SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE
BULUNDURAN İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ
DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN
SINIR DEĞER PROBLEMİ

Mevlüde YAKIT ONGUN

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Isparta, 2004

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Mevlüde YAKIT ONGUN

Danışman:
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2004

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	....
Üye	:	....
Üye	:	....
Üye	:	....
Üye	:	....

ONAY

Bu tez ... / ... / 2004 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2004

Prof. Dr. Remzi KARAGÜZEL

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER i

ÖZET ii

ABSTRACT iv

TEŞEKKÜR vi

SİMGELER DİZİNİ vii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

3. SINIR ŞARTLARINDA ÖZDEĞER PARAMETRE BULUNDURAN STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ 13

3.1. Giriş 13

3.2. Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör 17

3.3. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri 19

3.4. Problemin Green Fonksiyonu 23

3.5. Rezolvent Operatörü 26

3.6. Sıfırda Disipatiflik Durumunda A_h Operatörünün Kendine eş Dilatasyonu ve Karakteristik Fonksiyonu 28

3.7. $\mathcal{L}_h$ Operatörünün Oluşturduğu Üniter Grup 31

3.8. Dilatasyonun Saçılma Teorisi ve Disipatif Sturm-Liouville Operatörünün Fonksiyonel Modeli 34

3.9. Disipatif Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Analizi 43

4. SINIR ŞARTLARINDA ÖZDEĞER PARAMETRE BULUNDURAN SCHRÖDİNGER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ 45

4.1. Giriş 45

4.2. Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör 48

4.3. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri 50

4.4. Problemin Green Fonksiyonu

4.5. Rezolvent Operatörü

4.6. Sonsuzda Disipatiflik Durumunda A_h Operatörünün Kendine eş Dilatasyonu ve Karakteristik Fonksiyonu

4.7. $\mathcal{L}_h$ Operatörünün Oluşturduğu Üniter Grup

4.4. Problemin Green Fonksiyonu 52

4.5. Rezolvent Operatörü 55

4.6. Sonsuzda Disipatiflik Durumunda A_h Operatörünün Kendine eş Dilatasyonu ve Karakteristik Fonksiyonu 57

4.7. $\mathcal{L}_h$ Operatörünün Oluşturduğu Üniter Grup 61

5. KAYNAKLAR 66

ÖZGEÇMİŞ 70

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında lineer operatörler teorisi ile ilgili temel oluşturacak bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca, dilatasyon tanımı verilerek, bir disipatif operarörün dilatasyonunu kurmak için gerekli tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, sınır koşullarında spektral parametre bulunduran limit-çember durumundaki kendine eş olmayan singüler Sturm-Liouville sınır değer problemi ele alınmıştır. Yaklaşımın temeli, maksimal disipatif operatörün kullanımına ve verilen sınır değer problemi için bu operatörün spektral analizine dayanmaktadır. Maksimal disipatif operatörün kendine eş dilatasyonu oluşturulmuş ve dilatasyonun saçılma matrisinin tespiti için giren ve çıkan spektral gösterimler verilmiştir. Ayrıca, disipatif operatörün fonksiyonel modeli ve Sturm-Liouville denklemine karşılık gelen çözümler yardımıyla karakteristik fonksiyon oluşturulmuştur. Sturm-Liouville sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektör ve assosye vektörler sistemi için tamlık teoremi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $(0, \infty)$ yarı aralığının sol uç noktasında spektral parametre bulunan ve sonsuzda disipatif Schrödinger sınır değer problemi ele alınmıştır. Maksimal disipatif Schrödinger operatörü oluşturulmuş ve disipatif operatörün kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Lax-Philips saçılma teorisi kullanılarak dilatasyonun spektral analizi yapılmış ve saçılma matrisi bulunmuştur. Ayrıca, disipatif operatörün fonksiyonel modeli ve Schrödinger denklemine karşılık gelen çözümler yardımıyla karakteristik fonksiyon oluşturulmuştur. Schrödinger sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektör ve asosye vektörler sistemi için tamlık teoremi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kendine eş olmayan operatör, sınır şartlarında spektral parametre, maksimal disipatif operatör, kendine eş dilatasyon, fonksiyonel model, karakteristik fonksiyon, özvektör ve asosye vektörler sisteminin tamlığı.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the historical progress of the subject was considered.

In the second chapter, some essential definitions and theorems is given in

In the third chapter, nonselfadjoint singular Sturm-Liouville boundary value problems in limit-circle case with a spectral parameter in the boundary condition are considered. The approach is based on use of the maximal dissipative operator and the spectral analysis of this operator is adequate for boundary value problem. A selfadjoint dilation of the maximal dissipative operator and its incoming and outgoing spectral representations which make it possible to determine the scattering matrix of dilation are constructed. Also a functional model of the dissipative operator and specify its characteristic function in terms of solutions of the corresponding Sturm-liouville equation are constructed. Theorems on completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and Sturm-Liouville boundary value problem are given.

In the fourth chapter, Schrödinger boundary value problem are studied in case of dissipative at infinity and with left end point spectral parameter in $(0, \infty)$ interval . Maximal dissipative Schrödinger operator is build and self adjoint dilation of a dissipative operator is constructed, using the Lax-Philips scattering theory, the spectral analysis of a dilation is carry out, and the scattering matrix of a dilation is founded. A functional model of the dissipative operator and specify its characteristic function in terms of solutions of the corresponding Schrödinger equation are constructed. Theorems on completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and Schrödinger boundary value problem are given.

Keywords: Nonselfadjoint operator, spectral parameter in the boundary condition, maximal dissipative operator, selfadjoint dilation, functional model, characteristic function, completeness of the system of eigenvectors and associated vectors.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Prof.Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na teşekkür ederim.

Ayrıca bu çalışma 465 nolu proje kapsamında SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ BİLİMSEL PROJELER ARAŞTIRMA BİRİMİ tarafından desteklenmiştir. Bu desteklerinden dolayı SDÜBAPBR ne teşekkür ederiz.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{H}$	:	Hilbert uzayı
$D(A)$	:	A nın tanım kümesi
$\mathcal{U}(t)$	:	Üniter operatörler grubu
Z_t	:	Yarı grup
B_h	:	Yarı grubun üreteci
$\ell(y)$	:	Diferensiyel ifade
L	:	Maksimal operatör
L_0	:	Minimal simetrik operatör
A_h	:	Maksimal disipatif operatör
$G(x,.,\lambda)$	:	Green fonksiyonu
R_λ	:	A_h operatörünün rezolventi
$\mathcal{L}_h$	:	A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu
D_-	:	Giren alt uzay
D_+	:	Çıkan alt uzay
$w(\lambda)$	:	Kompleks düzlemde meromorfik fonksiyon
$S_h(\lambda)$	:	Karakteristik fonksiyon
T	:	Model disipatif operatör
$s(\lambda)$	:	Singüler çarpan
$B(\lambda)$	:	Blascke çarpanı
F_-, F_+	:	İzometrik dönüşümler
$\overline{S_h}(\lambda)$	:	Saçılma matrisi
$N_\lambda, N_{\overline{\lambda}}$	:	Simetrik operatörün defekt uzayları
$def L_0$	:	L_0 operatörünün defekt sayısı

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi, matematiksel fiziğin klasik problemlerinde sınır şartları genelde koordinat değişkenine göre kısmi türev içermekte fakat zamana göre içermemektedir. Ancak matematiksel fiziğin bazı problemlerinde sınır şartları, koordinat değişkeni ile birlikte zamana göre kısmi türevi de içermektedir (Böyle problemlere örnek olarak iki ucu sabitleştirilmiş ancak bazı iç noktalarında yük asılmış telin titreşim problemlerini, bazı difüzyon ve dalga problemlerini göstermek mümkündür.) Bu problemler Fourier yöntemi (değişkenlerine ayırma yöntemi) ile araştırıldığında elde edilen uygun spektral problemin, sadece diferensiyel denklemde değil sınır şartlarında da spektral parametre bulunduğu görülür. Bu nedenle sınır şartlarında spektral parametre bulunduran sınır değer problemleri hem teorik hem de pratik açıdan büyük önem taşımaktadır. Son yıllarda bu problemler gittikçe daha yoğun bir şekilde araştırılmaktadır.

Sınır şartlarında spektral parametre bulunduran kendine eş regüler Sturm-Liouville problemlerinin fiziksel uygulamaları oldukça fazla sayıda ve çeşitliliktedir. Örnek olarak; ısı akımı, mekanik titreşimler, gözenekli ortamda difüzyon, elektrik devreleri vs.verilebilir. Bu örneklerden bazıları Walter (1973) , Fulton (1977), Hinton (1979) ve Schalikov (1983) yapmış oldukları çalışmalarda incelemişlerdir. Bu tür problemlerin çeşitli hallerde özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasına ait çok sayıda kitaplar ve makaleler yazılmıştır. Atkinson (1964) de, λ parametresinin hem aralığın uç noktalarında verilmesi hem de aralığın içindeki süreksizlik noktalarında verilmesi durumunu incelemiştir. Benzer durum doktora tezi olarak Altınışık (1998) tarafından çalışılmıştır.

Sınır şartlarında λ parametresi bulunduran problem Olasılık Teorisinde de önemlidir ve bu konuyla ilgili ilk çalışmalar Feller $(1955, 1957)$ tarafından yapılmıştır. Feller, difüzyon dekleminin yarı-grup çözümlerinin çok küçük üreteçlerinin karakterize edilmiş bölgeleriyle ilgilendi. Bu ona, bir operatör için "yan şartlar" ve "şartlanmış kümeler" notasyonlarını uygulamasına ve buradan sınır koşullarında parametre bulunduran regüler Sturm-Liouville problemlerine uygulamasına izin verdi. Feller gibi Hellwig (1958) de, kısmi türevli denklemler için Cauchy başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümleri ile ilgilenmiş ve benzer şekilde sınır şartlarında özdeğer parametre bulunduran regüler Sturm-Liouville problemlerinin incelenmesiyle ilgilenmiştir.

Literatürdeki bazı çalışmalar da sınır şartlarında λ parametresi bulunduran singüler durumla ilgilidir ve sınır şartlarında λ parametresi bulunduran singüler problemleri içeren uygulamalar ve örnekler az sayıda olmakla birlikte, Cohen (1966) ve Fulton $(1977, 1980)$ deki çalışmalarda, singüler sınır değer problemlerinin daha genel tipleri için özfonksiyon açılımları ile ilgilenmişlerdir.

Sınır koşulunda spektral parametre bulunduran kendine eş olmayan Sturm-Liouville ve Schrödinger sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin sayılabilir sayıda olup olmadığı, özvektör ve asosye fonksiyonlarının $L_w^2(R_+)$ Hilbert uzayında tam sistem formunda olup olmadığı, spektral teori konusunu ilgilendirir. Sınır koşulu λ parametresinden bağımsız kendine eş olmayan (disipatif) singüler Sturm-Liouville sınır değer problemi ile ilgili olarak Allahverdiev $(1991, 1997, 2003)$ ve Pavlov (1996) da çalışmışlardır. Son yıllarda sınır koşullarında spektral parametre bulundurmayan kendine eş olmayan regüler fiziksel bazı problemlerle Baro vd. (2003) ve Kaiser vd. (2003) çalışmışlardır.

Kendine eş olmayan diferensiyel operatörlerin spektral analizinde ilk genel metod, rezolventin çevre integrasyonu metodudur. Bu metod, spektrumu ayıran çevreler üzerinde rezolventi hesaplama tekniğidir. Bu metodu kullanarak, 1962 yılında Lidskij, ikinci mertebeden genel regüler bir diferensiyel operatörün spektral ayrışım teoremini ispatlamış ve M.A. Naimark (1968) tarafından daha genel biçimde incelenmiştir. 1960 lı yılların başında Pavlov, genel metodun koşullarının esnek olmadığını belirterek, pek çok sonlu özdeğer ve spektral singüleritesi olan ve zengin bir spektral yapıya sahip bir boyutlu Schrödinger operatörlerinin oluşturduğu örnekler için spektral analiz problemine başka yaklaşımlar gerektiğini belirtmiştir. Böylece kendine eş olmayan operatörlerin spektral analizi için analitik metodların, pratik olarak Cauchy integraline indirgemede yetersiz kaldığı görülmüştür. Macar matematikçi B. Sz.-Nagy ve Romen matematikçi C. Foiaş (Sz.-Nagy ve Foiaş,1970) çalışmalarında Hilbert uzayında bir lineer büzülmenin genel modeli olan çok basit formdaki bir operatörün spektral özelliklerini incelemişlerdir. Yine 1960 lı yıllarda Amerikan matematikçiler Lax ve Phillips (1967) saçılma teorisinde önemli bir yer tutan soyut saçılma teorisini geliştirmişlerdir. Sz.-Nagy-C. Foiaş ve Lax-Phillips'in sonuçları birleştirilerek karakteristik fonksiyon, saçılma matrisi ile ifade edilmiş ve disipatif operatörün dilatasyonu kurulmuştur. Özvektörler ve asosye vektörler sisteminin tamlık problemi, karakteristik fonksiyonun faktorizasyon problemine indirgendiği görülmüştür. Böylece singüler disipatif operatörlerin spektral analizi, dilatasyonun kurulması, buna karşılık gelen saçılma teorisi probleminin araştırılması ve karakteristik fonksiyonun saçılma matrisi yardımıyla ifade edilmesi ile yapılmıştır. Bu yöntem, Pavlov (1975, 1977, 1996, 1999) ve Allahverdiev (1987, 1991, 1997, 2003, 2004) de bahsedildiği gibi pek çok araştırmada kullanılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Hilbert uzayında lineer operatörler teorisi ile ilgili temel oluşturacak bazı tanım ve teoremler verilecektir

Tanım 2.1 : H kompleks lineer uzayı verilsin. Her $x, y \in H$ elemanları çiftine aşağıdaki şartları gerçekleyen ve (x, y) ile göstereceğimiz kompleks sayısı karşılık getirildiğini kabul edelim.

1. $(x, y) = (\overline{y, x})$
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) \geq 0$
5. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu durumda (x, y) kompleks sayısına x ve y elemanlarının iç çarpımı, H lineer uzayına ise *iç çarpım uzayı* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.2 : H iç çarpım uzayında

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

formülü bir norm tanımladığından, iç çarpım uzayı bu norma göre lineer normlu uzay olacaktır.

Sayılabilir sayıda, tam ortonormal sistemin mevcut olduğu bir iç çarpım uzayına *Hilbert Uzayı* denir ve H ile gösterilir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.3 (Lineer operatör)**:** H Hilbert uzayının herhangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir A operatörü için,

$$A : D \subseteq H \to H$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümüne *lineer operatör*, D ye ise A operatörünün *tanım bölgesi* denir ve bu küme $D(A)$ ile gösterilir. A operatörünün değer kümesi de $\mathrm{Im}(A)$ veya $R(A)$ ile gösterilir.(Naimark, 1968)

Tanım 2.4 : H Hilbert uzayının bir alt kümesinde tanımlanan herhangi bir lineer F operatörünün değer kümesi reel veya kompleks sayılar kümesi ise F, H de bir *lineer fonksiyonel* olarak adlandırılır. Bir F fonksiyoneli, tüm H uzayında tanımlanır ve

(i) $x, y \in H$ ve $\lambda, \mu \in$R olmak üzere

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$$

(ii) Her $x \in H$ ve C bir sabit sayı olmak üzere

$$|F(x)| \leq C \|x\|$$

koşulları sağlanırsa F fonksiyoneline *lineer sınırlı fonksiyonel* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.5 : H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için, her $x \in H$ olmak üzere

$$\|Ax\| \leq C \|x\|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir C sayısı varsa A ya *sınırlı operatör* denir. Bu C sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

eşitliği yardımı ile de normu hesaplayabiliriz. (Naimark, 1968)

Teorem 2.6 : Sınırlı her lineer A operatörü süreklidir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.7 : H Hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer bir operatör olmak üzere, A nın tanım kümesi $D(A)$, H kompleks Hilbert uzayında yoğun olsun. $f \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, A^* g)$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A nın *adjoint (eşlenik) operatörü* denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir.

Eşlenik operatörü aşağıdaki şartları sağlar:
(i) $A^{**} = A$
(ii) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$
(iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$
(iv) $(AB)^* = B^* A^*$
(v) $\|A^*\| = \|A\|$ (A sınırlı ise)
(Naimark, 1968)

Tanım 2.8 : Eğer $A^* = A$ ise, A ya *self-adjoint (kendine eş) operatör* adı verilir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.9 : Her $x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ise A ya *pozitif lineer operatör* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.10 : Tanım kümesi $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için $f, g \in D(A)$ olmak üzere

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne *Hermityen* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.11 : $A : D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ ($D(A)$ tanım bölgesi H de yoğun olsun) olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise, $y$ani $A \subset A^*$ ise A ya *simetrik operatör* denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik operatörün kapanabilir olduğunu ifade eder. (Naimark, 1968)

Tanım 2.12 (İzometrik operatör)**:** $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U ya *izometrik operatör* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.13 : Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi H Hilbert uzayı ise *üniter operatör* olarak adlandırılır.

Not : Bir U izometrik operatörünün üniter olması için gerek ve yeter koşul $U^*U = UU^* = I$ olmasıdır. (Naimark, 1968)

Tanım 2.14 (Kompakt operatör)**:** Her sınırlı kümeyi kompakt kümeye dönüştüren operatöre *kompakt operatör* denir.

Kompakt operatörler bazı temel özelliklere sahiptir:

(i) Her kompakt operatör sınırlıdır, dolayısı ile süreklidir.
(ii) A ve B kompakt operatörler ise AB ve BA operatörleri de kompakttır.
(iii) A, H Hilbert uzayında her yerde tanımlı, sınırlı, lineer bir operatör olsun. A nın kompakt olması için $\Leftrightarrow$ A^*A operatörünün kompakt olmasıdır.
(iv) A kompakt bir operatör ise A^* da kompakt bir operatördür.
(v) $\{A_n\}$ kompakt operatörlerin bir dizisi olsun.

$$\|A - A_n\| \to 0, n \to \infty \text{ için}$$

ise A operatörü de kompakttır. (Naimark, 1968)

Tanım 2.15 (Bir Operatörün Genişlemesi)**:** $f \in D(A)$ için,

$$\tilde{A}f = Af$$

ve $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ ise A operatörüne $\tilde{A}$ operatörünün *genişlemesi* adı verilir. $\tilde{A}$ ya ise A operatörünün *kısıtlaması* denir. Eğer A, simetrik $\tilde{A}$ operatörünün bir simetrik genişlemesi ise bu durumda $A \subset \widetilde{A}^*$ dır. Yani, $\tilde{A}$ operatörünün simetrik her genişlemesi $\widetilde{A}^*$ operatörünün bir kısıtlamasıdır. Naimark (1968)

Sonuç 2.16 : Bir A operatörünün maksimal simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün diğer simetrik genişlemelerinin bulunamamasıdır. (Naimark, 1968)

Tanım 2.17 ($L^2(a,b)$ uzayı): Verilmiş $[a,b]$ aralığında tanımlı, kompleks değerli ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise $f(x)$ fonksiyona $[a,b]$ aralığında *karesi integrallenebilir fonksiyon* denir .

