YARINORMLU UZAYLARDA ¢-SINIRLI DIZILER

TUBA ÇIĞDEM

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATIK ANABILIM DALI

2004

T.C.
SÜLEYMAN DEMIREL ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ

YARINORMLU UZAYLARDA
¢-SINIRLI DIZILER

Haz¬rlayan

Tuba ÇIĞDEM

YÜKSEK LISANS TEZI
MATEMATIK ANABILIM DALI

Dan¬şman
Yrd. Doç. Dr. Ahmet Şahiner

ISPARTA, 2004

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :

Üye :

Üye :

ONAY

Bu tez ... / ... / 2004 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2004

Prof. Dr. Remzi KARAGÜZEL

Enstitü Müdürü

IÇINDEKILER

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktad¬r.

Birinci bölümde, konunun k¬sa tarihi gelişimi verildi.

Ikinci bölümde, çal¬şmam¬z boyunca kullan¬lacak temel kavramlar ve uzaylar¬n listesi verildi.

Üçüncü bölümde, baz¬ dizi uzaylar¬n¬n sürekli ve Köthe-Toeplitz dualleri verildi.

Dördüncü bölümde, $l(p)$ ve $c_0(p)$ uzaylar¬n¬n sürekli ve Köthe-Toeplitz duallerini belirlemek için yap¬lan baz¬ araşt¬rmalar verildi.

Son bölümde, $(X; q)$ yar¬ normlu uzay¬ ve f modulus fonksiyonu kullan¬larak $¢l_1(p; f; q)$ dizi uzay¬n¬n tan¬mlanarak baz¬ kapsama bağ¬nt¬lar¬ verildi.

Anahtar Kelimeler: Dizi uzaylar¬, Köthe-Toeplitz duali, modülüs fonksiyonu, paranormlu uzay, yar¬normlu uzay.

ABSTRACT

This thesis consists of …ve chapters.

In the …rst chapter, brief historical progress of the subject is given.

In the second chapter, basic concepts and list of spaces that will be used throughout this study are given.

In the third chapter, continuous and Köthe-Toeplitz duals of some sequence spaces are given.

In the fourth chapter, some investigations to determine continuous and Köhe-Toeplitz duals of the spaces $l(p)$ and $c_0(p)$ are given.

In the …nal chapter the de…nition of the sequence space $¢ l_1(p; f; q)$ is given by using f modulus function and a semi-normed space $(X; q)$. Also, some inclusion relations are given.

Key Words: sequence spaces, Köthe-Toeplitz duals, modulus function, paranormed space, seminorm space.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet ŞAHINER'e teşekkürü bir borç bilirim.

4/6/2004

Tuba Çiğdem

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$S(X)$	:	X üzerinde tanımlanan bütün diziler uzayı
Θ	:	$\ell_\infty(p; f; q)$ nin sıfır elemanı
θ	:	X in sıfır elemanı
C	:	$\max(1; 2^{H-1})$
H	:	$\sup_k p_k$
$\sum_k$	:	$\sum_{k=1}^{\infty}$
$\lim_k$	:	$\lim_{k\to\infty}$
$\sup_k$	:	$\sup_{k=1;2;\ldots}$

1. GİRİŞ

w tüm $x = (x_k)$ dizilerinin oluşturduğu küme olmak üzere sınırlı, yakınsak ve (null) sıfıra-yakınsak dizilerin $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normuyla normlandırılmış Banach uzayları sırasıyla l_∞; c; ve c_0 ile gösterilir.

Kızmaz (1981) $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ olmak üzere, $l_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ uzaylarını tanımladı. Bu uzaylar $\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normuyla Banach uzaylarıdır. Uygun olması bakımından bu uzaylar Δl_∞; Δc; Δc_0 ile gösterilip Δ-sınırlı, Δ-yakınsak ve Δ-null diziler olarak adlandırılır. Kızmaz (1981) bu uzayların duallerini hesapladı (sürekli duali, α duali, β duali ve γ duali) ve $l_\infty(\Delta)$ veya $c(\Delta)$ dan l_∞ veya c içine matris dönüşümleri için gerek ve yeter koşulları belirledi.

Ahmad ve Mursaleen (1987), $l_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ uzaylarını $p = (p_k)$ kesin pozitif sayıların dizisi olmak üzere $\Delta l_\infty(p)$; $\Delta c(p)$ ve $\Delta c_0(p)$ uzaylarına genelleştirdi. Ahmad ve Mursaleen ayrıca bunların Köthe-Toeplitz duallerini ve ilgili matris dönüşümlerini çalıştılar.

Malkowsky (1989) $\Delta l_\infty(p)$ nin alışılmış Köthe-Toeplitz dualini ve $\Delta l_\infty(p)$, $\Delta c(p)$ ve $\Delta c_0(p)$ kümelerinin mutlak Köthe-Toeplitz duallerini belirledi. Malkowsky aynı zamanda $(\Delta l_\infty(p); l_\infty)$ sınıfının bir karakterizasyonunu da verdi.

Adem Eroğlu $l_\infty(p; f; q; s)$ dizi uzayını tanımlayıp bazı özelliklerini inceledi.

Bu çalışmada $\Delta l_\infty(p; f; q)$ dizi uzayı tanımı verilerek bu uzayın bir takım özellikleri incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, çalışmamızda kullanacağımız temel tanım, teorem ve eşitsizlikleri vereceğiz.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme ve K kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun;

$$+ : X \times X \to X$$
$$\cdot : K \times X \to X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir (Maddox, 1970).

$\forall \alpha, \beta \in K$ ve $x, y \in X$ için,

1) $x + y = y + x$
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
3) $\forall x \in X$ için $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır
4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır
5) $1.x = x$
6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

Tanım 2.2. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve Y, X'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer her $\alpha, \beta \in K$ ve $x, y \in Y$ için $\alpha x + \beta y \in Y$ oluyorsa, Y'ye X'in lineer alt uzayı denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.3. X ve Y topolojik uzaylar olsun. $f : X \to Y$ dönüşümüne bir homeomorfizmdir denir , f; 1:1, örten, tersi ve kendi sürekli olan bir dönüşümse (Maddox, 1970).

Tanım 2.4. X ve Y lineer uzaylar olsun. $f : X \to Y$ lineer, 1:1, örten dönüşümüne bir izomorfizm denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.5. X vektör uzayı (X, τ) topolojisiyle bir topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ) da toplam ve çarpım fonksiyonları sürekliyse (X, τ) ya bir topolojik lineer uzay denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.6. X kümesi üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyoneller X^* ile gösterilir ve X in sürekli duali olarak adlandırılır (Maddox, 1970).

Tanım 2.7. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer;

$$q : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, q'ya bir yarınorm, (X, q)'ya da yarınormlu uzay denir (Maddox, 1970).

Her $\lambda \in K$ ve $x, y \in X$ için,

(i) $q(x) \geq 0$

(ii) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$

(iii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$

Tanım 2.8. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Eğer;

$$g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, g'ye paranorm, (X, g)'ye de paranormlu uzay denir (Maddox, 1974).

(i) $g(\theta) = 0$

(ii) $g(x) = g(-x)$

(iii) $g(x + y) \leq g(x) + g(y)$

(iv) $\lambda_0 \in K$ ve $x_0 \in X$ olmak üzere $\lambda \rightarrow \lambda_0$ ve $g(x - x_0) \rightarrow 0$ iken $g(\lambda x - \lambda_0 x_0) \rightarrow 0$ dır.

Tanım 2.9. Dizilerin herhangi bir X kümesi için, alışılmış ve mutlak Köthe-Toeplitz dualleri,

$$X^{\dagger} = \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak, her } x \in E \text{ için} \right\}$$

$$X^{|\dagger|} = \left\{ a \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \text{, her } x \in E \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $X^{\dagger\dagger} := \left(X^{\dagger}\right)^{\dagger}$ ve $X^{|\dagger\dagger|} := \left(X^{|\dagger|}\right)^{|\dagger|}$ yazabiliriz (Malkowsky,1989).

Tanım 2.10. q_1 ve q_2, X üzerinde iki yarınorm olsun. q_1'in q_2'den kuvvetli olması için gerek ve yeter şart her $u \in X$ için,

$$q_2(u) \leq M q_1(u)$$

olacak şekilde bir M sabitinin var olmasıdır (Butakın,1994).

Tanım 2.11. X, Y, w nın iki alt kümesi olsun. Her $x \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ için $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi yakınsak ve $Ax = (A_n x)$ dizisi her $x \in X$ için Y de ise, $A = (a_{nk})$ matrisine X dizi uzayından Y dizi uzayı içine bir dönüşüm denir ve $A \in (X, Y)$ şeklinde gösterilir (Butakın,1994).

Tanım 2.12. Eğer;

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa f'ye bir modülüs fonksiyonu denir. Her $t, z \in [0, \infty)$ için,

(i) $f(t) = 0 \iff t = 0$

(ii) $f(t + z) \leq f(t) + f(z)$

(iii) f artandır.

(iv) f; 0'da sağdan süreklidir.

(ii) ve (iv) özelliklerinden dolayı f; $[0, \infty)$ da süreklidir.

$f(t) = t^r$; $0 < r \leq 1$; bir modülüs fonksiyondur (Butakın,1994).

