FİLBERT MATRİSLERİNİN NORMLARI

Evren SARIPINAR

Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA 2004

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİLBERT MATRİSLERİNİN NORMLARI

Evren SARIPINAR

Danışman :Yrd.Doç.Dr. Bahri TÜREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA,2004

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI' ında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :………………………………………………..

Üye :………………………………………………..

Üye :………………………………………………..

ONAY

Bu tez ……/……./20.... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

……/……./20….

Prof.Dr.Remzi KARAGÜZEL

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Filbert matrislerin normları araştırılmıştır. Filbert matrislerin tanımı verilirken aralarındaki benzerlik göz önüne alınarak Hilbert ve Hankel matrislerin tanımları da verilmiştir.

Genel bir matris ele alındığında Frobenius norm değerleri için bir üst sınır yoktur. Ancak özel tiplerdeki matrislerde normlar için alt ve üst sınırlar bulunabilmiştir. Farklı çalışmalarda Toeplitz matrisler, Hilbert matrisler ve Hankel matrislerin normları için alt ve üst sınırlar belirlenmiştir.

Bu çalışmada da Filbert matrislerin Frobenius norm değerleri için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Filbert matris, Spectral norm, Frobenius norm,
Öz değerler, Hadamard çarpım

ABSTRACT

The norms of Filbert matrix have been researched in this study. While the definition of Filbert matrix is being given, Hilbert and Hankel matrix are also pointed by bearing the similarities between them in mind.

When a general matrix is studied, there is no upper limit for the norm values of Frobenius. However upper and lower limits could have been found for the norms in special kinds of matrix with different studies upper and lower limits for Toeplitz matrix, Hilbert matrix and Hankel matrix have been decided.

In this study, upper and lower limits for Frobenius norm of Filbert matrix have been received.

KEY WORDS : Filbert matrix, Spectral norm, Frobenius norm, Eingenvalues, Hadamard product

TEŞEKKÜR

Yazar, bu çalışmanın gerçekleşmesinde katkılarından dolayı, aşağıda adı geçen kişilere içtenlikle teşekkür eder.

Yrd.Doç.Dr. Bahri TÜREN (tez danışmanı), çalışmanın sonuca ulaştırılmasında ve her türlü zorluğun aşılmasında yardımcı ve yol gösterici olmuştur.

Prof.Dr. Durmuş BOZKURT, önemli bilgilerin sağlanmasında ve kaynak edinilmesinde yardımcı olmuştur.

21/06/2004

Evren SARIPINAR

Simgeler ve Kısaltmalar Dizini

F_n	$n \times n$ tipindeki Filbert matris
f_n	$n.$ Fibonacci sayısı
$\lVert \cdot \rVert_1$	Sütun norm
$\lVert \cdot \rVert_\infty$	Satır norm
$\lVert \cdot \rVert_\Delta$	Maximum norm
$\lVert \cdot \rVert_2$	Spectral norm
$\lVert \cdot \rVert_F$	Frobenius norm
$\lVert \cdot \rVert_p$	l_p norm
$\circ$	Hadamard çarpım

Tablolar Dizini

1.GİRİŞ

Bu yüksek lisans tezi, özel olarak Fibonacci dizisinden elde edilen Filbert matrislerin normları üzerine bir çalışmadır.

1999 yılında T.M. Richardson tarafından hazırlanan ‘Filbert Matrix’ adlı makalede Filbert matrislerin Hilbert ve Hankel matrislerle benzerliği ile inverslerinin bulunmasıyla ilgili bilgiler verilmiştir.

Bu dalda daha çok Hilbert, Toeplitz ve Hankel matrislerin normları ile ilgili çeşitli yayınlar bulunmaktadır. D.Bozkurt 1996-2001 yılları arasında Toeplitz ve Hankel matrisler ile Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerin spectral ve l_p normları hakkında birçok yayın hazırlamıştır.

R.A Horn ile C.R.Johnson tarafından 1991 yılında hazırlanan ‘Topics in Matrix Analysis’ adlı kitapta spectral norm için üst sınır sayılabilecek çok önemli bir eşitsizlik tanımlanmıştır.

Biz de bu çalışmalardan yola çıkarak Filbert matrislerin spectral normu için genel bir eşitsizlik verip Filbert matrislerinin Frobenius norm değerleri için Alt ve üst sınırlar belirledik.

2. FİLBERT MATRİSLER

Bu bölümde, Filbert matrislerle ilgili tanımlar verilmiştir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle Filbert matrislerle benzerlik arz eden Hilbert ve Hankel matrislerin tanımları üzerinde durulmuştur.

2.1. Hilbert Matrisler ve Hankel Matrisler

Tanım 2.1.1 : $n \times n$ tipindeki bir matriste i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere elemanları $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ şeklinde olan matrislere *Hilbert matrisler* denir.

Örnek 2.1.1 : 3×3 tipindeki bir Hilbert matris ;

$$h_{11} = \frac{1}{1+1-1} = 1 \quad , \; h_{12} = \frac{1}{1+2-1} = \frac{1}{2} \quad , \; h_{13} = \frac{1}{1+3-1} = \frac{1}{3}$$

$$h_{21} = \frac{1}{2+1-1} = \frac{1}{2} \quad , \; h_{22} = \frac{1}{2+2-1} = \frac{1}{3} \quad , \; h_{23} = \frac{1}{2+3-1} = \frac{1}{4}$$

$$h_{31} = \frac{1}{3+1-1} = \frac{1}{3} \quad , \; h_{32} = \frac{1}{3+2-1} = \frac{1}{4} \quad , \; h_{33} = \frac{1}{3+3-1} = \frac{1}{5}$$

olduğundan

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.2 : (a_k) bir tamsayı dizisi ve $a_k \neq 0$, $(k \geq 1)$ olmak üzere (a_k) dan oluşan bir *Hankel matris*, i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere elemanları $a_{ij} = (a_{i+j-1})_{i,j=1}^{n}$ olan matristir.

