T.C.
SÜLEYMAN DEMIREL ÜNIVERSITESI
FEN BILIMLERI ENSTITÜSÜ

BAZI FONKSIYONEL BANACH CEBIRLERININ KAPALI IDEALLERININ RESMI

HÜSEYIN TUNA

DANIŞMAN
Prof. Dr. MÜBARIZ GARAYEV

YÜKSEK LISANS TEZI
MATEMATIK ANABILIM DALI

ISPARTA, 2004

IÇINDEKILER

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde, sınırlı lineer operatörler, kompakt operatörler tanımlanarak onların bazı özellikleri verilmiştir. Quasinilpotent operatörün tanımı verilmiş ve kompakt operatörler için Fredholm alternatifi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Banach cebirleri teorisinin temel kavramları verilmiştir. Idealler ve maksimal idealler tanımlanarak onların bazı özellikleri verilmiştir. Gelfand dönüşümü ve özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, analitik fonksiyonların temel özellikleri verilmiş ve Duhamel çarpımı tanımlanıp özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde, Duhamel çarpımlı bazı Banach cebirleri ve onların maksimal idealleri incelenmiştir. $C^{(n)}\left(\overline{D}\right)$ uzayının kapalı alt uzayı olan $B = \{f : f \in C^{(n)}\left(\overline{D}\right) :$ f D de analitik ve $\overline{D}$ da sürekli$\}$ uzayının Duhamel çarpımına göre Banach cebri oluşu ispatlanmış ve onun maksimal ideallerinin resmi verilmiştir. $(B; \circledast)$ cebrinin maksimal idealler uzayının bir tek $h(f) = f(0)$ homomorfizminden oluştuğu ve böylece Gelfand dönüşümünün trivial olduğu ispatlanmıştır.

Altıncı bölümde ise bazı reeel Banach uzaylarının, yani reel eksenin $[0;1]$ aralığı üzerindeki fonksiyonlarının Duhamel çarpımına göre Banach cebri oluşu gösterilmiş ve onların Duhamel çarpımına göre maksimal idealleri incelenmiştir, Volterra integralleme operatörünün devri vektörleri ve komutantı resmedilmiştir.

ANAHTAR KELIMELER: Banach cebiri, Duhamel çarpımı, maksimal ideal, kapalı ideal, Titchmarsh konvolusyon teoremi, Fredholm alternatifi, Quasinilpotent operatör, homomorfizm, Gelfand dönüşümü, devri vektör, komutant.

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters.

In the first chapter, historical development of the topic has been given.

In the second chapter, the linear bounded operators and compact operators are defined and their some properties are given. The quasinilpotent operator is defined and for the compact operators the Fredholm alternative has been given.

In the third chapter, the basic concepts of Banach algebras theory have been given. Ideals and maximal ideals are defined and their several properties have been given. Gelfand transformation and its properties have been given.

In the fourth chapter, the basic properties of analytic functions are given; the Duhamel product is defined and its properties have been given.

In the fifth chapter, the Bnach algebras with Duhamel product as multiplication and their maximal ideals are examined. The being of Banach algebra of the closed subspace $B = \{f \in C^{(n)}(\overline{D}) : f$ is analytic in D and is continuous on $\overline{D}\}$ of $C^{(n)}(\overline{D})$ with respect to the Duhamel product has been proved and its maximal ideals are given. It is proved that the maximal ideals space of the Banach algebra $(B, \circledast)$ consist from the only one homomorphism $h(f) = f(0)$, and thus the Gelfand transformation is trivial.

In the sixth chapter, the being of Banach algebra with Duhamel product of some real Banach spaces over the segment $[0,1]$ of the real axis have been showed and their maximal ideals with respect to the Duhamel product have been investigated; cyclic vectors and commutant of Volterra integration operator have been described.

KEY WORDS: Banach algebra, Duhamel product, maximal ideal, closed ideal, Titchmarsh convolution theorem, Fredholm alternative, quasinilpotent operator, homomorphism, Gelfand transformation, cyclic vector, commutant.

SIMGELER DIZİNI

C	Kompleks say¬lar kümesi
¾(T)	T operatörünün spektrumu
½(T)	T operatörünün resolventi
(x_n)	Dizi
I	Özdeşlik operatörü
$\overline{M}$	M kümesinin kapan¬ş¬
kTk	T operatörünün normu
dim X	X uzay¬n¬n boyutu
r(a)	a noktas¬n¬n spektral yar¬çap¬
$\hat{a}$	a noktas¬n¬n Gelfand dönüşümü
~	Duhamel çarp¬m¬
I	Volterra integralleme operatörü
$D_f g$	f ~ g
$K_{F^0} g(x)$	$\mathbf{R}_0^x F^0(x$ ¡ $t)\, g(t)\, dt$
$f\,I\,g^0$	I operatörünün komutant¬
$C^{(n)}[0;1]$	[0;1] aral¬ğ¬nda n inci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar uzay¬
m(X)	X üzerindeki lineer fonksiyonellerin kümesi
$D(z_0;\pm)$	$D(z_0;\pm) = fz$ 2 C : jz ¡ z_0j < ±g
G(A)	Regüler elemanlar¬n uzay¬
$W_p^n[0;1]$	Sobolev uzay¬

TEŞEKKÜR

Bu çal¬şman¬n belirlenmesi ve yürütülmesi esnas¬nda ilgi ve alakas¬n¬ esirgemeyen, değerli hocam Prof.Dr. Mubariz GARAYEV 'e teşekkürü bir borç bilirim.

2/6/2004

Hüseyin TUNA

1. GIRIŞ

Banach Cebiri kavramı 1930 lu yılların sonlarında değişik adlarla Nagumo, Yosida, Gelfand, Naimark ve Ambrose tarafından verilmiştir. Banach cebirlerinin daha genel teorisi ise Gelfand, Silov, Naimark ve Raikov'un adı ile özdeştir. (Daha ayrıntılı bilgi için C. E. Rickart'ın "General Theory of Banach Algebras" adlı kitabı ve I. M. Gelfand, D. A. Raikov ve G. E. Silov'un "Commutative normed rings" başlıklı kitapları en iyi kaynaklardır.). Değişmeli Banach cebirinin esas sonucu Gelfand ve Naimark tarafından ispatlanarak değişmeli bir B^* -cebirinin öğrenilmesi meselesini cebirin maksimal idealler uzayı üzerindeki sürekli fonksiyonlar cebirinin öğrenilmesi meselesine getirilebildiğini göstermiştir.

Banach cebirlerinin en önemli problemlerinden biri de incelenen cebirin kapalı ideallerinin ve maksimal ideallerinin belirlenmesidir. Bazı somut Banach cebirlerinin kapalı ideallerinin ve maksimal ideallerinin resmi Silov (1947), Whitney (1948), Lorch (1944) ve başkaları tarafından yapılmıştır (bak. Rickart (1960)).

Bu tezde Duhamel çarpımlı bazı Banach cebirleri ve onların maksimal idealleri incelenmiştir. Fonksiyonların Duhamel çarpımı

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)\,g(t)\,dt$$

formülü ile tanımlanıyor. Analitik fonksiyonların bazı Frechet uzaylarında kapalı idealleri (maksimal idealler dahil) resmetmek için çeşitli yöntemler mevcuttur. Bunlardan biri de Duhamel çarpımının yardımıyla yapılan metoddur.

Analitik fonksiyonların bazı Frechet uzaylarında (topolojik cebir) kapalı ideallerin resmolunmasında Duhamel çarpımını ilk kullananlar Wigley (1974) ve Nagnibida (1982) dır. Bazı Banach uzaylarında Volterra integralleme operatörünün devri vektörlerinin ve komutantının resmi Duhamel çarpımı yardımıyla M. T. Karaev (1984,1990,2003) tarafından verilmiştir.

D sınırlı ve orjinde yıldız bölge olsun. $C^{(n)}\left(\overline{D}\right)$ ile x ve y değişkenine göre

n ci mertebeden kısmi türevleri D de var ve $\overline{D}$ de sürekli olan kompleks değerli $f(z) = f(x+iy)$ fonksiyonlarının vektör uzayını gösterelim. Bu tezde $C^{(n)}\left(\overline{D}\right)$ uzayının kapalı alt uzayı olan $B = \{f \in C^{(n)}\left(\overline{D}\right) : f$ D de analitik ve $\overline{D}$ da sürekli$\}$ Banach uzayının Duhamel çarpımına göre Banach cebiri oluşu gösterilmiş ve sonra da tek maksimal idealinin

$$M = \{f \in B : f(0) = 0\}$$

olduğu ispatlanmıştır. Böylece $(B, \circledast)$ Banach cebirinin maksimal idealler uzayının bir tek

$$h(f) = f(0)$$

homomorfizminden oluştuğu gösterilmiştir, ve dolayısıyla uygun Gelfand dönüşümünün trivial olduğu sonucu elde edilmiştir. Elde edilen bazı sonuçların ispatında Titchmarsh'ın konvolusyon hakkındaki teoremi yerine ilk defa olarak quasinilpotent operatorlar kavramı kullanılmıştır.

Çalışmada $C^{(n)}[0,1]$ uzayında Volterra integralleme operatörünün, yani

$$f(x) \to \int_0^x f(t)\,dt$$

operatörünün devri vektörleri ve komutantı da resmedilmiştir.