Lemma 2.13. f ve g modülüs fonksiyonları olsunlar. Bu taktirde $f \pm g$, af $(a > 0)$, $\frac{f}{1+f}$ ve $f+g$ fonksiyonları da modülüs fonksiyonlarıdır (Butakın, 1994).

Eşitsizlikler 2.14.

(i) Herhangi kompleks a, b sayıları için, $0 < p \le 1$ olmak üzere;

$$|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p$$

ve $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ için $0 < p_k \le \sup_k p_k = H$ ve $C = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere;

$$|a_k + b_k|^{p_k} \le C\{|a_k|^{p_k} + |b_k|^{p_k}\}$$

dır (Butakın,1994).

(ii) $a, a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$ ve $b, b_1, b_2, \ldots, b_n \ge 0$ olsun. Bu taktirde; (Maddox, 1970)

(a) $p \ge 1$ ise;

$$\left(\sum_{k=1} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(b) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise;

$$\sum_{k=1} a_k b_k \le \left(\sum_{k=1} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ayrıca

$$\sum_{k=1} a_k b_k \le \max b_k \sum_{k=1} a_k$$

(c) $0 < p \le 1$ ise;

$$\sum_{k=1} (a_k + b_k)^p \le \sum_{k=1} a_k^p + \sum_{k=1} b_k^p$$

(iii) $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a \ge 0$, $b \ge 0$ olsun. O zaman,

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

dır. Eşitlik $a^p = b^p$ durumunda vardır.

DIZI UZAYLARI LISTESI

$$
\begin{aligned}
w &= \{x = (x_k) : x : \mathbb{N} \to \mathbb{K};\ k \to x_k\} \\
l_\infty &= \{x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty\} \\
\Delta l_\infty &= \{x = (x_k) : \sup_k |\Delta x_k| < \infty\} \\
l_\infty(p) &= \{x = (x_k) : \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty\} \\
\Delta l_\infty(p) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in l_\infty(p)\} \\
c &= \left\{ x = (x_k) : \lim_{k \to \infty} x_k \text{ mevcut} \right\} \\
\Delta c &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c\} \\
c(p) &= \{x = (x_k) : |x_k - l|^{p_k} \to 0;\ \exists l \in \mathbb{C} \text{ için}\} \\
\Delta c(p) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c(p)\} \\
c_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \to 0 \right\} \\
\Delta c_0 &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\} \\
c_0(p) &= \{x = (x_k) : |x_k|^{p_k} \to 0\} \\
\Delta c_0(p) &= \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0(p)\} \\
l(p) &= \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty \right\} \\
l_\infty(p; f) &= \{x = (x_k) : \sup_k [f(|x_k|)]^{p_k} < \infty\} \\
\Delta l_\infty(p; f) &= \{x = (x_k) : \sup_k [f(|\Delta x_k|)]^{p_k} < \infty\}
\end{aligned}
$$

$$l_\infty(p;f;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [f(q(x_k))]^{p_k} < \infty\}$$

$$\Delta l_\infty(p;f;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [f(q(\Delta x_k))]^{p_k} < \infty\}$$

$$l_\infty(p;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [q(x_k)]^{p_k} < \infty\}$$

$$\Delta l_\infty(p;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [q(\Delta x_k)]^{p_k} < \infty\}$$

$$l_\infty(f;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [f(q(x_k))] < \infty\}$$

$$\Delta l_\infty(f;q) = \{x \in S(X) : \sup_k [f(q(\Delta x_k))] < \infty\}$$

$$l_\infty(q) = \{x \in S(X) : \sup_k q(x_k) < \infty\}$$

$$c_0(q) = \{x \in S(X) : q(x_k) \to 0\}$$

3. BAZI DIZI UZAYLARININ SÜREKLI VE KÖTHE-TEOPLITZ DUALLERI

Eğer (X, g), g paranormu ile paranormlu uzay ise, o zaman X^* ile X in sürekli dualini , yani X deki bütün sürekli lineer fonksiyonellerin kümesini gösteririz. Eğer E, $x = (x_k)$ kompleks dizilerinin bir kümesi ise $E^\dagger$ ile E nin genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali

$$E^\dagger = \left\{ a : \sum_{1}^{\infty} a_k x_k \text{ yakınsak, her } x \in E \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir.

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) : \sum |x_k|^{p_k} < \infty \right\} ; \; 1 < p_k \leq \sup p_k < \infty$$

olmak üzere $\ell^*(p)$ uzayını belirlemek için (Maddox, 1968) de bir çalışma yapıldı.

$\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$, $0 < \inf p_k \leq \sup p_k < \infty$ sağlanmak üzere Teorem 4 (Maddox, 1968) de $\ell^*(p)$ nin $\ell(q)$ ile tanımlanabileceği gösterildi. $\sup p_k < \infty$ kısıtlaması, $\ell(p)$ nin lineer uzay olması için gerek ve yeter şart olmasından dolayı doğaldır (Maddox, 1967). Eğer $M = \sup p_k$ yazarsak, (Maddox, 1968) de gösterildiği gibi $\ell(p)$ üzerindeki doğal paranorm

$$g(x) = \left(\sum |x_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

dir.

Bu çalışmada $\inf p_k > 1$ kısıtlaması kaldırılıp $\ell^*(p)$ herhangi bir p için $1 < p_k \leq \sup p_k < \infty$ olacak şekilde belirlenmiştir. İlk olarak $\ell(p)$ sadece bir küme olarak gözönüne alınıp, $1 < p_k$ olarak kabul edilmiştir. Böylece $\ell^\dagger(p)$ nin aşağıdaki şekilde tanımlanan $M(p)$ dizi uzayı olduğu gösterilmiştir. $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ olmak üzere $a = (a_k) \in M(p)$, en az bir $N > 1$ tamsayısı vardır öyle ki

$$\sum |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} < \infty$$

dur.

Teorem 3.1. Her k için $1 < p_k$ olsun. O zaman $l^{\dagger}(p) = M(p)$ dir.

İspat. $a \in M(p)$ ve $x \in l(p)$ olsun.

$$|b_k y_k| \le |b_k|^{q_k} + |y_k|^{p_k}$$

eşitsizliğinden N tamsayı, $a \in M(p)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |a_k x_k| &= \left| a_k x_k \frac{N^{\frac{1}{p_k}}}{N^{\frac{1}{p_k}}} \right| \\ &\le \left| \frac{a_k}{N^{\frac{1}{p_k}}} \right|^{q_k} + \left| x_k N^{\frac{1}{p_k}} \right|^{p_k} \\ &= |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} + N |x_k|^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\sum a_k x_k$ mutlak yakınsak ve $M(p) \subset l^{\dagger}(p)$ dir.

$a \in l^{\dagger}(p)$ olsun. Bu $a \in M(p)$ olmasını gerektirir aksi taktirde $s = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$M_s = \sum_{I(s)} |a|^q (s+1)^{-\frac{q}{p}} > 1$$

olacak şekilde $0 = n(0) < n(1) < n(2) < \ldots$ tamsayıları belirlenebilir. Notasyonda sadelik için a_k; p_k ve q_k daki k lar ihmal edilecektir. M_s yi tanımlayan toplam, $I(s) = \{k : n(s-1) + 1 \le k \le n(s)\}$ kümesindeki k lar üzerinden alınmak üzere, $I(s)$ deki k lar için k ihmal edilerek

$$x = (\operatorname{sgn} a) |a|^{q-1} (s+1)^{-q} M_s^{-1}$$

dizisi tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} a_k x_k &= a_k \frac{|a_k|}{a_k} |a_k|^{q_k - 1} (s+1)^{-q_k} M_s^{-1} \\ &= |a_k|^{q_k} (s+1)^{-q_k} M_s^{-1} \\ &= \frac{|a_k|^{q_k} (s+1)^{-q_k}}{M_s} \end{aligned}$$

olup iki taraftan toplama geçilerek

$$\begin{aligned}\sum_{I(s)} a_k x_k &= \sum_{I(s)} \frac{|a_k|^{q_k}(s+1)^{-q_k}}{\sum_{I(s)} |a_k|^{q_k}(s+1)^{-\frac{q_k}{p_k}}} \\ &= \sum_{I(s)} \frac{|a_k|^{q_k}(s+1)^{-q_k}}{M_s}\end{aligned}$$

elde edilir. Paydadaki ifade sonlu bir toplam olduğundan sabit olarak dışarı çıkabilir ve

$$\frac{1}{M_s}\sum_{I(s)} |a_k|^{q_k}(s+1)^{-q_k}$$

elde edilir. $\frac{1}{p_k}+\frac{1}{q_k}=1$ olduğundan elde edilen $q_k=\frac{p_k+q_k}{p_k}$ değeri yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}\sum_{I(s)} a_k x_k &= \frac{1}{M_s}\sum_{I(s)} |a_k|^{q_k}(s+1)^{\frac{-p_k-q_k}{p_k}} \\ &= M_s^{-1}\sum_{I(s)} |a_k|^{q_k}(s+1)^{-\frac{q_k}{p_k}}(s+1)^{-1} \\ &= M_s^{-1}M_s(s+1)^{-1} \\ &= (s+1)^{-1}\end{aligned}$$

sonuçta

$$\sum_{I(s)} a_k x_k = (s+1)^{-1}$$

olur.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\sum_{I(s)} |x_k|^{p_k} &= \sum_{I(s)} \left[\frac{|a_k|}{a_k}|a_k|^{q_k-1}(s+1)^{-q_k}M_s^{-1}\right]^{p_k} \\ &= \sum_{I(s)} |a_k|^{(q_k-1)p_k}(s+1)^{-q_kp_k}M_s^{-p_k} \\ &= \sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-p_k-q_k}M_s^{-p_k}\end{aligned}$$