Örnek 2.1.2 : $(a_k)=2k-1$ biçiminde bir dizi olsun. O halde;

$$
\begin{aligned}
a_k &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\} \\
&= \{1,3,5,7,9,11,...\}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Buna göre bu diziden oluşan 3×3 tipindeki Hankel matris;

$$
\begin{array}{lll}
a_{11}=\dfrac{1}{a_{1+1-1}}=\dfrac{1}{a_1}=1 & , \; a_{12}=\dfrac{1}{a_{1+2-1}}=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{3} & , \; a_{13}=\dfrac{1}{a_{1+3-1}}=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{5} \\
a_{21}=\dfrac{1}{a_{2+1-1}}=\dfrac{1}{a_2}=\dfrac{1}{3} & , \; a_{22}=\dfrac{1}{a_{2+2-1}}=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{5} & , \; a_{23}=\dfrac{1}{a_{2+3-1}}=\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{1}{7} \\
a_{31}=\dfrac{1}{a_{3+1-1}}=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{5} & , \; a_{32}=\dfrac{1}{a_{3+2-1}}=\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{1}{7} & , \; a_{33}=\dfrac{1}{a_{3+3-1}}=\dfrac{1}{a_5}=\dfrac{1}{9}
\end{array}
$$

olduğundan

$$
A_3=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}
$$

biçiminde elde edilir.

2.2. Filbert Matrisler

Bu bölümde Filbert matrislerin tanımı verilmiştir. Fakat daha önce tanımın anlaşılmasında yardımcı olacak olan Fibonacci dizisini ve Fibonacci sayılarını tanımlayalım.

Tanım 2.2.1 : (f_k) bir tamsayı dizisi ve $(k\geq 2)$ olmak üzere

$$f_0=0 \; , \; f_1=1 \, , \, ..., \; f_k=f_{k-1}+f_{k-2}$$

şeklindeki diziye *Fibonacci dizisi* adı verilir. Buna göre bu dizi

$$
\begin{aligned}
f_k &= \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, ...\} \\
&= \{0,1,1,2,3,5,8,13,21,...\}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, 0,1,1,2,3,5,8,13,21,...şeklindeki sayılara *Fibonacci sayıları* denir.

Tanım 2.2.2 : Tanım 1.1.2 ile verilen Hankel matrisin tanımda bahsedilen (a_k) dizisinin yerine Fibonacci dizisini alarak i ve j sırasıyla satır ve sütun numaralarını gösteren indisler olmak üzere f_{ij} elemanları ;

$$f_{ij} = \frac{1}{f_{i+j-1}}$$

(f_n, n .inci Fibonacci sayısı) olan matrise *Filbert matris* adı verilir.

Örnek 2.2.1 : F_3 , 3×3 tipindeki Filbert matris olsun. O halde;

$$f_{11} = \frac{1}{f_{1+1-1}} = \frac{1}{f_1} = 1 \quad , \; f_{12} = \frac{1}{f_{1+2-1}} = \frac{1}{f_2} = 1 \; , \; f_{13} = \frac{1}{f_{1+3-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2}$$
$$f_{21} = \frac{1}{f_{2+1-1}} = \frac{1}{f_2} = 1 \quad , \; f_{22} = \frac{1}{f_{2+2-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2} \; , \; f_{23} = \frac{1}{f_{2+3-1}} = \frac{1}{f_4} = \frac{1}{3}$$
$$f_{31} = \frac{1}{f_{3+1-1}} = \frac{1}{f_3} = \frac{1}{2} \; , \; f_{32} = \frac{1}{f_{3+2-1}} = \frac{1}{f_4} = \frac{1}{3} \; , \; f_{33} = \frac{1}{f_{3+3-1}} = \frac{1}{f_5} = \frac{1}{5}$$

olduğundan

$$F_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

3. MATRİS NORMLARI

Bu bölümde matris normları hakkında bilgiler yer almaktadır. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle vektör normlarının tanımı ile başlanmıştır.

Norm işlemi $\|.\|, \|.\|_{\alpha}$ sembollerinden biriyle gösterilir. Buradaki α normun çeşidini gösteren bir sabittir.

3.1. Vektör Normları

Tanım 3.1.1 : $\mathbb{C}$ kompleks ve $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\|.\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu

(i) Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|x\| \geq 0$ ’dır. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olmasıdır.

(ii) Her $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ’dır. (Üçgen eşitsizliği)

(iii) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ’dır.

şartlarını sağlıyorsa, negatif olmayan $\|x\|$ sayısına x vektörünün *vektör normu* denir.

Burada vektör normu tanımından sonra aşağıda vektör normlarının çeşitleri verilmiştir.

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$$

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.1)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

şeklinde tanımlanan her üç norm da vektör normu şartlarını sağlar. $\|x\|_2$ ile verilen norma özel olarak *Euclide* veya *Frobenius* normu denir. Herhangi iki *x, y* vektörü için iç çarpım tanımı

$$< x, y >= \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + ... + \overline{x_n} y_n$$

şeklindedir. O halde $< x, x >= \|x\|_2^2$ olur. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere (2.1) ile verilen ilk iki normu

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile karakterize edilebilir. Bu şekilde verilen norma *p-normu* denir.

3.2. Matris Normları

Vektör normlarından hareketle benzer şekilde matris normları da tanımlanabilir. G bir cisim ve $a_{ij} \in G$ olmak üzere $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin normu her a_{ij} elemanının mutlak değeri olan $|a_{ij}|$'leri alarak ifade edilir.

Matris normları, aksiyomlara bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 3.2.1 : $M_n(G)$ $n \times n$ matrislerin kümesini göstermek üzere

$$\|.\| : M_n(G) \to \mathbb{R}^+$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa o zaman bu dönüşüme matris normu denir ve matris normu $A \in M_n(G)$ için $M_n(A) = \|A\|$ şeklinde gösterilir.

i) $A \in M_n(G)$ için $A \neq 0$ $ise \|A\| > 0\, ve\, A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$ dır.

ii) $A \in M_n(G)$ ve $\alpha \in G\, için \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ dır.

iii) $A, B \in M_n(G)$ için $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ dır.

iv) $A, B \in M_n(G)$ için $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$ dır.