(a,b) aralığının (sonlu veya sonsuz) üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir ve kare integrallenebilir tüm kompleks değerli $f(x)$ fonksiyonlarının bütününü $L^2(a,b)$ ile göstereceğiz. Her $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$ için

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanabilir. (Jorgens, 1964)

Teorem 2.18 : $L^2(a,b)$ ile tanımlanan uzay bir H Hilbert uzayıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.19 (Diferensiyel operatör)**:** $\frac{1}{p_0}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında reel değerli, Lebesgue anlamında ölçülebilir ve (a,b) nin her sonlu $[\alpha,\beta]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olmak üzere,

$$\ell(y) = (-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)} + ... + p_ny$$

ifadesine *kendine eş ifade* adı verilir. $L^2(a,b)$ Hilbert uzayında, $(2n-1)$. mertebeden kuazi türevi dahil tüm kuazi türevleri mutlak sürekli olan ve $\ell(y) \in L^2(a,b)$ olan $y(x)$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim.

D de $\ell(y)$ diferensiyel ifadesi ile üretilen A operatörüne *maksimal diferensiyel operatör* adı verilir ve her $y \in D$ için $Ay = \ell(y)$ biçiminde tanımlanır. (Naimark, 1968).

D_0, $L^2(a,b)$ Hilbert uzayında düzgün ve sonlu dayanağa sahip fonksiyonlardan oluşan yoğun bir küme olmak üzere, A operatörünün D_0 üzerine kısıtlaması yine $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ile üretilen A_0 minimal operatörünü tanımlar, bu operatör simetriktir ve $A = A_0^*$ dır. (Naimark, 1968)

Tanım 2.20 (Simetrik Operatörün Defekt Uzayları **):** A, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında simetrik bir operatör ve λ keyfi bir kompleks sayı olsun. R_λ ve $R_{\overline{\lambda}}$ sırasıyla, $(A - \lambda I)$ ve $(A - \overline{\lambda} I)$ operatörlerinin değerler kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \ominus R_\lambda \text{ ve } \mathcal{N}_{\overline{\lambda}} = \mathcal{H} \ominus R_{\overline{\lambda}}$$

uzaylarına A operatörünün *defekt uzayları* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.21 (İndis Defekt)**:** $\operatorname{Im} \lambda > 0$ olmak üzere, $m = \dim \mathcal{N}_\lambda$ ve $n = \dim \mathcal{N}_{\overline{\lambda}}$ şeklinde ifade edildiğinde. (m, n) ikilisine A operatörünün *indis defekti* denir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.22 (Disipatif Operatör**):** A lineer operatörünün $D(A)$ tanım kümesi $\mathcal{H}$ de yoğun olmak üzere, her $f \in D(A)$ için,

$$\operatorname{Im}(Af, f) \geq 0$$

ise, A operatörüne *disipatif operatör* denir. $f \in D(A)$ için,

$$\operatorname{Im}(Af, f) \leq 0$$

ise, A lineer operatörüne *akretif (akümülatif) operatör* denir. (Kuzhel, 1996)

Tanım 2.23: Bir disipatif (akümülatif) operatörün diğer disipatif (akratif) genişlemeleri yoksa *maksimal disipatif (akretif)* adını alır. (Kuzhel, 1996)

Teorem 2.24: Her disipatif operatör bir maksimal disipatif genişlemeye sahiptir.(Gorbachuk ve Gorbachuk,1991).

Tanım 2.25 (Dilatasyon**):** B, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında sınırlı bir lineer operatör ve A, $K \subset \mathcal{H}$ da bir lineer operatör olsun. P, $\mathcal{H}$ dan K ya tanımlı bir izdüşüm operatörü olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A^n = PB^n \mid_K$$

ise B ye A nın *dilatasyonu* denir. Bu ifade aşağıdaki ifadelere eşdeğerdir.

(i) Her $x, y \in K$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$(A^n x, y) = (B^n x, y)$$

dir.
(ii) $(A - \lambda I)^{-1} = P(B - \lambda I)^{-1} \mid_K$dır. (Kuzhel, 1996)

Tanım 2.26 (Üniter Operatör Grubu**):** Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ operatörler ailesine, *üniter operatörler grubu* adı verilir.

(i) $U(0) = I$, (I birim operatör)
(ii) Her $t, s \in \mathbb{R}$ için, $U(t + s) = U(t)U(s)$. (Weidmann, 1980)

Teorem 2.27 : Hilbert uzayında kendine eş A operatörünün spektral ailesi $E(\lambda)$ olsun. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\lambda, t) \to e^{it\lambda} \in \mathbb{C}$ olmak üzere, verilen bir fonksiyon için,

$$\mathbb{R} \ni t \to U(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} dE(\lambda) = e^{itA}$$

şeklinde ifade edilen üniter operatörler grubu oluşturulur. (Weidmann, 1980)

Teorem 2.28 (Stone)**:** $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında güçlü sürekli üniter grup olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ için,

$$U_t = U(t) = e^{itA}$$

üniter grubu ile, $\mathcal{H}$ de kendine eş A operatörü birebir olarak belirlenir. A operatörüne U_t *grubunun üreteci* denir. (Lax ve Phillips, 1967)

Tanım 2.29 (Üniter Eşdeğer Operatör)**:** V üniter operatör olmak üzere, $\widetilde{A} = VAV^*$ ise A ve $\widetilde{A}$ operatörüne *üniter eşdeğerdi*r denir. (Weidmann, 1980)

Tanım 2.30 (Büzen Operatör)**:** $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında A lineer bir operatör olsun. Eğer $\|A\| \leq 1$ ise, A ya $\mathcal{H}$ de *büzen operatör* adı verilir. (Naimark, 1968)

Tanım 2.31 (İnvariyant Altuzay)**:** A, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir operatör ve K, $\mathcal{H}$ nin alt uzayı olsun. Her $x \in K$ için $Ax \in K$ ise, K ya *invaryant alt uzay* adı verilir. (Nagy ve Foiaş, 1970)

$U_t = e^{itA}$ üniter grubu yardımıyla Z_t yarıgrubu oluşturulabilir. Aşağıdaki teoremler Z_t yarıgrubunun tanımını ve özelliğini ifade etmektedir.

Teorem 2.32 : U_t grubunun K invaryant alt uzayı üzerine kısıtlaması ile elde edilen Z_t operatörler ailesi,

$$B = \lim_{t \to +0} (it)^{-1} \{Z_t - I\}$$

disipatif üretecine sahip, güçlü sürekli, tamamen üniter olmayan bir yarı gruptur ve $t \geq 0$ için,

$$Z_t = P_K U_t \mid_K$$

şeklinde ifade edilir. Burada P_K, K uzayı üzerinde bir dik izdüşüm operatördür (Pavlov, 1996).

Teorem 2.33 : Hilbert uzayı üzerinde dönüşüm yapan ve S karakteristik fonksiyonuna sahip olan her maksimal disipatif operatör, bir $K \subset \mathcal{H}$ alt uzayı üzerinde dönüşüm yapan Z_t yarı grubunun B üretecine üniter eşdeğerdir ve

$$Z_t = e^{iBt} = P_K U_t \mid_K$$

olarak ifade edilir (Pavlov, 1975).

Tanım 2.34 (Basit operatör)**:** Kendine eş olamayan A operatörü, aşikar (sıfır) olmayan hiçbir alt uzayda kendine eş operatör üretmiyorsa, *basit (simple)* olarak adlandırılır. (Kuzhel, 1996)

Teorem 2.35 (Hilbert-Schmidt)**:** Kendine eş ve kompakt olan A operatörünün özvektörleri, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında ortonormal baz oluşturur. (Naimark, 1968)

Tanım 2.36 (Hardy Sınıfları)**:** Kompleks düzlemde, $D = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ açık birim disk olsun.

$$\|f\|_p = \begin{cases} \sup\limits_{0<r<1} \left[\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt \right]^{\frac{1}{p}} & , 0 < p < \infty \\ \sup\limits_{\lambda \in D} |f(\lambda)| & , p = \infty \end{cases}$$

sonlu normu ile ifade edilen, D üzerindeki holomorfik f fonksiyonlarının sınıfına H^p $(0 < p \leq \infty)$ *Hardy sınıfı* adı verilir. (Lax ve Phillips, 1967)

Tanım 2.37 (Paley-Weiner)**:** f bir holomorfik fonksiyon ve

$$\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 \, dx = c < \infty$$

olsun. Bu durumda, z üst yarı düzlemde bir nokta olmak üzere, bir $F \in L^2(0,\infty)$ mevcuttur öyle ki,

$$f(z) = \int\limits_0^{\infty} F(t) e^{itz} dt$$

ve

$$\int\limits_0^{\infty} |F(t)|^2 \, dt = c$$

dir. (Lax ve Phillips, 1967)

3. SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $(0,\infty)$ aralığında, sıfırda disipatif ve spektral parametrenin aralığın sağ uç noktasında verilmesi durumunda araştırdığımız sınır değer problemine uygun olarak tanımladığımız özel Hilbert uzayında, verilmiş sınır değer problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan lineer operatör oluşturulmuştur. Daha sonra operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

Oluşturulan bu A_h lineer operatörünün kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Saçılma teorisi uygulanarak verilen kendine eş olmayan operatörün karakteristik fonksiyonu bulunmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri incelenerek tamlık teoremleri ispatlanmıştır.

3.1.Giriş:

$$l(y) := \frac{1}{w(x)}\left[-(py')'(x) + q(x)y(x)\right], x \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty) \qquad (3.1.1)$$

Sturm-Liouville diferensiyel ifadesini ele alalım. Burada w, p ve q reel değerli, $\mathbb{R}_+$ da Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve $w, \frac{1}{p}\ , q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $w(x) > 0$ olsun.
ℓ diferensiyel ifadesinden operatöre geçmek istersek:

$$(y,z) = \int\limits_0^\infty y(x)\overline{z(x)}w(x)dx$$

iç çarpımını sağlayan $\int\limits_0^\infty |y(x)|^2\, w(x)dx < \infty$ şeklindeki bütün kompleks değerli y fonksiyonlarının oluşturduğu $L^2_w(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayını kurmalıyız.

(3.1.1) ifadesi ile gösterilen minimal simetrik operatörün kapanışını L_0 ile gösterelim. D_0, L_0 operatörünün tanım bölgesi olsun. D ile $L^2_w(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayındaki öyle y fonksiyonlarının oluşturduğu küme olsun ki y, py' lokal mutlak sürekli, $l(y) \in L^2_w(\mathbb{R}_+)$ olsun. O halde D, L maksimal operatörünün tanım bölgesi olup $L = L_0^*$ dır (Naimark,1968).

L_0 operatörünün indis defekti $(2,2)$ olduğunu kabul edelim. Yani, w, p ve q reel değerli fonksiyonları ℓ diferensiyel ifadesi için Weyl limit-çember durumunu sağlasın. Weyl limit-çember durumunun olduğunu garanti eden bir çok uygun şartlar mevcuttur (Titchmarsh 1946, Akhizer ve Glazman 1963, Atkinson 1964, Jorgens 1964, Naimark 1968, Weidman 1980, Levitan ve Sargsjan 1991, Stakgold 1998).

$$\ell(y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

denkleminin

$$u(0) = 1, \qquad (pu')(0) = 0, \qquad v(0) = 0, \qquad (pv')(0) = 1 \tag{3.1.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız ve Wronskiyenlerinin 1 olduğu açıktır. Yani

$$W[u,v]_x := (upv' - pu'v) \underset{x}{|} = W[u,v]_0 = 1, \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

dır. L_0 operatörünün indis defekti $(2,2)$ olduğundan $u(x), v(x) \in D$ dir.

Tanım 3.1.1: Her $y, z \in D$ için

$$(Ly, z)_{L^2} - (y, Lz)_{L^2} = \int_0^x \ell(y)\overline{z}w dt - \int_0^x y\overline{\ell(z)}w dt = W[y,\overline{z}]_x - W[y,\overline{z}]_0$$

eşitliğine *Green formülü* adı verilir.

$$W[y,\overline{z}]_\infty := \lim_{x\to+\infty} W[y,\overline{z}]_x, \qquad W[y,\overline{z}]_0 := \lim_{x\to 0} W[y,\overline{z}]_x$$

limitleri var ve sonludur.

Lemma 3.1.2: $y, z \in D$ keyfi fonksiyonları için

$$W[y,\overline{z}]_x = W[y,u]_x . W[\overline{z},v]_x - W[y,v]_x . W[\overline{z},u]_x, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

dır.

İspat: u ve v reel değerli fonksiyonlar olduğundan, $W[u,v]_x = 1$ ve $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$
\begin{aligned}
W[y,u]_x.W[\overline{z},v]_x - W[y,v]_x.W[\overline{z},u]_x &= \left(ypu' - py'u\right)\left(\overline{z}pv' - p\overline{z}'v\right)\Big|_x \\
&\quad - \left(ypv' - py'v\right)\left(\overline{z}pu' - p\overline{z}'u\right)\Big|_x \\
&= (ypu'\overline{z}pv' - ypu'p\overline{z}'v - py'u\overline{z}pv' \\
&\quad + py'up\overline{z}'v - ypv'\overline{z}pu' + ypv'p\overline{z}'u \\
&\quad + py'v\overline{z}pu' - py'vp\overline{z}'u) \\
&= \left(-yp\overline{z}' + py'\overline{z}\right)\left(pu'v - upv'\right)\Big|_x \\
&= W[y,\overline{z}]_x
\end{aligned}
$$

olur. Lemma 3.1.2 sağlanmış oldu.

Teorem 3.1.3: L_0 operatörünün tanım bölgesi olan D_0, aşağıdaki şartları sağlayan $y \in D$ fonksiyonlarını içerir. $x \in \mathbb{R}_+$ için

$$y(0) = (py')(0) = 0, \qquad W[y,u]_\infty = W[y,v]_\infty = 0$$

dir.

$(0,\infty)$ aralığında verilen (3.1.1) diferensiyel ifadesi sıfırda disipatif, sol uç noktada regüler ve spektral parametrenin aralığın sağ uç noktasında verilmesi durumunda aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$\ell(y) = \lambda y, \quad y \in D, \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{3.1.3}$$

$$(py')(0) - hy(0) = 0 \tag{3.1.4}$$

$$\alpha_1 W[y,v]_\infty - \alpha_2 W[y,u]_\infty = \lambda\left(\alpha_1' W[y,v]_\infty - \alpha_2' W[y,u]_\infty\right), \quad \operatorname{Im} h > 0 \tag{3.1.5}$$

burada λ, kompleks spektral parametre, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^{'}, \alpha_2^{'} \in \mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ ve

$$\alpha := \begin{vmatrix} \alpha_1^{'} & \alpha_1 \\ \alpha_2^{'} & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1^{'}\alpha_2 - \alpha_2^{'}\alpha_1 > 0$$

dır. Aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$\begin{aligned}
&R_\infty(y) := \alpha_1 W[y, v]_\infty - \alpha_2 W[y, u]_\infty \\
&R'_\infty(y) := \alpha_1^{'} W[y, v]_\infty - \alpha'_2 W[y, u]_\infty \\
&B_1^0(y) := y(0) \\
&B_2^0(y) := py'(0) \\
&B_1^\infty(y) := W[y, v]_\infty \\
&B_2^\infty(y) := W[y, u]_\infty \\
&R_0(y) = B_2^0(y) - hB_1^0(y)
\end{aligned}$$

Keyfi $y, z \in D$ için $R_\infty(\overline{z}) = \overline{R_\infty(z)}$, $R'_\infty(\overline{z}) = \overline{R'_\infty(z)}$, $B_1^0(\overline{z}) = \overline{B_1^0(z)}$, $B_2^0(\overline{z}) = \overline{B_2^0(z)}$ olmak üzere

$$W[y, \overline{z}]_\infty = -\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y).\overline{R'_\infty(z)} - R'_\infty(y).\overline{R_\infty(z)}\right], \tag{3.1.6}$$

$$W[y, \overline{z}]_0 = B_1^0(y).B_2^0(\overline{z}) - B_1^0(\overline{z}).B_2^0(y) \tag{3.1.7}$$

dir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y).\overline{R'_\infty(z)} - R'_\infty(y).\overline{R_\infty(z)}\right] \\
= \; & -\frac{1}{\alpha} \begin{array}{l} \left[(\alpha_1 W[y, v]_\infty - \alpha_2 W[y, u]_\infty) . \left(\alpha_1^{'} W[\overline{z}, v]_\infty - \alpha'_2 W[\overline{z}, u]_\infty\right)\right. \\ \left. - \left(\alpha_1^{'} W[y, v]_\infty - \alpha'_2 W[y, u]_\infty\right) . (\alpha_1 W[\overline{z}, v]_\infty - \alpha_2 W[\overline{z}, u]_\infty)\right] \end{array} \\
= \; & -\frac{1}{\alpha} \begin{array}{l} \left[\alpha_1^{'}\alpha_2 \left(W[y, v]_\infty . W[\overline{z}, u]_\infty - W[y, u]_\infty . W[\overline{z}, v]_\infty\right)\right. \\ \left. -\alpha_1\alpha'_2 \left(W[y, v]_\infty . W[\overline{z}, u]_\infty - W[y, u]_\infty . W[\overline{z}, v]_\infty\right)\right] \end{array} \\
= \; & -\frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha_1^{'}\alpha_2 - \alpha_1\alpha'_2\right)\left(W[y, v]_\infty . W[\overline{z}, u]_\infty - W[y, u]_\infty . W[\overline{z}, v]_\infty\right)\right] \\
= \; & W[y, \overline{z}]_\infty
\end{aligned}$$

dir ve

$$\begin{aligned} W[y,\overline{z}]_0 &= \begin{vmatrix} y(0) & \overline{z}(0) \\ py'(0) & p\overline{z}'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1^0(y) & B_1^0(\overline{z}) \\ B_2^0(y) & B_2^0(\overline{z}) \end{vmatrix} \\ &= B_1^0(y).B_2^0(\overline{z}) - B_1^0(\overline{z}).B_2^0(y) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.2 Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör:

$f_1(x) \in L_w^2(\mathbb{R}_+)$, $f_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = L_w^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ şeklinde göstereceğiz.

Eğer $\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1^{'} & \alpha_1 \\ \alpha_2^{'} & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha > 0$ kabul edersek,

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}, \widehat{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2 \end{pmatrix} \in H$$

olmak üzere

$$\left(\widehat{f}, \widehat{g}\right)_H = \int_0^\infty f_1(x)\overline{g_1(x)}w(x)dx + \frac{1}{\alpha} f_2\overline{g_2} \tag{3.2.1}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Böylece verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlamış olduk.