olup,

$$M_s^{-p_k} = \frac{1}{M_s^{p_k}} < \frac{1}{M_s} = M_s^{-1} \text{ ve } \frac{1}{(s+1)^{p_k+q_k}} < \frac{1}{(s+1)^{q_k+1}}$$

gerçekleri gözönüne alınarak,

$$\sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-p_k-q_k} M_s^{-p_k} \le M_s^{-1}(s+1)^{-1} \sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-q_k}$$

elde edilir. Ayrıca $q_k = \frac{p_k+q_k}{p_k} \Rightarrow -q_k = \frac{-p_k-q_k}{p_k} = -1 - \frac{q_k}{p_k}$ olduğundan

$$\begin{aligned} M_s^{-1}(s+1)^{-1}\sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-q_k} &= M_s^{-1}(s+1)^{-1}\sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-1}(s+1)^{-\frac{q_k}{p_k}} \\ &= M_s^{-1}(s+1)^{-2}\sum_{I(s)} |a|^{q_k}(s+1)^{-\frac{q_k}{p_k}} \\ &= M_s^{-1}(s+1)^{-2} M_s \\ &= (s+1)^{-2} \end{aligned}$$

olup sonuçta

$$\begin{aligned} \sum_{I(s)} |x_k|^{p_k} &= \sum_{I(s)} |a|^{q}(s+1)^{-p-q} M_s^{-p} \\ &\le M_s^{-1}(s+1)^{-1}\sum_{I(s)} |a|^{q}(s+1)^{-q} \\ &= M_s^{-1}(s+1)^{-2}\sum_{I(s)} |a|^{q}(s+1)^{-\frac{q}{p}} \\ &= (s+1)^{-2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $x \in l(p)$ fakat $\sum a_k x_k$ ıraksak olur, buradan $a \in M(p)$ olmak zorundadır.

Şimdi Teorem 1 den $l(p)$ nin sürekli dualinin cebirsel olarak $M(p)$ olduğu sonucu çıkarılabilir.

Teorem 3.2. Her k için $1 < p_k \le \sup p_k < \infty$ olsun. O zaman $l^*(p)$; $M(p)$ ye izomorftur.

İspat. $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $\ell(p)$ deki birim vektörleri e_k olarak yazalım. O zaman $\ell(p)$ deki her x için $x = \sum x_k e_k$ dır. Buradan $\ell^*(p)$ deki herhangi bir f için, $f(e_k) = a_k$ olmak üzere $f(x) = \sum a_k x_k$ dır. Teorem 1 den $\ell(p)$ deki her x için $\sum a_k x_k$ nın yakınsaklığı $a \in M(p)$ olmasını gerektirir.

Şimdi eğer $x \in \ell(p)$ ve herhangi bir $a \in M(p)$ alırsak Teorem 1 den $\sum a_k x_k$ yakınsak olur ve açıkça $\ell(p)$ de bir lineer fonksiyonel tanımlar.
f in lineerliği, $f : \ell(p) \to K$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
f(x_k + y_k) &= f\left(\sum (x_k + y_k) e_k\right) = \sum (x_k + y_k) a_k \\
&= \sum x_k a_k + \sum y_k a_k = f(x_k) + f(y_k)
\end{aligned}
$$

$$
f(\lambda x) = f\left(\sum \lambda x_k e_k\right) = \sum \lambda x_k a_k = \lambda \sum x_k a_k = \lambda f(x)
$$

ile gösterilir.

Teorem 1 deki düşünceyi kullanarak $g(x) \leq 1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\sum |a_k| \frac{|x_k|}{g(x)} &\leq \sum |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} + N \sum \frac{|x_k|^{p_k}}{g^{p_k}(x)} \\
&\leq \sum |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} + N \sum \frac{|x_k|^{p_k}}{|x_k|^{p_k}} \\
&= \sum |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} + N
\end{aligned}
$$

buradan da

$$
\left| \sum a_k x_k \right| \leq \left(\sum |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} + N \right) g(x)
$$

olduğunu görmek kolaydır. Böylece $\sum a_k x_k$; $\ell^*(p)$ de bir eleman tanımlar. Şimdi $\ell^*(p) = \{f : f : \ell(p) \to K\}$ olmak üzere $T(f) = a$ ile verilen $T : \ell^*(p) \to M(p)$ dönüşümünün lineer, birebir ve örten olduğu açıktır.

$x \in \ell(p)$ ve $x = \sum x_k e_k$ olmak üzere $f(x) = \sum x_k f(e_k) = \sum x_k a_k$ dır. O zaman

$\sum x_k a_k$ kompleks sayısına yakınsak ve buradan da $a_k \in M(p)$ dir. Böylece her f fonksiyoneline karşılık $M(p)$ de bir a_k elde edilmiş olur.

Şimdi, $l^*(p)$ ve $M(p)$ üzerindeki topolojiler bu uzaylar lineer homeomorfik olacak şekilde tanımlanarak $l^*(p)$ nin tam bir tanımlaması verilecektir.

$1 < \inf p_k \le \sup p_k < \infty$ öyleki $\sup p_k < \infty$ durumunda, $l^*(p)$ nin $H = \sup q_k$ ve $x \in l(q)$ olmak üzere,

$$\left(\sum |x_k|^{q_k}\right)^{\frac{1}{H}}$$

doğal paranormu ile paranormlu $l(q)$ uzayına homeomorfik olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak, $M(p) = l(q)$, $p = \inf p_k > 1$ olduğunu gözlemleriz. Çünkü $p > 1$ olması her $N > 1$ için $1 < N^{\frac{q_k}{p_k}} \le N^{\frac{1}{p-1}}$ i gerektirir, böylece $M(p) = l(q)$ dur. Tersine, $M(p) = l(q)$ fakat $\inf p_k = 1$ ise o zaman $p_{k_n} < 1 + \frac{1}{n}$ olacak şekilde $k_1 < k_2 < \ldots$ vardır. x_k dizisini,

$$x_k = \begin{cases} 1 & ; \ k = k_n \\ 0 & ; \ k \neq k_n \end{cases}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$\sum \frac{|x_k|^{q_k}}{2^{\frac{q_k}{p_k}}} < \infty$$

olur. Böylece $x \in M(p) - l(q)$ dur. Bu nedenle $p > 1$ alınmalıdır.

Şimdi $l^*(p)$ ve $M(p)$ deki topolojileri verelim. $l^*(p)$ de $l(p)$ nin yuvarları üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisini kullanıyoruz; yuvar ile merkezi orjinde olan yuvarı kastediyoruz. Böylece $l^*(p)$ de $f_n \to f$ demek, $l(p)$ nin yuvarındaki herhangi bir x için $f_n(x) \to f(x)$ düzgün demektir.

$a \in M(p)$ ve $x \in l(p)$ olmak üzere

$$(a;x) = \sum a_k x_k$$

olarak yazalım. O zaman x ler $l(p)$ nin herhangi bir yuvarında olmak üzere, $l(p)$ deki herhangi bir yuvar içinde $M(p)$ de $a^{(n)} \to a$ olması şu şekilde tanımlanır :

$$\begin{aligned} a^{(n)} \to a \quad &\iff \big(a^{(n)}, x\big) \to (a, x) \quad (x\text{, e göre düzgün}) \\ &\iff \lim_{n \to \infty} \big(a^{(n)}, x\big) = (a, x) \\ &\iff \lim_{n \to \infty} \sum a_k^n x_k = \sum a_k x_k . \end{aligned}$$

Bu tanımlarla $l^*(p)$ ve $M(p)$ nin topolojik lineer uzay oldukları açıktır. Hatta Teorem 2 deki T dönüşümünün şimdi bir homeomorfizm olduğu görülebilir. Böylece aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

Teorem 3.3. $1 < p_k \le \sup p_k < \infty$ ise $M(p)$ ve $l^*(p)$ lineer homeomorfiktir.

$M(p) = l(q)$ iken $1 < \inf p_k$ durumunda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4. Eğer $1 < \inf p_k \le \sup p_k < \infty$ ve $l(q)$ kendisinin doğal paranorm topolojisine sahip ise $l^*(p)$, $l(q)$ ya lineer homeomorfiktir.

Ispat. $H = \sup q_k < \infty$ ve $a \in l(q)$ olmak üzere

$$h(a) = \Big(\sum |a_k|^{q_k}\Big)^{\frac{1}{H}}$$

olarak yazalım. Teorem 2 deki T dönüşümünün iki sürekli olduğunu göstermek zorundayız. Eğer $a \in l(q)$ ve $x \in l(q)$ için $(a, x) = \sum a_k x_k$ yazarsak aşağıdakileri ispatlamak yeterli olacaktır:

(i) Keyfi $A > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için, $0 < h(a) < \min(1, \varepsilon)(A^M + 1)^{-1}$ iken

$$\sup\{|(a, x)| : x \in S(\theta, A)\} < \varepsilon.$$

(ii) Keyfi $A > 1$ için, $\sup\{|(a, x)| : x \in S(\theta, A)\} < 1$ iken

$$[h(a)]^{H(M-1)} \le A^{-1}.$$

(i) ve (ii) deki $S(\theta; A)$, $l(p)$ de merkezi orjinde ve yarıçapı A olan yuvarı tanımlar.