Eğer sadece i, ii ve iii aksiyomları sağlanıyorsa, o zaman bu norma genelleştirilmiş matris normu denir. Eğer i, ii, iii ve iv aksiyomlarının hepsi sağlanıyorsa buna da matris normu adı verilir.

Örnek 3.2.1 : $J=(t_{ij})$ matrisi bütün elemanları 1 olan bir $n\times n$ matris olsun. Bu takdirde

$$\|J\| = \max_{1\le i,\, j\le n} |t_{ij}|$$

şeklinde tanımlanan ifade genelleştirilmiş matris normu olmasına karşılık bir matris normu değildir. Gerçekten buna aşağıdaki gibi bir ters örnek verebiliriz:

n=2 için J matrisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Diğer taraftan

$$J^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

olup $\|J^2\| = 2$ ve $\|J\| = 1$ olduğundan matris normu tanımındaki iv. Aksiyomu sağlamaz. Ancak

$$\|J\| = n \max_{1\le i, j\le n} |t_{ij}|$$

şeklinde alınırsa o zaman bu şekilde tanımlanan ifade matris normu aksiyomlarının dördünü de sağlar. Yani bir matris normu olur.

Tanım 2.2.1 ile verilen aksiyomları sağlayan bazı matris normları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ bir matris olmak üzere

1) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (Sütun normu)

2) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (Satır normu)

3) $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euclide veya Frobenius normu)

4) $\|A\|_t = n \max_{1 \le i, j \le n} |a_{ij}|$ (Toplam normu)

5) $\|A\|_2 = \left(\max_{1 \le i \le n} \sigma_i \right)^{\frac{1}{2}}$ (Spectral normu)

Burada σ_i ler AA^* matrisinin özdeğerlerini gösterir.

Vektör normları için Hölder normu olarak adlandırılan

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \le p \le \infty$$

normundan hareketle matrisler için l_p matris normları da şu şekilde tanımlanabilir.

Tanım 3.2.2 : $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi için,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \le p \le \infty$$

biçimindeki ifadeye l_p normu denir.

Tanım 3.2.3 : $A = (a_{ij})_{n \times n}$ matrisi için $1 \le p, q \le \infty$ olmak üzere

$$\|A\|_p = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

biçimindeki ifadeye l_{pq} karma normu denir.

l_{pq} karma normunda p=q durumunu göz önüne alınırsa, o zaman bu norm l_p matris normu olur.

Tanım 3.2.4 : Eğer keyfi x vektörü için

$$\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$$

eşitsizliği geçerli ise, o taktirde $\|A\|$ matris normuna $\|x\|$ vektör normu ile uygundur denir.

Teorem 3.2.1 :

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

matris normu ile

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

vektör normu uygundur.

İspat : Uygunluk tanımı gereği $\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$ olduğunu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| |x_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \leq \left(\max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\
&= \|A\|_1 \|x\|_1
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla $\|A\|_1$ matris normu ile $\|x\|_1$ vektör normu uygundur.

Teorem 3.2.2 :

$$\|A\|_t = n \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

matris normu ile

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

vektör normu uygundur.

İspat : Yine uygunluk tanımından, $\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$ olmalıdır.

$$\|Ax\|_{\infty} = \max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||x_j|\right)$$

$$\leq \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

$$\leq n\left(\max_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|\right)\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$$

$$= \|A\|_t\,\|x\|_{\infty}$$

bulunur. O halde $\|A\|_t$ matris normu ile $\|x\|_{\infty}$ vektör normu uygundur.

Teorem 3.2.3 : $$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

matris normu ile

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

vektör normu uygundur.

İspat : Cauchy-Schwarz eşitsizliğini göz önüne alarak

$$\|Ax\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)$$

$$= \|A\|_F^2\,\|x\|_2^2$$

yazılabilir ki buradan

$$\|Ax\|_F \leq \|A\|_F \|x\|_2$$

olduğu görülür.

Verilen her $\|A\|$ matris normu için bir uygun vektör normu bulabiliriz. Her x vektörü için ilk sütunu x vektörünün elemanlarını kapsayan, diğer elemanları sıfır olan bir K matrisi bulunabilir. Buna göre x vektörünün normunu

$$\|x\| = \|K\|$$

olarak tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlı vektör bileşenlerinin fonksiyonu gerçekten matris normu aksiyomlarını sağlayan bir vektör normudur. Verilen bir matris normu ile bir vektör normunun uygunluğu

$$\|AB\| = \|A\|.\|B\|$$

ifadesinin bir sonucudur. Gerçekten

$$\|Ax\| = \|AK\| \leq \|A\|.\|K\| = \|A\|.\|x\|$$

dir.

Teorem 3.2.4 : Genelleştirilmiş bir matris normu daima matrisin elemanlarına bağlıdır. Yani $\varepsilon > 0$ olmak üzere her i, j için $\left|a_{ij} - b_{ij}\right| < \delta$ iken

$$\|A\| - \|B\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε 'a bağlı $\delta > 0$ vardır.

İspat : A ve B n-kare matrisler olsun. E_{ij} , $e_{ij} = 1$ ve diğer bütün elemanları sıfır $(E_{ij} = e_i e_j^T)$ olan bir matris ise

$$A - B = \sum_{i,j} (a_{ij} - b_{ij}) E_{ij}$$

olur. $m = \max_{i,j} \|E_{ij}\|$ alırsak (i) aksiyomundan $m>0$ olacaktır. (ii) ve (iii) aksiyomlarından da

$$\|A-B\| \le \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}| \|E_{ij}\| \le m \sum_{i,j} |a_{ij} - b_{ij}|$$

elde edilir. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \dfrac{\varepsilon}{mn^2}$ alalım. Eğer biz A ve B matrislerini *i,j=1,2,3,...,n* için

$$|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$$

olacak şekilde seçilirse

$$\|A-B\| < mn^2 \delta = \varepsilon$$

elde ederiz. $|a_{ij} - b_{ij}| < \delta$ ve $\|A-B\| \ge \|A\| - \|B\|$ olduğundan

$$\|A\| - \|B\| < \varepsilon$$

olur ki, istenen ifade bulunur.