2. BANACH UZAYINDA KOMPAKT OPERATÖRLER

Bu bölümde sınırlı lineer operatörler,kompakt operatörler ve özellikler verilmiştir. (Kreyszig,1978;Rudin ,1991 ;Kolmogorov and Fomin,1975;Halmos,1982)

2.1. Lineer sınırlı operatörler

T operatörünün tanım kümesini $D(T)$ değer kümesi de $R(T)$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.1: X ve Y $\mathbb{C}$ kompleks cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Her $x, y \in D(T)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

koşulunu sağlayan $T : X \to Y$ operatörüne lineer operatör denir.

Tanım 2.1.2: X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq c\|x\|$$

koşulunu sağlayan bir $c > 0$ reel sayısı bulunabilirse T operatörüne sınırlı operatör denir. X Banach uzayında sınırlı lineer operatörlerin kümesini $L(X)$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.3: X kompleks normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer sınırlı operatör olsun. λ kompleks bir sayı ve I, X üzerinde özdeşlik operatörü olmak üzere $T_\lambda = T - \lambda I$ operatörüne bakalım. T_λ nın tersi varsa bunu $R_\lambda(T)$ ile gösterelim. Buna T nin resolvent operatörü denir.

Tanım 2.1.4: X kompleks normlu uzay ve $T : X \to X$ lineer operatör olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan λ değerine regüler değer denir.

(i) $R_\lambda(T)$ mevcut ,

(ii) $R_\lambda(T)$ sınırlı,

(iii) X de yoğun bir küme üzerinde $R_\lambda(T)$ tanımlıdır.

Tanım 2.1.5: T nin regüler değerleri olan λ ların oluşturduğu $\rho(T)$ kümesine T nin resolvent kümesi adı verilir. $\rho(T)$ nin C kompleks düzlemde tümleyeni olan $\sigma(T) = C - \rho(T)$ kümesine T nin spektrum'u ve bir $\lambda \in \sigma(T)$ sayısına da T nin spektral değeri denir.

Tanım 2.1.6: $R_\lambda(T)$ mevcut olmayacak şekildeki kümeye nokta spektrumu denir. $R_\lambda(T)$ mevcut olup (iii) sağlayan (ii) sağlamayan kümeye sürekli spektrum denir. $R_\lambda(T)$ mevcut olup (sınırlı yada sınırsız) (iii) sağlamayan kümeye rezidü spektrum'u denir.

Tanım 2.1.7 (Quasi-nilpotent Operatör): X normlu bir lineer uzay ve $T : X \to X$ lineer sınırlı bir operatör olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

ise T operatörüne quasi-nilpotent operatör denir.

Teorem 2.1.8: T quasi-nilpotent operatör olsun. O zaman $\lambda \neq 0$ bir skaler olmak üzere $T - \lambda I$ operatörünün tersi vardır.

Gerçekten $\sigma(T) = \{0\}$ ve buradan da

$$\sigma(T - \lambda I) = \{\lambda\} \neq \{0\}$$

olduğu için $T - \lambda I$ operatörünün tersi vardır.

2.2. Kompakt Operatörler

Tanım 2.2.1: X bir metrik uzay olsun. Eğer bir $M \subset X$ kümesinin her dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa M kümesine kompakt küme denir.

Tanım 2.2.2: Eğer $\overline{M}$ kompakt ise $M \subset X$ kümesine nisbi kompakt küme denir.

Tanım 2.2.3: X ve Y normlu lineer uzaylar olsun. $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her sınırlı $M \subset X$ kümesi için $T(M)$ nisbi kompakt ise T operatörüne kompakt lineer operatör denir.

Teorem 2.2.4: X ve Y normlu uzaylar olsun. O takdirde aşağıdakiler doğrudur.

(i) $T : X \to Y$ kompakt lineer operatörü sınırlıdır.

(ii) $\dim X = \infty$ ise $I : X \to X$ özdeşlik operatörü kompakt değildir.

Tanım 2.2.5: X normlu bir uzay olsun. X deki her (x_n) Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsıyor ise X uzayına Banach uzay denir.

Teorem 2.2.6: X ve Y Banach uzaylar olsun. $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. T kompakttır $\Leftrightarrow$ X deki her sınırlı (x_n) dizisi için $T(x_n)$ Y de yakınsak bir alt diziye sahiptir.

Teorem 2.2.6: X ve Y Banach uzaylar olsun. $T : X \to Y$ lineer operatör olsun.

(i) T sınırlı ve $\dim T(X) < \infty$ ise T kompakttır.

(ii) $\dim X < \infty$ ise T kompakttır.

Teorem 2.2.7 (Fredholm Alternatifi): X bir Banach uzay olsun. $T : X \to X$ kompakt ve λ sıfırdan farklı kompleks sayı olsun. Eğer

$$\ker(T - \lambda I) = \{0\}$$

ise $T - \lambda I$ tersi olan operatördür.

3. BANACH CEBİRLERİ TEORİSİNİN TEMEL FİKİRLERİ VE ÖNERİLERİ

Bu bölümde Banach Cebirleri teorisinin temel kavramları verilmiştir. (Rickart,1960; Terzioğlu,1998 ; Rudin,1991)

3.1. Temel Kavramlar.

Tanım 3.1.1: Kompleks (reel) vektör uzayı A üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir çarpım işlemi varsa bu uzaya kompleks(reel) cebir denir:

$$\begin{aligned} x(yz) &= (xy)z \\ (x+y)z &= xz+yz \\ x(y+z) &= xy+xz \\ \alpha(xy) &= (\alpha x)y = x(\alpha y) \end{aligned}$$

Burada x, y ve z noktaları A uzayındadır ve α da herhangi bir kompleks(reel) sayıdır. Her $x, y \in A$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa A cebirine komutatif cebir denir.

$$xe = ex = x$$

şartını sağlayan e elemanına birim eleman denir.

Tanım 3.1.2: Bir karmaşık A cebri üzerinde tanımlanan bir norm

$$\begin{aligned} \|xy\| &\leq \|x\|\|y\| \\ \|e\| &= 1 \end{aligned}$$

şartını sağlıyorsa ve $(A, \|.\|)$ bir Banach uzayı ise, $(A, \|.\|)$ çiftine Banach cebiri denir.

Tanım 3.1.3. A, birime sahip bir cebir ve e birim eleman olsun.

$$x.x^{-1} = x^{-1}x = e$$

eşitliğini sağlayan bir $x^{-1} \in A$ varsa buna x elemanın tersi denir. x elemanın tersi varsa xe regüler eleman denir. Tersi olmayan elemanlara singüler eleman denir. Regüler elemanların kümesi $G(A)$ çarpım altında bir guruptur.

Teorem 3.1.4: A, birime sahip bir Banach cebiri olsun. Eğer $x \in A$ için

$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

ise $\sum x^n$ serisi yakınsaktır ve $e - x$ regülerdir ve

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

dir.

Ispat: Bir α reel sayısı seçelim, öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} < \alpha < 1$$

olsun. O zaman bir $v \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $n > v$ için

$$\|x^n\| < \alpha^n$$

dir. Buradan $\sum x^n$ serisi mutlak yakınsaktır. $(A, \|.\|)$ tam olduğundan $\sum x^n$ serisi yakınsaktır.

$$s_n \equiv e + \sum_{k=1}^{n} x^k$$

ve

$$s \equiv e + \sum_{k=1}^{\infty} x^k$$

yazalım. Basit bir hesaplama

$$(e - x)s_n = s_n(e - x) = e - x^{n+1}$$

olduğunu gösterir. $s_n \to s$, $n \to \infty$ için $\|x^n\| \to 0$ ve çarpımın ek sürekliliğinden (joint continuity of multiplication)

$$(e - x)s = s(e - x) = e$$

ve

$$(e - x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

Sonuç 3.1.5: A, birime sahip Banach cebiri olsun.

$$\|e - x\| < 1$$

eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ regülerdir.

3.2. Spektrum:

Tanım 3.2.1: A, birime sahip bir Banach cebiri olsun. $a \in A$ için

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \notin G(A)\}$$

olarak tanımlanan kompleks sayılar kümesine a noktasının spektrumu denir.

Tanım 3.2.2:

$$r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

sayısına da a noktasının spektral yarıçapı denir.

Teorem 3.2.3: A bir Banach cebiri olsun. Her $a \in A$ için $\sigma(a)$ boş olmayan kompakt bir kümedir.

Teorem 3.2.4 (Gelfand- Mazur): Sıfırdan farklı her elemanının tersi olan bir Banach cebiri ile $\mathbb{C}$ izometrik olarak eşyapılıdır.

3.3. Idealler ve maksimal idealler

Tanım 3.3.1: X komutatif olmayan bir banach cebiri olsun. $I \subset X$ alt uzay olsun. Eğer her $y \in I$ ve her $x \in X$ için

$$yx \in I$$

ise I ye X in sağ ideali denir. Aynı şekilde her $y \in I$ ve her $x \in X$ için

$$xy \in I$$

ise I ye X in sol ideali denir. Eğer I X in hem sağ hemde sol ideali ise I ye iki taraflı ideal denir. $I = \{0\}$ veya $I = X$ olduğunda I ye trivial ideal denir.

Tanım 3.3.2: Hiçbir trivial olmayan idealde yerleşmeyen ideale maksimal ideal denir.

Teorem 3.3.3: X komutatif Banach cebiri olsun. $I \subset X$, X de trivial olmayan bir ideal olsun. $I = \{x \in X : x \text{ in tersi yok}\}$ dır.

