damage Modelling: Approximation of Crack Induced Anisotropy. *Mechanics Research Communications*, 24, (2), 109-114.
- Hansen, N.R., ve Schreyer, H.L., 1994. A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage. *International Journal of Solids and Structures*, 31, (3), 359-389.
- Hokanson, J., ve Yazdani, S., 1997. A Constitutive Model of The Artery with Damage. *Mechanics Research Communications*, 24, (2), 151-159.
- Hult, J., ve Rammerstorfer, F.G., 1994. *Engineering Mechanics of Fibre Reinforced Polymers and Composite structures*. Springer-Verlag, 314 p, New York.
- Jepsen, K.J., ve Davy, D.T., 1997. Comparison of Damage Accumulation Measures in Human Cortical Bone. *Journal of Biomechanics*, 30, (9), 891-894.
- Kachanov, L.M., 1986. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, 135 p, Dordrecht.
- Korkmaz, E., 2000. Sürekli Ortam Hasar Mekanizminde Temel Kavramlar. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri (II), 28 s, Isparta.
- Krajcinovic, D., 1983. Constitutive Equations for Damaging Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 50, 355-360.
- Krajcinovic, D., 1985. Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 829-834.
- Lemaitre, J., 1985. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 104, 83-89.
- Lemaitre, J., 1996. *A course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, 228 p, New York.
- Lemaitre, J., ve Chaboche, J.L., 2000. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 556 p, Cambridge.
- Mariano, P.M., ve Augusti, G., 1997. Some Axioms and Theorems in Damage Mechanics and Fatigue of Materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34, (25), 3337-3350.
- Murakami, S., 1988. Mechanical Modeling of Material Damage. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 280-286.

- Onat, E.T., ve Leckie, F.A., 1988. Representation of Mechanical Behavior in the Presence of Changing Internal Structure. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 1-10.
- Ramtani, S., ve Zidi, M., 2001. A Theoretical Model of The Effect of Continuum Damage on A Bone Adaptation Model. *Journal of Biomechanics*, 34, 471-479
- Şuhubi, E.S., 1993. Sürekli Ortamlar Mekaniği: Giriş. İ.T.Ü., 248s, İstanbul.
- Usal, M.R., 1994. Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışlarına Ait Matematiksel Bir Model. Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 108s, Kayseri.
- Usal, M., 2001. Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı İçin Matematiksel Modelleme. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 232s, Isparta.
- Weitsman, Y., 1988. A Continuum Damage Model for Viscoelastic Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 773-780.
- Weitsman, Y., 1988. Damage Coupled with Heat Conduction in Uniaxially Reinforced Composites. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 641-647.
- Woo, C.W., ve Li, D.L., 1993. A Universal Physically Consistent Definition of Material Damage. *International Journal of Solids and Structures*, 30, (15), 2097-2108.
- Wu, H.C., ve Nanakorn, C. K., 1998. Endocronic Theory of Continuum Damage Mechanics. *Journal of Engineering Mechanics*, 124, 200-208.
- Wu, H.C., ve Nanakorn, C. K., 1999. A Constitutive Framework of Plastically Deformed Damaged Continuum and A Formulation Using The Endocronic Concept. *International Journal of Solids and Structures*, 36, 5057-5087.
- Xiao, Y.C., Li, S., ve Gao, Z., 1998. A Continuum Damage Mechanics Model for High Cycle Fatigue. *International Journal of Fatigue*, 20, (7), 503-508.
- Zysset, P. K., ve Curnier, A., 1996. A 3D Damage Model for Trabecular Bone Based on Fabric Tensors. *Journal of Biomechanics*, 29, (12), 1549-1558.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ergün KORKMAZ
Doğum Yeri : Tomarza
Doğum Yılı : 26.08.1974
Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1988-1991 Kayseri Merkez Endüstri Meslek Lisesi
Ön Lisans : 1992-1994 Erciyes Üniversitesi Kayseri Meslek Yüksek Okulu
Makine Programı
Lisans : 1994-1998 Süleyman Demirel Üniversitesi Teknik Eğitim
Fakültesi Makine Eğitimi Bölümü Enerji Anabilim Dalı
Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1998-..... Süleyman Demirel Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi
(Araştırma Görevlisi)

SÜREKLİ ORTAM HASAR MEKANİĞİ YARDIMIYLA MEKANİK DAVRANIŞIN BELİRLENMESİ

Ergün KORKMAZ

Makine Eğitimi Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, 110 s., 2001.

Anahtar Kelimeler: Bünye Denklemleri, Deformasyon, Gerilme, Gerinme Enerjisi Yoğunluğu Değişim Hızı, Hasar Tansörü, Helmholtz Serbest Enerjisi, İzotropi, Sürekli Ortam Hasar Mekanikliği, Temsili Hacim Elemanı.