Teorem 3.2.5 : A, n-kare matris, $\|A\|_\alpha$ ve $\|A\|_\beta$ genelleştirilmiş iki matris normu olsun. Sadece normların seçimine bağlı

$$m \le \frac{\|A\|_\alpha}{\|A\|_\beta} \le M$$

olacak şekilde m ve M pozitif sayıları mevcuttur.

İspat : E_{ij} önceki teoremdeki matris olmak üzere $k_2 = \sum_{i,j} \|E_{ij}\|_\alpha$ ve $a = \max_{i,j} |a_{ij}|$ olarak seçelim. Aksiyom (ii) ve (iii)'den

$$\|A\|_\alpha \le \sum_{i,j} |a_{ij}| \|E_{ij}\|_\alpha \le ak_2 \qquad (2.2)$$

olur. $a = 1$ olacak şekildeki bütün matrislerin kümesini ξ ile gösterilsin ve

$$k_1 = \min_{B \in \xi} \|B\|_\alpha$$

olsun. ξ kümesi kapalıdır ve Teorem 2.2.4'den $\|B\|_\alpha$, B matrisinin elemanlarına bağlı olduğundan $k_1 = \|B_0\|_\alpha$ olacak şekilde bir $B_0 \in \xi$ vardır. Aksiyom (i)'den

$k_1 > 0$ ve k_1, A matrisinden bağımsızdır. $|a_{rs}| = a$ ve $B \in \xi$ olmak üzere A matrisini $A = a_{rs}B$ şeklinde yazılırsa

$$\|A\|_\alpha = a\|B\|_\alpha \geq ak_1 \qquad (2.3)$$

olur. (2.2) ve (2.3)'den

$$ak_1 \leq \|A\|_\alpha \leq ak_2 \qquad (2.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\|.\|_\beta$ normuna bağlı olarak

$$ah_1 \leq \|A\|_\beta \leq ah_2 \qquad (2.5)$$

olacak şekilde h_1, h_2 pozitif sayıları vardır. (2.4) ve (2.5) eşitsizliklerini taraf tarafa bölünürse

$$\frac{k_1}{h_1} \leq \frac{\|A\|_\alpha}{\|B\|_\beta} \leq \frac{k_2}{h_2}$$

elde edilir. $m = \frac{k_1}{h_1}, M = \frac{k_2}{h_2}$ dersek

$$m \leq \frac{\|A\|_\alpha}{\|B\|_\beta} \leq M$$

elde edilir.

3.3. Matris Normları Arasındaki Bağıntılar

Matris normlarında, $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_F\ ve \|.\|_\infty$ sırasıyla satır, spectral, Frobenius (Euclide) ve sütun normlarını göstermek üzere, A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin normları arasında

1) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\|A\|_\Delta \qquad (\|A\|_\Delta = \max|a_{ij}|)$

3) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$

bağıntıları mevcuttur.

Örnek 3.3.1 :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi için yukarıdaki bağıntıları gerçekleyelim.

Çözüm : Burada *m=2* ve *n=3*'tür. *A* matrisinin normları hesaplanırsa,

$$\|A\|_1 = 4 \ , \ \|A\|_\infty = 6 \ , \ \|A\|_F = \sqrt{20} \ , \ \|A\|_2 = \sqrt{10 + \sqrt{17}} = 3.758$$

elde edilir. Bunlara göre;

1) $\sqrt{10 + \sqrt{17}} \leq \sqrt{20} \leq \sqrt{3}.\sqrt{10 + \sqrt{17}}$

2) $3 \leq \sqrt{10 + \sqrt{17}} \leq 3\sqrt{6}$

3) $\sqrt{10 + \sqrt{17}} \leq \sqrt{24}$

4) $\frac{6}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{10 + \sqrt{17}} \leq 6\sqrt{2}$

5) $\frac{4}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{10 + \sqrt{17}} \leq 4\sqrt{3}$

şeklinde olup, bütün bağıntıları gerçekler.

4. FİLBERT MATRİSLERİNİN NORMLARI

Bu bölümde Filbert matrislerin bazı norm değerleri ile ilgilenilmiştir. İlk olarak hesaplanması daha kolay olan satır, sütun ve maximum norm değerleri verildikten sonra spectral ve Frobenius normlara geçilerek bu normlar için sınır değerleri aranmıştır.

4.1. Filbert Matrislerin Satır, Sütun ve Maximum Norm Değerleri

2. bölümde tanım 2.2.1 ile verilen norm tanımları gereğince Filbert matrisler için maximum norm değerinin 1 olduğu açıktır. Çünkü herhangi bir A matrisi için maximum norm;

$$\|A\|_{\Delta} = \max|a_{ij}|$$

olduğundan bütün Filbert matrislerin en büyük f_{ij} elemanının 1 olduğu bilinmektedir.

$n \times n$ tipindeki bir Filbert matris F_n olmak üzere satır ve sütun normları için maximum değerin 1. satır ve 1. sütun olacağı açıktır. Buradan yola çıkılarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 4.1.1 : Bilindiği gibi F_3 matrisi;

$$[F_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Burada F_3 matrisinin satır ve sütun norm değerleri sırasıyla;

$$\begin{aligned} \|F_3\|_1 &= \max_j \sum_{i=1}^{3} |f_{ij}| \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|F_3\|_\infty &= \max_i \sum_{j=1}^{3} |f_{ij}| \\ &= 1+1+\frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} = 2{,}5\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 4.1.2 :

$$[F_{10}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{13} & \frac{1}{21} & \frac{1}{34} & \frac{1}{55} \\ 1 & . & & & & & & & & \\ \frac{1}{2} & & . & & & & & & & \\ \frac{1}{3} & & & . & & & & & & \\ \frac{1}{5} & & & & . & & & & & \\ \frac{1}{8} & & & & & . & & & & \\ \frac{1}{13} & & & & & & . & & & \\ \frac{1}{21} & & & & & & & . & & \\ \frac{1}{34} & & & & & & & & . & \\ \frac{1}{55} & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{1}{4181} \end{bmatrix}$$

şeklinde ise

$$\begin{aligned}\|F_{10}\|_1 &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{21}+\frac{1}{34}+\frac{1}{55} \\ &= 3{,}3752126\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|F_{10}\|_\infty &= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{13}+\frac{1}{21}+\frac{1}{34}+\frac{1}{55} \\ &= 3{,}3752126\end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Yukarıdaki örneklerden de görüleceği üzere Filbert matrisler simetrik olduklarından satır ve sütun norm değerleri eşittir.