Verilen sınır değer problemine uygun olan

$$A_h : H \to H$$

operatörünü,

$$D(A_h) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ R'_\infty(f_1) \end{pmatrix} \in H \,|\, f_1(x) \in D, \quad R_0(f_1) = 0, \quad f_2 = R'_\infty(f_1) \right\} \tag{3.2.2}$$

$$A_h\widehat{f}=\widetilde{l}(\widehat{f}):=\begin{pmatrix}\ell(f_1)\\ R_\infty(f_1)\end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Lemma 3.2.1: $H=L^2_w(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında (3.2.1) ve (3.2.2) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\begin{aligned}\left(A_h\widehat{f},\widehat{g}\right)-\left(\widehat{f},A_h\widehat{g}\right) &= W[f_1,\overline{g_1}]_\infty-W[f_1,\overline{g_1}]_0\\ &+\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(f_1).\overline{R'_\infty(g_1)}-R'_\infty(f_1).\overline{R_\infty(g_1)}\right]\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

İspat :

$$\begin{aligned}\left(A_h\widehat{f},\widehat{g}\right) &= \int\limits_0^\infty\left(-(pf_1')'+qf_1\right)\overline{g_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}\\ &= -\int\limits_0^\infty(pf_1')'\overline{g_1}dx+\int\limits_0^\infty qf_1\overline{g_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}\end{aligned}$$

eşitliğin sağ tarafındaki ilk iki integrale iki defa kısmi integral uygularsak

$$\begin{aligned}\left(A_h\widehat{f},\widehat{g}\right) &= -(pf_1')(x).\overline{g_1(x)}+f_1(x).\overline{(pg_1')(x)}|_0^\infty-\int\limits_0^\infty f_1(pg_1')'dx+\int\limits_0^\infty qf_1\overline{g_1}dx+\tfrac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}\\ &= -(pf_1')(x).\overline{g_1(x)}+f_1(x).\overline{(pg_1')(x)}|_0^\infty+\int\limits_0^\infty\left(-(pg')'+qg_1\right)\overline{f_1}dx+\tfrac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}\\ &= -(pf_1')(x).\overline{g_1(x)}+f_1(x).\overline{(pg_1')(x)}|_0^\infty+\left(\widehat{f},A_h\widehat{g}\right)-\tfrac{1}{\alpha}\overline{f_2}g_2+\tfrac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(A_h\widehat{f},\widehat{g}\right)-\left(\widehat{f},A_h\widehat{g}\right) &= f_1.\overline{(pg_1')}-(pf_1')\overline{g_1}\Big|_0^\infty+\frac{1}{\alpha}\left[f_2\overline{g_2}-\overline{f_2}g_2\right]\\ &= W[f_1,\overline{g_1}]_\infty-W[f_1,\overline{g_1}]_0\\ &+\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(f_1).\overline{R'_\infty(g_1)}-R'_\infty(f_1).\overline{R_\infty(g_1)}\right]\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Teorem 3.2.1: A_h operatörü H de disipatifdir.

İspat : $\widehat{y} \in D(A_h)$ ve $\overline{D(A_h)} = H$ için (3.1.7) ve (3.2.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(A_h\widehat{y},\widehat{y}) - (\widehat{y},A_h\widehat{y}) &= W[y_1,\overline{y_1}]_\infty - W[y_1,\overline{y_1}]_0 \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y_1).\overline{R'_\infty(y_1)} - R'_\infty(y_1).\overline{R_\infty(y_1)}\right] \\
&= -W[y_1,\overline{y_1}]_0 \\
&= -B_1^0(y_1).B_2^0(\overline{y_1}) + B_1^0(\overline{y_1}).B_2^0(y_1)
\end{aligned}$$

ve $R_0(y_1) = 0$ ise $B_2^0(y_1) = hB_1^0(y_1)$ olacağından

$$\begin{aligned}
(A_h\widehat{y},\widehat{y}) - (\widehat{y},A_h\widehat{y}) &= -\overline{h}B_1^0(\overline{y_1})B_1^0(y_1) + hB_1^0(y_1)B_1^0(\overline{y_1}) \\
&= (h-\overline{h})\left|B_1^0(y_1)\right|^2 \\
&= 2i\,\mathrm{Im}\,h\left|B_1^0(y_1)\right|^2
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

olur.

$$\mathrm{Im}\,(A_h\widehat{y},\widehat{y}) = \mathrm{Im}\,h\left|B_1^0(y_1)\right|^2 \geq 0$$

dır. Yani A_h operatörü H de disipatif operatördür.

3.3 Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında ürettiği A_h operatörünün özdeğerleri ve özvektörleri:

$\lambda \in \mathbb{C}$ için (3.1.3) denkleminin

$$\begin{aligned}
B_1^0(\phi_\lambda) &= \phi_\lambda(0) = 1 \\
B_2^0(\phi_\lambda) &= (p\phi'_\lambda)(0) = h
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned}
B_1^\infty(\chi_\lambda) &= \alpha_2 - \lambda\alpha'_2 \\
B_2^\infty(\chi_\lambda) &= \alpha_1 - \lambda\alpha'_1
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

koşullarını sağlayan çözümleri $\phi_\lambda$ve χ_λ olsun.

(3.1.7) den, sıfırdaki Wronskiyen olan $\Delta_0(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\Delta_0(\lambda) &:= W\left[\chi_\lambda, \phi_\lambda\right]|_0 = -W\left[\phi_\lambda, \chi_\lambda\right]|_0 \\
&= -B_1^0(\phi_\lambda).B_2^0(\chi_\lambda) + B_1^0(\chi_\lambda).B_2^0(\phi_\lambda) \\
&= -B_2^0(\chi_\lambda) + hB_1^0(\chi_\lambda) \\
&= -R_0(\chi_\lambda)
\end{aligned}$$

ve (3.1.6) dan sonsuzdaki Wronskiyen olan $\triangle_\infty(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
\triangle_\infty(\lambda) &:= W\left[\chi_\lambda, \phi_\lambda\right]|_\infty = -W\left[\phi_\lambda, \chi_\lambda\right]|_\infty \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left[R_\infty(\phi_\lambda).R'_\infty(\chi_\lambda) - R'_\infty(\phi_\lambda).R_\infty(\chi_\lambda)\right] \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left[(\alpha_1 B_1^\infty(\phi_\lambda) - \alpha_2 B_2^\infty(\phi_\lambda)).\left(\alpha'_1 B_1^\infty(\chi_\lambda) - \alpha'_2 B_2^\infty(\chi_\lambda)\right)\right. \\
&\left. - (\alpha'_1 B_1^\infty(\phi_\lambda) - \alpha'_2 B_2^\infty(\phi_\lambda)).\left(\alpha_1 B_1^\infty(\chi_\lambda) - \alpha_2 B_2^\infty(\chi_\lambda)\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left[\alpha_1\alpha'_1 B_1^\infty(\phi_\lambda).B_1^\infty(\chi_\lambda) - \alpha_1\alpha'_2 B_2^\infty(\chi_\lambda).B_1^\infty(\phi_\lambda)\right. \\
&-\alpha'_1\alpha_2 B_2^\infty(\phi_\lambda).B_1^\infty(\chi_\lambda) + \alpha_2\alpha'_2 B_2^\infty(\phi_\lambda).B_2^\infty(\chi_\lambda) \\
&-\alpha_1\alpha'_1 B_1^\infty(\phi_\lambda).B_1^\infty(\chi_\lambda) + \alpha'_1\alpha_2 B_1^\infty(\phi_\lambda).B_2^\infty(\chi_\lambda) \\
&\left.+\alpha_1\alpha'_2 B_2^\infty(\phi_\lambda).B_1^\infty(\chi_\lambda) - \alpha_2\alpha'_2 B_2^\infty(\phi_\lambda).B_2^\infty(\chi_\lambda)\right] \\
&= \tfrac{1}{\alpha}\left[(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha'_2).\left(B_1^\infty(\phi_\lambda).B_2^\infty(\chi_\lambda) - B_2^\infty(\phi_\lambda).B_1^\infty(\chi_\lambda)\right)\right] \\
&= B_1^\infty(\phi_\lambda).(\alpha_1 - \lambda\alpha'_1) - B_2^\infty(\phi_\lambda).(\alpha_2 - \lambda\alpha'_2) \\
&= \alpha_1.B_1^\infty(\phi_\lambda) - \alpha_2.B_2^\infty(\phi_\lambda) - \lambda\left(\alpha'_1 B_1^\infty(\phi_\lambda) - \alpha'_2 B_2^\infty(\phi_\lambda)\right) \\
&= R_\infty(\phi_\lambda) - \lambda R'_\infty(\phi_\lambda)
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Lemma 3.3.1: (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerlerinden ibarettir. $(\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) = \Delta_\infty(\lambda))$

İspat: Kabul edelim ki $\lambda_0, \Delta_0(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. O halde

$$\Delta_0(\lambda_0) = \phi_{\lambda_0}(x)(p\chi'_{\lambda_0})(x) - (p\phi'_{\lambda_0})(x).\chi_{\lambda_0}(x) = 0$$

dır. $\Delta_0(\lambda_0)$, $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni olduğundan sonuncu eşitlik gereği $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani

$$\phi_{\lambda_0}(x) = k.\chi_{\lambda_0}(x) \tag{3.3.3}$$

olacak şekilde $k \neq 0$ sabit sayısı bulunur. (3.3.1) gereği $\phi_{\lambda_0}(x)$ (3.1.4) şartını, (3.3.2) gereği $\chi_{\lambda_0}(x)$ (3.1.5) şartını sağlayacağından (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin $\lambda = \lambda_0$ için bir çözümü olur. Yani $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğerdir. Benzer şekilde $\Delta_\infty(\lambda)$ nın sıfır yerlerinin (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu görülür.

Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Yani $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_0(\lambda_0) = 0$ veya $\Delta_\infty(\lambda_0) = 0$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_0$ özdeğeri için $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0) \neq 0$ olsun. $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ çözüm fonksiyonları lineer bağımsız olur. Buna göre (3.1.3) denkleminin genel çözümünü

$$y(x, \lambda_0) = c_1(\lambda_0)\phi_{\lambda_0}(x) + c_2(\lambda_0)\chi_{\lambda_0}(x)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.4) sınır şartı gereği

$$(py')(0) - hy(0) = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$c_1.\left((p\phi'_{\lambda_0})(0) - h\phi_{\lambda_0}(0)\right) + c_2.\left((p\chi'_{\lambda_0})(0) - h\chi_{\lambda_0}(0)\right) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\phi_{\lambda_0}(x)$ çözüm fonksiyonunun (3.1.4) sınır şartını sağladığı dikkate alınırsa

$$c_2.\left((p\chi'_{\lambda_0})(0) - h\chi_{\lambda_0}(0)\right) = -c_2.\Delta_0(\lambda_0) = 0$$

olur. Kabülümüz gereği $\Delta_0(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olur.
(3.1.5) şartından ve $c_2 = 0$ olmasından

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda_0).\left\{W[\phi_{\lambda_0}, v]_\infty(\alpha_1 - \lambda_0\alpha'_1) - W[\phi_{\lambda_0}, u]_\infty(\alpha_2 - \lambda_0\alpha'_2)\right\} \\ = \; & c_1(\lambda_0).\Delta_\infty(\lambda_0) = 0 \end{aligned}$$

ve $\Delta_\infty(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur.

Sonuç olarak $y(x, \lambda_0) = 0$ olur. Bu ise λ_0 ın özdeğer olması ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

$\Delta_0(\lambda)$ ve $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını λ_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ şeklinde gösterirsek

$$\widehat{\chi}_n = \begin{pmatrix} \chi_{\lambda_n}(x) \\ R'_\infty(\chi_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \in D(A_h)$$

vektörleri $A_h\widehat{\chi}_n = \lambda_n\widehat{\chi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\widehat{\chi}_n$ ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 3.3.2: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen

$$\begin{aligned} & l(y_0) = \lambda_0 y_0 \\ & R_\infty(y_0) - \lambda_0 R'_\infty(y_0) = 0 \\ & R_0(y_0) = 0 \\ & l(y_s) - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0 \\ & R_\infty(y_s) - \lambda_0 R'_\infty(y_s) - R'_\infty(y_{s-1}) = 0 \\ & R_0(y_s) = 0, s = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

şartları sağlanıyorsa $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemine $(3.1.3) - (3.1.5)$ sınır değer probleminin *öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri* denir.

Lemma 3.3.3: $(3.1.3) - (3.1.5)$ sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani $(3.1.3) - (3.1.5)$ sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş özvektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörler ve özvektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\widehat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R'_\infty(y_k) \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, 2, ..., n \tag{3.3.5}$$

eşitliği vardır.

İspat: Eğer $\widehat{y_0} \in D(A_h)$ ve $A_h\widehat{y_0} = \lambda_n\widehat{y_0}$ ise $l(y_0) = \lambda_0 y_0, \quad R_\infty(y_0) - \lambda_0 R'_\infty(y_0) = 0, \quad R_0(y_0) = 0$ sağlanır. Yani $(3.1.3) - (3.1.5)$ sınır değer probleminin özvektörü y_0 dır. Tersine olarak eğer (3.3.4) şartları varsa, buradan $\begin{pmatrix} y_0 \\ R'_\infty(y_0) \end{pmatrix} = \widehat{y_0} \in D(A_h)$ ve $A_h\widehat{y_0} = \lambda_n\widehat{y_0}$ dir. Yani $\widehat{y_0}$, A_h operatörünün özvektörüdür.

Ayrıca, eğer A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörleri ve özvektörler zinciri ise buradan $\widehat{y_k} \in D(A_h)$ $(k = 0, 1, 2, ..., n)$ ve $A_h\widehat{y_0} = \lambda_0\widehat{y_0}, \quad A_h\widehat{y_s} = \lambda_0\widehat{y_s} + \widehat{y}_{s-1}, \quad s = 1, 2, ..., n$ şartları ile birlikte (3.3.4) eşitliğini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ ler $\widehat{y_0}, \widehat{y_1}, ..., \widehat{y_n}$ vektörlerinin birinci bileşenleridir. Tersine, $(3.1.3) - (3.1.5)$ problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bileşenlerini ,$\widehat{y_k} = \begin{pmatrix} y_k \\ R'_\infty(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h), k = 0, 1, 2, ..., n$ ve $A_h\widehat{y_0} = \lambda_n\widehat{y_0}, A_h\widehat{y_s} = \lambda_0\widehat{y_s} + \hat{y}_{s-1}, s = 1, 2, ..., n$ den elde edebiliriz. Lemma 3.3.3.sağlandı.

3.4 Problemin Green Fonksiyonu

$\phi_\lambda$ve χ_λ fonksiyonları, (3.1.3) denkleminin (3.3.1) ve (3.3.2) koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$\lambda \in \mathbb{C}$ parametresi $(3.1.3) - (3.1.5)$ probleminin bir özdeğeri değilse, $\Delta(\lambda) \neq 0$ dır. Buradan $\phi_\lambda$ve χ_λ fonksiyonları lineer bağımsız olacağından, (3.1.3) denkleminin genel çözümünü

$$y(x, \lambda) = c_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{3.4.1}$$

şeklinde alabiliriz. Sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak

$$-(py')' + q(x)y = \lambda y - f(x) \tag{3.4.2}$$

denkleminin genel çözümünü

$$y(x, \lambda) = c_1(x, \lambda)\phi_\lambda(x) + c_2(x, \lambda)\chi_\lambda(x) \tag{3.4.3}$$

şeklinde arayalım. (3.4.3) ifadesinin x değişkenine göre türevini alırsak

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + c_1(x,\lambda)\phi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) + c_2(x,\lambda)\chi_\lambda'(x)$$

olur. Burada $c_i(x,\lambda), i = 1,2$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) = 0 \tag{3.4.4}$$

eşitliği sağlansın. $y'(x,\lambda)$ ifadesinin bir kez daha türevini alıp $l(y) = \lambda y$ diferensiyel denkleminde yazıp düzenlersek

$$c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda'(x) = f(x) \tag{3.4.5}$$

olur. (3.4.4) ve (3.4.5) ifadelerine, değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi bakarsak;

$$\begin{aligned} c_1'(x,\lambda) &= -\tfrac{1}{\Delta_0(\lambda)}\chi_\lambda(x)f(x) \\ c_2'(x,\lambda) &= \tfrac{1}{\Delta_\infty(\lambda)}\phi_\lambda(x)f(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} c_1(x,\lambda) &= \tfrac{1}{\Delta_0(\lambda)}\int_x^0 \chi_\lambda(x)f(x)dx + c_1(\lambda) \\ c_2(x,\lambda) &= \tfrac{1}{\Delta_\infty(\lambda)}\int_x^0 \phi_\lambda(x)f(x)dx + c_2(\lambda) \end{aligned}$$

$c_i(x,\lambda), i = 1,2$ ler λ nın keyfi fonksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi + \chi_\lambda(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\} \\ &\quad + c_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + c_1(\lambda)\chi_\lambda(x) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

dır. Bu genel çözümü sınır şartlarında yerine yazarak $c_i(\lambda)$ fonksiyonlarını bulalım. (3.4.6) ifadesinin x e göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} y'(x,\lambda) &= c_1(\lambda)\phi_\lambda'(x) + c_2(\lambda)\chi_\lambda'(x) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda'(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi + \chi_\lambda'(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\} \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

ve (3.1.4) şartından $(py')(0) - hy(0) = 0$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda)\left\{(p\phi_\lambda')(0) - h\phi_\lambda(0)\right\} + c_2(\lambda)\left\{(p\chi_\lambda')(0) - h\chi_\lambda(0)\right\} \\ & + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{((p\phi_\lambda')(0) - h\phi_\lambda(0)) \int_0^x \chi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi\right\} \\ = \ & 0 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

olur. $R_0(\phi_\lambda) = 0$ olmasından yukarıdaki ifade $-c_2(\lambda)\Delta_0(\lambda) = 0$ olur. λ bir özdeğer olmadığı için $\Delta_0(\lambda) \neq 0$ olacağından

$$c_2(\lambda) = 0 \tag{3.4.9}$$

olur.(3.1.5) şartı nedeniyle

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda)\left\{W[\phi_\lambda, v]_\infty(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_\lambda, u]_\infty(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\} \\ & + c_2(\lambda)\left\{W[\chi_\lambda, v]_\infty(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\chi_\lambda, u]_\infty(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\} \\ & + \tfrac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\chi_\lambda, v]_\infty(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\chi_\lambda, u]_\infty(\alpha_2 - \lambda\alpha_2') \int_x^0 \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi\right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

yazılabildiğinden $c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda) = 0$ ve λ bir özdeğer olmadığından $\Delta_\infty(\lambda) \neq 0$ olacağından

$$c_1(\lambda) = 0 \tag{3.4.10}$$

olur. Böylece (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi + \chi_\lambda(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi\right\} \tag{3.4.11}$$

olarak bulunur. Burada

$$G(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{\phi_\lambda(x)\cdot\chi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , x \leq \xi \\ \frac{\chi_\lambda(x)\cdot\phi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , \xi \leq x \end{cases} \tag{3.4.12}$$

olarak alırsak (3.4.6) eşitliği

$$y(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi := R_\lambda \tag{3.4.13}$$

şeklinde yazılır. Böylece (3.1.3)−(3.1.5) sınır değer probleminin Green fonksiyonu oluşturulmuş olur ve $G(x,.,\lambda)$ fonksiyonu (3.1.3) probleminin (3.1.4)−(3.1.5) sınır koşullarını sağlar.