(i) nin ispatı için not edelim ki $0 < h(a) < 1$

$$\frac{|a_k x_k|}{h(a)} = |x_k| \frac{|a_k|}{h(a)} \le |x_k|^{p_k} + \frac{|a_k|^{q_k}}{h^{q_k}(a)}$$
$$\le |x_k|^{p_k} + \frac{|a_k|^{q_k}}{h^{H}(a)} = |x_k|^{p_k} + |a_k|^{q_k} h^{-H}(a)$$

olmasını gerektirir. Buradan da

$$|a_k x_k| \le \left(|x_k|^{p_k} + |a_k|^{q_k} h^{-H}\right) h$$

elde edilir.

Böylece $0 < h = h(a) < \min(1; \varepsilon)(A^M + 1)^{-1}$ iken $x \in S(\theta; A)$ için,

$$|a_k x_k| \le \left(g^M + 1\right) h \le (A^M + 1)h < \varepsilon$$

dur. Gerçekten,

$$|(a; x)| = \left|\sum a_k x_k\right| \le \sum |a_k x_k| \le \left(\sum |x_k|^{p_k} + \sum |a_k|^{q_k} h^{-H}\right) h$$

burada $\sum |a_k|^{q_k} = h^H$ ve $g(x) = (\sum |x_k|^{p_k})^M$ olduğundan

$$|(a; x)| \le \left(\sum |x_k|^{p_k} + 1\right) h = \left(g^M + 1\right) h$$

ve

$$g(x) = \left(\sum |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} = A$$

alırsak

$$|(a; x)| \le \left(A^M + 1\right) h < \left(A^M + 1\right)\left(A^M + 1\right)^{-1}(1; \varepsilon) < \varepsilon$$

elde ederiz.

(ii) yi ispat etmek için $h(a) > 0$ alalım ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{(\operatorname{sgn} a_k)|a_k|^{q_k - 1} A^{\frac{1}{p_k}}}{h^{\frac{H}{p_k}}} & ; \quad (1 \le k \le n) \\ 0 & ; \quad (k > n) \end{cases}$$

olmak üzere $x^{(n)} \in S(\theta; A)$ kabul edelim. O zaman her $n \geq 1$ için

$$\sup\{|(a; x)| : x \in S(\theta; A)\} < \infty$$

olduğunda

$$\begin{aligned} |(a;x)| &\leq \sum |x_k| = \sum |a_k||x_k| \\ &= \sum |a_k| \frac{\frac{|a_k|}{|a_k|}|a_k|^{q_k-1} A^{\frac{1}{p_k}}}{h^{\frac{H}{p_k}}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q_k} A^{\frac{1}{p_k}} h^{-\frac{H}{p_k}} < \infty \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q_k} A^{\frac{1}{p_k}} h^{-\frac{H}{p_k}} < \infty$$

elde edilir.

$A^{\frac{1}{M}} \leq A^{\frac{1}{p_k}}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{q_k} h^{-\frac{H}{p_k}} \leq A^{-\frac{1}{M}}$$

sonucuna varılır bu da açıkça $h(a) < \infty$ olmasını gerektirir, böylece $h^{\frac{1}{p_k}} \leq h^{\frac{1}{M}}$ ve

$$h^{H\left(1-\frac{1}{M}\right)} \leq A^{-\frac{1}{M}}$$

elde edilir ki bu da (ii) demektir.

$0 < p_k \leq 1$ durumunu gözönünde bulunduran Simons (1994) daki konu ile ilgili sonuçları ve Teorem 3 ü birleştirerek, ki Simons orada $0 < p_k \leq 1$ olması durumunu gözönüne aldı, en genel durumda $l^{*}(p)$ nin tam bir tanımı verilebilir.

$0 < p_k \leq 1$ şeklinde ki k ların kümesini S ile ve S nin tümleyenini de $-S$ olarak gösterelim. Buradan $a = (a_k) \in \hat{M}(p)$,

(i) $\sup_{k \in S} |a_k|^{p_k} < \infty$;

(ii) Bazı $N > 1$ tamsayısı için $\sum_{k \in -S} |a_k|^{q_k} N^{-\frac{q_k}{p_k}} < \infty$ dur.

Eğer S boş ise (i) nin otomatik olarak sağlandığı görülür. Benzer şekilde eğer $-S$ boş ise de sağlanır.

$\hat{M}(p)$ deki topoloji $l(p)$ deki yuvarların üzerindeki düzgün yakınsaklıkla ilgili olarak alınacaktır, kesin bir dille; $\hat{M}(p)$ de $a^{(n)} \to a$ deriz , $\left(a^{(n)}, x\right) \to (a, x)$ yakınsaması x e göre $l(p)$ deki herhangi bir yuvarda düzgündür. Burada $M = \max(1, \sup p_k)$ olmak üzere $l(p)$ üzerindeki paranorm

$$g(x) = \left(\sum |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}}$$

olarak alınır. Teorem 2 deki düşünceyle her $f \in l^*(p)$, her $x \in l(p)$ için $a \in \hat{M}(p)$ olmak üzere $f(x) = \sum a_k x_k$ olacak şekilde tek olarak gösterilebilir. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.5. Eğer $0 < p_k \leq \sup p_k < \infty$ ise o zaman $l^*(p)$, $\hat{M}(p)$ ye lineer homeomorfiktir.

(Maddox,1968) de $c_0(p)$ uzayının dualinin karakterizasyonu problemi ortaya konulmuştur. Şimdi bu problemin (Maddox, 1969) daki çözümünü verelim. İlk olarak biliyoruz ki $c_0(p)$, $|x_k|^{p_k} \to 0$ olacak şekildeki x dizilerinin uzayıdır. (p_k) nın sınırlılığı $c_0(p)$ nin lineer dizi uzayı olması için gerek ve yeter şarttır. $M = \max(1, \sup p_k)$ ile $g(x) = \sup_k |x_k|^{\frac{p_k}{M}}$ paranormu $c_0(p)$ yi topolojik lineer uzay yapar (Maddox, 1968). Şimdi $c_0(p)$ nin Köthe-Toeplitz duali olan

$$M_0(p) = \bigcup_{N>1} \left\{ a : \sum |a_k| N^{\frac{-1}{p_k}} < \infty \right\}$$

uzayını verelim.

$M_0(p) = l_1$, $\inf p_k > 0$ olduğu kolayca görülebilir. $c_0^*(p)$ de topoloji olarak $c_0(p)$ nin yuvarları üzerindeki düzgün yakınsaklık topolojisini alacağız.

Teorem 3.6. $p_k > 0$ olsun. O zaman $c_0^\dagger(p) = M_0(p)$ dir. $\sup p_k < \infty$ iken $c_0^*(p)$, $M_0(p)$ ye izomorfiktir ve ek olarak $\inf p_k > 0$ iken $c_0^*(p)$, l_1'e lineer homeomorfiktir.

İspat. $a \in M_0(p)$ ve $x \in c_0(p)$ olsun. O zaman bazı $N > 1$ ler için $\sum |a_k| N^{\frac{-1}{p_k}} <$

∞ ve böylece yeterince büyük bütün k lar için $|x_k|^{p_k} < N^{-1}$ dolayısıyla böyle k lar için $|a_kx_k| \le |a_k| N^{\frac{-1}{p_k}}$ dır. Neticede $M_0(p) \subset c_0^{\dagger}(p)$ dir.

Diğer taraftan $c_0(p)$ deki her x için $\sum a_kx_k$ nın yakınsaklığı $a \in M_0(p)$ olmasını gerektirir. Çünkü diğer türlü Teorem 1 in ispatındaki gibi kolayca $\sum a_kx_k$ ıraksak olacak şekilde bir $x \in c_0(p)$ dizisi inşa edilebilir. Bu $c_0^{\dagger}(p) = M_0(p)$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\sup p_k < \infty$, $c_0(p)$ nin lineer topolojik uzay olmasını sağlar ve açıktır ki $c_0^{*}(p)$ deki her f, $f(x) = \sum a_kx_k$ şeklinde gösterilebilir. Teoremin ilk kısmından $a \in M_0(p)$ olduğu görülür. Hatta teoremin ilk kısmından $a \in M_0(p)$ olduğunda $\sum a_kx_k$, $c_0(p)$ üzerinde lineerdir. $N > 1$ iken $g(x) < N^{\frac{-1}{M}}$ olması $|x_k| \le g(x)$ olmasını ve böylece de

$$\sum |a_kx_k| \le g(x) \sum_{1}^{n} |a_k| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| N^{\frac{-1}{p_k}}$$

olmasını gerektirir.

$a \in M_0(p)$ iken $\sum |a_kx_k|$ istediğimiz kadar küçük olacak şekilde, yeterince büyük n ve yeterince küçük $g(x)$ seçilebilir. Buradan $a \in M_0(p)$ olduğunda $\sum a_kx_k$ nın $c_0(p)$ de sürekli olduğu görülür. Böylece $f \to a$ dönüşümü lineer, 1:1, örtendir.

Sonuç olarak $p = \inf p_k > 0$ varsayalım ve l_1 deki alışılmış normu alalım. Eğer $g(x) \le A$ ise ve k, $|x_k| < 1$ şeklinde ise $|x_k| \le A$ ve eğer $|x_k| \ge 1$ ise $|x_k|^p \le |x_k|^{p_k}$ dır. Böylece $|x_k| \le B = \max\left(A, A^{\frac{M}{p}}\right)$ her k için,

$$\sum |a_kx_k| \le B \sum |a_k|$$

dır.