4.2. Filbert Matrislerin Spectral Normu

Bilindiği gibi herhangi bir A matrisinin spectral normu;

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1<i<n} \lambda_i (A^H A)}$$

biçimindedir. A, $m \times n$ matris ve A^H, A matrisinin eşlenik transpozesidir.

Filbert matrislerin spectral normu incelenirken göz önünde tutulması gereken bazı tanım ve teoremler vardır. Bunları sırasıyla;

Tanım 4.2.1 : $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$, $m \times n$ matrisler olsun. A ve B nin *Hadamard çarpımı*;

$$A \circ B = (a_{ij} b_{ij})$$

biçimindedir ve $C = (a_{ij} b_{ij})$, $m \times n$ matrisi oluşur.

Tanım 4.2.2 : A genel $m \times n$ matris, s sıfırdan farklı bir sayı ve x, y;

$$Ax = sy, \qquad A^H y = sx$$

olacak şekilde vektörler ise s sayısına A matrisinin *singüler değeri* ve x, y vektörlerine de A matrisinin s singüler değerine karşılık gelen *singüler vektör çifti* denir.

Tanım 4.2.3 : A, genel $m \times n$ matris olsun. $A^H A$ matrisinin öz değerleri λ_i ise $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ $(i = 1,2,...,m)$ değerlerine A matrisinin *singüler değerleri* denir.

$A^H A$ matrisi Hermityen matris olacağından öz değerlerinin reel olacağı açıktır. Eğer A normal matris ise $(i = 1,2,...,m)$ için $\sigma_i = |\lambda_i|$ olacaktır.

$A \in M_{mxn}$ matrisin singüler değerleri bulunurken daima $\min(m, n)$ boyutlu $A^H A$ (AA^H) matrisinin öz değerleri bulunmalıdır.

$M_{m\times n}$, $m\times n$ tipindeki matrislerin kümesi olmak üzere herhangi bir $A \in M_{mxn}$ matrisin $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq ... \geq \sigma_r(A) \geq 0$ singüler değerleri, $A^H A$ matrisinin sıfırdan farklı öz değerlerinin karekökleri olacağından en büyük singüler değer $\sigma_1(.)$, A nın ($U, V \in M_n$ üniter matrisler olmak üzere A matrisi UAV üniter dönüşümü ile $B = UAV$ matrisine dönüştürülebileceğinden A matrisi ile UAV matrisinin öz değerleri aynıdır. Dolayısıyla $\sigma_1(UAV) = \sigma_1(A)$ olur.) üniter dönüşümüdür ki bu gerçekte M_n için bir matris normudur ve *spectral norm* olarak adlandırılır.

Tanım 4.2.4 : Herhangi bir A matrisinin maximum sütun normu $c_1(A)$ ve maximum satır normu $r_1(A)$ ile gösterilirse;

$$c_1(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2}$$

ve

$$r_1(A) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2}$$

dir.

Teorem 4.2.1 : Herhangi $A, B \in M_{m\times n}$ için;

$$\sigma_1(A \circ B) \leq r_1(A)c_1(B)$$

yazılabilir.

İspat: Bütün x, y birim vektörleri için,

$$\sigma_1(A \circ B) = \max\left|x^H (A \circ B)y\right|$$

değerini alınırsa;

$$\left|x^H (A \circ B)y\right| = \left|\sum_{i,j} \overline{x_i} a_{ij} b_{ij} y_j\right|$$

$$\leq \left[\sum_{i,j} |x_i a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i,j} |b_{ij} y_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_i |x_i|^2 \sum_j |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 \sum_i |b_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_i |x_i|^2 r_i(A)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 c_j(B)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left[\sum_i |x_i|^2 r_1(A)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 c_1(B)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r_1(A)c_1(B)\|x\|_2 \|y\|_2$$

elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa istenen eşitsizlik bulunmuş olur. Birinci eşitsizlik Cauchy-Schwarz eşitsizliğidir. (Horn,R.A.,Johnson,C.R.,1991)

Yukarıda verilen tanımlar ve teorem 3.2.1 yardımıyla Filbert matrislerin spectral normu için, $n \times n$ Filbert matris F_n olmak üzere;

$$\|F_n\|_2 \leq r_1((f_n)_1)c_1((f_n)_2)$$

yazılabilir.

Örnek 4.2.1 : F_3 matrisini Hadamard çarpımı yardımıyla;

$$F_3 = (f_3)_1 \circ (f_3)_2$$

şeklinde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

olarak yazılırsa, gerçekten de ;

$$r_1((f_3)_1) = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = 1{,}5$$

$$c_1((f_3)_2) = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = 1{,}58113884$$

$$r_1((f_3)_1)c_1((f_3)_2)=\sqrt{\frac{9}{4}}.\sqrt{\frac{5}{2}}=(1{,}5).(1{,}58113884)=2{,}3713083736$$

olarak hesaplanır. F_3 matrisinin spectral norm değeri,

$$\|F_3\|_2=1{,}982347055$$

olduğundan

$$1{,}982347055\leq 2{,}3713083736$$

dır. Buradan

$$\|F_3\|_2\leq r_1((f_3)_1c_1((f_3)_2)$$

olduğu görülür.