$\phi_\lambda \in L^2_w(\mathbb{R}_+)$ ve $\chi_\lambda \in L^2_w(\mathbb{R}_+)$ olduğundan (L_0 ın indis defekti $(2,2)$ olduğundan), $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu Hilbert-Schmidt çekirdeğidir. Burada R_λ, $L^2_w(\mathbb{R}_+)$ uzayında Hilbert-Schmidt operatörüdür.

Sonuç 3.4.1: (3.1.3)−(3.1.5) sınır değer probleminin $G(x,y,\lambda)$ Green fonksiyonu için (3.4.13) formülü geçerlidir.

3.5 Rezolvent operatörü:

A_h operatörünün rezolventini hesaplamak için

$$(\lambda - A_h)\,\widehat{\chi} = \widehat{y} \tag{3.5.1}$$

denklemini ele alalım. Burada

$$\widehat{\chi} = \begin{pmatrix} \chi(x) \\ R'_\infty(\chi) \end{pmatrix} \in D(A_h) \text{ ve } \widehat{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix} \in H$$

için bu (3.5.1) denklemini

$$\lambda\chi - \ell(\chi) = y_1(x) \tag{3.5.2}$$

$$-\lambda R'_\infty(\chi) + R_\infty(\chi) = y_2 \tag{3.5.3}$$

sınır değer problemi şeklinde yazabiliriz. (3.5.1) − (3.5.3) probleminin çözümünü bulalım. Bu problemin genel çözümü (3.4.6) şeklindedir. $\widehat{\chi} \in D(A_h)$ olduğundan $\chi(x)$ fonksiyonu (3.1.4) ve (3.5.3) koşullarını sağlar. (3.1.4) şartı gereği $(py')(0) - hy(0) = 0$ olacağından Green fonksiyonunun hesaplanmasındaki yolu aynen takip edersek

$$c_2(\lambda) = 0 \tag{3.5.4}$$

olur. (3.5.3) şartı gereği

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda)\left\{W[\phi_{\lambda}, v]_{\infty}(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_{\lambda}, u]_{\infty}(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\} \\ & + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\chi_{\lambda}, v]_{\infty}(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\chi_{\lambda}, u]_{\infty}(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\}\int_0^x \phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi \\ = \; & y_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda) = y_2$ ise

$$c_1(\lambda) = \frac{y_2}{\Delta_\infty(\lambda)} \tag{3.5.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$R'_\infty\left(G(x,.,\lambda)\right) = R'_\infty\left(\frac{\phi_{\lambda}(x)\chi_\lambda(.)}{\Delta(\lambda)}\right) = \frac{\phi_{\lambda}(x)}{\Delta(\lambda)}R'_\infty(\chi_\lambda) = \frac{\phi_{\lambda}(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha$$

bulunur. O halde (3.5.2) ve (3.5.3) ifadelerini (3.4.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(x,\lambda) &= \frac{y_2}{\Delta_\infty(\lambda)}\phi_\lambda(x) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_{\lambda}(\xi)f(\xi)d\xi + \chi_{\lambda}(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\} \end{aligned}$$

$$\chi_\lambda(x,\lambda) = \int_0^x G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha}y_2 R'_\infty\left(G(x,.,\lambda)\right)$$

olur. (3.2.1) iç çarpımı gereği

$$\chi_\lambda(x,\lambda) = \left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y}\right\rangle$$

olur. Burada

$$\widetilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ R'_{\infty}\left(G(x,.,\lambda)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ \frac{\phi_{\lambda}(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha \end{pmatrix} \tag{3.5.6}$$

dir. Böylece (3.5.1) – (3.5.3) probleminin çözümünü

$$\widehat{\chi} = \begin{pmatrix} \left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y} \right\rangle \\ R'_{\infty}(\widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y}) \end{pmatrix} = R(\lambda; A_h)\widehat{y} \tag{3.5.7}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

Teorem 3.5.1: A_h operatörü H de maksimal disipatif bir operatördür.

İspat: A_h operatörünün H de maksimal disipatif olduğunu göstermek için

$$(A_h - \lambda I)D(A_h) = H \tag{3.5.8}$$

şartının sağlanıp sağlanmadığına bakmak gerekir. (3.5.8) şartının sağlanması için, $F \in H$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ için, (3.5.7) eşitliğini alalım. $x \to (G(x,.,\lambda), y_1)$ fonksiyonu $l(y) - \lambda y = y_1$, $(x \in \mathbb{R}_+)$ ve (3.1.4) – (3.1.5) sınır koşullarını sağlar. Hatta $F \in H, \operatorname{Im}\lambda < 0$ için, $\widehat{\phi} \in D(A_h)$ sonucuna ulaşırız. Her bir $F \in H$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ için, $(A_h - \lambda I)\widehat{\phi} = \widehat{y}$ alırız. Sonuç olarak, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ için, $(A_h - \lambda I)D(A_h) = H$ olur. Teorem 3.5.1 sağlanmış oldu.

3.6. Sıfırda disipatiflik durumunda A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu ve karakteristik fonksiyonu:

A_h operatörünün kendine eş dilatasyonunu kurmak için, $H = L^2_w(0,\infty) \oplus \mathbb{C}$ uzayına, giren $D_- = L^2(\mathbb{R}_-)$, $(\mathbb{R}_- := (-\infty, 0])$ ve çıkan $D_+ = L^2(\mathbb{R}_+)$, $(\mathbb{R}_+ := [0, +\infty))$ alt uzaylarını ekleyelim ve $\mathcal{H} = D_- \oplus H \oplus D_+$ortogonal toplamını oluşturalım. Bu uzaya "*Esas diletasyon uzayı*" denir. $\mathcal{H}$ nin elemanları $w = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle \in \mathcal{H}$ biçiminde yazılır ve $\varphi_- \in W^1_2(\mathbb{R}_-)$, $\varphi_+ \in W^1_2(\mathbb{R}_+)$, $\widehat{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix} \in H, y_1(x) \in D$, $y_2 = R'_{\infty}(y_1)$ dir. $W^1_2(\mathbb{R}_-)$ ve $W^1_2(\mathbb{R}_+)$ Sobolev uzaylarıdır.

$\mathcal{H}$ uzayında $w \in D(\mathcal{L}_h)$ elemanlarının kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} (py')(0) - hy(0) &= \beta\varphi_-(0) \\ (py')(0) - \overline{h}y(0) &= \beta\varphi_+(0) \\ y_2 &= R'_\infty(y_1) \end{aligned} \tag{3.6.1}$$

ve $\beta^2 := 2\operatorname{Im} h, \beta > 0$ sınır koşullarını sağlayan

$$\mathcal{L}\left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle = \left\langle i\tfrac{d\varphi_-}{d\xi}, \widetilde{\ell}(\widehat{y}), i\tfrac{d\varphi_+}{d\xi} \right\rangle \tag{3.6.2}$$

diferensiyel ifadesi ile oluşturulan $\mathcal{L}_h$ operatörünü düşünelim.

Teorem 3.6.1 $\mathcal{L}_h$ operatörü $\mathcal{H}$ uzayında kendine eş operatördür.

İspat : Önce $\mathcal{L}_h$ operatörünün simetrik olduğunu ispatlayalım.

$f, g \in D(\mathcal{L}_h)$ için $f = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle$ ve $g = \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle$ olsun.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} &= \left(\mathcal{L}\left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle, \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle\right) - \\ &\quad - \left(\left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle, \mathcal{L}\left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle\right) \\ &= \left(\left\langle i\tfrac{d\varphi_-}{d\xi}, \widetilde{\ell}(\widehat{y}), i\tfrac{d\varphi_+}{d\xi} \right\rangle, \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle\right) - \\ &\quad - \left(\left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle, \left\langle i\tfrac{d\varphi_-}{d\xi}, \widetilde{\ell}(\widehat{z}), i\tfrac{d\varphi_+}{d\xi} \right\rangle\right) \\ &= \int_{-\infty}^{0} \left(i\tfrac{d\varphi_-}{d\xi}, \psi_-\right) d\xi + \left(\widetilde{\ell}(\widehat{y}), \widehat{z}\right)_H \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} \left(i\tfrac{d\varphi_+}{d\xi}, \psi_+\right) d\xi - \int_{-\infty}^{0} \left(\varphi_-, i\tfrac{d\psi_-}{d\xi}\right) d\xi \\ &\quad - \left(\widehat{y}, \widetilde{\ell}(\widehat{z})\right)_H - \int_{0}^{\infty} \left(\varphi_+, i\tfrac{d\psi_+}{d\xi}\right) d\xi \end{aligned}$$

ifadesini düzenlemek için (3.2.4) Green formülü ve kısmi integrasyondan,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} &= W[y_1, \overline{z_1}]_\infty - W[y_1, \overline{z_1}]_0 \\ &\quad + \frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y_1).\overline{R'_\infty(z_1)} - R'_\infty(y_1).\overline{R_\infty(z_1)}\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +i\varphi_-^{'}(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+^{'}(0)\overline{\psi}_+(0) \\
= \; & -W[y_1, \overline{z}_1]_0 + \tfrac{i}{\beta^2}\left((py_1')(0) - hy_1(0)\right)\left(\overline{(pz_1')(0) - hz_1(0)}\right) \\
& -\tfrac{i}{\alpha^2}\left((py_1')(0) - \overline{h}y_1(0)\right)\left(\overline{(pz_1')(0)} - h\overline{z_1(0)}\right) \\
= \; & -W[y_1, \overline{z}_1]_0 + \tfrac{i}{\beta^2}\Big\{(py_1')(0).\overline{(pz_1')(0)} - \overline{h}(py_1')(0).\overline{z_1(0)} - \\
& - hy_1(0).\overline{(pz_1')(0)} - h\overline{h}y_1(0).\overline{z_1(0)}\Big\} \\
& -\tfrac{i}{\beta^2}\Big\{(py_1')(0).\overline{(pz_1')(0)} - h(py_1')(0).\overline{z_1(0)} \\
& - \overline{h}y_1(0).(p\overline{z_1')(0)} - h\overline{h}y_1(0).\overline{z_1(0)}\Big\} \\
= \; & -W[y_1, \overline{z_1}]_0 + \tfrac{i}{\beta^2}\Big\{(\overline{h} - h)y_1(0).\overline{(pz_1')(0)} - y_1(0).\overline{(pz_1')(0)}\Big\} \\
= \; & -W[y_1, \overline{z}_1]_0 + \tfrac{i}{2\operatorname{Im} h}\left(-2i\operatorname{Im} h\right)W[y_1, \overline{z_1}]_0 \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

olur. Yani $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} = 0$ olduğundan $\mathcal{L}_h$ simetrik bir operatördür.

Şimdi $\mathcal{L}_h$ operatörünün kendine eş olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathcal{L}_h^* \subset \mathcal{L}_h$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f = \left\langle \varphi_-, 0, \varphi_+ \right\rangle \in D\left(\mathcal{L}_h\right)$ ve $g = \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle \in D\left(\mathcal{L}_h^*\right), \varphi_\pm \in W_2^1(\mathrm{R}_\pm), \varphi_\pm(0) = 0$ için $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ bilineer formunu alalım. Kısmi integrasyon ile $\mathcal{L}_h^* g = \left\langle i\frac{d\psi_-}{d\xi}, \widehat{z}^*, i\frac{d\psi_+}{d\xi} \right\rangle$ elde ederiz. Burada $\psi_\pm \in W_2^1(\mathrm{R}_\pm)$, $\widehat{z}^* \in H$ dir. Benzer şekilde $f = \langle 0, \widehat{y}, 0 \rangle \in D\left(\mathcal{L}_h\right)$ ise $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ de kısmi integrasyon ile

$$
\mathcal{L}_h^* g = \mathcal{L}_h^* \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle = \left\langle i\frac{d\psi_-}{d\xi}, \widetilde{l}(\widehat{z}), i\frac{d\psi_+}{d\xi} \right\rangle, \; z_1 \in D, \; z_2 = R_\infty'(z_1) \qquad (3.6.3)
$$

Sonuç olarak (3.6.3) den, her $f \in D\left(\mathcal{L}_h\right)$ için $(\mathcal{L} f, g)_{\mathcal{H}} = (f, \mathcal{L} g)_{\mathcal{H}}$ alırız. Buradaki $\mathcal{L}$ operatörü (3.6.1) de tanımlanmıştır.$(\mathcal{L} f, g)_{\mathcal{H}}$ bilineer formundaki integrali alınmış terimlerin toplamı sıfıra eşit olmalıdır, yani

$$
\begin{aligned}
& W[y, \overline{z}]_\infty - W[y, \overline{z}]_0 + \tfrac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y_1).\overline{R_\infty'(z_1)} - R_\infty'(y_1).\overline{R_\infty(z_1)}\right] \\
& +i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) = 0
\end{aligned}
$$

dır. (3.1.6) eşitliği yukarıda yazılıp düzenlenirse,

$$
W[y, \overline{z}]_0 = i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0)
$$

dır. $\mathcal{L}_h$ nin sınır şartlarından $y(0)$ ve $(py')(0)$ yi çözersek

$$\begin{aligned} y(0) &= \tfrac{i}{\beta}\left(\varphi_-(0)-\varphi_+(0)\right) \\ (py')(0) &= \beta\varphi_-(0)+i\frac{h}{\beta}\left(\varphi_-(0)-\varphi_+(0)\right) \end{aligned}$$

ve

$$W[y,\overline{z}]_0 = i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0)-i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) \text{ ve } W[y,\overline{z}]_0 = y(0).\overline{(pz')(0)}-(py')(0).\overline{z(0)}$$

eşitliklerinden

$$\left[\beta\varphi_-(0)+i\tfrac{h}{\beta}\left(\varphi_-(0)-\varphi_+(0)\right)\right]\overline{z(0)}-\tfrac{i}{\beta}\left(\varphi_-(0)-\varphi_+(0)\right)\overline{(pz')(0)}$$

$$= i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0)-i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) \tag{3.6.4}$$

dir. Yukarıdaki denklemden $\varphi_-(0)$ ın katsayılarını çekersek

$$\frac{i\beta^2-h}{\beta}\overline{z(0)}+\tfrac{1}{\beta}\overline{(pz')(0)}=\overline{\psi}_-(0)$$

veya

$$(pz')(0)-hz(0)=\beta\psi_-(0) \tag{3.6.5}$$

olur. Benzer şekilde (3.6.4) den $\varphi_+(0)$ ın katsayılarını çekersek

$$(pz')(0)-\overline{h_1}z(0)=\beta\psi_+(0) \tag{3.6.6}$$

olur. Sonuç olarak $D\left(\mathcal{L}_h^*\right)\subset D\left(\mathcal{L}_h\right)$ dir.Böylece $\mathcal{L}_h=\mathcal{L}_h^*$ dir.

3.7. $\mathcal{L}_h$ operatörünün oluşturduğu üniter grup:

Şimdi $\mathcal{L}_h$ operatörünün, A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu gösterelim. Bunun için, Stone teoremine göre $\mathcal{L}_h$ kendine eş operatörün $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $\mathcal{U}_t=\exp(i\mathcal{L}_h t), t\in\mathbb{R}_+$ üniter grubunu oluşturmasından, $P:\mathcal{H}\longrightarrow H$ ve $P_1:H\longrightarrow\mathcal{H}$ dönüşümlerini $P:\left\langle\varphi_-,\widehat{y},\varphi_+\right\rangle\longrightarrow\widehat{y}$ ve $P_1:\widehat{y}\longrightarrow\langle 0,\widehat{y},0\rangle$ şeklinde ifade edelim.

Üniter grup yardımıyla

$$Z_t := P\mathcal{U}_t P_1, t \geqslant 0 \text{ için}$$

$\{Z_t\}$ operatörler ailesi, H de tamamen üniter olmayan büzülmelerin güçlü sürekli bir yarıgrubudur. B_h üreteci ile gösterilen bu yarıgrup

$$B_h \widehat{y} = \lim_{t \to +0} (it)^{-1} (Z_t \widehat{y} - \widehat{y})$$

dir. B_h üretecinin tanım bölgesi bu limitin var olan bütün y vektörlerini içerir. B_h operatörü disipatiftir ve $\mathcal{L}_h$ operatörüne B_h ın *kendine eş dilatasyonu* denir.

Teorem 3.7.1 $\mathcal{L}_h$ operatörü A_h operatörünün kendine eş dilatasyonudur.

İspat: $B_h = A_h$ olduğunu gösterirsek $\mathcal{L}_h$ operatörünün A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu göstermiş oluruz. Bunu yapmak için ilk olarak

$$P (\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} P_1 \widehat{y} = (A_h - \lambda I)^{-1} P_1 \widehat{y},\ \widehat{y} \in H,\ \operatorname{Im} \lambda < 0 \qquad (3.7.1)$$

eşitliğini doğrulayalım. Bunun için

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} P_1 \widehat{y} = g = \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle$$

ifadesini kuralım. Buradan

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I)\, g = P_1 \widehat{y}$$

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I) \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle = \langle 0, \widehat{y}, 0 \rangle$$

$$\left\langle i\tfrac{d\psi_-}{d\xi}, \widetilde{l}(\widehat{z}), i\tfrac{d\psi_+}{d\xi} \right\rangle - \lambda \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle = \langle 0, \widehat{y}, 0 \rangle$$

ve böylece

$$i\tfrac{d\psi_-}{d\xi} - \lambda \psi_- = 0 \Longrightarrow \psi_- (\xi) = \psi_-(0) e^{-i\lambda\xi}$$

$$i\frac{d\psi_+}{d\xi}-\lambda\psi_+=0\Longrightarrow\psi_+(\zeta)=\psi_+(0)e^{-i\lambda\zeta}$$

elde edilir. $g\in D(\mathcal{L}_h)$ olduğundan $\psi_-\in L^2(\mathbb{R}_-)$ ve $\psi_-(0)=0$ dır. Sonuç olarak $\widehat{z}$, $(pz')(0)-hz(0)=0$ sınır şartını sağlar. Böylece $\widehat{z}\in D(A_h)$olur.

$$\widetilde{l}(\widehat{z})-\lambda\widehat{z}=\widehat{y}\Longrightarrow\mathcal{L}\widehat{z}-\lambda\widehat{z}=\widehat{y}$$

denklemi için ise, $\operatorname{Im}\lambda<0$ için λ noktası, disipatif operatörün bir özdeğeri olamaz.

$\psi_+(0)=\frac{1}{\beta}\left\{(pz')(0)-\overline{h}z(0)\right\}$ formülünden $\psi_+(0)$ bulunur. Böylece $\widehat{y}\in H$ ve $\operatorname{Im}\lambda<0$ için

$$(A_h-\lambda I)\,\widehat{z}=\widehat{y}\Longrightarrow\widehat{z}=(A_h-\lambda I)^{-1}\,\widehat{y}+z_\lambda$$

bir çözümdür ve burada z_λ,

$$-(py')'+q(x)y-\lambda w(x)y(x)=0$$

homojen denkleminin (3.6.1) sınır şartlarını sağlayan bir çözümüdür. Ancak $\operatorname{Im}\lambda<0$ olduğundan, z_λ disipatif A_h operatörünün alt yarı düzleme ait bir özdeğeridir. Bu ise mümkün değildir. Çünkü disipatif operatörlerin özdeğerleri üst yarı düzlemdedir. Dolayısı ile $z_\lambda\equiv 0$ dır. Buradan

$$\widehat{z}=(A_h-\lambda I)^{-1}\,\widehat{y}$$

dir ve P dönüşümünün uygulanmasıyla (3.7.1) ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}(A_h-\lambda I)^{-1}&=P\,(\mathcal{L}_h-\lambda I)^{-1}\,P_1=iP\int_0^\infty\mathcal{U}_te^{-i\lambda t}dtP_1\\&=i\int_0^\infty Z_te^{-i\lambda t}dt=(B_h-\lambda I)^{-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $B_h=A_h$ olduğu görülür. Bu da Teorem 3.7.1 i ispatlar.