Buradan $f \to a$ dönüşümü süreklidir.

Şimdi $A > 1$ ve $S(\theta; A)$, $c_0(p)$ de bir yuvar olmak üzere

$$\sup\{|(a;x)| : x \in S(\theta; A)\} < \infty$$

olduğunu varsayalım. Buradan,

$$x_k^{(n)} = (\operatorname{sgn} a_k)\, A^{\frac{1}{p_k}},\ 1 \le k \le n;\ x_k^{(n)} = 0,\ k > n$$

olmak üzere $\left(x_k^{(n)}\right) \in S(\mu; A)$ dır. Böylece $A > 1$ olduğundan,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\, A^{\frac{1}{p_k}} \le 1;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le A^{-\frac{1}{M}}$$

dır. Sonuç olarak $f \to a$ dönüşümü süreklidir.

Üstelik $0 < \inf p_k \le \sup p_k < \infty$ iken $c_0^{*}(p)$ nin

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : g(x) \le 1\} = \sum |a_k|$$

normu ile normlanabildiğini gözlemleriz. Böylece $c_0^{*}(p)$, l_1'e izometrik izomorf olur.

4. $\Delta\ell_1(p)$ ve $\Delta c_0(p)$ UZAYLARININ KÖTHE-TOEPLITZ DUALLERI

Bu kısımda Malkowsky tarafından verilen $\Delta\ell_1(p)$ nin alışılmış ve mutlak Köthe-Toeplitz dualleri, $\Delta c_0(p)$ nin Köthe-Toeplitz duali ile ilgili teoremleri ve $A \in (\Delta\ell_1(p); \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şartı veren teoremi vereceğiz.

4.1. Köthe-Toeplitz Dualleri

Teorem 4.1.1. Her kesin pozitif $p = (p_k)$ dizisi için

(a) $$(\Delta\ell_1(p))^{\alpha} = D_1^{(1)}(p) := \bigcap_{N=2}^{\infty} \left(a \in w := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} < \infty \right),$$

(b) $$(\Delta\ell_1(p))^{\beta} = D_1^{(2)}(p) := \bigcup_{N=2}^{\infty} \left\{ a \in w := \sup_{k\geq 2} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \right]^{-1} < \infty \right\},$$

(c) $$(\Delta c_0(p))^{\alpha} = D_0^{(1)}(p) = \bigcup_{N=2}^{\infty} \left(a \in w := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{-\frac{1}{p_j}} < \infty \right)$$

dur. (Keyfi y_i için alışılagelmiş $\sum_{j=1}^{0} y_i = 0$ $(m < \infty)$ ı kabul ediyoruz.)

İspat.

(a) $D_1^{(1)}(p) \subset (\Delta\ell_1(p))^{\alpha}$ olduğunu gösterelim.

$a \in D_1^{(1)}(p)$ ve $x \in \Delta\ell_1(p)$ olsun. $N > \max\{1, \sup_k |\Delta x_k|^{p_k}\}$ seçebiliriz. Önce, keyfi $N > 1$ $(k = 2, 3, \ldots)$ için $\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq 1$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq 1 \Rightarrow |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq |a_k| \Rightarrow \sum_k |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq \sum_k |a_k|$$

olup $\sum_k |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} < \infty$ ve $a \in D_1^{(1)}(p)$ ise $\sum_k |a_k| < \infty$ olduğunu not edelim.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k(x_k - x_1 + x_1)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_k - x_1 + x_1| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|(|x_k - x_1| + |x_1|) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k||x_k - x_1| + |a_k||x_1|) = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_k - x_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_1| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_k - x_1| + |x_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=1}^{k-1} \Delta x_j \right| + |x_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} + |x_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty
\end{aligned}
$$

dur.

Tersine, $(\Delta l_\infty(p))^{|\dagger|} \subset D_1^{(1)}(p)$ olduğunu gösterelim. $a \in D_1^{(1)}(p)$ olsun. O zaman $N > 1$ tamsayıları için

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} = \infty$$

olur. $x_k = \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ile x dizisi tanımlayalım. O zaman,

$$|x_k - x_{k+1}| = \left| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} - \sum_{j=1}^{k} N^{\frac{1}{p_j}} \right| = \left| -N^{\frac{1}{p_k}} \right| = N^{\frac{1}{p_k}}$$

ve buradan

$$\sup_k |\Delta x_k|^{p_k} = \sup_k \left(N^{\frac{1}{p_k}} \right)^{p_k} = N$$

olduğundan $x \in \Delta l_\infty(p)$ dir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \\
&= \infty
\end{aligned}
$$

olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \infty$ ve buradan $a \notin (\Delta l_\infty(p))^{|\dagger|}$ dir.

(b) $D_\infty^{(2)}(p) \subset (\Delta \ell_\infty(p))^{\alpha\alpha}$ olduğunu gösterelim.

$a \in D_\infty^{(2)}(p)$ ve yukarıdaki ispattan $x \in (\Delta \ell_\infty(p))^{\alpha} = D_\infty^{(1)}(p)$ olsun. O zaman bazı $N > 1$ için

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k||x_k| = \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}\right]^{-1} |x_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}$$

ve burada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \le \sum_{k=2}^{\infty} a_k \max b_k = \sum_{k=2}^{\infty} (a_k) : \max b_k$$

olduğundan

$$\sum_{k=2}^{\infty} |a_k x_k| \le \sup_{k \ge 2} \left(|a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}\right]^{-1}\right) \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} < \infty$$

dur.

Tersine, $(\Delta \ell_\infty(p))^{\alpha\alpha} \subset D_\infty^{(2)}(p)$ olduğunu gösterelim. $a \notin D_\infty^{(2)}(p)$ olsun. O zaman her $N > 1$ tamsayısı için

$$\sup_{k \ge 2} |a_k| \left[\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}\right]^{-1} = \infty$$

olur. Burada $k(m) \ge 2$ tamsayılarının $(k(m))$ kesin artan dizisi vardır öyleki

$$\left|a_{k(m)}\right| \left(\sum_{j=1}^{k(m)-1} m^{\frac{1}{p_j}}\right)^{-1} > m^2 \quad (m = 2, 3, \ldots)$$

dir. x dizisini

$$x_k := \begin{cases} \left|a_{k(m)}\right|^{-1} & (k = k(m)) \\ 0 & (k \neq k(m)) \end{cases} \quad (m = 2, 3, \ldots)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman her $N \ge 2$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} &\le \sum_{m=2}^{N-1} \left|a_{k(m)}\right|^{-1} \sum_{j=1}^{k(m)-1} N^{\frac{1}{p_j}} + \sum_{m=N}^{\infty} \left|a_{k(m)}\right|^{-1} \sum_{j=1}^{k(m)-1} m^{\frac{1}{p_j}} \\ &\le \sum_{m=2}^{N-1} \left|a_{k(m)}\right|^{-1} \sum_{j=1}^{k(m)-1} N^{\frac{1}{p_j}} + \sum_{m=N}^{\infty} m^{-2} < \infty \end{aligned}$$

buradan $x \in (\Delta l_\infty(p))^{|\dagger|}$ ve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x_k| \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} \left|a_{k(m)}\right| \left|a_{k(m)}\right|^{-1} \\
&= \sum_{N=2}^{\infty} 1 \\
&= \infty
\end{aligned}$$

buradan da $a \notin (\Delta l_\infty(p))^{|\dagger\dagger|}$ dir.

(c) $D_0^{(1)}(p) \subset (\Delta c_0(p))^{|\dagger|}$ olduğunu gösterelim. $a \in D_0^{(1)}(p)$ olsun. $|a_k| \le |a_k| N^{\frac{1}{p_j}} \sum_{j=1}^{k-1} N^{-\frac{1}{p_j}}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$ dur. $x \in \Delta c_0(p)$ olsun. O zaman bir k_0 tamsayısı vardır öyleki $\sup_{k>k_0} |\Delta x_k|^{p_k} \le N^{-1}$ ki bu durumda N, $D_0^{(1)}(p)$ deki sayıdır.

$$\begin{aligned}
M &:= \max_{1 \le k \le k_0} |\Delta x_k|^{p_k} \\
m &:= \min_{1 \le k \le k_0} p_k \\
L &:= (M + 1) N
\end{aligned}$$

ve $y_k = x_k L^{-\frac{1}{m}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ile y dizisini tanımlayalım. O zaman,

$$\begin{aligned}
|\Delta y|^{p_k} &= \left|\Delta x_k L^{-\frac{1}{m}}\right|^{p_k} = |\Delta x_k|^{p_k} L^{-\frac{p_k}{m}} \\
\sup_k |\Delta y|^{p_k} &= \sup_k \, |\Delta x_k| L^{-\frac{p_k}{m}} \\
&= M L^{-\frac{m}{m}} = M L^{-1} \\
&= M.((M + 1) N)^{-1} \\
&= \frac{M}{M + 1} N^{-1} < N^{-1}
\end{aligned}$$

olduğundan $\sup_k |\Delta y|^{p_k} \le N^{-1}$ elde ederiz ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_k y_k L^{\frac{1}{M}}\right| = L^{\frac{1}{M}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k y_k|$$

$$= L^{\frac{1}{M}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||y_k - y_1 + y_1|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||y_k - y_1| + |y_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left| \sum_{j=1}^{k-1} \Delta y_j \right| + |y_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

elde edilir. Diğer yandan,

$\sup_k |\Delta y_k|^{p_k} \le N^{-1} \Rightarrow \forall k$ için $|\Delta y_k| \le N^{-\frac{1}{p_k}}$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} N^{-\frac{1}{p_j}} + |y_1| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

bulunur.