Ispat: $I \subset X$, X de trivial olmayan bir ideal olsun. Tersini farzedelim. $x_0 \in I$ ve x_0^{-1} elemanı x_0 elemanının tersi olsun. O zaman $x_0^{-1}x_0 \in I$ dır ve $e \in I$ olur. Buradan her $x \in X$ için $xe \in I$ ve $x \in I$ dır. Öyleyse $X \subset I \subset X \Rightarrow X = I$. Bu bir çelişkidir. Ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.4: X bir Banach cebiri olsun. I X de kapalı bir ideal olsun. O zaman X/I de birime sahip bir banach cebiridir.

Teorem 3.3.5: Her trivial olmayan I ideali bir maksimal idealde yerleşir.

Ispat: $J = \{E \subset X : I \subset E \text{ ve } E \text{ trivial olmayan idealdir.}\}$ kümesi kapsama işlemine göre kısmi sıralı kümedir. J nin sıralanmış $\{I_\alpha\}$ kümesi için $\bigcup_\alpha I_\alpha$ trivial olmayan bir idealdir. $\bigcup_\alpha I_\alpha$; $\{I_\alpha\}$ kümesinin üst sınırıdır. Zorn lemmasına göre $I \subset M$ olacak şekilde bir M maksimal elemanı vardır.

Sonuç 3.3.6: Eğer X cisim değilse maksimal ideale sahiptir.

Teorem 3.3.7: I idealinin başka bir I' idealinde yerleşebilmesi için gerek ve yeter koşul X/I bölüm cebirinin trivial olmayan bir ideale sahip olmasıdır.

Teorem 3.3.8: X Banach cebirinde trivial olmayan bir idealin kapanışı da trivial olmayan bir idealdir.

Sonuç 3.3.9: Maksimal ideal kapalıdır.

3.4. Gelfand Dönüşümü ve Özellikleri

Tanım 3.4.1: X Banach cebiri üzerinde tanımlı ,sıfırdan farklı ve

$$f(xy) = f(x)\, f(y)$$

özdeşliğini sağlayan lineer fonksiyonellerin kümesini $m(X)$ ile gösterelim. Her $a \in X$ için

$$\hat{a}(f) = f(a) \qquad f \in m(X)$$

olarak tanımlanan

$$\hat{a} : m(X) \to \mathbb{C}$$

fonksiyonuna a elemanının Gelfand dönüşümü denir. Gelfand dönüşümlerinin oluşturduğu kümeyi $\hat{X}$ ile gösterelim. Her $\hat{a}$ fonksiyonunu sürekli yapan $m(X)$ uzayındaki en zayıf topolojiye Gelfand topolojisi adı verilir.

Teorem 3.4.2: $m(X)$ Gelfand topolojisi altında kompakttır.

Tanım 3.4.3: X komutatif Banach cebiri olsun. Eğer Gelfand dönüşümü izometrik ise X e düzgün Banach cebiri denir.

Teorem 3.4.4: Her komutatif X Banach cebiri için Gelfand dönüşümü cebirsel homomorfizmdir. Her $a \in X$ için

$$\hat{a}(m(X)) = \sigma(a)$$

dır.

Teorem 3.4.4: Gelfand dönüşümü izometrik ( ) her $f \in X$ için $\|f^2\| = \|f\|^2$.

Tanım 3.4.5: Bir karmaşık A cebiri üzerinde tanımlanan $x \to x^*$ ile gösterilen ve aşağıdaki eşitlikleri sağlayan işleme eşlenik alma işlemi denir.

(i) $(x^*)^* = x$

(ii) $(x+y)^* = x^* + y^*$

(iii) $(xy)^* = y^* x^*$

(iv) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$; $\alpha \in \mathbb{C}$

Tanım 3.4.6: Kendi eşleniğine eşit öğeler kendine eşlenik eleman ,

$$xx^* = x^*x$$

eşitliğini sağlayanlara da normal eleman denir.

Tanım 3.4.7: Üzerinde bir eşlenik alma işlemi tanımlanmış ve

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

özdeşliği sağlanan bir Banach cebirine B^*- cebiri denir

Teorem 3.4.8 (Gelfand-Naimark): A değişmeli bir B^*- cebiri olsun. Her noktayı Gelfand dönüşümüne gönderen

$$\Gamma : A \to C(m(A))$$

dönüşümü izometrik bir cebirsel eşyapı dönüşümüdür. Bu halde $\hat{A} \cong C(m(A))$ ve her $a \in A$ için

$$\left(\widehat{a^*}(m)\right) = \overline{\left(\hat{a}(m)\right)} \; ; m \in m(A)$$

sağlanır.

4. ANALITIK FONKSIYONLARIN DUHAMEL ÇARPIMI

Bu bölümde analitik fonksiyonların temel özellikleri verilmiş ve duhamel çarpımı tanımlanıp özellikleri incelenmiştir. (Başkan,1996; Rudin,1987)

4.1. Analitik Fonksiyonlar ve Özellikleri

Tanım 4.1.1: Bağlantılı açık kümeye bölge denir.

Tanım 4.1.2: Bir $S \subset \mathbb{C}$ açık kümesi verilsin. Eğer bir $z_0 \in S$ noktası için her $z \in S$ noktasını $z_0 \in S$ ye birleştiren doğru parçası S de bulunuyor ise S ye z_0 noktasına nazaran yıldız bölge denir.

Tanım 4.1.3: Bir f karmaşık fonksiyonu z_0 noktasının belli bir

$$D(z_0;\delta) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}$$

komşuluğunda bütün noktalarda diferansiyellenebilir ise f z_0 da analitiktir. Eğer f kompleks fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse, f ye S üzerinde analitiktir denir. Bir f kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise f ye tam fonksiyon denir.

Teorem 4.1.4: $A \subset \mathbb{C}$ açık bir küme ve f, g A üzerinde analitik olsunlar. Bu durumda

(i) $f + g$ fonksiyonu A kümesinde analitiktir.

(ii) fg fonksiyonu A kümesinde analitiktir.

(iii) $g \neq 0$ olmak üzere f/g fonksiyonu A kümesinde analitiktir.

Teorem 4.1.5: Eğer bir f fonksiyonu bir noktada analitik ise, onun her mertebeden türevleri de o noktada analitiktir.

Tanım 4.1.6: $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna

$\mathbb{C}$ düzleminde bir eğridir denir. γ diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ ya düzgün eğri denir. Sonlu sayıda γ_j $j = 1, 2, \ldots, n$ düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün $j = 1, 2, \ldots, n-1$ değerleri için γ_j nin bitim noktası γ_{j+1} in başlangıç noktası ile çakışıyorsa bu γ_j eğrilerinin birleşimi olan γ eğrisine parçalı düzgün eğri denir.

Teorem 4.1.7 (Cauchy-Goursat): B bir bölge ve ∂B bunun sınırı olsun. Eğer f B içinde ve ∂B üzerinde analitik ise

$$\int_{\partial B} f(z)\,dz = 0$$

dır.

Teorem 4.1.8: $A \subset \mathbb{C}$ ve g_n, A üzerinde tanımlı fonksiyonların dizisi olsun. Gerçel sayıların aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir M_n dizisi varsa, $\sum\limits^{\infty} g_k$, A üzerinde mutlak ve düzgün yakınsar:

(i) $M_n \geq 0$; $\sum\limits^{\infty} M_n$ yakınsak;

(ii) Her $z \in A$ için $|g_k(z)| \leq M_k$ dır.

Teorem 4.1.9 (Taylor): f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitikse bu noktanın komşuluğundaki z ler için geçerli olmak üzere

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

açılımı vardır. Bu kuvvet serisi bir $D(z_0; r)$ diski üzerinde mutlak yakınsar ve bu diskin kompakt alt kümeleri üzerinde yakınsama düzgündür.

Tanım 4.1.10 (Serilerin Cauchy Çarpımı): $f(z)$; $g(z)$ analitik fonksiyonlar olsunlar. O zaman $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Taylor açılımı vardır.

$$f(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} z^n$$

serisine f ve g serilerinin Cauchy çarpımı denir (Churchill, 1989).

4.2. Analitik Fonksiyonların Frechet Uzayı

Tanım 4.2.1: X K cismi ($K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$) üzerinde lineer bir uzay olsun. $p : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

(i) $p(x) \geq 0$

(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

koşullarını sağlarsa p dönüşümüne X üzerinde yarı norm denir ve bu yarı norma göre X uzayına yarı normlu uzay denir.

Tanım 4.2.2: Yarı normlu X uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi X de bir noktaya yakınsıyor ise, yani X tam uzay ise, X yarı normlu uzayına Frechet uzayı denir.