3.8 Dilatasyonun Saçılma Teorisi ve Disipatif Sturm-Liouville Operatörünün Fonksiyonel Modeli:

$\{\mathcal{U}_t\}$ üniter grubunun en büyük özelliği, Lax-Philips saçılma teorisinin uygulanmasına imkan vermesidir. Yani bu grup aşağıdaki özellikleri sağlayan $D_- = \langle L^2(\mathbb{R}_-), 0, 0\rangle$ ve $D_+ = \langle 0, 0, L^2(\mathbb{R}_+)\rangle$ alt uzaylarına sahiptir.

1) $\mathcal{U}_t D_- \subset D_-, t \leq 0;$
$\mathcal{U}_t D_+ \subset D_+, t \geq 0$

2) $\bigcap\limits_{t\leq 0} \mathcal{U}_t D_- = \bigcap\limits_{t\geq 0} \mathcal{U}_t D_+ = \{0\}$

3) $\bigcup\limits_{t\leq 0} \mathcal{U}_t D_- = \bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{U}_t D_+ = \mathcal{H}$

4) $D_- \perp D_+$

Bu özellikler ispatlanabilir. 4) özelliğinin doğruluğu açıktır. 1) özelliğini ispatlamak için D_+ alt uzayı için $R_\lambda = (\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1}$ ifadesini oluşturalım (D_- alt uzayı için de ispatlar benzer şekilde yapılır). $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olmak üzere, yarıdüzlemdeki her λ ve $f = \big\langle 0, 0, \varphi_+(s)\big\rangle \in D_+$ için,

$$R_\lambda f = \left\langle 0, 0, -ie^{i\lambda\xi}\int\limits_0^{\xi} e^{i\lambda s}\varphi_+(s)ds\right\rangle$$

olarak ifade edilebilir. Böylece $f = \big\langle 0, 0, \varphi_+(s)\big\rangle \in D_+$ için, $R_\lambda f \in D_+$ olduğu görülür. Bu durumda, $g \perp D_+$ için, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} 0 &= (R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \left((\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} f, g\right)_{\mathcal{H}} = \left(-i\int e^{i(\mathcal{L}_h - \lambda I)t} f dt, g\right) \\ &= \left(-i\int e^{i\mathcal{L}_h t} e^{-i\lambda t} f dt, g\right) = -i\int\limits_0^{\infty} e^{-i\lambda t}\left(\mathcal{U}_t f, g\right)_{\mathcal{H}} dt \end{aligned}$$

olur ki bu da $(\mathcal{U}_t f, g)_{\mathcal{H}} = 0$ (her $t \geq 0$ için) olduğunu ifade eder. Böylece $\mathcal{U}_t f \in D_+$ olduğu görülür yani $t \geq 0$ için $\mathcal{U}_t f \subset D_+$ dir. O halde 1) özelliği ispatlanmış olur.

(2) özelliğini ispatlamak için, $P^+ : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$ ve $P_1^+ : L^2(\mathbb{R}_+) \longrightarrow D_+$ dönüşümlerini $P^+ : \big\langle \psi_-, \widehat{y}, \psi_+\big\rangle \longrightarrow \varphi_+, \quad P_1^+ : \varphi \longrightarrow \langle 0, 0, \varphi\rangle$ olarak alalım.

$\mathcal{U}_t^+ := P^+\mathcal{U}_t P_1^+, (t \geq 0)$ izometriler yarıgrubunun $L^2(\mathbb{R}_+)$ da tek taraflı bir öteleme olduğunu gözönünde bulunduralım. Aslında,

$$V_t\varphi(\xi) = \varphi(\xi - t), \xi > t \text{ ve } V_t\varphi(\xi) = 0,\ 0 \leq \xi \leq t$$

şeklinde ifade edilen $L^2(\mathbb{R}_+)$ üzerindeki V_t tek taraflı öteleme yarıgrubunu üretecinin $\varphi(0) = 0$ sınır koşuluna sahip $i\left(\frac{d}{d\xi}\right)$ diferensiyel operatörü olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, $t \geq 0$ olmak üzere $\mathcal{U}_t^+$ izometriler yarıgrubunun üreteci S

$$S\varphi = P^+\mathcal{L}_h P_1^+\varphi = P^+\mathcal{L}_h \langle 0, 0, \varphi\rangle = P^+\left\langle 0, 0, i\frac{d\varphi}{d\xi}\right\rangle = i\frac{d\varphi}{d\xi}$$

şeklinde ifade edilir, burada $\varphi \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ ve $\varphi(0) = 0$ dır. Fakat bir yarıgrup üreteci tarafından tek türlü belirlenebileceğinden $\mathcal{U}_t^+ = V_t$ olmalıdır. Böylece,

$$\underset{t\geq 0}{\cap} \mathcal{U}_t D_+ = \left\langle 0, 0, \underset{t\geq 0}{\cap} V_t L^2(\mathbb{R}_+)\right\rangle = \{0\}$$

olup (2) özelliği ispatlanmış olur.

Lax-Philips saçılma teorisinin uygulanabilmesi için, spektral gösterim yardımıyla saçılma matrisini tanımlayacağız. Bu arada D_- ve D_+ alt uzayları için (3) özelliğini de ispatlayacağız.

(3) özelliğini ispatlamak için önce aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.8.1: A_h operatörü tamamen kendine eş olmayandır (basittir).

İspat: Kabul edelim ki A_h operatörü basit olmasın. Yani $H' \subset H$ invariyant alt uzayı vardır ve bu uzay üzerinde A_h operatörünün kısıtlaması olan A_h' operatörü kendine eştir. (H' alt uzayı $V_t = \exp(iA_h), V_t^* = \exp(-iA_h^*), t > 0, V_t^{*-1} = V_t$ izometrilerinin yarı grubuna göre invariyanttır).

H' alt uzayının $\{0\}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Bunun için, $\widehat{f} \in H' \cap D(A_h) = D(A_h')$ ise $\widehat{f} \in D(A_h'^*)$ ve

$$0 \;=\; \frac{d}{dt}\left\|e^{iA_h'\,t}\widehat{f}\right\|_H^2 = \frac{d}{dt}\left(e^{iA_h'\,t}\widehat{f}, e^{iA_h'\,t}\widehat{f}\right)_H$$

$$= \; i\left(A_h' \, e^{iA_h' \, t}\widehat{f}, e^{iA_h' \, t}\widehat{f}\right)_H - i\left(e^{iA_h' \, t}\widehat{f}, A_h' \, e^{iA_h' \, t}\widehat{f}\right)_H$$

dir. (3.2.9) özelliği kullanılarak ve $g := e^{iA_h' \, t}\widehat{f}$ alarak

$$\begin{aligned}
0 &= i\,(A_h'\widehat{g}, \widehat{g})_H - (\widehat{g}, A_h'\widehat{g})_H \\
&= W\,[g_1,\overline{g_1}]_\infty - W\,[g_1,\overline{g_1}]_o + \frac{1}{\alpha}\,[R_\infty(f_1).R_\infty'(\overline{g_1}) - R_\infty'(f_1).R_\infty(\overline{g_1})] \\
&= 2\operatorname{Im} h \left|B_1^0(g_1)\right|^2 \\
&= \beta^2 \left|e^{iA_h' \, t}\widehat{f}_1(0)\right|^2
\end{aligned}$$

olur. $\widehat{f} \in D(A_h')$ olduğundan A_h' operatörü de yukarıdaki koşulu sağlar. Ayrıca bu koşulu A_h' operatörünün özfonksiyonları da sağlamalıdır.

Böylece H' de yer alan A_h' operatörünün özvektörleri olan A_h operatörünün $\widehat{y}(x,\lambda)$ özvektörleri için, $\widehat{y}(0) = 0$ dır. (3.1.4) şartından $(py')(0) = 0$ ve $\widehat{y}(x,\lambda) = 0$ dır.

Böylece, A_h' kendine eş operatörünün özvektörlerinin açılımı teoreminden, $H' = \{0\}$ dır. Yani A_h operatörü basittir. Lemma 3.8.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi

$$H_- = \overline{\underset{t\geq 0}{\cup} \mathcal{U}_t D_-}, H_+ = \overline{\underset{t\leq 0}{\cup} \mathcal{U}_t D_+}$$

uzaylarını oluşturalım.

Lemma 3.8.2 $H_- + H_+ = \mathcal{H}$ dir.

İspat: $D_\pm$ alt uzaylarının 1) özelliğini düşünelim. H', H ın bir alt uzayı olmak üzere, $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \ominus (H_- + H_+)$ alt uzayı $\{\mathcal{U}_t\}$ üniter grubuna göre invariyanttır ve $\mathcal{H}' = \langle 0, H', 0\rangle$ şeklinde ifade edilebilir. Böylece, eğer $\mathcal{H}'$ alt uzayı (ve H') sıfırdan farklı olsaydı, bu alt uzaya kısıtlanmış $\{\mathcal{U}_t'\}$ üniter grubu $\{\mathcal{U}_t\}$ grubunun bir üniter parçası olacaktı ve buradan A_h operatörünün H' ne kısıtlaması olan A_h' operatörü kendine eş olacaktı. Ancak A_h' operatörünün basitliğinden dolayı (Lemma 3.8.1) $H' = \{0\}$ yani $\mathcal{H}' = \{0\}$ olduğu ortaya çıkar. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lax-Philips'in saçılma teorisi programında, saçılma matrisi spektral gösterim teorisi yoluyla tanımlanmıştır. Biz bunları oluşturmaya çalışacağız. Bu arada D_- ve D_+ alt uzayları için 3) özelliğini de ispatlayacağız.

$l(y) = \lambda y$ denkleminin

$$\theta_\lambda(0) = \frac{\alpha_2'}{\alpha}, (p\theta_\lambda'(0)) = \frac{\alpha_1'}{\alpha}, \phi_\lambda(0) = \alpha_2 - \alpha_2'\lambda, (p\phi_\lambda'(0)) = \alpha_1 - \alpha_1'\lambda$$

şartlarını sağlayan çözümleri $\theta_\lambda(x)$ ve $\phi_\lambda(x)$ olsun.

Aşağıdaki kabülleri yapalım:

$$w(\lambda) := -\frac{p\chi_\lambda'(0)}{\chi_\lambda(0)} \tag{3.8.1}$$

$$S_h(\lambda) := \frac{w(\lambda) + h}{w(\lambda) + \overline{h}} \tag{3.8.2}$$

(3.8.1) deki $w(\lambda)$ fonksiyonu, reel eksen üzerindeki kutupları sayılabilir sayıda olan $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde meromorfik bir fonksiyondur. Hatta $w(\lambda)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını göstermek mümkündür:

$$\operatorname{Im}\lambda . \operatorname{Im} w(\lambda) < 0, \ \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0 \text{ için}$$

ve $w(\lambda)$ nın reeel eksendeki kutupları hariç her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\overline{w(\lambda)} = w(\overline{\lambda})$ dir.

$$U_\lambda^-(x,\xi,\zeta) = \left\langle e^{-i\lambda\xi}, -\beta\left\{(w(\lambda)+h)\chi_\lambda(0)\right\}^{-1}\widehat{\chi}_\lambda(x), \overline{S_h}(\lambda)e^{-i\lambda\zeta}\right\rangle \tag{3.8.3}$$

alalım. Burada $x,\zeta \in \mathbb{R}_+, \xi \in \mathbb{R}_-$, $\widehat{\chi}_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \chi_\lambda(x) \\ \alpha \end{pmatrix}$ dır. λ nın reel değeri için $U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ vektörleri $\mathcal{H}$ uzayına ait değildir.

Lemma 3.8.3: $U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ vektörleri $\mathcal{L}U = \lambda U$ denklemini ve $\mathcal{L}_\lambda$ operatörü için verilen sınır şartlarını sağlar.

İspat:

$$\begin{aligned} y_2 &= \alpha_1' W[\chi_\lambda, v]_\infty - \alpha_2' W[\chi_\lambda, u]_\infty = \alpha_1'(\alpha_2 - \alpha_2'\lambda) - \alpha_2'(\alpha_1 - \alpha_1'\lambda) \\ &= \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 - \lambda(\alpha_1'\alpha_2' - \alpha_2'\alpha_1') = \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (py')(0) - hy(0) &= -\beta\frac{1}{w(\lambda)+h}\left(\frac{p\chi_\lambda'(0)}{\chi_\lambda(0)} - h\frac{\chi_\lambda(0)}{\chi_\lambda(0)}\right) \\ &= \beta\frac{1}{w(\lambda)+h}(w(\lambda)+h) = \beta \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} (py')(0) - \overline{h}y(0) &= -\beta\frac{1}{w(\lambda)+h}\left(\frac{p\chi_\lambda'(0)}{\chi_\lambda(0)} - \overline{h}\frac{\chi_\lambda(0)}{\chi_\lambda(0)}\right) \\ &= \beta\frac{w(\lambda)+\overline{h}}{w(\lambda)+h} = \beta\overline{S_h}(\lambda) \end{aligned}$$

olur. Burada U_λ^- ler $\mathcal{L}_\lambda$ ın sürekli spektrumunun özfonksiyonlarıdır.
$U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ vektörleri yardımıyla $F_- : f \to \widetilde{f}_-(\lambda)$ dönüşümünü

$$(F_- f)(\lambda) := \widetilde{f}_-(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f, U_\lambda^-\right)_{\mathcal{H}}$$

formülü yardımıyla $f = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle$ elemanları üzerinde tanımlayalım. Burada $\varphi_-(\xi), \varphi_+(\zeta)$ ve $y_1(x)$ fonksiyonları kompakt dayanaklı vektör-değerli fonksiyonlardır.

Lemma 3.8.4: *F_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürür ve $f, g \in H_-$ elemanları için Parseval eşitliği ve ters dönüşüm formülleri geçerlidir:*

$$\begin{aligned} (f,g)_{\mathcal{H}} &= \left(\widetilde{f}_-, \widetilde{g}_-\right)_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_-(\lambda)\overline{\widetilde{g}_-(\lambda)}d\lambda, \\ f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_+(\lambda)U_\lambda^+ d\lambda \end{aligned}$$

burada $\widetilde{f}_{-}(\lambda) = (F_{-}f)(\lambda)$ ve $\widetilde{g}_{-}(\lambda) = (F_{-}g)(\lambda)$ dır.

İspat: $f, g \in D_{-}$ için, $f = \langle \varphi_{-}, 0, 0 \rangle, g = \langle \psi_{-}, 0, 0 \rangle$ olmak üzere, Paley-Wiener teoremi ile,

$$\widetilde{f}_{-}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f, U_{\lambda}^{-}\right)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_{-}(\xi)\, e^{i\lambda\xi} d\xi \in H_{-}^{2},$$

dir ve Fourier integralleri için Parseval eşitliği kullanılarak,

$$(f, g)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\varphi_{-}(\xi), \psi_{-}(\xi)\right) d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_{-}(\lambda)\overline{\widetilde{g}_{-}(\lambda)} d\lambda = (F_{-}f, F_{-}g)_{L^2}$$

bulunur. Burada $H_{\pm}^{2}$ ile üst ve alt yarıdüzlemlere genişletilebilen vektör değerli analitik fonksiyonları içeren $L^2(\mathbb{R})$ uzayındaki Hardy sınıfları gösterilmiştir.

Şimdi Parseval eşitliğini tüm H_{-} uzayına genişletelim. Bunun için, D_{-} ye ait olan düzgün ve kompakt dayanağa sahip fonksiyonlardan elde edilen H_{-} de yoğun olan vektörler kümesini $H_{-}^{'}$ ile gösterelim. Bu vektörler

$$f \in H_{-}^{'} : f = U_t f_0, f_0 = \langle \varphi_{-}, 0, 0 \rangle, \varphi_{-} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{-})$$

dir, burada $T = T_f$, f e bağlı olmayan negatif bir sayıdır. Bu durumda, eğer $f, g \in H_{-}^{'}$ ise, $T > T_f$ ve $T > T_g$ için $U_{-T}f, U_{-T}g \in D_{-}$ dir ve bu vektörlerin birinci bileşenleri $C_0^{\infty}(\mathbb{R}_{-})$ uzayındadır. Böylece, $U_t\ (t \in \mathbb{R})$ operatörleri üniter olduğundan

$$F_{-}U_t f = \left(U_t f, U_{\lambda}^{-}\right)_{\mathcal{H}} = e^{i\lambda t}\left(f, U_t U_{\lambda}^{-}\right)_{\mathcal{H}} = e^{i\lambda t} F_{-} f$$

dir ve bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned}(f, g)_{\mathcal{H}} &= (U_{-T}f, U_{-T}g)_{\mathcal{H}} = (F_{-}U_{-T}f, F_{-}U_{-T}g)_{L^2} \\ &= \left(e^{i\lambda t}F_{-}f, e^{i\lambda t}F_{-}g\right)_{L^2} = (F_{-}f, F_{-}g)_{L^2}\end{aligned}$$

elde edilir.

H'_- uzayı H_- de yoğun olduğundan, yukarıdaki son ifadede kapanış alınması ile tüm H_- uzayında Parseval eşitliği elde edilmiş olur. Parseval eşitliğindeki tüm integrallerin, sonlu aralıklar üzerinde limitleri alınarak, ters dönüşüm formülü elde edilir. Sonuç olarak,

$$F_-H_- = \overline{\underset{t\geqslant 0}{\cup} F_-U_tD_-} = \overline{\underset{t\geqslant 0}{\cup} e^{i\lambda t}H^2_-} = L^2(\mathbb{R})$$

olur, yani F_- dönüşümü H_- uzayını $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürür. Lemma ispatlanmış oldu.
Şimdi

$$\begin{aligned} U^+_\lambda(x,\xi,\zeta) &= U^-_\lambda(x,\xi,\zeta) \\ &= \left\langle S_h(\lambda)e^{-i\lambda\xi}, -\beta\left\{\left(w(\lambda)+\overline{h}\right)\chi_\lambda(0)\right\}^{-1}\widehat{\chi}_\lambda(x), e^{-i\lambda\zeta}\right\rangle \quad (3.8.4) \end{aligned}$$

vektörler kümesini oluşturalım. Burada $x,\zeta \in \mathbb{R}_+, \xi \in \mathbb{R}_-, \widehat{\chi}_\lambda(x) = \begin{pmatrix} \chi_\lambda(x) \\ \alpha \end{pmatrix}$ dır. λ nın reel değeri için $U^+_\lambda(x,\xi,\zeta)$ vektörleri $\mathcal{H}$ uzayına ait değildir.

Lemma 3.8.5: $U^+_\lambda(x,\xi,\zeta)$ vektörleri $\mathcal{L}U = \lambda U$ denklemini ve $\mathcal{L}_\lambda$ operatörü için verilen sınır şartlarını sağlar.