Buradan yola çıkılarak Filbert matrislerin spectral normu için $n\geq 2$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}\cong 1{,}64$$

olduğu bilindiğinden

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq\|F_n\|_2\leq r_1((f_n)_1)c_1((f_n)_2$$

yazılabilir.

Örnek 4.2.2 : F_{10} matrisini ele alarak

$$1{,}64\leq 2{,}11480620306187\leq 2{,}54222$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\leq\|F_{10}\|_2\leq r_1((f_{10})_1)c_1((f_{10})_2$$

yazılabilir.Bu şekilde bazı norm değerlerinin

$$n = 50 \quad \Rightarrow \|F_{50}\|_2 \cong 2{,}114961207 \leq 3{,}007628$$

$$n = 100 \Rightarrow \|F_{100}\|_2 \cong 2{,}114961208 \leq 3{,}1902708$$

olduğu mapple programı yardımıyla hesaplanmıştır.

4.3. Filbert Matrislerin Frobenius Normu

Herhangi bir A matrisinin l_p normu;

$$\|A\|_p = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

biçimindedir ve $p=2$ halinde A matrisinin Frobenius normuna benzer.

O halde herhangi bir A matrisinin Frobenius normu;

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

biçimindedir.

$n \times n$ tipindeki genel bir A matrisi için Frobenius normuna bakılacak olursa, bu matrislerin normları için bir üst sınır yoktur. Ancak özel tiplerdeki matrisler de normlar için alt ve üst sınırlar bulunabilir. Daha önceden Toeplitz matrisler, Hankel matrisler ve Hilbert matrisler için sınırlar bulunmuştur. (Bozkurt,D.,2002)

Bu bölümde Filbert matrislerin Frobenius normu için alt ve üst sınırlar belirlenmiştir. Bunu yaparken genel matrisler için bilinen Frobenius norm tanımından, norm değerlerini mapple programı yardımıyla hesaplayarak aşağıda tablolarda görülen sonuçlar elde edilmiştir. Değerler hesaplanırken virgülden sonra 40(kırk) basamak sınır alınmıştır.

Matrisin Boyutu	**Frobenius Norm Değerleri**
n=2	1,8027756377331994646559610633735247973126
n=3	2,003053225009815414970345054073933094919
n=4	2,086051678220786085881222730194383260473
n=5	2,116623755661310182568039306402302730502
n=6	2,128434424046405389158058523833315019742
n=7	2,132923155939464736804877050061692766610
n=8	2,134640517839965895231683366408486918714
n=9	2,135296016211464170000092108980028157816
n=10	2,135546454264041919421343037139464414287
n=11	2,135642102979653763817895259215812332830
n=12	2,135678638814084549137656263454902731282
n=13	2,135692594045901232901065671356174478383
n=14	2,135697924497296093002095186176583421261
n=15	2,135699960543974401251459155721960635067
n=16	2,135700738245181004078145416989722702764
n=17	2,135701035300511362102909286148309402931
n=18	2,135701148765563326607025914420467556701

n=19	2,1357011921053545669541864247571608855 76
n=20	2,135701208659682017412962886697294712422
n=21	2,135701214982872398427711374543088991693
n=22	2,135701217398116212215326674403384317179
n=23	2,135701218320657257024164793617078998174
n=24	2,135701218673036580243001340504759003512
n=25	2,135701218807633504759900517864731169887
n=26	2,135701218859044955146678661868904816863
n=27	2,135701218878682381783073018260698950774
n=28	2,135701218886183211306646923048377015808
n=29	2,135701218889048273240824406795814707104
n=30	2,135701218890142629519807836426738960696
n=31	2,135701218890560636422577451313938068454
n=32	2,135701218890720300851903396013780333436
n=33	2,135701218890781287237111547317519633051
n=34	2,135701218890804581963410067803558337909
n=35	2,135701218890813479757097476512416896892
n=36	2,135701218890816878411861182392949010777
n=37	2,135701218890818176582464891294917150349
n=38	2,135701218890818672439512312125398048463

n=39	2,1357012188908188618400508657142176333342
n=40	2,135701218890818934184619105650304232591
n=41	2,135701218890818961817785271869730503613
n=42	2,135701218890818972372715530591925032152
n=43	2,135701218890818976404340140539082049977
n=44	2,135701218890818977944283711658358624186
n=45	2,135701218890818978532489815069031322671
n=46	2,135701218890818978757164554181772844968
n=47	2,135701218890818978842982668109324713235
n=48	2,135701218890818978875762270779238795765
n=49	2,135701218890818978888282964861429175082
n=50	2,135701218890818978893065444438086230508
n=99	2,135701218890818978896021179366962498974811
n=100	2,135701218890818978896021179366962498974817

-Tablo 3.3.1.-

Yukarıdaki tablodan faydalanarak Filbert matrislerin Frobenius norm değerleri arasındaki farkın giderek küçüldüğü görülebilir. Bu farklar ayrı bir tablo da incelenerek üst sınırın ne olabileceği belirlenmiştir.