4.3. Duhamel Çarpımı ve Özellikleri

Tanım 4.3.1 (Duhamel Çarpımı): D birim yuvar ve f ve g D de analitik fonksiyonlar olsunlar. O zaman

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z - t)g(t)dt = \int_0^z f'(z - t)g(t)dt + f(0)g(z)$$

çarpımına Duhamel çarpımı denir.(Wigley,1974)

Teorem 4.3.2: D birim yuvar ve f, g ve h D de analitik fonksiyonlar olsunlar.O zaman

i) $f \circledast g = g \circledast f$

ii) $(f \circledast g) \circledast h = f \circledast (g \circledast h)$

iii) $f(z) \equiv 1$ $\circledast$ - çarpımına göre birim elemandır.

iv) $f \circledast (g + h) = (f \circledast g) + (f \circledast h)$.(Mikusinski,1959)

Ispat: i)

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z - t)g(t)dt$$

eşitliğinde $u = z - t$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
(f * g)(z) &= -\frac{d}{dz}\int_z^0 f(u)g(z-u)\,du \\
&= \frac{d}{dz}\int_0^z f(u)g(z-u)\,du = (g * f)(z)
\end{aligned}
$$

bulunur.

ii) $f * g = p$ ve $g * h = q$ denirse

$$p * h = f * q$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)\,dt = p(t)\,;\ \frac{d}{dz}\int_0^z g(z-t)h(t)\,dt = q(t)$$

dir.

$$\int_0^z p(z-t)h(t)\,dt = \int_0^z \left(\int_0^z f(z-t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right)h(t)\,dt$$

$\tau = w - t$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^z p(z-t)h(t)\,dt &= \int_0^z \left(\int_0^z f(z-w)g(w-\tau)\,dw\right)h(\tau)\,d\tau \\
&= \iint_T f(z-w)g(w-\tau)h(\tau)\,dw\,d\tau
\end{aligned}
$$

bulunur.Burada T $0 \leq t \leq w \leq z$ ile belirlenmiş bir üçgendir. Integral alma sırasının değiştirirsek

$$
\begin{aligned}
\int_0^z p(z-t)h(t)\,dt &= \int_0^z f(z-w)\left(\int_0^w g(w-t)h(t)\,dt\right)dw \\
&= \int_0^z f(z-w)q(w)\,dw
\end{aligned}
$$

dir. Her iki taraftan türev alınırsa

$$\frac{d}{dz}\int_0^z p(z-t)h(t)\,dt = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)q(t)\,dt$$

yani

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

dır.

iii)

$$(f * g)(z) = (1 * g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z 1.g(t)dt = g(z)$$

iv)

$$\begin{aligned}
[f * (g+h)](z) &= \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)\,[g(t)+h(t)]\,dt \\
&= \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)dt + \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)h(t)dt \\
&= (f * g) + (f * h)\ .
\end{aligned}$$

Teorem 4.3.3:

$$(If)(z) = \int_0^z f(t)\,dt$$

integral operatörü olmak üzere her $k \geq 0$ için

$$I^k f = \frac{z^k}{k!} * f$$

dir.

Ispat:

$$k = 0 \text{ için } 1 * f = f = I^0 f$$

$$k = 1 \text{ için } z * f = \frac{d}{dz}\int_0^z (z-t)f(t)dt = \int_0^z f(t)dt = (If)(z)$$

;

$$k = 2 \text{ için } \left(I^2 f\right)(z) = [I\,(If)](z) = \int_0^z \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) dt$$

dır.Burada kısmi integrasyon yapılırsa

$$\left(I^2 f\right)(z) = \int_0^z \frac{z-t}{1!} f(t)\,dt = \frac{z^2}{2!} * f$$

bulunur.Buradan tümevarım ile her $k > 0$ için $I^k f = \frac{z^k}{k!} * f$ elde edilir.

Teorem 4.3.4: Duhamel çarpımının $[a,b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar uzayında düşünelim. Bu uzaydaki topolojiyi $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ olmak üzere

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|\, dt$$

yarı normlar sistemi olarak tanımlayalım. (f_n) bu uzayda fonksiyonlar dizisi ve $f_n \to f$ olsun. O zaman

$$f_n * g \to f * g$$

dır. Yani Duhamel çarpımı ayrık süreklidir(Dimovski,1982).

İspat: $f_n \to f$ olsun. $f_n * g \to h$ diyelim. O zaman

$$I(f_n * g) \to I(h)$$

$$I(f_n * g)(x) = \int_0^x f_n(x-t)g(t)dt \to \int_0^x f(x-t)g(t)dt = I(f * g)(x)$$

bulunur. Öyleyse

$$I(f * g) = I(h)$$

ve buradan $h = f * g$ bulunur.

5. B UZAYININ DUHAMEL ÇARPIMINA GÖRE BANACH CEBRİ OLUŞU VE MAKSİMAL İDEALLER UZAYININ RESMİ

Bu esas bölümde B kompleks Banach cebirinin maksimal idealleri incelenmiştir. D sınırlı ve orjinde yıldız bölge olsun. $C^{(n)}(\overline{D})$ ile x ve y değişkenine göre n inci mertebeden kısmi türevleri D de var ve $\overline{D}$ de sürekli olan kompleks değerli $f(z) = f(x+iy)$ fonksiyonlarının vektör uzayını gösterelim. $B \subset C^{(n)}(\overline{D})$ ile D de analitik olan fonksiyonların altuzayını gösterelim. $C^{(n)}(\overline{D})$ Banach uzayı ve B kapalı altuzay olduğundan B de bir Banach uzayıdır. B üzerindeki normu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\|f\|_n = \max\left\{\max_{z\in\overline{D}}|f(z)|;\ \max_{z\in\overline{D}}|f'(z)|;\ \dots;\ \max_{z\in\overline{D}}\left|f^{(n)}(z)\right|\right\}$$

Teorem 5.1: $f, g \in B$ ise

$$\|f \circledast g\|_n \le c(n)\,\|f\|_n\,\|g\|_n$$

olacak şekilde bir $c(n) > 0$ sayısı vardır.

İspat:

$$(f \circledast g)(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z f(z-t)g(t)\,dt = \int_0^z f'(z-t)g(t)\,dt + f(0)g(z)$$

D üzerinden maksimum alınırsa

$$|(f \circledast g)(z)| \le \max|f'|\max|g| + \max|f|\max|g|$$

bulunur. Aynı şekilde

$$(f \circledast g)^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k)}(z-t)g'(t)\,dt + \sum_{m=0}^{k-1} f^{(m)}(0)g^{(k-m)}(z) + g(0)f^{(k)}(z) \quad (5.1)$$

$$\left|(f \circledast g)^{(k)}(z)\right| \le \max\left|f^{(k)}\right|\max|g'| + \sum_{m=0}^{k-1}\max\left|f^{(m)}\right|\max\left|g^{(k-m)}\right| + \max\left|f^{(k)}\right|\max|g|$$

$$\leq \|f\|_n \|g\|_n + k\|f\|_n \|g\|_n + \|f\|_n \|g\|_n$$

$$= (k+2)\|f\|_n \|g\|_n \leq (n+2)\|f\|_n \|g\|_n$$

bulunur. Buradan

$$\|f \sim g\|_n \leq (n+2)\|f\|_n \|g\|_n$$

$c(n) = n + 2$ alırsak

$$\|f \sim g\|_n \leq c(n)\|f\|_n \|g\|_n$$

elde edilir.

Teorem 5.2: X normlu uzayı üzerinde tanımlı $K_1;\ K_2$ operatörleri quasi-nilpotent operatör (Yani $\sigma(K_1) = \sigma(K_2) = \{0\}$) ve

$$K_1 K_2 = K_2 K_1$$

olsun. O zaman $K_1 + K_2$ quasi-nilpotent operatördür.

İspat: $K_1;\ K_2$ operatörleri quasi-nilpotent olduklarından her $t > 0$ sayısı için bir $s > 0$ sayısı vardır öyleki her $n = 1; 2; \ldots$ için

$$\|K_1^n\| \leq st^n \ ; \|K_2^n\| \leq st^n$$

dır. O zaman

$$\begin{aligned}
\|(K_1 + K_2)^n\|^{\frac{1}{n}} &= \left\| \sum_{k=0}^{n} C_n^k K_1^k K_2^{n-k} \right\|^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left\|K_1^k\right\| \left\|K_2^{n-k}\right\| \right]^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k st^k st^{n-k} \right]^{\frac{1}{n}} = \left[s^2 t^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \left(s^2 t^n 2^n \right)^{\frac{1}{n}} = 2ts^{\frac{2}{n}}
\end{aligned}$$

olur. Buradan limite geçersek

$$r(K_1 + K_2) \leq 2t;$$

elde edilir.

$$r(K_1 + K_2) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K_1 + K_2)\}$$

$K_1 + K_2$ operatörünün spektral yarıçapıdır. t keyfi olduğundan son eşitsizlikten $r(K_1 + K_2) = 0$ elde edilir. Bu $K_1 + K_2$ operatörünün quasi-nilpotent olduğunu ispatlar.

Teorem 5.3: $f \in B$ $\circledast$-terse sahiptir $\Leftrightarrow f(0) \neq 0$.

İspat: $f \in B$ $\circledast -$ terse sahip olsun. O zaman bir $g \in B$ vardır öyleki $f \circledast g = 1$.

$$(f \circledast g)(z) = \int_0^z f'(z-t)g(t)dt + f(0)g(z) = 1$$

$$(f \circledast g)(0) = f(0)g(0) = 1$$

$$f(0) \neq 0$$

Tersine $f(0) \neq 0$ olsun

$$D_f\, g(z) = (f \circledast g)(z)$$

ile D_f operatörünü tanımlayalım. Açıktır ki f tersi var $\Leftrightarrow D_f$ tersi olan operatördür.