Bu lemma, Lemma 3.8.3 e benzer şekilde ispatlanabilir.

$U^+_\lambda(x,\xi,\zeta)$ vektörleri yardımıyla $F+ : f \to \widetilde{f}_+(\lambda)$ dönüşümünü $f = \langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \rangle$ elemanları üzerinde,

$$(F_+f)(\lambda) := \widetilde{f}_+(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f, U^+_\lambda\right)_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\varphi_-(\xi), \varphi_+(\zeta)$ ve $y_1(x)$ fonksiyonları kompakt dayanaklı vektör-değerli fonksiyonlardır.

Lemma 3.8.6: F_+ dönüşümü H_+ uzayını izometrik olarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürür ve her $f, g \in H_+$ elemanları için Parseval eşitliği ve ters dönüşüm formülleri geçerlidir:

$$\begin{aligned}
(f,g)_{\mathcal{H}} &= \left(\widetilde{f}_+, \widetilde{g}_+\right)_{L^2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_+(\lambda)\overline{\widetilde{g}_+(\lambda)}d\lambda, \\
f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{f}_+(\lambda)U_\lambda^+ d\lambda,
\end{aligned}$$

burada $\widetilde{f}_+(\lambda) = (F_+f)(\lambda)$ ve $\widetilde{g}_+(\lambda) = (F_+g)(\lambda)$ dır.

Bu lemma, Lemma 3.8.4 e benzer şekilde ispatlanır.

(3.8.2) eşitliğine göre, $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ olduğundan, U_λ^- ve U_λ^+ vektörlerinin ifadeleri kullanılarak,

$$U_\lambda^- = \overline{S}_h(\lambda)U_\lambda^+ \tag{3.8.5}$$

eşitliği yazılabilir.

Lemma 3.8.4 ve Lemma 3.8.6 dan $H_- = H_+$ olduğu görülür. Lemma 3.8.2 de göz önünde bulundurulduğunda $\mathcal{H} = H_- = H_+$ elde edilir ve 3) özelliği giren ve çıkan alt uzaylar için ispatlanmış oldu.

Bu durumda, F_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürürken U_t operatörünü $e^{i\lambda t}$ çarpma operatörüne ve D_- alt uzayını H_-^2 uzayına dönüştürür. Bunun anlamı F_- dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun giren spektral gösterimidir. Benzer şekilde F_+ dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun çıkan spektral gösterimidir. (3.8.5) ifadesinden bir $f \in \mathcal{H}$ elemanının F_+ gösteriminden F_- gösterimine geçişi, $S_h(\lambda)$ fonksiyonları ile çarpım olarak

$$\widetilde{f}_-(\lambda) = S_h(\lambda)\widetilde{f}_+(\lambda)$$

şeklinde gerçeklenir. Lax ve Philips'in saçılma teorisine göre D_- ve D_+ alt uzaylarına göre $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisi, $f \in \mathcal{H}$ vektörünün F_- gösterimine karşılık gelen F_+ gösterimini elde etmek için çarpılması gereken katsayılardır. Böylece $\overline{S_h}(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisidir. Bu yaptıklarımız aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 3.8.7: $\overline{S_h}(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun (kendine eş $\mathcal{L}_h$ operatörü için) saçılma matrisidir.

Tanım 3.8.8: $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üst yarı düzlemde analitik olsun. Eğer, $\lambda \in \mathbb{C}_+$ için $|S_h(\lambda)| \leq 1$ ve hemen hemen her $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ ise, $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ üst yarı düzlemde *iç fonksiyondur* denir.

$S_h(\lambda)$ fonksiyonu, üst yarı düzlemde, keyfi sabit olmayan iç fonksiyon olsun. $K = H_+^2 \ominus S_h H_+^2$ tanımlayalım. $K \neq \{0\}$ uzayı H_+^2 uzayının bir alt uzayıdır. $\varphi = \varphi(\lambda) \in K$ için $Z_t\varphi = P\left[e^{i\lambda t}\varphi\right]$ formülüne göre K daki $Z_t\,(t \geqslant 0)$ operatörlerinin yarıgrubunu alalım. Burada P, H_+^2 dan K ya tanımlı izdüşüm operatörüdür.$\{Z_t\}$ yarıgrubunun üretecini $T\varphi = \lim\limits_{t\to+0} (it)^{-1}(Z_t\varphi - \varphi)$ ile gösterelim. Burada T, tüm $\varphi \in K$ fonksiyonlarını içeren, tanım bölgesi $D(T)$ olan disipatif operatördür. T, *model disipatif operatör* olarak adlandırılır (Bu tanım Lax ve Philips'in tanımıdır. Bu model operatör Sz.-Nagy ve Foiaş tarafından oluşturulan model disipatif operatörün özel bir durumudur). Temel kabule göre $S_h(\lambda)$, T operatörünün karakteristik fonksiyonudur.

$K = \langle 0, H, 0\rangle$ olmak üzere, $\mathcal{H} = D_- \oplus K \oplus D_+$ şeklinde ifade edilebilir. F_- üniter dönüşümünün özelliğinden, F_- dönüşümü altında aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}) & , & f \to \widetilde{f}_-(\lambda) = (F_-g)(\lambda) \\ D_- \to H_-^2 & , & D_+ \to S_h H_+^2 \\ K \to H_+^2 \ominus S_h H_+^2 & , & U_t f \to (F_- U_t F_-^{-1}\widetilde{f}_-)(\lambda) = e^{i\lambda t}\widetilde{f}_-(\lambda) \end{array} \tag{3.8.6}$$

Bu formüller A_h operatörünün, karakteristik fonksiyonu $S_h(\lambda)$ olan disipatif model operatöre üniter eşdeğer olduğunu gösterir. Üniter eşdeğer disipatif operatörlerin karakteristik fonksiyonları aynı olduğundan aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.8.9: A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu, (3.8.2) formülünde tanımlanan $S_h(\lambda)$ fonksiyonudur.

3.9 Disipatif Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Analizi:

A_h disipatif operatörünün spektral analizindeki problemler, karakteristik fonksiyon yardımıyla çözülebilir. Örneğin; $S_h(\lambda) = s(\lambda)B(\lambda)$ çarpımındaki $s(\lambda)$ singüler çarpanın yokluğu $L^2(\mathbb{R})$ uzayında A_h operatörünün özvektörlerinin ve asosye vektörlerinin tamlığını sağlar.

Teorem 3.9.1: $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere tüm h değerleri için ($h = h_0$ değeri hariç) A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu olan $S_h(\lambda)$, Blaschke çarpanıdır. A_h operatörünün spektrumu purely (sırf) ayrıktır ve açık üst yarı düzleme aittir. $h \neq h_0$ için A_h operatörünün spektrumu, sonlu katlılığa sahip sonsuzda limiti olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerlerden oluşmuştur. ($h \neq h_0$) için A_h operatörünün özvektörler ve asosye vektörler sistemi H de tamdır.

İspat: (3.8.2) eşitliğinden açıktır ki $S_h(\lambda)$, üst yarıdüzlemde iç fonksiyondur. Ayrıca $S_h(\lambda)$, tüm λ kompleks düzlemi için meromorfiktir. Böylece,

$$S_h(\lambda) = e^{i\lambda b} B_h(\lambda), \quad b = b(h) \geqslant 0 \tag{3.9.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $B_h(\lambda)$, Blaschke çarpanıdır. (3.9.1) eşitliğinden

$$|S_h(\lambda)| = \left|e^{i\lambda b}\right| |B_h(\lambda)| \leqslant e^{-b(h)\operatorname{Im}\lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0. \tag{3.9.2}$$

üstelik, (3.8.2) eşitliğindeki $S_h(\lambda)$ eşitliğinden yararlanarak

$$w(\lambda) = \frac{h - \overline{h} S_h(\lambda)}{S_h(\lambda) - 1} \tag{3.9.3}$$

yazılabilir.

Eğer verilen $h\,(\operatorname{Im} h > 0)$ değeri için $b(h) > 0$ ise, $\lim\limits_{t\to+\infty} S_h(it) = 0$ olduğu (3.9.2) den ve $\lim\limits_{t\to+\infty} w(it) = -h$ olduğu (3.9.3) den anlaşılmaktadır. $w(\lambda)$ değeri h den bağımsız olduğundan $b(h)$, $h \neq h_0$ tek noktası hariç olmak üzere, sıfırdan farklıdır (ayrıca $h_0 = -\lim\limits_{t\to+\infty} w(it)$ dır). Teorem ispatlanmış oldu.

Lemma 3.8.1 e göre, (3.1.3) $-$ (3.1.5) sınır değer probleminin özdeğerleri ile A_h

operatörünün özdeğerleri çakışır. Hatta (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin özvektörleri ve asosye vektörleri için (3.3.5) formülü vardır. Bu teorem aşağıda verilen teoremde verileceği şekilde de yorumlanabilir.

Teorem 3.9.2: (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer probleminin spektrumu, sırf ayrıktır ve açık üst yarı düzleme aittir. $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere $h = h_0$ değeri hariç tüm h değerleri için (3.1.3) – (3.1.5) sınır değer problemi ($h \neq h_0$ için) sonlu katlılığa sahip, sonsuzda limiti olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerleri vardır. Bu problemin ($h \neq h_0$ için) özvektörler ve asosye vektörler sistemi $L^2_w(\mathbb{R}_+)$ de tamdır.

4. SINIR ŞARTLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN DİSİPATİF SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $(0,\infty)$ aralığında, sonsuzda disipatif ve spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında verilmesi durumunda araştırdığımız sınır değer problemine uygun olarak tanımladığımız özel Hilbert uzayında, verilmiş sınır değer problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan disipatif operatör oluşturulmuştur. Daha sonra operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

Oluşturulan bu A_h disipatif operatörünün kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Saçılma teorisi uygulanarak verilen kendine eş olmayan operatörün karakteristik fonksiyonu bulunmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri incelenerek tamlık teoremleri ispatlanmıştır.

4.1 Giriş

$$\ell(y) := -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} y(x) + q(x)y(x), x \in \mathbb{R}_+ := [0,\infty) \tag{4.1.1}$$

Schrödinger diferensiyel ifadesini ele alalım. Burada q reel değerli, $\mathbb{R}_+$ da Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ olsun.

ℓ diferensiyel ifadesinden operatöre geçmek istersek:

$$(y,z) = \int_0^\infty y(x)\overline{z(x)}dx$$

iç çarpımını sağlayan $\int_0^\infty |y(x)|^2 dx < \infty$ şeklindeki bütün kompleks değerli y fonksiyonlarının oluşturduğu $L^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayını kurmalıyız.

(4.1.1) ifadesi ile gösterilen minimal simetrik operatörün kapanışını L_0 ile gösterelim. D_0, L_0 operatörünün tanım bölgesi olsun. D, ile $L^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayındaki öyle y fonksiyonlarının oluşturduğu küme olsun ki, y' lokal mutlak sürekli ve

$\ell(y) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ dır. D, maksimal L operatörünün tanım bölgesi olup $L = L_0^*$ dır (Naimark,1968).

L_0 simetrik operatörünün defekt sayısı $defL_0 = defL_0^- + defL_0^+ - 2$ formülü ile ifade edilir. $b \in (0, \infty)$ herhangi bir sayı olmak üzere, bu aralık $(0, b)$ ve (b, ∞) biçiminde parçalanabilir. L_0 operatörünü oluşturan aynı diferensiyel ifade ile, $(0, b)$ aralığında L_0^- ve (b, ∞) aralığında L_0^+ operatörleri oluşturulur. L_0^- ve L_0^+ operatörlerinin defekt sayıları belirlenerek L_0 simetrik operatörünün defekt sayısı hesaplanır. L_0 operatörünün indis defekti $(2, 2)$ olduğunu kabul edelim. Yukarıdaki (4.1.1) denklemi için, $0 \leq \nu < 1$ ve $\nu \geqslant 1$ olmak üzere iki durum söz konusudur. $0 \leq \nu < 1$ durumunda indis defekt $(2, 2)$ olduğundan her iki uçta limit-çember durumu sözkonusudur. $0 \leq \nu < 1$ iken (4.1.1) denkleminin bütün çözümleri L^2 uzayına ait olmalıdır. O halde $defL_0^- = 2$ ve $defL_0 = 2$ olup $defL_0^+ = 2$ olarak hesaplanır. Bu durum Weyl-çember durumudur, $x = 0$ ve $x = \infty$ da sınır koşulları verilir. $\nu \geqslant 1$ durumunda ise 0 noktasında limit-nokta durumu sözkonusu olduğundan 0 da sınır koşulu verilmez.

Bu sebeple biz bu bölümde $0 \leq \nu < 1$ iken, sıfırda spektral parametre ve sonsuzda disipatif koşul verilmesi durumunu inceleyeceğiz.

$$\ell(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$$

denkleminin

$$v_1(c) = 1, v_1'(c) = 0, v_2(c) = 0, v_2'(c) = 1, \; c \in (0, \infty) \tag{4.1.2}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ olsun. $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız ve Wronskiyenlerinin 1 olduğu açıktır. Yani

$$W[v_1, v_2]_x := (v_1 v_2' - v_1' v_2) \underset{x}{|} = W[v_1, v_2]_c = 1, \; x \in \mathbb{R}_+$$

dır. L_0 operatörünün indis defekti $(2, 2)$ olduğundan $v_1(x)$,$v_2(x) \in D$ dir.

Her $y, z \in D$ için

$$\int_0^x \ell(y)\overline{z}dt - \int_0^x y\overline{\ell(z)}dt = W[y,\overline{z}]_x - W[y,\overline{z}]_0$$

Green formülü geçerlidir ve

$$W[y,\overline{z}]_\infty := \lim_{x\to+\infty} W[y,\overline{z}]_x, \quad W[y,\overline{z}]_0 := \lim_{x\to 0} W[y,\overline{z}]_x$$

limitleri var ve sonludur. Burada her $y, z \in D$ için

$$W[y,\overline{z}]_x = W[y,v_1]_x.W[\overline{z},v_2]_x - W[y,v_2]_x.W[\overline{z},v_1]_x, \; x \in \mathbb{R}_+$$

dır.

$(0,\infty)$ aralığında verilen (4.1.1) diferensiyel ifadesi için, sonsuzda disipatif, sol uç noktada singüler ve spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında verilmesi durumunda aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$\ell(y) = \lambda y, \; y \in D, \; x \in \mathbb{R}_+ \tag{4.1.3}$$

$$\alpha_1 W[y,v_1]_0 - \alpha_2 W[y,v_2]_0 = \lambda\left(\alpha_1^{'} W[y,v_1]_0 - \alpha_2^{'} W[y,v_2]_0\right) \tag{4.1.4}$$

$$W[y,v_1]_\infty - hW[y,v_2]_\infty = 0, \qquad \operatorname{Im} h > 0 \tag{4.1.5}$$

burada λ, kompleks spektral parametre, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1^{'}, \alpha_2^{'} \in \mathbb{R} := (-\infty,\infty)$ ve

$$\alpha := \begin{vmatrix} \alpha_1^{'} & \alpha_1 \\ \alpha_2^{'} & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1^{'}\alpha_2 - \alpha_2^{'}\alpha_1 > 0$$

dır. Aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$R_0(y) := \alpha_1 W[y,v_1]_0 - \alpha_2 W[y,v_2]_0$$
$$R_0'(y) := \alpha_1' W[y,v_1]_0 - \alpha_2' W[y,v_2]_0$$
$$B_1^{\infty}(y) := W[y,v_1]_{\infty}$$
$$B_2^{\infty}(y) := W[y,v_2]_{\infty}$$
$$B_1^{0}(y) := W[y,v_1]_{0}$$
$$B_2^{0}(y) := W[y,v_2]_{0}$$
$$R_{\infty}(y) = B_1^{\infty}(y) - hB_2^{\infty}(y)$$

Keyfi $y, z \in D$ için $R_0(\overline{z}) = \overline{R_0(z)}$, $R_0'(\overline{z}) = \overline{R_0'(z)}$, $B_1^{\infty}(\overline{z}) = \overline{B_1^{\infty}(z)}$, $B_2^{\infty}(\overline{z}) = \overline{B_2^{\infty}(z)}$ olmak üzere

$$W[y,\overline{z}]_0 = \frac{1}{\alpha}\left[R_0(y)\overline{R_0'(z)} - R_0'(y)\overline{R_0(z)}\right], \tag{4.1.6}$$

$$W[y,\overline{z}]_{\infty} = B_1^{\infty}(y)B_2^{\infty}(\overline{z}) - B_1^{\infty}(\overline{z})B_2^{\infty}(y) \tag{4.1.7}$$

dir.

4.2 Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör:

$f_1(x) \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ şeklinde gösterelim. Eğer $\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha > 0$ kabul edersek,

$$\widehat{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}, \widehat{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2 \end{pmatrix} \in H$$

olmak üzere

$$\left(\widehat{f}, \widehat{g}\right)_H = \int_0^{\infty} f_1(x).\overline{g_1(x)}dx + \frac{1}{\alpha} f_2\overline{g_2} \tag{4.2.1}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Böylece verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış oldu.

Verilen sınır değer problemine uygun olan

$$A_h : H \to H$$

operatörünü,

$$D(A_h) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ R_0'(f_1) \end{pmatrix} \in H \,|\, f_1(x) \in D, R_\infty(f_1) = 0, f_2 = R_0'(f_1) \right\} \quad (4.2.2)$$

$$A_h \widehat{f} = \widetilde{l}(\widehat{f}) := \begin{pmatrix} \ell(f_1) \\ R_0(f_1) \end{pmatrix} \quad (4.2.3)$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Lemma 4.2.1: $H = L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (4.2.1) ve (4.2.2) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\left(A_h \widehat{f}, \widehat{g}\right) - \left(\widehat{f}, A_h \widehat{g}\right) = W[f_1, \overline{g_1}]_\infty - W[f_1, \overline{g_1}]_0 + \frac{1}{\alpha}\left[R_0(f_1).\overline{R_0'(g_1)} - R_0'(f_1).\overline{R_0(g_1)}\right] \quad (4.2.4)$$

eşitliği sağlanır.

İspatı Lemma 3.2.1 deki ispata benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.2: A_h operatörü H de disipatifdir.

İspat : Önce A_h operatörünün H de disipatif olduğunu gösterelim. Bunun için $y \in D(A_h)$, $\overline{D(A_h)} = H$ olmak üzere (3.1.7) , (3.1.8) ve (3.2.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
(A_h \widehat{y}, \widehat{y}) - (\widehat{y}, A_h \widehat{y}) &= W[y_1, \overline{y_1}]_\infty - W[y_1, \overline{y_1}]_0 + \frac{1}{\alpha}\left[\mathbb{R}_0(y_1).\overline{\mathbb{R}_0'(y_1)} - \mathbb{R}_0'(y_1).\overline{\mathbb{R}_0(y_1)}\right] \\
&= W[y_1, \overline{y_1}]_\infty \\
&= B_1^\infty(y_1).B_2^\infty(\overline{y_1}) - B_1^\infty(\overline{y_1}).B_2^\infty(y_1)
\end{aligned}$$

eşitliği vardır ve $R_\infty(y_1) = 0$ ise $B_1^\infty(y_1) = hB_2^\infty(y_1)$ olacağından

$$\begin{aligned} (A_h\widehat{y},\widehat{y}) - (\widehat{y}, A_h\widehat{y}) &= hB_2^\infty(y_1)B_2^\infty(\overline{y_1}) - \overline{h}B_2^\infty(\overline{y_1})B_2^\infty(y_1) \\ &= (h-\overline{h})B_2^\infty(y_1)B_2^\infty(\overline{y_1}) \\ &= 2i\,\mathrm{Im}\,h.\left|B_2^\infty(y_1)\right|^2 \end{aligned} \qquad (4.2.5)$$

olur. Buradan

$$\mathrm{Im}\,(A_h\widehat{y},\widehat{y}) = \mathrm{Im}\,h.\left|B_2^\infty(y_1)\right|^2 \geq 0$$

dır. Yani A_h operatörü H de disipatif operatördür.