Matrisler	**Norm Değerleri Farkı**
$\lVert F_3 \rVert_F - \lVert F_2 \rVert_F$	,20027758727782076841073442033868512179З
$\lVert F_4 \rVert_F - \lVert F_3 \rVert_F$	,082998453210970670910877676120450165554
$\lVert F_5 \rVert_F - \lVert F_4 \rVert_F$	,030572077440524096686816576207919470029
$\lVert F_6 \rVert_F - \lVert F_5 \rVert_F$	,011810668385095206590019217431012289240
$\lVert F_7 \rVert_F - \lVert F_6 \rVert_F$	,004488731893059347646818526228377746868
$\lVert F_8 \rVert_F - \lVert F_7 \rVert_F$	,001717361900501158426806316346794152104
$\lVert F_9 \rVert_F - \lVert F_8 \rVert_F$	,000655498371498274768408742571541239102
$\lVert F_{10} \rVert_F - \lVert F_9 \rVert_F$	,000250438052577749421250928159436256471
$\lVert F_{11} \rVert_F - \lVert F_{10} \rVert_F$	,000095648715611844396552222076347918543
$\lVert F_{12} \rVert_F - \lVert F_{11} \rVert_F$	,000036535834430785319761004239090398452
$\lVert F_{13} \rVert_F - \lVert F_{12} \rVert_F$	,000013955231816683763409407901271747101
$\lVert F_{14} \rVert_F - \lVert F_{13} \rVert_F$	,5330451394860101029514820408942878 10^{-5}
$\lVert F_{15} \rVert_F - \lVert F_{14} \rVert_F$	,2036046678308249363969545377213806 10^{-5}
$\lVert F_{16} \rVert_F - \lVert F_{15} \rVert_F$	,777701206602826686261267762067697 10^{-6}
$\lVert F_{17} \rVert_F - \lVert F_{16} \rVert_F$	,297055330358024763869158586700167 10^{-6}
$\lVert F_{18} \rVert_F - \lVert F_{17} \rVert_F$	,113465051964504116628272158153770 10^{-6}
$\lVert F_{19} \rVert_F - \lVert F_{18} \rVert_F$	,43339791240347160510336693328875 10^{-7}

$\|F_{20}\|_F - \|F_{19}\|_F$	,16554327450458776461940133826846 10^{-7}
$\|F_{21}\|_F - \|F_{20}\|_F$	,6323190381014748487845794279271 10^{-8}
$\|F_{22}\|_F - \|F_{21}\|_F$	,2415243813787615299860295325486 10^{-8}
$\|F_{23}\|_F - \|F_{22}\|_F$	,922541044808838119213694680995 10^{-9}
$\|F_{24}\|_F - \|F_{23}\|_F$	,352379323218836546887680005338 10^{-9}
$\|F_{25}\|_F - \|F_{24}\|_F$	,134596924516899177359972166375 10^{-9}
$\|F_{26}\|_F - \|F_{25}\|_F$	,51411450386778144004173646976 10^{-10}
$\|F_{27}\|_F - \|F_{26}\|_F$	,19637426636394356391794133911 10^{-10}
$\|F_{28}\|_F - \|F_{27}\|_F$	,7500829523573904787678065034 10^{-11}
$\|F_{29}\|_F - \|F_{28}\|_F$	,2865061934177483747437691296 10^{-11}
$\|F_{30}\|_F - \|F_{29}\|_F$	,1094356278983429630924253592 10^{-11}
$\|F_{31}\|_F - \|F_{30}\|_F$	,418006902769614887199107758 10^{-12}
$\|F_{32}\|_F - \|F_{31}\|_F$	,159664429325944699842264982 10^{-12}
$\|F_{33}\|_F - \|F_{32}\|_F$	,60986385208151303739299615 10^{-13}
$\|F_{34}\|_F - \|F_{33}\|_F$	,23294726298520486038704858 10^{-13}
$\|F_{35}\|_F - \|F_{34}\|_F$	,8897793687408708858558983 10^{-14}
$\|F_{36}\|_F - \|F_{35}\|_F$	,3398654763705880532113885 10^{-14}
$\|F_{37}\|_F - \|F_{36}\|_F$	,1298170603708901968139572 10^{-14}

$\|F_{38}\|_F - \|F_{37}\|_F$	,4958570474208304808981 14 10^{-15}
$\|F_{39}\|_F - \|F_{38}\|_F$	,1894005385535888195848 79 10^{-15}
$\|F_{40}\|_F - \|F_{39}\|_F$	,7234456823993608659924 9 10^{-16}
$\|F_{41}\|_F - \|F_{40}\|_F$	,2763316616621942627102 2 10^{-16}
$\|F_{42}\|_F - \|F_{41}\|_F$	,1055493025872219452853 9 10^{-16}
$\|F_{43}\|_F - \|F_{42}\|_F$	,403162460994715701782 5 10^{-17}
$\|F_{44}\|_F - \|F_{43}\|_F$	,153994357111927657420 9 10^{-17}
$\|F_{45}\|_F - \|F_{44}\|_F$	,58820610341067269848 5 10^{-18}
$\|F_{46}\|_F - \|F_{45}\|_F$	,22467473911274152229 7 10^{-18}
$\|F_{47}\|_F - \|F_{46}\|_F$	,8581811392755186826 7 10^{-19}
$\|F_{48}\|_F - \|F_{47}\|_F$	,3277960266991408253 0 10^{-19}
$\|F_{49}\|_F - \|F_{48}\|_F$	,1252069408219037931 7 10^{-19}
$\|F_{50}\|_F - \|F_{49}\|_F$	,478247957665705542 6 10^{-20}
$\|F_{100}\|_F - \|F_{99}\|_F$	,6037944254547453492564383362470 43 10^{-41}

-Tablo 3.3.2-

Yukarıda ki tabloda görüldüğü gibi $F_2, F_3, ..., F_7$ matrisleri için norm artarak 2,13….. şeklinde devam etmektedir. $F_8, F_9, ...$ matrisleri için artık başlangıçtan itibaren bazı rakamlar hiç değişmemektedir. Yani, matrisin boyutu arttıkça değişmeyen rakam sayısı da artmaktadır.

Örneğin; $\|F_8\|_F - \|F_7\|_F$ farkı 10^{-2} iken $\|F_{20}\|_F - \|F_{19}\|_F$ farkı 10^{-7}, $\|F_{50}\|_F - \|F_{49}\|_F$ farkı 10^{-20}, $\|F_{100}\|_F - \|F_{99}\|_F$ farkı 10^{-41} gibi sabit rakam sayısı hızla artmaktadır. Dolayısıyla matrisin boyutu ne kadar büyük alınırsa norm değeri için başlangıçtaki rakamlar değişmeyecektir.