$F(z) = f(z) - f(0)$ diyelim. Açıktır ki, $F(0) = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
f(z) &= F(z) + f(0) \\
D_f &= D_F + f(0)I \\
D_F g(z) &= \int_0^z F'(z-t)g(t)dt = (F' * g)(z) = (K_{F'}g)(z) \\
D_f &= K_{F'}g + f(0)I
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $K_{F'}$ operatörünün quasi-nilpotent olduğunu gösterirsek D_f operatörünün tersinin olduğunu göstermiş oluruz. Bunun için $\sigma(D_F) = \{0\}$ olduğunu ünlü Gelfand formülü

$$r(D_F) = \lim_{k\to\infty} \left\| D_F^k \right\|^{\frac{1}{k}}$$

ile göstereceğiz. Bunun için $\left\| D_F^k \right\|^{\frac{1}{k}}$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
|(K_{F'}g)(z)| &= \left| \int_0^z F'(z-t)g(t)dt \right| \\
&\le \int_0^z |F'(z-t)|\,|g(t)|\,|dt| \\
&\le \|F\|_n \|g\|_n |z| \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left|\left(K_{F'}^2 g\right)(z)\right| &= |[K_{F'}(K_{F'}g)](z)| \\
&= \left| \int_0^z F'(z-t)(K_{F'}g)(t)dt \right| \\
&= \left| \int_0^z F'(z-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt \right| \\
&\le \int_0^z |F'(z-t)| \left| \int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau \right| |dt| \\
&\le \|F\|_n^2 \|g\|_n \frac{|z|^2}{2!}
\end{aligned}$$

Buradan tümevarım ile her $k \ge 0$ için

$$\left|\left(K_{F'}^k g\right)(z)\right| \le \|F\|_n^k \|g\|_n \frac{|z|^k}{k!} \qquad (5.2)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\left|(K_{F'}g)'(z)\right| &= \left| \left(\int_0^z F'(z-t)g(t)dt\right)' \right| \\
&= \left| \int_0^z F'(z-t)g'(t)dt + F'(z)g(0) \right| \\
&\le \int_0^z |F'(z-t)|\,|g'(t)|\,|dt| + |F'(z)|\,|g(0)| \\
&\le \|F\|_n \|g\|_n (|z| + 1) \,;
\end{aligned}$$

$$\left|\left(K_{F'}^2 g\right)'(z)\right| = \left| \left[\int_0^z F'(z-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right) dt \right]' \right|$$

$$= \left|\int_0^z F'(z-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g'(\tau)d\tau + F'(t)g(0)\right)dt\right|$$

$$\le \int_0^z |F'(z-t)|\left(\int_0^t |F'(t-\tau)||g'(\tau)||d\tau|\right)|dt| + \int_0^z |F'(z-t)||F'(t)||g(0)||dt|$$

$$\le \|F\|_n^2\|g\|_n\left(\frac{|z|^2}{2}+|z|\right)$$

$$\le \|F\|_n^2\|g\|_n\frac{(|z|+1)^2}{2!};$$

$$\left|\left(K_{F'}^3 g\right)'(z)\right| = \left|\left\{\int_0^z F'(z-t)\left[\int_0^t F'(t-\tau)\left(\int_0^\tau F'(\tau-\xi)g(\xi)d\xi\right)d\tau\right]dt\right\}'\right|$$

$$= \left|\int_0^z F'(z-t)\left[\int_0^t F'(t-\tau)\left(\int_0^\tau F'(\tau-\xi)g'(\xi)d\xi + F'(\tau)g(0)\right)d\tau\right]dt\right|$$

$$\le \int_0^z |F'(z-t)|\left[\int_0^t |F'(t-\tau)|\left(\int_0^\tau |F'(\tau-\xi)||g'(\xi)||d\xi| + |F'(\tau)||g(0)|\right)|d\tau|\right]|dt|$$

$$\le \|F\|_n^3\|g\|_n\left(\frac{|z|^3}{6}+\frac{|z|^2}{2}\right) \le \|F\|_n^3\|g\|_n\frac{(|z|+1)^3}{3!}$$

dır. Buradan tümevarım ile her $z \in \overline{D}$ ve $k \ge 0$ için

$$\left|\left(K_{F'}^k g\right)'(z)\right| \le \|F\|_n^k\|g\|_n\frac{(|z|+1)^k}{k!} \qquad (5.3)$$

elde edilir. Diğer yandan $k \ge 2$ için

$$\left(K_{F'}^k g\right)(z) = \left[F \circledast \left(K_{F'}^{k-1}g\right)'\right](z);\ \left(K_{F'}^{k-1}g\right)(0) = 0$$

ve $\hat{F}(0) = 0$ olduğundan (5.1) formülünden her $g \in B$, $s \in \{1;2;\ldots;n\}$ ve $k \ge 2$ için

$$\left(K_{F'}^k g\right)^{(s)}(z) = \int_0^z F^{(s)}(z-t)\left(K_{F'}^{k-1}g\right)'(t)\,dt + \sum_{m=1}^{s-1}\hat{F}^{(m)}(0)\left(K_{F'}^{k-1}g\right)^{(s-m)}(z) \qquad (5.4)$$

elde edilir. I^k operatörü her $k \ge 1$ için quasi-nilpotent ve her $g \in B$ için

$$I^k g(z) = \frac{z^k}{k!} \circledast g(z)$$

olduğundan Teorem 5.2 den

$$P_{n-1}(z) = \hat{F}(1)\,z + \hat{F}(2)\,z^2 + \dots + \hat{F}(n-1)\,z^{n-1}$$

olmak üzere

$$D_{P_{n-1}} g(z) = P_{n-1}(z) * g(z)$$

operatörü quasi-nilpotenttir.Çünkü

$$D_{P_{n-1}} = \hat{F}(1)\, I + 2!\,\hat{F}(2)\, I^2 + \dots + (n-1)!\,\hat{F}(n-1)\, I^{n-1}$$

dır.Tekrar Teorem 5.2 gözönüne alınacak olursa D_F operatörünün quasi-nilpotent olduğunu ispatlamak için genelliği bozmadan

$$\hat{F}(1) = \hat{F}(2) = \dots = \hat{F}(n-1) = 0$$

alabiliriz.O zaman (5.4) eşitsizliği

$$\left(K^k_{F'} g\right)^{(s)}(z) = \int_0^z F^{(s)}(z-t)\left(K^{k-1}_{F'} g\right)'(t)\,dt \tag{5.5}$$

olur. (5.3) ve (5.5) den

$$\left|\left(K^k_{F'} g\right)^{(s)}(z)\right| \le \|F\|^k_n \|g\|_n \frac{(|z|+1)^{k-1}}{(k-1)!}|z|;$$

veya

$$\left|\left(K^k_{F'} g\right)^{(s)}(z)\right| \le \|F\|^k_n \|g\|_n \frac{(|z|+1)^{k}}{(k-1)!} \tag{5.6}$$

elde edilir.(5.2) ve (5.6) dan

$$\left\|K^k_{F'} g\right\|_n \le \|F\|^k_n \|g\|_n \frac{2^k}{(k-1)!};$$

$$\left\|K^k_{F'}\right\|_n \le \|F\|^k_n \frac{2^k}{(k-1)!},$$

ve buradan $k \to \infty$ için

$$\left\|K^k_{F'}\right\|^{\frac{1}{k}}_n \le \|F\|_n \frac{2}{[(k-1)!]^{1/k}} \to 0;$$

elde edilir. Yani $r(K_{F'}) = 0$. Buradan $K_{F'}$ quasi-nilpotent, yani D_F quasinilpotent operatördür. Bu , ispatımızı tamamlar.

Teorem 5..3: $f \in B$ elemanının spektrumu $\sigma(f) = \{f(0)\}$ dir.

Ispat: Teorem 5.2 den kolayca görülür.

Teorem 5..4: $(B; \sim)$cebirinin maksimal idealler uzayı bir tek $h(f) = f(0)$ homomorfizminden oluşur. Gelfand dönüşümü trivialdir.

Ispat:Orjinde sıfır olan fonksiyonların ideal oldukları açıktır.Teorem 3.3.3 ve Teorem 5.2 den herhangi bir trivial olmayan ideal, orjinde sıfırdan farklı olamayacağı kolayca elde olunur. Buradan orjinde sıfır olan fonksiyonlar maksimal ideal oldukları ve tek oldukları görülür.

6. BAZI REEL DEĞİŞKENLI FONKSIYON UZAYLARINDA VOLTERRA INTEGRAL OPERÖRÜNÜN INCELENMESI

Bu bölümde bazı reel Banach cebirlerinin yani reel eksenin $[0,1]$ aralığı üzerinde tanımlanan fonksiyonların Banach cebirlerinin maksimal idealleri ve Volterra integralleme operatörü incelenmiştir. Önce bazı yardımcı teoremleri verelim. (Mikusinski,1959;Carothers,2000;Yosida,1980,Bozhinov,1988)

6.1. Konvolusyon Hakkında Titchmarsh Teoremi

Teorem 6.1.1 (Phragmen): Eğer g fonksiyonu $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise $0 \leq t < T$ koşulunu sağlayan her t için

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

dır.

Teorem 6.1.2: Eğer f fonksiyonu $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$\left| \int_0^T e^{nt} f(t)\, dt \right| \leq N$$

eşitsizliğini sağlayan bir N sayısı varsa $[0,T]$ aralığında $f(t) = 0$ dır.

Sonuç 6.1.3 (Lerch teoremi): Eğer f fonksiyonu $[0,T]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$\int_0^T t^n f(t)\, dt = 0$$

ise $[0,T]$ aralığında $f(t) = 0$ dır.