4.3 Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında ürettiği A_h operatörünün özdeğerleri ve özvektörleri:

$\lambda \in \mathbb{C}$ için (4.1.3) denkleminin

$$\begin{aligned} B_1^\infty(\chi_\lambda) &= W[\chi_\lambda, v_1]_\infty = 1 \\ B_2^\infty(\chi_\lambda) &= W[\chi_\lambda, v_2]_\infty = h \end{aligned} \qquad (4.3.1)$$

$$\begin{aligned} B_1^0(\phi_\lambda) &= W[\phi_\lambda, v_1]_0 = \alpha_2 - \lambda\alpha_2' \\ B_2^0(\phi_\lambda) &= W[\phi_\lambda, v_2]_0 = \alpha_1 - \lambda\alpha_1' \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

koşullarını sağlayan çözümleri $\phi_\lambda$ve χ_λ olsun.
Sıfırdaki Wronskiyen olan $\Delta_0(\lambda)$, (4.1.6) dan,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \quad := R_0(\chi_\lambda) - \lambda R_0'(\chi_\lambda)$$

ve sonsuzdaki Wronskiyen olan $\triangle_\infty(\lambda)$, (4.1.7) den

$$\triangle_\infty(\lambda) := -R_\infty(\phi_\lambda)$$

olarak hesaplanır.

Lemma 4.3.1: (4.1.3) – (4.1.5) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta_0(\lambda)$ $(\triangle_\infty(\lambda))$nın sıfır yerlerinden ibarettir. $\Delta_0(\lambda)$ veya $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını $\lambda_n (n = 0, 1, 2, ...)$ şeklinde gösterirsek

$$\widehat{\phi}_n = \begin{pmatrix} \phi_{\lambda_n}(x) \\ R'_0(\phi_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \in D(A_h)$$

vektörleri $A_h \widehat{\phi}_n = \lambda_n \widehat{\phi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\widehat{\phi}_n$ ler A_h operatörünün özfonksiyonlarıdır.

İspatı Lemma 3.3.1 deki ispata benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 4.3.2: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen

$$\begin{aligned}
&l(y_0) = \lambda_0 y_0 \\
&R_0(y_0) - \lambda_0 . R'_0(y_0) = 0 \\
&R_\infty(y_0) = 0 \\
&l(y_s) - \lambda_0 . y_s - y_{s-1} = 0 \\
&R_0(y_s) - \lambda_0 . R'_0(y_s) - R'_0(y_{s-1}) = 0 \\
&R_\infty(y_s) = 0, \qquad s = 1, 2, ..., n
\end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemine $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin *öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri* denir.

Lemma 4.3.3: $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş özvektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörleri ve özvektörleri zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\widehat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R'_0(y_k) \end{pmatrix}, \ k = 0, 1, 2, ..., n \tag{4.3.5}$$

eşitliği vardır.

İspatı Lemma 3.3.3 deki ispata benzer şekilde yapılabilir.

4.4 Problemin Green Fonksiyonu:

$\phi_\lambda$ve χ_λ fonksiyonları, (4.1.3) denkleminin (4.3.1) ve (4.3.2) koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$\lambda \in \mathbb{C}$ parametresi (4.1.3)−(4.1.5) probleminin bir özdeğeri değilse, $\Delta(\lambda) \neq 0$ dır. Buradan $\phi_\lambda$ve χ_λ fonksiyonları lineer bağımsız olacağından, (4.1.3) denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{4.4.1}$$

şeklinde alabiliriz. Sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak

$$l(y) = \lambda y - f(x) \tag{4.4.2}$$

denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2(x,\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{4.4.3}$$

şeklinde arayalım. (4.4.3) ifadesinin x değişkenine göre türevini alırsak

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + c_1(x,\lambda)\phi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) + c_2(x,\lambda)\chi_\lambda'(x)$$

olur. Burada $c_i(x,\lambda), i = 1,2$ fonksiyonlarını öyle seçelim ki

$$c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda(x) = 0 \tag{4.4.4}$$

eşitliği sağlansın. $y'(x,\lambda)$ ifadesinin bir kez daha türevini alıp $l(y) = \lambda y$ diferensiyel denkleminde yazıp düzenlersek

$$c_1'(x,\lambda)\phi_\lambda'(x) + c_2'(x,\lambda)\chi_\lambda'(x) = f(x) \tag{4.4.5}$$

olur. (4.4.4) ve (4.4.5) ifadelerine, değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi bakarsak;

$$c_1'(x,\lambda) = -\tfrac{1}{\Delta(\lambda)}\chi_\lambda(x)f(x)$$
$$c_2'(x,\lambda) = \tfrac{1}{\Delta(\lambda)}\phi_\lambda(x)f(x)$$

olur. Buradan

$$c_1(x,\lambda) = \tfrac{1}{\Delta(\lambda)} \int\limits_x^0 \chi_\lambda(x) f(x) dx + c_1(\lambda)$$
$$c_2(x,\lambda) = \tfrac{1}{\Delta(\lambda)} \int\limits_x^0 \phi_\lambda(x) f(x) dx + c_2(\lambda)$$

$c_i(x,\lambda), i = 1,2$ ler λ nın keyfi fonksiyonu olduğundan

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \phi_\lambda(x) \int\limits_x^0 \chi_\lambda(\xi).f(\xi) d\xi + \chi_\lambda(x) \int\limits_0^x \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi \right\} \\ &\quad + c_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + c_1(\lambda)\chi_\lambda(x) \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

olur. Bu genel çözümü sınır şartlarında yerine yazarak, $c_i(\lambda)$ fonksiyonlarını bulalım.(4.4.6) ifadesinin x e göre türevini alırsak

$$\begin{aligned} y'(x,\lambda) &= c_1(\lambda)\phi'_\lambda(x) + c_2(\lambda)\chi'_\lambda(x) \\ &\quad + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \phi'_\lambda(x) \int\limits_x^0 \chi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi + \chi'_\lambda(x) \int\limits_0^x \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \tag{4.4.7}$$

ve (4.1.4) şartından

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda) \{ W[\phi_\lambda, v_1]_0 (\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_\lambda, v_2]_0 (\alpha_2 - \lambda\alpha_2') \} \\ & + c_2(\lambda) \{ W[\chi_\lambda, v_1]_0 (\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\chi_\lambda, v_2]_0 (\alpha_2 - \lambda\alpha_2') \} \\ & + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \{ W[\phi_\lambda, v_1]_0 (\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_\lambda, v_2]_0 (\alpha_2 - \lambda\alpha_2') \} \int\limits_x^0 \chi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

ve $c_2(\lambda)\Delta_0(\lambda) = 0$ olur. λ bir özdeğer olmadığından $\Delta_0(\lambda) \neq 0$ olur ve $c_2(\lambda) = 0$ olarak hesaplanır.

(4.1.5) şartından

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda) \{ W[\phi_\lambda, v_1]_\infty - hW[\phi_\lambda, v_2]_\infty \} \\ & + c_2(\lambda) \{ W[\chi_\lambda, v_1]_\infty - hW[\chi_\lambda, v_2]_\infty \} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\chi_{\lambda}, v_1]_\infty - hW[\chi_{\lambda}, v_2]_\infty\right\} \int_x^0 \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

ve $-R_\infty(\chi_{\lambda}) = 0$ şartından -$c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda) = 0$ ve λ bir özdeğer olmadığından $\Delta_\infty(\lambda) \neq 0$ olacağından $c_1(\lambda) = 0$ olur. Böylece $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin genel çözümü

$$
y(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_{\lambda}(\xi) f(\xi) d\xi + \chi_{\lambda}(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi\right\} \tag{4.4.8}
$$

olarak bulunur. Burada

$$
G(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \frac{\phi_\lambda(x)\chi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , x \le \xi \\ \frac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)} & , \xi \le x \end{cases} \tag{4.4.9}
$$

olarak alırsak (4.4.6) eşitliği

$$
y(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi = R_\lambda \tag{4.4.10}
$$

şeklinde yazılır. Böylece $(4.1.3)-(4.1.5)$ sınır değer probleminin Green fonksiyonu oluşturulmuş olur ve $G(x,.,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.3) probleminin $(4.1.4)-(4.1.5)$ sınır koşullarını sağlar.

$\phi_\lambda \in L^2(\mathbb{R}_+)$ ve $\chi_{\lambda} \in L^2(\mathbb{R}_+)$ olduğundan (L_0 ın indis defekti $(2,2)$ olduğundan), $G(x,\xi,\lambda)$ fonksiyonu Hilbert-Schmidt çekirdeğidir. Burada R_λ, $L^2(\mathbb{R}_+)$ uzayında Hilbert-Schmidt operatörüdür.

Sonuç 4.4.1: $(4.1.3)-(4.1.5)$ sınır değer probleminin $G(x,y,\lambda)$ Green fonksiyonu için (4.4.10) formülü geçerlidir.

4.5 Rezolvent operatörü:

A_h operatörünün rezolventini hesaplamak için

$$(\lambda - A_h)\,\widehat{\phi} = \widehat{y} \tag{4.5.1}$$

denklemini ele alalım. Burada

$$\widehat{\phi} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ R_0'(\phi) \end{pmatrix} \in D(A_h) \text{ ve } \widehat{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix} \in H$$

için bu (4.5.1) denklemini

$$\lambda\phi - \ell(\phi) = y_1(x) \tag{4.5.2}$$

$$-\lambda R_0'(\phi) + R_0(\phi) = y_2 \tag{4.5.3}$$

sınır değer problemi şeklinde yazabiliriz. (4.5.1) – (4.5.3) probleminin çözümünü bulalım. Bu problemin genel çözümü (4.4.6) şeklindedir. $\widehat{\phi} \in D(A_h)$ olduğundan $\phi(x)$ fonksiyonu (4.1.4) ve (4.5.3) koşullarını sağlar. (4.1.4) şartı gereği, Green fonksiyonunun hesaplanmasındaki yolu aynen takip edersek

$$c_2(\lambda) = 0 \tag{4.5.4}$$

olur. (4.5.3) şartı gereği

$$\begin{aligned} & c_1(\lambda)\left\{W[\phi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\} \\ & + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\phi_\lambda, v_1]_0(\alpha_1 - \lambda\alpha_1') - W[\phi_\lambda, v_2]_0(\alpha_2 - \lambda\alpha_2')\right\} \int_x^0 \chi_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi \\ = \; & y_2 \end{aligned}$$

olur. Buradan $c_1(\lambda)\Delta_0(\lambda) = y_2$ ise

$$c_1(\lambda) = \frac{y_2}{\Delta_0(\lambda)} \tag{4.5.5}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$R_0'\left(G(x,.,\lambda)\right) = R_0'\left(\frac{\chi_\lambda(x)\phi_\lambda(.)}{\Delta(\lambda)}\right) = \frac{\chi_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)} R_0'(\phi_\lambda) = \frac{\chi_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha$$

bulunur. O halde (4.5.2) ve (4.5.3) ifadelerini (4.4.6) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \phi_\lambda(x,\lambda) &= \frac{y_2}{\Delta_0(\lambda)} + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi + \chi_\lambda(x)\int_0^x \phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\} \\ &= \int_0^x G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi + \frac{1}{\alpha}y_2 R_0'\left(G(x,.,\lambda)\right) \end{aligned}$$

olur. (4.2.1) iç çarpımı gereği

$$\phi_\lambda(x,\lambda) = \left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y} \right\rangle$$

olur. Burada

$$\widetilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ R_0'\left(G(x,.,\lambda)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ \frac{\chi_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha \end{pmatrix} \tag{4.5.6}$$

dir. Böylece (4.5.1) – (4.5.3) probleminin çözümünü

$$\widehat{\phi} = \begin{pmatrix} \left\langle \widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y} \right\rangle \\ R_0'(\widetilde{G}_{x,\lambda}, \widehat{y}) \end{pmatrix} = R(\lambda; A_h)\widehat{y} \tag{4.5.7}$$

şeklinde bulmuş oluruz.

Teorem 4.5.1: A_h operatörünün H de maksimal disipatif operatör olması için

$$(A_h - \lambda I)D(A_h) = H, \;\; \operatorname{Im}\lambda < 0 \tag{4.2.6}$$

şartının sağlanması gerektiği Teorem 3.5.1 in ispatında verilmiştir.

4.6. Sonsuzda disipatiflik durumunda A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu ve karakteristik fonksiyonu:

A_h operatörünün kendine eş dilatasyonunu kurmak için, $H = L^2(0,\infty) \oplus \mathbb{C}$ uzayına, giren $D_- = L^2(\mathbb{R}_-)$, $(\mathbb{R}_- := (-\infty, 0])$ ve çıkan $D_+ = L^2(\mathbb{R}_+)$, $(\mathbb{R}_+ := [0, +\infty))$ alt uzaylarını ekleyelim ve $\mathcal{H} = D_- \oplus H \oplus D_+$ esas dilatasyon uzayını oluşturalım. $\mathcal{H}$ nin elemanları $w = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle \in \mathcal{H}$ biçiminde yazılır ve $\varphi_- \in W_2^1(\mathrm{R}_-)$, $\varphi_+ \in W_2^1(\mathrm{R}_+)$, $\widehat{y} \in H$, $\widehat{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2 \end{pmatrix}$, $y_1 \in D$, $y_2 = R_0'(y_1)$ dir. $W_2^1(\mathrm{R}_-)$ ve $W_2^1(\mathrm{R}_+)$ Sobolev uzaylarıdır. $\mathcal{H}$ uzayında $w \in D(\mathcal{L}_h)$elemanlarının kümesi üzerinde

$$
\begin{aligned}
W[y, v_1]_\infty - hW[y, v_2]_\infty &= \beta\varphi_-(0) \\
W[y, v_1]_\infty - \overline{h}W[y, v_2]_\infty &= \beta\varphi_+(0) \\
& y_2 = R_0'(y_1)
\end{aligned}
$$

ve $\beta^2 := 2\operatorname{Im} h, \beta > 0$ sınır koşullarını sağlayan

$$
\mathcal{L}\left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle = \left\langle i\frac{d\varphi_-}{d\xi}, \widetilde{\ell}(\widehat{y}), i\frac{d\varphi_+}{d\xi} \right\rangle \tag{4.6.1}
$$

diferensiyel ifadesi ile oluşturulan $\mathcal{L}_h$ operatörünü düşünelim.

Teorem 4.6.1 $\mathcal{L}_h$ operatörü $\mathcal{H}$ uzayında kendine eş operatördür.

İspat : Önce $\mathcal{L}_h$ operatörünün simetrik olduğunu ispatlayalım.
$f, g \in D(\mathcal{L}_h)$ için $f = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle$ ve $g = \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle$ olsun.
(4.2.4) Green formülü ve kısmi integrasyondan

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} &= W[y_1, \overline{z_1}]_\infty - W[y_1, \overline{z_1}]_0 \\
&\quad + \frac{1}{\alpha}\left[\mathbb{R}_0(y_1).\overline{\mathbb{R}_0'(z_1)} - \mathbb{R}_0'(y_1).\overline{\mathbb{R}_0(z_1)}\right] \\
&\quad + i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) \\
&= W[y_1, \overline{z_1}]_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{i\beta^2}\left(W[y_1,v_1]_\infty - hW[y_1,v_2]_\infty\right)\overline{\left(W[z_1,v_1]_\infty - hW[z_1,v_2]_\infty\right)} \\
&+\tfrac{1}{i\beta^2}\left(W[y_1,v_1]_\infty - \overline{h}W[y_1,v_2]_\infty\right)\left(W\overline{[z_1,v_1]}_\infty - hW\overline{[z_1,v_2]}_\infty\right) \\
&= W[y_1,\overline{z_1}]_\infty \\
&-\tfrac{1}{i\beta^2}\left\{\begin{array}{c} W[y_1,v_1]_\infty W\overline{[z_1,v_1]}_\infty - \overline{h}W[z_1,v_1]_\infty W\overline{[z_1,v_2]}_\infty \\ -hW[y_1,v_2]_\infty W\overline{[z_1,v_1]}_\infty + |h|^2 W[y_1,v_2]_\infty W[z_1,v_2]_\infty \end{array}\right\} \\
&+\tfrac{1}{i\beta^2}\left\{\begin{array}{c} W[y_1,v_1]_\infty W\overline{[z_1,v_1]}_\infty - hW[z_1,v_1]_\infty W\overline{[z_1,v_2]}_\infty \\ -\overline{h}W[y_1,v_2]_\infty W\overline{[z_1,v_1]}_\infty + |h|^2 W[y_1,v_2]_\infty W[z_1,v_2]_\infty \end{array}\right\} \\
&= W[y_1,\overline{z_1}]_\infty - \tfrac{1}{i\beta^2}\left\{\begin{array}{c} (h-\overline{h})W[y_1,v_1]_\infty W\overline{[z_1,v_2]}_\infty \\ +(\overline{h}-h)W[y_1,v_2]_\infty W\overline{[z_1,v_1]}_\infty \end{array}\right\} \\
&= W[y_1,\overline{z_1}]_\infty - \tfrac{i}{2\operatorname{Im} h}\left(-2i\operatorname{Im} h\right)W[y_1,\overline{z_1}]_\infty \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Yani $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} = 0$ olduğundan $\mathcal{L}_h$ simetrik bir operatördür.