Genel bir yaklaşım olarak hasar terimi, malzemelerin bozulmasını veya tahrip olmasını ifade eder. Mekanikte hasar üç M ölçeğinde karakterize edilebilir: Mikro, mezo ve makro seviye. Bu çalışmada, farklı olayların ortalama etkilerini dikkate alan sürekli ortamlar mekanikliği çerçevesinde orta ölçek göz önüne alınmıştır. \underline{D} olarak tanımlanan hasar tansörü simetrik olup, ikinci dereceden bir tansördür. Ayrıca ele alınan ortamın; homojen, üniform ve elastik olduğu kabulüyle ortamın nonlinear davranışı modern sürekli ortamlar mekanikliği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. Mekanikğin denge kanunları ile tutarlı olan termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarının birleştirilmiş şekli, gerilme potansiyelinin zamana göre maddesel türevi cinsinden ifade edilmiştir. Gerilme potansiyelinin bağımsız değişkenleri, Green deformasyon tansörü, hasar tansörü ve sıcaklık olarak belirlenmiştir. Maddesel ortamın esas yapısı itibariyle izotrop olduğu, hasardan dolayı anizotropi özelliği gösterdiği varsayılmıştır.

Termodinamik kısıtlamaların neticesinde gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızı olarak tanımlanan ifadenin bünye denklemleri ortaya konulmuştur. Ortamın sıkışmazlığı makul bir kabul olduğundan, ortam sıkışmaz kabul edilerek bünye denklemlerinin aldığı formlar belirlendikten sonra maddesel simetri aksiyomunun bünye fonksiyoneli üzerine getirdiği kısıtlamalar verilmiştir. Matris malzemesinin izotrop olma özelliği dikkate alınıp, invaryantlar teorisini kullanarak, incelenen ortamın nonlinear mekanik davranışını belirleyen bünye denklemleri elde edilmiştir. Bünye fonksiyoneli olan Σ , bağlı olduğu invaryantları cinsinden ikinci dereceden bir polinomla temsil edilmiş, elde edilen nonlinear bünye denklemlerindeki Σ nın invaryantlarına göre türevleri hesaplanarak gerilmenin ve gerinme enerjisi yoğunluğu değişim hızının bünye denklemlerinin daha somut bir şekli ortaya konulmuştur.

Jüri: Prof.Dr. Ali Ünal ERDEM

Doç.Dr. Ali Kemal YAKUT

Yrd.Doç.Dr. Mustafa Reşit USAL (Danışman)

THE DETERMINATION OF MECHANICAL BEHAVIOR FOR MATERIALS BY CONTINUUM DAMAGE MECHANICS

Ergün KORKMAZ

Mechanical Education, Master Thesis, 110 pg., 2001.

Key Words: Constitutive Equations, Deformation, Stress, Strain Energy Density Release Rate, Damage Tensor, Helmholtz Free Energy, Isotropy, Continuum Damage Mechanics, Representative Volume Element,

In a general approach, the term of damage shows to degradation or break-up of materials. It is accepted that damage in solid mechanics can be identified on three M-scales: The micro, the meso, the macro level. In this study, meso scale is the building block of continuum mechanics in which different phenomena can be smeared into mean effects. Damage tensor has been termed $\underline{\underline{D}}$ and assumed as second order symmetric tensor. Assuming that an homogen, uniform and elastic medium, we study nonlinear behaviour of damaged material in the frame of modern continuum mechanics. Second law of thermodynamics, combined with the first law and consistent with mechanical balance laws, has been written in terms of the time rate of free energy function Independent variables of stress potential have been furnished with Green deformation tensor, damage tensor and temperature. The material is supposed to be strongly anisotropic due to void and other discontinuities, with the matrix material being supposed to have any material symmetry.

Following the thermodynamical constraints, the constitutive equations of stress and strain energy density release rate have been obtained. Considering the incompressibility of medium, forms of constitutive equations have been determined and have been given constraints of material symmetry axioms on the constitutive functional. Considering of isotropic property for matrix material and using invariant theory, constitutive equations which is determining of nonlinear behaviour of materials have been obtained. Constitutive functional Σ , depend on its invariants, has been represented as second degree polynomial. Derivatives of this functional in according to the invariants was found and then explicit and definite forms of stress and strain energy density release rate have been determined.

Jury: Prof.Dr. Ali Ünal ERDEM
Doç.Dr. Ali Kemal YAKUT
Yrd.Doç.Dr. Mustafa Reşit USAL (Advisor)