Teorem 6.1.4 (Titchmarsh): $f(x), g(x)$ $0 \leq x < +\infty$ aralığında reel veya kompleks değerli fonksiyonlar olsun.

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt$$

konvolusyonunu tanımlayalım. Eğer her $x \in [0, +\infty)$ için $(f * g)(x) = 0$ ise $f(x)$ veya $g(x)$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ aralığında sıfıra eşittir(Mikusinski,1959; Yosida,1980).

Ispat: Önce $f = g$ özel durumunda ispatlayalım. Farzedelim ki $[0, 2T]$ aralığında sürekli olsun.O zaman $0 \leq t < 2T$ aralığında

$$\int_0^t f(t - \tau) f(\tau) d\tau = 0$$

dır.Teorem 6.1.2 den

$$I_n = \int_0^{2T} e^{n(2T - \tau)} dt \int_0^t f(t - \tau) f(\tau) d\tau = 0$$

dır. Bu integrali iki katlı olarak yazabiliriz. O zaman A $0 \leq \tau \leq t \leq 2T$ eşitsizliği ile tanımlanan bir üçgen olmak üzere

$$I_n = \iint_A e^{n(2T - \tau)} f(t - \tau) f(\tau) dt d\tau$$

olur. $t = 2T - u - v$, $\tau = T - v$ değişken dönüşümü yapılırsa I_n integrali

$$I_n = \iint_B e^{n(u+v)} f(T - u) f(T - v) du dv$$

olur ki burada B; $0 \leq u + v$; $u \leq T$; $v \leq T$ eşitsizlikleri ile tanımlanmış bir üçgendir. C; $-T \leq u$; $-T \leq v$; $u + v \leq 0$ eşitsizliğiyle tanımlanan bir üçgen olmak üzere

$$\iint_{B+C} = \iint_B + \iint_C$$

yazabiliriz. Burada $B + C$; $-T \leq u \leq T$; $-T \leq v \leq T$ eşitsizlikleriyle tanımlanmış bir karedir.

$$\iint_B = I_n = 0$$

olduğundan

$$\iint_{B+C} e^{nu} f(T - u) e^{nv} f(T - v) du dv$$

$$= \iint_C e^{n(u+v)} f(T - u) f(T - v) du dv$$

dir. Eğer $n > 0$ ise sağ tarafdaki integralde $e^{n(u+v)} < 1$ olur. $M = \max|f|$ olmak üzere

$$\left|\int_{-T}^{T} e^{nu} f(t-u)\,du \int_{-T}^{T} e^{nv} f(t-v)\,dv\right| \le \iint_C M^2\,du\,dv = 2T^2M^2$$

dir. Denk olarak

$$\left|\int_{-T}^{T} e^{nu} f(t-u)\,du\right| \le \sqrt{2}\,TM$$

dir. Buradan

$$\left|\int_{0}^{T} e^{nu} f(t-u)\,du\right| = \left|\int_{-T}^{T} e^{nu} f(t-u)\,du - \int_{-T}^{0} e^{nu} f(t-u)\,du\right| \le \sqrt{2}\,TM + \left|\int_{-T}^{0} e^{nu} f(t-u)\,du\right|$$

dır. Fakat son aralıkta $e^{nu} < 1$ dir. Böylece

$$\left|\int_{0}^{T} e^{nu} f(t-u)\,du\right| \le \sqrt{2}\,TM + \int_{-T}^{0} M\,du = \left(\sqrt{2}+1\right)TM$$

dir. Bu eşitsizlik her $n > 0$ için geçerli olduğundan Teorem 6.1.2 den $0 \le u \le T$ için $f(t-u) = 0$ bulunur. Yani $0 \le t \le T$ için $f(t) = 0$ bulunur.

Şimdi de genel durum için ispat edelim. $0 \le t \le \infty$ için

$$\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du = 0$$

olsun. Böylece $0 \le t < \infty$ için

$$\int_0^T (t-\tau)\,f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau + \int_0^t f(t-\tau)\,\tau g(\tau)\,d\tau = t\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau = 0$$

dır. $f_1(t) = tf(t)$ ve $g_1(t) = tg(t)$ $(0 \le t < \infty)$ yazarsak yukarıdaki eşitlik

$$f_1 g + f g_1 = 0$$

olur. Buradan

$$fg_1\,(f_1 g + f g_1) = 0$$

ve konvolusyonun komutatiflik, ve birleşme ve dağılma özelliği kullanılarak

$$fgf_1g_1 + (fg_1)^2 = 0$$

bulunur. Hipotezden $f \star g = 0$ kullanılarak $(f \star g_1)^2 = 0$ elde edilir. Böylece

$$\int_0^t f(t-\tau)\tau g(\tau)\,d\tau = 0$$

ve aynı işleme devam edilirse $0 \le t < 1$ için

$$\int_0^t f(t-\tau)\tau^2 g(\tau)\,d\tau = 0$$

ve her n için

$$\int_0^t f(t-\tau)\tau^n g(\tau)\,d\tau = 0$$

bulunur. Teorem 6.1.3 den $0 \le \tau \le t < 1$ için

$$f(t-\tau)g(\tau) = 0$$

olur. Keyfi bir $\tau_0 \ge 0$ için $g(\tau_0) \ne 0$ ise $f(t-\tau)g(\tau) = 0$ dan $0 \le t < 1$ için $f = 0$ elde edilir. Eğer böyle bir τ_0 sayısı yoksa $0 \le t < 1$ için $g = 0$ elde edilir. İspat tamamlanır.

6.2. $C^{(n)}[0,1]$ Uzayının Duhamel Çarpımına Göre Banach Cebri Oluşu ve Maksimal İdeallerinin Resmi

Teorem 6.2.1: Eğer $f, g \in C^{(n)}[0,1]$ ise c bir sabit olmak üzere

$$\|f \star g\| \le c\|f\|\|g\|$$

dir.

İspat: Teorem 5.1 dekine benzer olarak kolayca yapılır.

Aşağıdaki üç teorem de Teorem 5.2 e benzer şekilde ispatlandığı için bunların ispatlarına girmeyeceğiz.

Teorem 6.2.2: $f \in C^{(n)}[0,1]$ $\star$ $-$ terse sahiptir $\Leftrightarrow$ $f(0) \ne 0$.

Teorem 6.2.3: $f \in C^{(n)}[0,1]$ elemanının spektrumu $\sigma(f) = \{f(0)\}$ dir.

Teorem 6.2.4: $\left(C^{(n)}[0,1], \circledast\right)$ cebirinin maksimal idealler uzayı bir tek $h(f) = f(0)$ homomorfizminden oluşur. Gelfand dönüşümü trivialdir.

6.3. $W_p^{(n)}[0,1]$ Uzayının Duhamel Çarpımına Göre Banach Cebri Oluşu ve Maksimal Ideallerinin Resmi

Önce $W_p^{(n)}[0,1]$ Sobolev uzayını tanımlayalım. $1 \le p < \infty$ bir reel sayı olmak üzere

$$\int_a^b |f|^p < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayı $L^p[a,b]$ ile gösterilir. $L^p[a,b]$ üzerindeki norm

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$$

ile tanımlanır. $W_p^{(n)}[0,1]$ uzayı $W_p^{(n)}[0,1] = \{f : f^{(n)} \in L^p[0,1]\}$ ile tanımlanır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{W_p^{(n)}} = \max\left[\|f\|_{C^{(n-1)}}, \left\|f^{(n)}\right\|_{L^p}\right]$$

şeklinde tanımlanır (Yosida,1980). Burada

$$\|f\|_{C^{(n-1)}} = \max\{\max_{x\in[0,1]}|f(x)|, \max_{z\in[0,1]}|f'(x)|, \ldots, \max_{z\in[0,1]}\left|f^{(n-1)}(x)\right|\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 6.3.1: $f, g \in W_p^{(n)}[0,1]$ ise c bir sabit olmak üzere

$$\|f \circledast g\|_{W_p^{(n)}} \le c\|f\|_{W_p^{(n)}}\|g\|_{W_p^{(n)}}$$

dir.

Ispat: Teorem 5.1 e benzer şekilde

$$\|f \circledast g\|_{C^{(n-1)}} \le (n+1)\|f\|_{C^{(n-1)}}\|g\|_{C^{(n-1)}}$$

dir. Şimdi de L_p deki norma bakalım:

$$
\begin{aligned}
\left\|(f*g)^{(n)}(x)\right\|_{L^p}^p &= \int_0^1 \left|(f*g)^{(n)}(x)\right|^p dx \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^x f^{(n)}(x-t)g'(t)dt + \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(0)g^{(n-m)}(x) + g(0)f^{(n)}(x) \right|^p dx \\
&\le 2^p \int_0^1 \left| \int_0^x f^{(n)}(x-t)g'(t)dt \right|^p dx \\
&\quad + 4^p \int_0^1 \left| \sum_{m=0}^{n-1} f^{(m)}(0)g^{(n-m)}(x) \right|^p dx \\
&\quad + 4^p \int_0^1 \left| g(0)f^{(n)}(x) \right|^p dx
\end{aligned}
$$

[0,1] aralığı üzerinden maksimum alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|(f*g)^{(n)}(x)\right\|_{L^p}^p &\le 4^p \left(\sum_{k=0}\sum_{m=0} \max\left|f^{(m)}\right| \max\left|g^{(k-m)}\right| \right)^p \\
\left\|(f*g)^{(n)}(x)\right\|_{L^p} &\le 4 \sum_{k=0}\sum_{m=0} \|f\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}} \\
&= \frac{4n.(n+1)}{2} \|f\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}} \\
&= 2n.(n+1) \|f\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}}
\end{aligned}
$$

O zaman

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_{W_p^{(n)}} &\le 2.n.(n+1) \|f\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}} \\
&\le 2.n.(n+1) \max\left\{ \|f\|_{C^{(n-1)}}; \left\|f^{(n)}\right\|_{L^p} \right\} \max\left\{ \|g\|_{C^{(n-1)}}; \left\|g^{(n)}\right\|_{L^p} \right\} \\
&= 2n.(n+1) \|f\|_{W_p^{(n)}} \|g\|_{W_p^{(n)}}
\end{aligned}
$$

$c = 2n.(n+1)$ alırsak

$$
\|f*g\|_{W_p^{(n)}} \le c\|f\|_{W_p^{(n)}} \|g\|_{W_p^{(n)}}
$$

bulunur.