Şimdi $\mathcal{L}_h$operatörünün kendine eş olduğunu gösterelim. Bunun için $\mathcal{L}_h^* \subset \mathcal{L}_h$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f = \left\langle \varphi_-, 0, \varphi_+ \right\rangle \in D(\mathcal{L}_h)$ ve $g = \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle \in D(\mathcal{L}_h^*)$, $\varphi_\pm \in W_2^1(\mathrm{R}_\pm), \varphi_\pm(0) = 0$ için $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ bilineer formunu alalım. Kısmi integrasyon ile $\mathcal{L}_h^* g = \left\langle i\frac{d\psi_-}{d\xi}, \widehat{z}^*, i\frac{d\psi_+}{d\xi} \right\rangle$ elde ederiz. Burada $\psi_\pm \in W_2^1(\mathrm{R}_\pm), \widehat{z}^* \in H$ dir. Benzer şekilde $f = \langle 0, \widehat{y}, 0 \rangle \in D(\mathcal{L}_h)$ ise $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ de kısmi integrasyon ile

$$
\mathcal{L}_h^* g = \mathcal{L}_h^* \left\langle \psi_-, \widehat{z}, \psi_+ \right\rangle = \left\langle i\frac{d\psi_-}{d\xi}, \widetilde{l}(\widehat{z}), i\frac{d\psi_+}{d\xi} \right\rangle, \; z_1 \in D, \; z_2 = R_0'(z_1) \tag{4.6.2}
$$

olur. Sonuç olarak (4.6.2) gereğince her $f \in D(\mathcal{L}_h^*)$ için $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} = (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}}$ olduğundan $W[y_1,\overline{z_1}]_\infty - W[y_1,\overline{z_1}]_0 + \frac{1}{\alpha}\left[R_0(y_1)\overline{R_0'(z_1)} - R_0'(y_1)\overline{R_0(z_1)}\right] + i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) = 0$ dır. (4.1.7) eşitliği yukarıda yerine yazılıp düzenlenirse,

$$
W[y_1,\overline{z_1}]_\infty + i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) = 0 \tag{4.6.3}
$$

olur. $\mathcal{L}_h$ nin sınır şartlarından $W[y_1,v_2]_\infty$ ve $W[y_1,v_1]_\infty$ yi çözersek

$$
\begin{aligned}
W[y_1,v_2]_\infty &= -\tfrac{1}{i\beta}\left(\varphi_-(0) - \varphi_+(0)\right) \\
W[y_1,v_1]_\infty &= \beta\varphi_-(0) - \frac{h}{i\beta}\left(\varphi_-(0) - \varphi_+(0)\right)
\end{aligned}
$$

dır. (4.1.7) ve (4.6.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} & \left[\beta\varphi_-(0) - \frac{h}{i\beta}\left(\varphi_-(0) - \varphi_+(0)\right)\right]\overline{W[z_1, v_2]_\infty} \\ & + \tfrac{1}{i\beta}\left(\varphi_-(0) - \varphi_+(0)\right)\overline{W[z_1, v_1]_\infty} \\ = \ & i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) - i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

olur. Yukarıdaki denklemden $\varphi_-(0)$ ın katsayılarını çekersek

$$\frac{i\beta^2 - h}{i\beta}\overline{W[z_1, v_2]_\infty} + \tfrac{1}{i\beta}\overline{W[z_1, v_1]_\infty} = \overline{\psi}_-(0)$$

veya

$$W[z_1, v_1]_\infty - hW[z_1, v_2]_\infty = \beta\psi_-(0) \tag{4.6.5}$$

olur. Benzer şekilde (4.6.4) den $\varphi_+(0)$ ın katsayılarını çekersek

$$W[z_1, v_1]_\infty - \overline{h}W[z_1, v_2]_\infty = \beta\psi_+(0) \tag{4.6.6}$$

olur. Sonuç olarak $D(\mathcal{L}_h^*) \subset D(\mathcal{L}_h)$ dir. Böylece $\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_h^*$ dir.

4.7. $\mathcal{L}_h$ operatörünün oluşturduğu üniter grup:

$\mathcal{L}_h$ operatörünün, A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu göstermek için, Stone teoremine göre, $\mathcal{L}_h$ kendine eş operatörün $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $\mathcal{U}_t = \exp(i\mathcal{L}_h t), t \in \mathbb{R}_+$ üniter grubunu oluşturmasından, $P : \mathcal{H} \longrightarrow H$ ve $P_1 : H \longrightarrow \mathcal{H}$ dönüşümlerini $P : \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+ \right\rangle \longrightarrow \widehat{y}$ ve $P_1 : \widehat{y} \longrightarrow \langle 0, \widehat{y}, 0 \rangle$ şeklinde ifade edelim.

Üniter grup yardımıyla $t \geqslant 0$ için

$$Z_t := P\mathcal{U}_t P_1$$

$\{Z_t\}$ operatörler ailesi, H de tamamen üniter olmayan büzülmelerin güçlü sürekli bir yarıgrubudur. B_h üreteci ile gösterilen bu yarıgrup

$$B_h\widehat{y} = \lim_{t\to 0} (it)^{-1} (Z_t\widehat{y} - \widehat{y})$$

dir. B_h üretecinin tanım bölgesi bu limitin var olduğu bütün vektörleri içerir. B_h operatörü disipatiftir ve $\mathcal{L}_h$ operatörü B_h ın kendine eş dilatasyonudur.

Teorem 4.7.1 $\mathcal{L}_h$ operatörü A_h operatörünün kendine eş dilatasyonudur.

İspat: İspatı Teorem 3.7.1 dekine benzer şekilde yapılırsa $\widehat{y} \in H$ ve $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olmak üzere

$$P(\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} P_1\widehat{y} = (A_h - \lambda I)^{-1} \widehat{y}$$

eşitliğini sağlanır ve $B_h = A_h$ olduğu görülür.

$\{\mathcal{U}_t\}$ üniter grubunun en büyük özelliği, Lax-Philips saçılma teorisinin uygulanabilir olmasından dolayı saçılma matrisi spektral gösterim teorisi yoluyla tanımlanmıştır. Biz bunları oluşturmaya çalışacağız.

$l(y) = \lambda y$ denkleminin

$$W[\theta_\lambda, v_1]_0 = \frac{\alpha_2'}{\alpha}, W[\theta_\lambda, v_2]_0 = \frac{\alpha_1'}{\alpha}, W[\phi_\lambda, v_1]_0 = \alpha_2 - \alpha_2'\lambda, W[\phi_\lambda, v_2]_0 = \alpha_1 - \alpha_1'\lambda$$

şartlarını sağlayan çözümleri $\theta_\lambda(x)$ ve $\phi_\lambda(x)$ olsun.

Aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$w(\lambda) := -\frac{W[\phi_\lambda, v_1]_\infty}{W[\phi_\lambda, v_2]_\infty}, n(\lambda) := \frac{W[\theta_\lambda, v_2]_\infty}{W[\phi_\lambda, v_2]_\infty}, \widehat{\phi}_\lambda := \begin{pmatrix} \phi_\lambda(x) \\ \alpha \end{pmatrix} \tag{4.7.1}$$

$$S_h(\lambda) := \frac{w(\lambda) + h}{w(\lambda) + \overline{h}} \tag{4.7.2}$$

(4.7.1) deki $w(\lambda)$ fonksiyonu, reel eksen üzerindeki kutupları sayılabilir sayıda olan $\mathbb{C}$ kompleks düzlemde meromorfik bir fonksiyondur. Hatta $w(\lambda)$ fonksiyonun aşağıdaki özellikleri sağladığını göstermek mümkündür:

$$\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \text{ için, } \operatorname{Im}\lambda . \operatorname{Im} w(\lambda) < 0$$

ve $w(\lambda)$ nın reeel eksendeki kutupları hariç her $\lambda \in C$ için $\overline{w(\lambda)} = w(\overline{\lambda})$ dir.

$$U_\lambda^-(x,\xi,\zeta) = \left\langle e^{-i\lambda\xi}, -\beta n(\lambda)\left\{(w(\lambda)+h)\,W\left[\theta_\lambda, v_2\right]_\infty\right\}^{-1}\widehat{\phi}_\lambda(x), \overline{S_h}(\lambda)e^{-i\lambda\zeta}\right\rangle \tag{4.7.3}$$

ve

$$U_\lambda^+(x,\xi,\zeta) = \left\langle S_h(\lambda)e^{-i\lambda\xi}, -\beta n(\lambda)\left\{\left(w(\lambda)+\overline{h}\right)W\left[\theta_\lambda, v_2\right]_\infty\right\}^{-1}\widehat{\phi}_\lambda(x), e^{-i\lambda\zeta}\right\rangle \tag{4.7.4}$$

vektörlerini tanımlayalım. Burada $x,\zeta \in \mathbb{R}_+, \xi \in \mathbb{R}_-$ dir. λ nın reel değeri için $U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ ve $U_\lambda^+(x,\xi,\zeta)$ vektörleri $\mathcal{H}$ uzayına ait değildir. Burada U_λ^- ve U_λ^+ lar $\mathcal{L}_\lambda$ ın sürekli spektrumunun özfonksiyonlarıdır.

Lemma 4.7.2 $U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ ve $U_\lambda^+(x,\xi,\zeta)$vektörleri $\mathcal{L}U = \lambda U$ denklemini ve $\mathcal{L}_\lambda$ operatörü için verilen sınır şartlarını sağlar.

İspat: Lemma 4.7.2 nin ispatı Lemma 3.8.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

$U_\lambda^-(x,\xi,\zeta)$ ve $U_\lambda^+(x,\xi,\zeta)$ vektörleri yardımıyla $G_- : g \to \widetilde{g}_-(\lambda)$ ve $G_+ : g \to \widetilde{g}_+(\lambda)$ dönüşümlerini

$$\begin{aligned}(G_-g)(\lambda) \quad &: \ = \widetilde{g}_-(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(g, U_\lambda^-\right)_{\mathcal{H}} \\ (G_+g)(\lambda) \quad &: \ = \widetilde{g}_+(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(g, U_\lambda^+\right)_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

formülleri yardımıyla $g = \left\langle \varphi_-, \widehat{y}, \varphi_+\right\rangle$ elemanları üzerinde tanımlayalım. Burada $\varphi_-(\xi), \varphi_+(\zeta)$ ve $y_1(x)$ fonksiyonları kompakt dayanaklı vektör-değerli fonksiyonlardır. G_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürür. Ayrıca Lemma 3.8.4 ve Lemma 3.8.6 dekine benzer Parseval eşitliği ve ters dönüşüm formülleri geçerlidir.

(4.2.7) eşitliğine göre, $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \in \mathbb{R}$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ olduğundan U_λ^-

ve U_λ^+ vektörlerinin ifadeleri kullanılarak,

$$U_\lambda^- = \overline{S}_h(\lambda) U_\lambda^+ \tag{4.7.5}$$

eşitliği yazılabilir.

Lemma 3.8.4 ve Lemma 3.8.6 dan $H_- = H_+$ olduğu görülür. Bu durumda, G_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(\mathbb{R})$ uzayına dönüştürürken U_t operatörünü $e^{i\lambda t}$ çarpma operatörüne ve D_- alt uzayını H_-^2 uzayına dönüştürür. Bunun anlamı G_- dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun giren spektral gösterimidir. Benzer şekilde G_+ dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun çıkan spektral gösterimidir. (4.7.5) ifadesinden bir $g \in \mathcal{H}$ elemanının G_+ gösteriminden G_- gösterimine geçişi,$S_h(\lambda)$ fonksiyonları ile çarpım olarak

$$\widetilde{g}_-(\lambda) = S_h(\lambda)\widetilde{g}_+(\lambda)$$

şeklinde gerçeklenir. Lax ve Philips'in saçılma teorisine göre D_- ve D_+ alt uzaylarına göre $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisi, $g \in \mathcal{H}$ vektörünün G_- gösterimine karşılık gelen G_+ gösterimini elde etmek için çarpılması gereken katsayılardır. Böylece $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisidir. Bu yaptıklarımız aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.7.3: $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun (kendine eş $\mathcal{L}_h$ operatörü için) saçılma matrisidir.

$K = \langle 0, H, 0\rangle$ olmak üzere, $\mathcal{H} = D_- \oplus K \oplus D_+$ şeklinde ifade edilebilir. G_- üniter dönüşümünün özelliğinden G_- dönüşümü altında aşağıdakiler geçerlidir:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}) & , & g \to \widetilde{g}_-(\lambda) = (G_- g)(\lambda) \\ D_- \to H_-^2 & , & D_+ \to S_h H_+^2 \\ K \to H_+^2 \ominus S_h H_+^2 & , & U_t g \to (G_- U_t G_-^{-1}\widetilde{g}_-)(\lambda) = e^{i\lambda t}\widetilde{g}_-(\lambda) \end{array} \tag{4.7.6}$$

Bu formüller A_h operatörünün, karakteristik fonksiyonu $S_h(\lambda)$ olan disipatif model operatöre üniter eşdeğer olduğunu gösterir. Üniter eşdeğer disipatif operatörlerin karakteristik fonksiyonları aynı olduğundan aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.7.4: A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu (4.7.2) formülünde tanımlanan $S_h(\lambda)$ fonksiyonudur.

Teorem 3.9.1 ve Teorem 3.9.2 ye benzer şekilde şu teoremler ispatlanabilir.

Teorem 4.7.5: $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere tüm h değerleri için ($h = h_0$ değeri hariç) A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu olan $S_h(\lambda)$, Blaschke çarpanıdır. A_h operatörünün spektrumu sırf ayrık olup açık üst yarı düzleme aittir. $h \neq h_0$ için A_h operatörünün spektrumu sonlu katlılıkta sonsuzda limite sahip sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerlerden oluşmaktadır. ($h \neq h_0$) için A_h operatörünün özvektörler ve asosye vektörler sistemi H de tamdır.

Teorem 4.7.6: $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin spektrumu, sırf ayrıktır ve üst yarı düzleme aittir. $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere $h = h_0$ değeri hariç tüm h değerleri için $(4.1.3) - (4.1.5)$ sınır değer probleminin ($h \neq h_0$ için) sonlu katlılığa sahip, sonsuzda limiti olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerleri vardır. ($h \neq h_0$ için) özvektörler ve asosye vektörler sistemi $L^2(\mathbb{R}_+)$ da tamdır.

5. KAYNAKLAR

Akhizer, N.I.,and Glazman, I.M., 1963, Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York

Allahverdiev, B.P., 1987, On dissipative extensions of the symmetric Schrödinger operator in Weyl's limit-circle case, Soviet Math. Dokl. vol.35, no.2, 356-359

Allahverdiev, B.P., 1991, On dilation theory and spectral analysis of dissipative Schrödinger operators in Weyl's limit-circle case, Math. USSR Izvestiya. vol. 36, no.2, 247-262

Allahverdiev, B.P.and Canoğlu A., 1997, Spectral analysis of dissipative Schrödinger operators, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, $127A$, $1113 - 1121$

Allahverdiev, B.P., 2003, Dissipative Sturm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions, Monatsh. Math. $140, 1 - 17$

Allahverdiev, B.P., 2004, Dissipative Schrödinger operators with matrix poten tials, Potential Anal. $20, 303 - 315$

Altınışık, N., 1998, Sınır şartlarında özdeğer parametre bulunduran süreksiz katsayılı sınır değer problemi, Doktora Tezi, Samsun

Atkinson, F.V., 1964, Discrete and Continuous Boundary Problems, Acad. Press Inc., New York

Baro, M. and Neidhardt, H., 2003, Dissipative Schrödinger-type operator as a model for generation and recombination, Journal of Mathematical Physics, vol .44, Number 6,

Cohen, D.S., 1966, An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter, SIAM J. Appl. Math. $14, 1164-1175$

Feller, W., 1955, On differential operators and boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. $8, 203 - 216$

Feller, W., 1957, Generalized second-order differential operators and their lateral conditions, Illinois J. Math $1, 459 - 504$

Fulton, C.T., 1977, Two-point boundary value problems with eigenvalue pa rameter contained in the boundary conditions, Proc. Royal Soc. Edinburgh, $77A$, $293 - 308$.

Fulton, C.T., 1977, Parametrizations of Titchmarsh's $m(\lambda)$ functions in the limit-circle case, American Mathematical Society, vol. $229, 51 - 63$.

Fulton, C.T., 1980, Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions,Proc. Royal Soc. Edinburgh, $87A$, $1 - 34$

Gorbachuk, V.I. and Gorbachuk, M.L., 1991, Boundary value problems for operator differential equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English Tranl., Birkhäuser Verlag

Hellwig, G., 1958, Über die Anwendung der Laplace-tronsformation auf Ausgleichsprobleme, Math. Nachr. $18, 281 - 291$

Hinton, Don B., 1979, An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition, Quart. J. Math. Oxford $(2), 30, 33 - 42$.

Il'in V.A., 1995, Spectral theory of differential operators: self-adjoint differ ential operators, Consultants Bureau, New York .

Jorgens, K., 1964, Spectral theory of second-order ordinary differential oper ators, Aarhus, Denmark.

Kaiser, H.-Ch., Neidhardt, H. and Rehberg J., 2003, On one dimensional dis sipative Schrödinger-type operators,their dilations and eigenfunction expansions, Mathematische Nachricten, vol.$252, 51 - 69$.

Kuzhel, A.V., 1996, Characteristics functions and models of nonselfadjoint operators, Kluwer Academic Publishers, Boston, London.

Lax, P.D. and Philips, R.S., 1967, Scattering Theory, Academic Press, New York.

Levitan, B.M. and Sargsjan, I.S., 1991 Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluwer Academic Publishers, Boston, London.

Maksudov, F.G. and Allakhverdiev B.P., 1989, On the theory of the character istic function and spectral analysis of a dissipative Schrödinger opera tor, Soviet Math. Dokla., vol.38, no.3, $665 - 668$.

Naimark, M.A., 1968, Linear differential operators, 2nd ed., Naua, Moskow, 1969; English transl. of 1st ed. vols. $1, 2$, Ungar, New York.

Pavlov, B.S., 1975, Self-adjoint dilatation of a dissipative Schrödinger operator and an eigenfunction expansion, Funct. Anal. Appl., vol.98, $172-173$.

Pavlov, B.S., 1977, Self-adjoint dilatation of a dissipative Schrödinger oper ator and its resolution in terms of eigenfunctions, Math. USSR Sbornik vol.31, no.4, $457 - 478$.

Pavlov, B.S., 1996, Spektral analysis of a dissipative singular Schrödinger op erator in terms of a functional model, Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam Napravleniya 65 (1991), $95-163$; English transl. in partial differential equations, 8 Encyc. Math. Sci., $65, 87 - 163$

Pavlov, B.S., 1999, Irreversibility, Lax-Phillips approach to resonance scatter ing and spectral analysisi of non-self-adjoint operators in Hilbert space, Intern. J. of Theor. Phys., vol.38, no.1, $21 - 45$.

Sagan, H., 1961, Boundary and eigenvalue problems in Mathematical Physics, Dover Publications, Inc., New York.

Schakalikov, A.A., 1983, Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Funct.Anal. Applic., vol. $16, 324 - 326$

Stakgold, I., 1998, Green's functions and boundary value problems, Newark, Denmark.

Sz.-Nagy, B. and Foiaş, C., 1970, Analyse Harmonique des operateurs de L'space de Hilbert, Masson, Paris and Akad. Kiado, Budapest; English transl., North-Holland, Amsterdam, and Akad.Kiado, Budapest.

Titchmarsh, E.C., 1946, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Clarendon press, Oxford.

Walter, J., 1973, Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in-the boundary condition, Math. Z. $133, 301 - 312$.

Weidmann, J., 1980, Spectral theory of ordinary differential operators, Springer Verlag, New York

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Mevlüde Yakıt ONGUN
Doğum yeri	:	Tavas
Doğum Yılı	:	1973
Medeni Hali	:	Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise	1987 – 1990 İstanbul Şehremini Lisesi
Lisans	1990 – 1995 Selçuk Üniversitesi
Yüksek Lisans	1996 – 1999 Selçuk Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1995 – 2001 SDÜ Burdur Eğitim Fakültesi Fen Bilgisi Eğitimi A.B.D., Arş. Gör.

2001– .... SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Arş. Gör.