Tersine, $(\Delta c_0(p))^{|y|} \subset D_0^{(1)}(p)$ olduğunu gösterelim.

$a \notin D_0^{(1)}(p)$ olsun. O zaman tamsayıların kesin artan $(k(s))$ dizisi belirlenebilir öyleki $k(1) = 1$ ve

$$M_s := \sum_{k=k(s)}^{k(s+1)-1} |a_k| \sum_{j=1}^{k-1} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}} > 1 \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

dir.

$$x_k := \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} (l+1)^{-\frac{1}{p_j}} + \sum_{j=k(s)}^{k-1} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}} \quad (k(s) \le k \le k(s+1) - 1; s = 1, 2, \ldots)$$

ile x dizisini tanımlayalım. Buradan

$$|\Delta x_k| = \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} (l+1)^{-\frac{1}{p_j}} + \sum_{j=k(s)}^{k} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}} - \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} (l+1)^{-\frac{1}{p_j}} + \sum_{j=k(s)}^{\infty} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}}$$

$$|\Delta x_k| = (s+1)^{-\frac{1}{p_k}}$$

olup $|\Delta x_k|^{p_k} = \frac{1}{(s+1)}$ $(k(s) \le k \le k(s+1) - 1; s = 1, 2, \ldots)$ dır. Buradan $x \in \Delta c_0(p)$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \left(\sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} (l+1)^{-\frac{1}{p_j}} + \sum_{j=k(s)}^{k-1} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{j=k(l)}^{k(l+1)-1} (l+1)^{-\frac{1}{p_j}} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \sum_{j=k(s)}^{k-1} (s+1)^{-\frac{1}{p_j}}$$

$$\geq \sum_{s=1}^{\infty} 1 = \infty$$

yani $a \notin (\Delta c_0(p))^{|y|}$ dir.

Şimdi (Malkowsky, 1989) daki bazı sonuçları verelim.

Teorem 4.1.2. Her kesin pozitif $p = (p_k)$ dizisi için $R_k := \sum_{v=k+1}^{\infty} a_v \ (k = 1, 2, \ldots)$ olduğunda

$$(\Delta l_\infty(p))^y = D_\infty(p) := \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{ a \in w := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \text{ yakınsak ve } \sum_{k=1}^{\infty} N^{\frac{1}{p_k}} |R_k| < \infty \right\}$$

dur.

İspat. $a \in D_\infty(p)$ ve $x \in \Delta l_\infty(p)$ alalım. O zaman $N > \max\{1; \sup_k |\Delta x_k|^{p_k}\}$ tamsayısı vardır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k = -\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j R_j + R_n \sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j + x_1 \sum_{k=1}^{n} a_k \ (n = 1, 2, \ldots) \qquad (1)$$

ifadesine sahibiz. Açıktır ki (1) de sağdan son terim

$$\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq 1 \Rightarrow a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq a_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

olduğundan yakınsaktır.

(1) deki sağdan ilk terim $N > \sup_k |\Delta x_k|^{p_k} \Rightarrow \forall k$ için $|\Delta x_k| < N^{\frac{1}{p_k}}$ olduğundan

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\Delta x_j| \cdot |R_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} N^{\frac{1}{p_j}} |R_j| < \infty$$

mutlak yakınsaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}$ nin yakınsaklığı

$$\lim_{n \to \infty} R_n \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} = 0$$

olmasını gerektirir.

Tersine, $a \in (\Delta \ell_\infty(p))^\dagger$ olsun. $e = (1;1;\dots) \in \Delta \ell_\infty(p)$ ve $x = \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \in \Delta \ell_\infty(p)$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}$ yakınsaktır. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}$ nin yakınsaklığından

$$\lim_{n \to \infty} R_n \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} = 0$$

olur. (1) den $\forall x \in \Delta \ell_\infty(p)$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k R_k$ nın yakınsaklığını elde ederiz. $x \in \Delta \ell_\infty(p)$ olması için gerek ve yeter şart $y := \Delta x \in \ell_\infty(p)$ olduğundan dolayı $\sum_{k=1}^{\infty} \Delta x_k R_k$ nın yakınsaklığı $R \in \ell_\infty^\dagger(p)$ yi ifade eder.

Her $N > 1$ için $M_\infty(p) = \bigcap_{N=2}^{\infty} \left\{ a : \sum |a_k| N^{\frac{1}{p_k}} < \infty \right\}$ olmak üzere $\ell_\infty^\dagger(p) = M_\infty(p)$ dir. Bu teorem ile $\sum_{k=1}^{\infty} N^{\frac{1}{p_k}} |R_k| < \infty$ dur.

4.2. Bazı Matris Dönüşümleri

Keyfi $A = (a_{nk})$ kompleks matrisi için, A nın n. satırdaki dizisi için $A_n = a_{nk}$ yazarız. Verilen bir A matrisi için

$$b_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k} \quad (n;k = 1;2;\dots)$$

ile B matrisini tanımlayalım.

$X;Y$ w nın iki alt kümesi olsun. $(X;Y)$ ile bütün A matrislerinin ailelerini gösterelim öyleki $A_n x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ serisi $\forall x \in X$ $(n = 1;2;\dots)$ için yakınsak ve $Ax = (A_n x)$ dizisi $\forall x \in X$ için Y dedir.

Lemma 4.2.1. X ve Y lineer dizi uzayları olsunlar. $\Delta Y = \{y \in w : \Delta y \in Y\}$ olsun. O zaman,

$$A \in (X;\Delta Y) \;,\; B \in (X;Y) \text{ ve } A_1 \in X^\dagger$$

dır.

Lemma ve bilinen bazı sonuçlar kullanılarak $q \in l_\infty$ kesin pozitif dizileri için, $(l(p);\Delta l_\infty(q))$, $(l(p);\Delta c_0(q))$, $(l(p);\Delta c(q))$ sınıfларının karakterizasyonu verilebilir.

Şimdi $(\Delta l_\infty(p); l_\infty)$ sınıfının karakterizasyonunu verelim.

Teorem 4.2.2. Her kesin pozitif p dizisi için $A \in (\Delta l_\infty(p); l_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç koşulun sağlanmasıdır.

(i) $M_1(N) := \sup_n \left| \sum_{k=1} a_{nk} \sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}} \right| < \infty$ her $N > 1$ için,

(ii) $M_2(N) := \sup_n \left\{ \sum_{v=1} N^{\frac{1}{p_v}} \left| \sum_{k=v+1} a_{nk} \right| \right\} < \infty$, $N > 1$ için,

(iii) $M_3 = \sup_n \left| \sum_{k=1} a_{nk} \right| < \infty$.

Ispat. Üç koşul sağlansın. O zaman Teorem 2.2. den $A_n \in (\Delta l_\infty(p))^\beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$ dir. Buradan $\forall x \in \Delta l_\infty(p)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ için $A_n x$ yakınsaktır. Ayrıca Teorem 2.2 nin ispatında ki gibi $\sup_k |\Delta x_k|^{p_k} < N$ olacak şekildeki $x \in \Delta l_\infty(p)$ için

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - x_1 + x_1) \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - x_1) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_1 \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}(x_k - x_1) \right| + |x_1| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left(\sum_{j=1}^{n-1} \Delta x_j \right) \right| + |x_1| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left(\sum_{j=1}^{n-1} N^{\frac{1}{p_j}} \right) \right| + |x_1| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right|
\end{aligned}
$$

buradan

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right| &\leq \sum_{v=1}^{\infty} N^{\frac{1}{p_v}} \left| \sum_{k=v+1}^{\infty} a_{nk} \right| + |x_1| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right| \\
&\leq M_2(N) + |x_1| M_3 \quad (n = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da $Ax \in l_\infty$ demektir.

Tersine $A \in (\Delta l_\infty(p); l_\infty)$ olsun. (i) ve (ii) nin gerekliliği $x_k = \left[\sum_{j=1}^{k-1} N^{\frac{1}{p_j}}\right]$ ve e nin $\Delta l_\infty(p)$ de olmasından bulunur. (ii) nin gerekliliğini göstermek için $N > 1$ için $M_2(N) = \infty$ farz edelim. Burada

$$c_{nv} := \sum_{k=v+1}^{\infty} a_{nk} \quad (n, v = 1, 2, \ldots)$$

ile tanımlanan C matrisi için (Lascarides ve Maddox, 1969) daki teoremden her $N > 1$ tamsayısı için

$$A \in (l_\infty(p); l_\infty) \Leftrightarrow D(N) = \sup_n \sum |a_{nk}| N^{\frac{1}{p_k}} < \infty$$

olduğundan $C \notin (l_\infty(p); l_\infty)$ buluruz. Buradan bir $x \in l_\infty(p)$ dizisi vardır öyleki $\sup_v |x_v|^{p_v} = 1$ ve $\sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} x_v \neq O(1)$ dir.