O halde Filbert matrislerin Frobenius norm değerleri 2,14 sayısını geçmeyecektir. Buradan üst sınır olarak,

$$\|F_n\|_F \leq 2{,}14$$

alınabilir. $\frac{\pi^2}{6} \leq \|F_n\|_F$ olduğu açıktır. O halde;

$$\frac{\pi^2}{6} \leq \|F_n\|_F \leq 2{,}14$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

4.4. Filbert Matrisler ile Norm Bağıntıları

Bölüm 2.3 ile tanımları verilen norm bağıntılarını Filbert matrislerin sağlayıp sağlamadığı aşağıdaki örneklerle incelenmiştir.

10×10 tipindeki Filbert matris F_{10} olmak üzere daha önceki bölümlerde hesaplanan norm değerleri;

$$\begin{aligned} \|F_{10}\|_F &= 2{,}1355664542 \\ \|F_{10}\|_2 &= 2{,}1148062030 \\ \|F_{10}\|_1 = \|F_{10}\|_\infty &= 3{,}3752126 \\ \|F_{10}\|_\Delta &= 1 \end{aligned}$$

şeklindeydi. Buradan yola çıkarak bilinen norm bağıntıları için aşağıdaki örnekler verilmiştir.

1-) $\|F_n\|_2 \leq \|F_n\|_F \leq \sqrt{n}\|F_n\|_2$

$$n = 10 \Rightarrow \sqrt{n} = \sqrt{10} = 3{,}16227766$$

$$\sqrt{10}.\|F_{10}\|_2 = 6{,}686044109$$

dir. O halde

$$2{,}1148062030 \leq 2{,}1355664542 \leq 6{,}6876044109$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla;

$$\|F_{10}\|_2 \le \|F_{10}\|_F \le \sqrt{10}\|F_{10}\|_2$$

eşitsizliği vardır.

2-) $\|F_n\|_\Delta \le \|F_n\|_2 \le n.\|F_n\|_\Delta$

Filbert matrislerin norm değerleri için açıktır. F_{10} matrisi için;

$$1 \le 2,1148062030 \le 10$$

olduğundan

$$\|F_{10}\|_\Delta \le \|F_{10}\|_2 \le 10.\|F_{10}\|_\Delta$$

eşitsizliği sağlanır.

3-) $\|F_n\|_2 \le \sqrt{\|F_n\|_1.\|F_n\|_\infty}$

eşitsizliği için

$$\sqrt{\|F_{10}\|_1.\|F_{10}\|_\infty} = \sqrt{(3.3752126)^2} = 3,3752126$$

olduğundan

$$2,1148062030 \le 3,3752126$$

dır. Yani;

$$\|F_{10}\|_2 \le \sqrt{\|F_{10}\|_1.\|F_{10}\|_\infty}$$

eşitsizliği vardır.

4-) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|F_n\|_\infty \le \|F_n\|_2 \le \sqrt{n}.\|F_n\|_\infty$

$$\sqrt{n} = \sqrt{10} = 3,16227766$$
$$\frac{1}{\sqrt{10}}\|F_{10}\|_\infty = 1,06073359$$
$$\sqrt{10}\|F_{10}\|_\infty = 10,673359$$

olduğundan

$$1,0673359 \le 2,1148062030 \le 10,673359$$

dur. Dolayısıyla

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\|F_{10}\|_{\infty} \le \|F_{10}\|_{2} \le \sqrt{10}.\|F_{10}\|_{\infty}$$

eşitsizliği vardır.

5-) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|F_n\|_1 \le \|F_n\|_2 \le .\|F_n\|_1$

Bütün Filbert matrisler simetrik olduklarından $\|F_n\|_1 = \|F_n\|_\infty$ olduğu bilinmektedir. O halde bir önceki örnekten bu eşitsizliğin doğruluğu açıktır.

KAYNAKLAR

Bhatia,R.,1997. *Matrix analysis*, Springer,New York.

Bozkurt,D.,1996. *On The* l_p *Norms Of Almost Cauchy-Toeplitz Matrices*,Turkish Journal of Mathematics,20,4,545-552.

Bozkurt,D.,Türkmen,R.,2000. *Cauchy-Toeplitz Matrislerinin* l_p *Normları İçin Sınırlar*,Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi,8,2,1-6, Konya.

Bozkurt,D.,Solak,S.,2000. *Cauchy-Toeplitz Matrisinin* l_p *Normu ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Hadamard Çarpımının* l_p *Normu*, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi,8,2,35-42,Konya.

Bozkurt,D.,Türen,B.,2000.*Lineer Cebir*,SEL-ÜN Yayınları,S.Ü. Basımevi,975, 547s,Konya.

Bozkurt,D.,Solak,S.,2001.*On The Spectral Norms Of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel Matrices*,Journal of Institute of Mathematics and Computer Science, 14,3, 201-206.

Bozkurt,D.,Solak,S.,Türkmen,R.,2002. *On GCD,LCM,and Hilbert matrices and their applications*,Applied Mathematics and Computation,Elsevier Science I

Horn,R.A., 1990. *The Hadamard Pruduct*, Proc. Symposia Appl.Math., Vol:40, 87-169, USA.

Horn,R.A., Johnson,C.R.,1991. *Topics in Matrix analysis*, Cambridge Universty Pres, 330-360,Cambridge.

Richardson,T.M.,1999. *The Filbert Matrix*, Mathematics L.A,USA.

Seberry,J.,Yamada,M., 1992. *Hadamard matrices*, Wiley,431-560, New York.

ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı : ** Evren SARIPINAR

**Doğum Yeri : ** Isparta

**Doğum Yılı : ** 1977

**Medeni Hali : ** Evli

<u>Eğitim ve Akademik Durumu :</u>

Lise **:** 1989-1995 Isparta Anadolu Lisesi

Lisans **:** 1996-2000 Isparta Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

**Yabancı Dil : ** İngilizce

<u>İş Deneyimi :</u>

2000-2001 Afyon Dazkırı Karaağaçkuyusu İlköğretim Okulu Matematik Öğretmeni

2001- …. Isparta Eğirdir Sorkuncak İlköğretim Okulu Matematik Öğretmenliği ve Müdür Yardımcılığı