Teorem 6.3.2: $f \in W_p^{(n)}[0;1]$ $*$ $-$terse sahiptir $\iff$ $f(0) \neq 0$.

İspat: Teorem 5.2 e benzer şekilde $f \in W_p^{(n)}[0;1]$ $*$ $-$terse sahip olsun. O zaman bir $g \in W_p^{(n)}[0;1]$ vardır öyleki $f * g = 1$. Buradan

$$(f * g)(z) = \int_0^x f'(x - t)g(t)dt + f(0)g(x) = 1$$

$$(f * g)(0) = f(0)g(0) = 1$$

$$f(0) \neq 0$$

olur. Tersine $f(0) \neq 0$ olsun

$$D_f\, g(x) = (f * g)(x)$$

ile D_f operatörünü tanımlayalım. Açıktır ki f $*$ $-$tersi var $\iff$ D_f tersi olan operatördür.

$$\begin{aligned}
F(x) &= f(x) - f(0) \quad \text{ile gösterelim. Buradan} \quad F(0) = 0 \\
f(x) &= F(x) + f(0) \\
D_f &= D_F + f(0)\, I \\
D_F\, g(x) &= \int_0^x F'(x - t)g(t)dt = (F' * g)(x) = (K_{F'} g)(x) \\
D_f &= K_{F'} g + f(0)\, I
\end{aligned}$$

$K_{F'}$ operatörünün quasi-nilpotent olduğunu gösterirsek D_f operatörünün tersinin olduğunu göstermiş oluruz. Bunun için $\sigma(D_F) = \{0\}$ olduğunu Gelfand formülü

$$r(D_F) = \lim_{k \to \infty} \left\| D_F^k \right\|^{\frac{1}{k}}$$

ile göstereceğiz. O zaman $\left\|D_F^k\right\|^{\frac{1}{k}}$'yi hesaplayalım. Her $x \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\left|(K_{F'}g)(x)\right| &= \left|\int_0^x F'(x-t)g(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^x |F'(x-t)|\,|g(t)|\,dt \\
&\leq \|F\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}} |x| \; ;
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\left|\left(K_{F'}^2 g\right)(x)\right| &= \left|\left[K_{F'}(K_{F'}g)\right](x)\right| \\
&= \left|\int_0^x F'(x-t)\,(K_{F'}g)(t)dt\right| \\
&= \left|\int_0^x F'(x-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right)dt\right| \\
&\leq \int_0^x |F'(x-t)|\left(\left|\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right|\right)dt \\
&\leq \|F\|_{C^{(n-1)}}^2 \|g\|_{C^{(n-1)}} \frac{|x|^2}{2!}
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan tümevarım yoluyla her $x \in [0,1]$ ve $k \geq 0$ için

$$
\left|\left(K_{F'}^k g\right)(x)\right| \leq \|F\|_{C^{(n-1)}}^k \|g\|_{C^{(n-1)}} \frac{|x|^k}{k!} \tag{6.1}
$$

elde edilir. Aynı şekilde her $x \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\left|(K_{F'}g)'(x)\right| &= \left|\left(\int_0^x F'(x-t)g(t)dt\right)'\right| \\
&= \left|\int_0^x F'(x-t)g'(t)dt + F'(x)\,g(0)\right| \\
&\leq \int_0^x |F'(x-t)|\,|g'(t)|\,dt + |F'(x)|\,|g(0)| \\
&\leq \|F\|_{C^{(n-1)}} \|g\|_{C^{(n-1)}} (|x|+1) \; ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left(K_{F'}^2 g\right)'(x)\right| &= \left|\left(\int_0^x F'(x-t)\left|\int_0^t F'(t-\tau)g(\tau)d\tau\right| dt\right)'\right| \\
&= \left|\int_0^x F'(x-t)\left(\int_0^t F'(t-\tau)g'(\tau)d\tau + F'(t)g(0)\right)dt\right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^x |F'(x-t)| \left(\int_0^t |F'(t-\tau)|\,|g'(\tau)|\,d\tau \right) dt \\
&\quad + \int_0^x |F'(x-t)|\,|F'(t)|\,|g(0)|\,dt \\
&\le \|F\|^2_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \left(\frac{|x|^2}{2} + |x| \right) \\
&\le \|F\|^2_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \frac{(|x|+1)^2}{2!} ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| \left(K^3_{F'} g \right)'(x) \right| &= \left| \left\{ \int_0^x F'(x-t) \left[\int_0^t F'(t-\tau) \left(\int_0^\tau F'(\tau-\eta) g(\eta)\,d\eta \right) d\tau \right] dt \right\}' \right| \\
&= \left| \int_0^x F'(x-t) \left[\int_0^t F'(t-\tau) \left(\int_0^\tau F'(\tau-\eta) g'(\eta)\,d\eta + F'(\tau) g(0) \right) d\tau \right] dt \right| \\
&\le \int_0^x |F'(x-t)| \left[\int_0^t |F'(t-\tau)| \left(\int_0^\tau |F'(\tau-\eta)|\,|g'(\eta)|\,d\eta + |F'(\tau)|\,|g(0)| \right) d\tau \right] dt \\
&\le \|F\|^3_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \left(\frac{|x|^3}{6} + \frac{|x|^2}{2} \right) \\
&\le \|F\|^3_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \frac{(|x|+1)^3}{3!}
\end{aligned}
$$

dir. Yine tümevarım ile her $x \in [0,1]$ ve $k \ge 0$ için

$$
\left| \left(K^k_{F'} g \right)'(x) \right| \le \|F\|^k_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \frac{(|x|+1)^k}{k!} \tag{6.2}
$$

bulunur. Benzer işlemler yaparsak her $x \in [0,1]$ için

$$
\begin{aligned}
\left| (K_{F'} g)''(x) \right| &= \left| \int_0^x F'(x-t) g''(t)\,dt + F'(x) g'(0) + F''(x) g(0) \right| \\
&\le \|F\|_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} |x| + \|F\|_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \\
&\quad + \|F\|_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} \\
&\le \|F\|_{C(n-1)} \|g\|_{C(n-1)} (|x|+2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(K^2_{F'} g \right)''(x) &= \int_0^x F'(x-t) \left(\int_0^t F'(t-a) g''(a)\,da + F'(t) g'(0) + F''(t) g(0) \right) dt \\
&\quad + F'(x) F'(0) g(0) \\
\left| \left(K^2_{F'} g \right)''(x) \right| &\le \left| \int_0^x F'(x-t) \left(\int_0^t F'(t-a) g''(a)\,da \right) dt \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\int_0^x F'(x-t)F'(t)g'(0)\,dt\right| \\
&+\left|\int_0^x F'(x-t)F''(t)g(0)\,dt\right| \\
&+|F'(x)F'(0)g(0)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left(K_{F'}^2 g\right)''(x)\right| \le\ & \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}\left|\int_0^x t\,dt\right| + \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}\left|\int_0^x dt\right| \\
&+\|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}\left|\int_0^x dt\right| + \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}} \\
=\ & \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}\left|\frac{x^2}{2}\right| + \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}|x| \\
&+\|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}|x| + \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}} \\
&\le \|F\|_{C^{(n-1)}}^2\|g\|_{C^{(n-1)}}\left|\frac{(|x|+2)^2}{2!}\right|
\end{aligned}
$$

ve

$$
\left|\left(K_{F'}^k g\right)''(x)\right| \le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\frac{(|x|+2)^k}{k!} \tag{6.3}
$$

bulunur. (6.1), (6.2), ve (6.3) den tümevarım metodu ile kolayca gösterilebilir ki her $x \in [0,1]$ ve $k \ge 0$ için

$$
\left|\left(K_{F'}^k g\right)^{(n-1)}(x)\right| \le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\frac{(|x|+n-1)^k}{k!}; \tag{6.4}
$$

elde edilir.(6.1), (6.2), (6.3), (6.4) den

$$
\begin{aligned}
\left\|K_{F'}^k g\right\|_{C^{(n-1)}} &\le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\frac{n^k}{k!}; \\
\left\|K_{F'}^k\right\|_{C^{(n-1)}} &\le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\frac{n^k}{k!};
\end{aligned} \tag{6.5}
$$