$y_v = -\sum_{j=1}^{v-1} x_j + x_1$ $(v = 1, 2, \ldots)$ ile y dizisini tanımlayalım. O zaman

$y \in \Delta l_\infty(p)$ ve $\sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} y_v = \sum_{v=1}^{\infty} c_{nv} x_v + x_1 \sum_{v=1}^{\infty} a_{nv} \neq O(1)$

elde edilir. Bu ise $A \in (\Delta l_\infty(p); l_\infty)$ kabulümüz için çelişkidir. Buradan $\forall N > 1$ için $M_2(N) < \infty$ bulunur.

5. $\Delta \ell_\infty(p, f, q)$ DİZİ UZAYI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde $\Delta \ell_\infty(p, f, q)$ dizi uzayı tanımı verilerek, lineer paranormlu uzay olduğu gösterilecek ve bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

X, θ sıfır elemanlı kompleks (veya reel) lineer uzay ve $X = (X, q)$, q yarınormu ile yarınormlu bir uzay olsun. X-değerli diziler uzayını $S(X)$ ile gösterelim. $S(X)$; $x = x_k, y = y_k$ ve λ bir skaler olmak üzere

$$
\begin{aligned}
x + y &= (x_k + y_k) \\
\lambda(x) &= (\lambda x_k)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. f herhangi bir modülüs fonksiyonu ve $p = (p_k)$ pozitif terimli reel artan ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k < \sup_k p_k = H$ şartını sağlayan bir dizi olmak üzere

$$
\Delta \ell_\infty(p, f, q) = \left\{ x \in S(X) : \sup_k \left[f\left(q(\Delta x_k)\right)\right]^{p_k} < \infty \right\}
$$

dizi uzayını tanımlayalım.

Teorem 5.1. $\Delta \ell_\infty(p, f, q)$ dizi uzayı lineerdir.

İspat. $S(X)$ lineer uzay ve $\Delta \ell_\infty(p, f, q) \subset S(X)$ olduğundan $x, y \in \Delta \ell_\infty(p, f, q)$ ve λ, μ skalerleri için $\lambda x + \mu y \in \Delta \ell_\infty(p, f, q)$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $p = (p_k)$ dizisi ile f ve q fonksiyonlarının özelliklerinden λ, μ skalerler olmak üzere $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $x_k, y_k \in X$ için

$$
\begin{aligned}
\left\{f\left(q\left(\Delta(\lambda x_k + \mu y_k)\right)\right)\right\}^{p_k} &= \left\{f\left(q(\lambda \Delta x_k + \mu \Delta y_k)\right)\right\}^{p_k} \\
&\leq \left\{f\left(|\lambda| q(\Delta x_k)\right) + f\left(|\mu| q(\Delta y_k)\right)\right\}^{p_k} \\
&\leq \left\{K_1 f\left(q(\Delta x_k)\right) + K_2 f\left(q(\Delta y_k)\right)\right\}^{p_k} \\
&\leq C\left[K_1 f\left(q(\Delta x_k)\right)\right]^{p_k} + C\left[K_2 f\left(q(\Delta y_k)\right)\right]^{p_k} \\
&\leq C K_1^H \left[f\left(q(\Delta x_k)\right)\right]^{p_k} + C K_2^H \left[f\left(q(\Delta y_k)\right)\right]^{p_k}.
\end{aligned}
$$

Burada $K_1, K_2 \in \mathbb{Z}^+$ ve $|\lambda| \le K_1, |\mu| \le K_2$ dir. Eşitsizliğin her iki tarafında k üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}\sup_k [f(q(\Delta(\lambda x_k + \mu y_k)))]^{p_k} &\le CK_1^H \sup_k [f(q(\Delta x_k))]^{p_k} + CK_2^H \sup_k [f(q(\Delta y_k))]^{p_k} \\ &< \infty\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\lambda x_k + \mu y_k \in \Delta l_\infty(p; f; q)$ olduğu görülür.

Teorem 5.2. $0 < \alpha \le P_k \le H$, $k = 1, 2, \ldots$ olsun. $M = \max(1, H)$ olmak üzere $\Delta l_\infty(p; f; q)$ uzayı

$$g(x) = q(x_1) + \sup_k [f(q(\Delta x_k))]^{\frac{p_k}{M}}$$

ile paranormlu uzaydır.

İspat. Teoremin ispatı için $g : \Delta l_\infty(p; f; q) \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun paranorm olduğunu göstermeliyiz. Herşeyden önce her $x \in \Delta l_\infty(p; f; q)$ için

$$g(x) = q(x_1) + \sup_k [f(q(\Delta x_k))]^{\frac{p_k}{M}} < \infty$$

olması $g(x) \in \mathbb{R}$ olmasını gerektirir. Şimdi f ve q nun özelliklerini dikkate alarak paranorm şartlarına bakılırsa

(i) $\Delta l_\infty(p; f; q)$ uzayının sıfırı $\theta = (\theta, \theta, \ldots)$ şeklindedir. O halde,

$$\begin{aligned} g(\theta) &= q(\theta_1) + \sup_k [f(q\Delta(\theta_k))] \\ &= q(0) + \sup_k [f(0)]^{\frac{p_k}{M}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} g(-x) &= q(-x_1) + \sup_k [f(q(-\Delta x_k))]^{\frac{p_k}{M}} \\ &= |-1| q(x_1) + \sup_k [f(|-1| q(\Delta x_k))]^{\frac{p_k}{M}} \\ &= q(x_1) + \sup_k [f(q(\Delta x_k))]^{\frac{p_k}{M}} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

olur.

(iii) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\frac{p_k}{M} \leq 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
g(x+y) &= q(x_1+y_1) + \sup_k \left[f\left(q(\Delta(x_k+y_k))\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&= q(x_1+y_1) + \sup_k \left[f\left(q(x_k+y_k - x_{k+1} - y_{k+1})\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq q(x_1)+q(y_1) + \sup_k \left[f\left(q((x_k - x_{k+1}) + (y_k - y_{k+1}))\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq q(x_1)+q(y_1) + \sup_k \left[f\left(q(x_k - x_{k+1})\right) + f\left(q(y_k - y_{k+1})\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq q(x_1)+q(y_1) + \sup_k \left[f\left(q(\Delta x_k)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} + \sup_k \left[f\left(q(\Delta y_k)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&= g(x)+g(y).
\end{aligned}$$

(iv) $\Delta \ell_\infty(p;f;q)$ de herhangi bir dizi $x=(x_n)$ ve skalerlerin dizisi de $\lambda = (\lambda^n)$ olsun. Burada her bir n için λ^n bir skalerdir. Şimdi kabul edelim ki $\lambda^n \to \lambda^0$ ve $g(x^n - x^0) \to 0$ $(n \to \infty)$ olsun. $\lambda = (\lambda^n)$ skaler dizisi yakınsak olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|\lambda^n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif tamsayısı bulunabilir. O halde,

$$\begin{aligned}
g(\lambda^n x^n - \lambda^0 x^0) &= q(\lambda^n x_1^n - \lambda^0 x_1^0) + \sup_k \left[f\left(q\,\Delta(\lambda^n x_k^n - \lambda^0 x_k^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq |\lambda^n|\, q(x_1^n - x_1^0) + \left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_1^0) \\
&\quad + \sup_k \left[f\left(|\lambda^n|\, q(\Delta(x_k^n - x_k^0))\right) + f\left(\left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_k^0 - x_{k+1}^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq |\lambda^n|\, q(x_1^n - x_1^0) + \sup_k \left[f\left(|\lambda^n|\, q(\Delta(x_k^n - x_k^0))\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\quad + \left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_1^0) + \sup_k \left[f\left(\left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_k^0 - x_{k+1}^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq |\lambda^n|\, q(x_1^n - x_1^0) + \sup_k \left[K f\left(q\,\Delta(x_k^n - x_k^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\quad + \left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_1^0) + \sup_k \left[f\left(\left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_k^0 - x_{k+1}^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \\
&\leq K \left\{ q(x_1^n - x_1^0) + \sup_k \left[f\left(q\,\Delta(x_k^n - x_k^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}} \right\} \\
&\quad + \left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_1^0) + \sup_k \left[f\left(\left|\lambda^n - \lambda^0\right| q(x_k^0 - x_{k+1}^0)\right)\right]^{\frac{p_k}{M}}.
\end{aligned}$$

Eşitsizlikte ortadaki terimin sıfıra gittiği açıktır. Ayrıca $g(x^n - x^0) \to 0$ olması ilk terimin de sıfıra gitmesini sağlar. Şimdi üçüncü terimin de sıfıra yakınsadığını gösterelim.

Kabul edelim ki bu sağlanmasın. Yani $\varepsilon > 0$ olmak üzere ($\varepsilon < 1$ kabul ediyoruz)

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ olsun } \ni \left[f\left(\left| \lambda^{n_m} - \lambda^0 \right| q(x^0_{k_m} - x^0_{k_{m+1}}) \right) \right]^{\frac{p_{k_0}}{M}} \geq \varepsilon \quad \text{her } m = 1, 2, \ldots .$$

olsun. Burada $m \to \infty$ iken $n_m, k_m \to \infty$.