bulunur. Diğer taraftan (6.4) den her $x \in [0,1]$ ve $k \ge 0$ için

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(K_{F'}^k g\right)^{(n)}\right\|_{L^p} &= \left[\int_0^1 \left|\left(K_{F'}^k g\right)^{(n)}(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left[\int_0^1 \left|\|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\frac{(|x|+n)^k}{k!}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\left(\int_0^1 \frac{(|x|+n)^{kp}}{(k!)^p}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \|F\|_{C^{(n-1)}}^k\|g\|_{C^{(n-1)}}\frac{(1+n)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

$$\left\|K_{F'}^{k} g\right\|_{L^p} \leq \|F\|_{C(n-1)}^{k} \|g\|_{C(n-1)} \frac{(1+n)^k}{k!}$$

$$\left\|\left(K_{F'}^{k}\right)^{(n)}\right\|_{L^p} \leq \|F\|_{C(n-1)}^{k} \frac{(1+n)^k}{k!} \qquad (6.6)$$

elde edilir. (6.5) ve (6.6) dan

$$\left\|K_{F'}^{k}\right\|_{W_p^{(n)}} = \max\left[\left\|K_{F'}^{k}\right\|_{C(n-1)}; \left\|\left(K_{F'}^{k}\right)^{(n)}\right\|_{L^p}\right] \leq \|F\|_{C(n-1)}^{k} \frac{(1+n)^k}{k!}$$

$$\left\|K_{F'}^{k}\right\|_{W_p^{(n)}}^{\frac{1}{k}} \leq \|F\|_{C(n-1)} \frac{1+n}{[k!]^{1/k}} \to 0,$$

bulunur. Öyleyse $\sigma(K_{F'}) = \{0\}$ dir. Bu da $K_{F'}$ operatörünün quasi-nilpotent olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Yani D_f operatörünün tersi vardır.

Teorem 6.3.3: $f \in W_p^{(n)}[0,1]$ elemanının spektrumu $\sigma(f) = \{f(0)\}$ dir.

Teorem 6.3.4: $\left(W_p^{(n)}[0,1], *\right)$ cebirinin maksimal idealler uzayı bir tek $h(f) = f(0)$ homomorfizminden oluşur. Ve Gelfand dönüşümü trivialdir.

Hatırlatalım ki, yukarıdaki Teorem 6.2.2 ve Teorem 6.3.2 konvolusyon hakkında Titchmarsh teoremi ve Fredholm alternatifi yardımıyla farklı metodlarla daha önce Tsekanovski (1965), Ostapenko ve Tarasov (1977) ve Karaev (1984) tarafından ispatlanmıştır.

6.4. Yaklaşım Hakkında Weierstrass Teoremi

Teorem 6.4.1: $f(x)$ reel (yada kompleks) değerli $[0,1]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman $n \to \infty$ için $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x)$ e düzgün olarak yakınsayan bir $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır. (Yosida,1980)

6.5. Volterra Integralleme Operatörünün Devri Vektörlerinin Resmi

Tanım 6.5.1: X ayrılabilir bir Banach uzayı ve A X üzerinde sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer

$$\operatorname{span}\{A^k x : k \geq 0\} = X$$

ise $x \in X$ vektörüne A operatörünün devri vektörü denir.

Teorem 6.5.2: Bir $f \in C^{(n)}[0,1]$ fonksiyonu I;

$$(If)(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

operatörü için devri vektördür $\iff$ $f(0) \neq 0$.

Ispat: Her $k \geq 0$ için

$$I^k f = \frac{z^k}{k!} \circledast f$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\operatorname{span}\{I^k f : k \geq 0\} &= \operatorname{span}\left\{\frac{z^k}{k!} \circledast f : k \geq 0\right\} \\
&= \operatorname{span}\left\{D_f\left(\frac{z^k}{k!}\right) : k \geq 0\right\} = \overline{D_f \operatorname{span}\left\{\frac{z^k}{k!} : k \geq 0\right\}} \\
&= \overline{D_f C^{(n)}[0,1]}
\end{aligned}$$

$f(0) \neq 0$ olduğundan Teoerem 5..1 ve Teorem 5.2 den D_f sınırlı tersi olan operatördür. Son eşitlikten

$$\operatorname{span}\{I^k f : k \geq 0\} = C^{(n)}[0,1]$$

elde edilir. Diğer yandan f vektörü I operatörü için devri vektör ise $f(0) \neq 0$ dır, çünkü aksi takdirde

$$\operatorname{span}\{I^k f : k \geq 0\} \subset C_0^{(n)}[0,1] \overset{def}{=} \{g \in C^{(n)}[0,1] : g(0) = 0\} \; (\neq C^{(n)}[0,1])$$

olur ki, bu da bir çelişkidir.

6.6. Volterra Integral Operatörünün Komutantı

Tanım 6.6.1: X normlu uzay, T X üzerinde bir operatör olsun.

$$\{T\}' = \{A : AT = TA\}$$

kümesine T operatörünün komutantı denir.

Teorem 6.6.2: $C^{(n)}[0,1]$ üzerinde $D_f g = f \circledast g$ Duhamel operatörü olmak üzere I operatörünün komutantı

$$\{I\}' = \{D_f : f \in C^{(n)}[0,1]\}$$

dır.

Ispat:

$$Ig = z \circledast g = D_z g$$

ve

$$D_f D_z = D_z D_f$$

olduğundan bütün D_f ; $f \in C^{(n)}[0,1]$ Duhamel operatörleri $\{I\}'$ aittir. Diğer yandan $T \in L\left(C^{(n)}[0,1]\right)$ ve $TI = IT$ ise her $k \geq 0$ için

$$TI^k = I^k T$$

dır. Buradan her $g \in C^{(n)}[0,1]$ için

$$TI^k g = I^k Tg$$

dır. Özel olarak her $k \geq 0$ için

$$TI^k 1 = I^k T1$$

dır. Yani $k \geq 0$ olmak üzere

$$T\left(\frac{z^k}{k!} \circledast 1\right) = \frac{z^k}{k!} \circledast T1$$

veya

$$T\left(z^k\right) = z^k \circledast T1$$

dır. Buradan $\forall k \geq 0$ için

$$Tz^k = D_{T1}z^k .$$

Teorem 6.4.1 den her $g \in C^{(n)}[0,1]$ için $Tg = D_{T1}g$ elde edilir. Böylece $f = T1 \in C^{(n)}[0,1]$ olmak üzere $T = D_f$ dir.

7. KAYNAKLAR

Başkan, T., 1996, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Bursa.

Bozhinov, N., 1988, Convolutional Represantations of Commutants and Multipliers,So...a.

Carothers, N.L., 2000, Real Analysis, New York.

Churchill, R.V., 1989, Karmaş-k Değişkenler ve Uygulamalar (Türkçe), Istanbul.

Dimovski, I.H., 1982, Convolutional Calculus, So...a.

Giles, J.R., 2000, Introduction to the Analysis of Normed Linear Spaces, New York.

Halmos, P.R., 1982, A Hilbert Space Problem Book, New York.

Karaev, M. T., 1984, Using convolution for the proof of unicellularity, Zap. Nauchn. Semin. LOMI, v.135, 66-68.

Karaev, M. T., 2003, Some applications of Duhamel product, Zap. Nauchn. Semin. POMI, v.303, 145-160.

Karaev, M. T.,1990 The use of Duhamel product in the basis problem, Izvestiya AN Azerb. SSR, Ser....z-tehn. matem nauk, No:3-6, 145-150..

Kolmogorov A.N.,Fomin S.V., 1975, Introductory Real Analysis, New York.

Kreyszig, E., 1978, Introductory Functional Analysis With Applications, New York.

Lorch, E. R., 1944, The structure of normed abelian rings, Bull. Amer. Math. Soc., 50, 447-463.

Mikusinski, J., 1959, Operational Calculus, Warszawa.

Nagnibida, N. I., 1982, Description of commutants of integration operator in analytic spaces, Siberian Math. J., 22, 748-752.

Ostapenko P.V. and Tarasov V.G.,1977, About unicellularity of the integration operator in some function spaces, Teoriya funkcii, funkcional'nyi analiz i ikh prilojeniya, 27, 121-128

Rickart, C.E., 1960, General Theory of Banach Algebras, New Jersey.

Rudin, W., 1987, Real and Complex Analysis, New York.

Rudin, W., 1991, Functional Analysis, New York.

Silov, G. E., 1947, On regular normed rings, Trav. Just. Math. Steklo¤ 21, Moscow

Terzioğlu, T., 1998, Fonksiyonel Analizin Yöntemleri, Istanbul.

Tsekanovski, A.R.,1965, About description of invariant subspaces and unicellularity of the integration operator in the space $W_2^{(p)}$, Vspehi Mat. Nauk, xx, 6 (126), 169-172.

Whitney, H., 1948, On ideals of di¤erentiable functions, Amer. J. Math., 70,636-658.

Wigley, N.M., 1974, The Duhamel Product of Analytic Functions, Duke Math. J., 41, 211-217.

Yosida, K., 1980, Functional Analysis, New York.

ÖZGEÇMIŞ

Adı Soyadı	:	Hüseyin TUNA
Doğum yeri	:	Atabey
Doğum Yılı	:	1978
Medeni Hali	:	Evli

<u>Eğitim ve Akademik Durumu</u> :

Lise	1991-1994 Isparta Gülkent Lisesi
Lisans	1994-1998 Balıkesir Üniversitesi

<u>Yabancı Dil</u> : Ingilizce

<u>Iş Deneyimi</u> :

2000-_... MEB-Senirkent I.H.Ö. Işitme Engelliler Meslek Lisesi Matematik Öğretmenliği