$0 < \frac{\alpha}{M} \leq \frac{p_{k_m}}{M} \leq 1$ ve $\varepsilon < 1$ olduğundan

$$f\left(\left| \lambda^{n_m} - \lambda^0 \right| q(x^0_{k_m} - x^0_{k_{m+1}}) \right) \geq \varepsilon^{\frac{M}{\alpha}} \text{ her } m = 1, 2, \ldots .$$

elde ederiz. Diğer taraftan f sürekli olduğundan;

$$\left[f\left(\lim_{m \to \infty} \left| \lambda^{n_m} - \lambda^0 \right| q(x^0_{k_m} - x^0_{k_{m+1}}) \right) \right]^{\frac{p_{k_0}}{M}} = 0$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Öyleyse kabulümüz yanlıştır.

Buradan,

$$g(\lambda^n x^n - \lambda^0 x^0) \to 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3. q_1 ve q_2 herhangi iki yarınorm ve f herhangi bir modülüs fonksiyon olsun. O zaman,

$$\Delta \ell_\infty(p; f; q_1) \cap \Delta \ell_\infty(p; f; q_2) \subset \Delta \ell_\infty(p; f; q_1 + q_2)$$

dir.

Ispat. $x = (x_k) \in \Delta \ell_\infty(p; f; q_1) \cap \Delta \ell_\infty(p; f; q_2)$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} [f((q_1 + q_2)(\Delta x_k))]^{p_k} &= [f(q_1(\Delta x_k) + q_2(\Delta x_k))]^{p_k} \\ &\leq [f(q_1(\Delta x_k)) + f(q_2(\Delta x_k))]^{p_k} \\ &\leq C[f(q_1(\Delta x_k))]^{p_k} + C[f(q_2(\Delta x_k))]^{p_k} \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada her iki tarafın k üzerinden supremumunu alırsak,

$$\begin{aligned} \sup_k [f((q_1 + q_2)(\Delta x_k))]^{p_k} &\leq \left(C \sup_k [f(q_1(\Delta x_k))]^{p_k} + C \sup_k [f(q_2(\Delta x_k))]^{p_k} \right) \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 5.4. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ herhangi modülüs fonksiyonları olsun. Bu durumda,

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Delta \ell_\infty(p; f_i; q) \subset \Delta \ell_\infty\Big(p; \sum_{i=1}^{n} f_i; q\Big)$$

dur.

İspat. İspatı $n = 2$ için yapalım. $x = (x_k) \in \Delta \ell_\infty(p; f_1; q) \cap \Delta \ell_\infty(p; f_2; q)$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
[(f_1 + f_2)\, q(\Delta x_k)]^{p_k} &= [f_1(q(\Delta x_k)) + f_2(q(\Delta x_k))]^{p_k} \\
&\le C\,[f_1(q(\Delta x_k))]^{p_k} + C\,[f_2(q(\Delta x_k))]^{p_k}
\end{aligned}$$

olur. k üzerinden supremum alırsak,

$$\sup_k [(f_1 + f_2)\, q(\Delta x_k)]^{p_k} \le C \sup_k [f_1(q(\Delta x_k))]^{p_k} + C \sup_k [f_2(q(\Delta x_k))]^{p_k} < \infty$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.5. Eğer q_1 kuvvetli q_2 ise $\Delta \ell_\infty(p; f; q_1) \subset \Delta \ell_\infty(p; f; q_2)$ dir.

İspat. q_1 kuvvetli q_2 ise tanımdan $\forall \xi \in X$ için $q_2(\xi) \le K q_1(\xi)$ olacak şekilde K pozitif tamsayısı bulunabilir. Böylece $x \in \Delta \ell_\infty(p; f; q_1)$ ise

$$\begin{aligned}
\sup_k [f(q_2(\Delta x_k))]^{p_k} &\le \sup_k [f(K q_1(\Delta x_k))]^{p_k} \\
&\le K^H \sup_k [f(q_1(\Delta x_k))]^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olur ki bu da $x \in \Delta \ell_\infty(p; f; q_2)$ demektir.

Teorem 5.6. f sınırlı bir modülüs fonksiyon ise $\Delta \ell_\infty(q) \subset \Delta \ell_\infty(f; q)$ dur.

İspat. $(x_k) \in \Delta \ell_\infty(q)$ olsun. O halde $q(\Delta x_k) \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. f sınırlı ve artan olduğundan

$$f(q(\Delta x_k)) \le f(M) \le K$$

yada

$$f(q(\Delta x_k)) \leq K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Bu da $(x_k) \in \Delta\ell_\infty(f;q)$ demektir. Öyleyse $\Delta\ell_\infty(q) \subset \Delta\ell_\infty(f;q)$ dir.

Teorem 5.7. f sınırsız bir modülüs fonksiyon ise $\Delta\ell_\infty(f;q) \subset \Delta\ell_\infty(q)$ dur.

Ispat. f sınırsız bir modülüs fonksiyon olmak üzere aksini kabul edelim. Yani $\Delta\ell_\infty(f;q) \not\subset \Delta\ell_\infty(q)$ olsun. Bu durumda $(x_k) \in \Delta\ell_\infty(f;q)$ fakat $(x_k) \notin \Delta\ell_\infty(q)$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi vardır. $(x_k) \notin \Delta\ell_\infty(q)$ olduğundan pozitif tamsayıların öyle bir (k_n) alt dizisi bulabiliriz ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(\Delta x_{k_n}) \geq n$ dir. f artan olduğundan her n için

$$f(q(\Delta x_{k_n})) \geq f(n)$$

dir. f sınırsız olduğundan eşitsizliğin sonucu olarak

$$\sup_{k_n} f(q(\Delta x_{k_n})) = \infty$$

dur. Yani $(x_k) \notin \Delta\ell_\infty(f;q)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde

$$\Delta\ell_\infty(f;q) \subset \Delta\ell_\infty(q)$$

dur.

Teorem 5.8. $p_k = O(r_k)$ ve $r_k = O(p_k)$ olsun. O zaman,

$$\Delta\ell_\infty(p;f;q) = \Delta\ell_\infty(r;f;q)$$

dur.

Ispat. $x = (x_k) \in \Delta\ell_\infty(p;f;q)$ olsun. Bu durumda $\forall k \in \mathbb{N}$ için $[f(q(\Delta x_k))]^{p_k} \leq F$ olacak şekilde $F \in [1;\infty)$ sayısı vardır. $r_k = O(p_k)$ olduğundan $\frac{r_k}{p_k} \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} [f(q(\Delta x_k))]^{r_k} &= [f(q(\Delta x_k))]^{r_k \frac{p_k}{p_k}} \\ &= [f(q(\Delta x_k))]^{p_k \frac{r_k}{p_k}} \\ &\leq F^M < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\sup_k [f(q(¢x_k))]^{r_k} < 1$ olur. Yani $¢l_1(p; f; q)$ µ $¢l_1(r; f; q)$ dir. Benzer şekilde $¢l_1(r; f; q)$ ¶ $¢l_1(p; f; q)$ olduğu gösterilebilir.

6. KAYNAKLAR

Ahmad, Z. U., and Mursaleen, 1987, Köthe-Toeplitz duals of some new sequence spaces and their matrix maps, Publ. Inst. Math. (Beograd) 42 (56) 57-61.

Butak¬n, V., 1994, Yar¬normlu uzaylarda $C(p; f; q; s)$ dizi uzay¬ ve ilgili matris dönüşümleri, Erciyes Üniversitesi Fen Bil. Enst. Doktara Tezi.

Ero¼glu, A., 1994, $l(p; f; q; s)$ Paranormed sequence spaces generated by in…nite matrices, Erciyes Üniversitesi Fen Bil. Enst. Doktara Tezi.

Kizmaz, H., 1981, On certain sequence spaces, Canadian Math. Bull. 24, 169-176.

Lascarides, C. G., 1971, A study of certain sequence spaces of Maddox and a generalization of a theorem of Iyer, Paci…c J. Math. 38, 487-500.

Maddox, I. J., 1967, Spaces of strongly summable sequences, Quarterly J. Math. Oxford Ser. 2, 18, 345-55.

Maddox, I. J., 1968, Paranormed sequence spaces generated by in…nite matrices Proc. Cambridge Philos. Soc. 63.

Maddox, I. J., 1969, Continuous and Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces Proc. Canbridge Philos. Soc. 65, 431-435.

Maddox, I. J., 1969, Some properties of paranormed sequence spaces. J. London Math. Soc., (2), 1, 316-322.

Maddox, I. J., 1970, Elements of Functional Analysis, Reader Mathematics University of Lancaster, Cambridge at the University Press.

Maddox, I. J. and Willey, M. A. L., 1974, Continuous operators on paranormed spaces and matrix transformations, Paci...c J. Math. , 53, 217-228.

Malkowsky, E., 1989, Absolute and ordinary Köthe-Toeplitz duals of some sets of sequences and matrix transformations, Publ. Inst. Math. 46 (60), pp. 97-103.

Simons, S., 1965, The sequence spaces $l(p_v)$ and $m(p_v)$. Proc. London Math. Soc. (3), 15, 422-36.

ÖZGEÇMIŞ

Ad¬ Soyad¬ : Tuba ÇI¼DEM

Do¼um yeri : BATMAN

Do¼um Y¬l¬ : 1977

Medeni Hali : Bekar

E¼itim ve Akademik Durumu :

Lise 1988 ¡ 1991 Antalya Anadolu Lisesi

Lisans 1991 ¡ 1995 Süleyman Demirel Üniversitesi

Yabanc¬ Dil : Ingilizce

Iş Deneyimi :

2000 ¡ ::: I.H.Ö. Işitme Engelliler Meslek Lisesi, Matemetik Ö¼retmeni.