

**FİBER TAKVİYELİ HİPERELASTİK
MALZEMELER İÇİN MATEMATİKSEL BİR
MODEL**

Ahmet KABUL

**Yüksek Lisans Tezi
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
ISPARTA 2004**

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FİBER TAKVİYELİ HİPERELASTİK MALZEMELER İÇİN
MATEMATİKSEL BİR MODEL**

Ahmet KABUL

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Melek USAL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

Isparta 2004

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MAKİNA EĞİTİMİ ANABİLİM DALI'nda
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Remzi VAROL

Üye : Yrd. Doç. Dr. M. Reşit USAL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Melek USAL

ONAY

Bu tez/...../ 2004 tarihinde Enstitü Yönetim kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri
üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../ 2004

Prof. Dr. Remzi KARAGÜZEL

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER.....	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
1.GİRİŞ.....	1
1.1. Sürekli Ortam Modeli.....	10
1.2. Sürekli Ortam Hareketi	11
1.3. Şekil Değiştirme	13
1.4. Hareket.....	23
1.4.1. Yay ve Hacim Elemanlarının Maddesel Türevi	25
1.4.2. Green – Gauss (Diverjans) Teoremi.....	28
1.5. Denge Denklemleri.....	32
1.5.1. Kütleinin Korunumu.....	32
1.5.2. Lineer Momentum Denkliği	34
1.5.3. Açısal Momentum Denkliği	36
1.5.4. Enerji Denkliği	38
1.5.5. Termodinamiğin İkinci Kanunu (Clausius - Duhem Eşitsizliği).....	41
1.6 Fiber Deformasyon Geometrisi ve kinematiği	45
2. KAYNAK BİLGİSİ	49
3. MATERYAL VE METOT.....	53
3.1. Materyal.....	53
3.1.1. Fiber Takviyeli Hiperelastik Ortamların Termodinamiği	53
3.1.2 Bünye Aksiyomları.....	57
3.1.2.1. Kozalite Aksiyomu.....	57
3.1.2.2. Determinizm Aksiyomu	57
3.1.2.3. Eşbulma (Ekiprezans) Aksiyomu	58
3.1.2.4. Uygunluk (Tutarlılık) Aksiyomu.....	58

3.1.2.5. Objektivite Aksiyomu	58
3.1.2.6. Maddesel Simetri Aksiyomu	60
3.1.2.1.7. Yöresellik Aksiyomu.....	60
3.2. Metot	68
3.2.1. İzotrop Ortam için Bünye Modelinin Oluşturulması	68
4. BULGULAR	72
4.1 Gerilmenin Maddesel Formu.....	72
4.2 Gerilmenin Uzaysal Formu	78
4.3 Hiperelastik Bir Malzemenin Analizi.....	87
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	97
6. KAYNAKLAR	100
ÖZGEÇMİŞ	103

ÖZET

Hiperelastik malzemeler elastik malzemelerin bir alt sınıfını oluşturan malzemelerdir. Genellikle elastik malzemelerin gerilme durumunun belirlenmesinde o andaki şekil değiştirmelerden başka etmenler de vardır. Hiperelastik malzemeler için bu etmenler ihmal edilir ve bundan dolayı hiperelastisite matematiksel bir soyutlama olarak nitelendirilebilir. Tek fiber ailesi ile takviye edilmiş hiperelastik bir malzemenin nonlinear davranışı modern sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. Mekaniğin denge kanunları ile tutarlı olan termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarının birleştirilmiş şekli, gerilme potansiyelinin zamana göre maddesel türevi cinsinden ifade edilmiştir. Gerilme potansiyelinin bağımsız değişkenleri, Green deformasyon tansörü ve fiber vektörü olarak belirlenmiştir.

Maddesel ortamın esas yapısı itibariyle izotrop olduğu, fiber dağılımından kaynaklanan anizotropi özelliği gösterdiği de varsayılmıştır. Maddesel simetri aksiyomu kullanıldıktan sonra, uygulamalarda makul kabuller olarak görülen ortamın sıkışmazlığı ve fiber ailesinin uzamazlığı göz önüne alınarak gerilmeye ait bünye denklemi bulunmuştur. Matris malzemenin izotrop olma özelliğini dikkate alıp, invariants teorisi kullanarak fiber takviyeli hiperelastik bir malzemenin nonlinear mekanik davranışını belirleyen bünye denklemi elde edilmiştir. Bu elde edilen denklemde gerilme potansiyelinin invariantslarına göre türevinin somut olarak belirlenmesi için Σ mevcut invariantsları cinsinden simetrik katsayılı ikinci dereceden bir polinomla temsil edilmiştir. Σ nin invariantslarına göre türevlerinin hesabında deformasyon tansörünün birinci ve ikinci merteben terimleri alınarak gerilmenin bünye denklemi maddesel ve uzaysal koordinatlarda somut bir şekilde ortaya konmuştur. Sonlu Elemanlar Metodu kullanılarak hiperelastik bir malzemenin kuvvet altında gösterdiği yer değiştirme, gerilme ve gerinme sonuçları incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Bünye Denklemleri, Deformasyon, Gerilme, Hiperelastisite, İzotropi, Kompozit Malzemeler

ABSTRACT

Hyperelastic materials are elements that constitute a subclass of elastic materials. In general, when determining the stress state of an elastic material, there are some factors in addition to deformation of that time. For hyperelastic materials, these factors can be ignored and therefore hyperelasticity can be described as a mathematical idealization. In the frame of Modern Continuum Mechanics, nonlinear behaviors of hyperelastic materials which are reinforced with a single family of fibers are investigated. Balance Laws of Mechanics consistent with Second Law of Thermodynamics associated with First Law of Thermodynamics are expressed in terms of time rate of stress potential. The independent variables of stress potential are determined as Green deformation tensor and fiber vector.

It is assumed that, the matrix material is isotropic but it shows anisotropy property due to its fiber distribution. Using the material symmetry axioms and considering incompressibility of medium and inextensibility of fiber family which are fairly meaningful assumptions for the practical application; constitutive equation of stress was obtained. Considering that the matrix material is isotropic and using theory of invariants, for determining the nonlinear mechanical behavior for the fiber reinforcement hyperelastic materials, constitutive equation was obtained. In this equation, for determining the derivation stress potentials as a function of invariants, Σ was represented with a second degree polynomial with symmetrical coefficients in terms of existing invariants. When estimating the derivatives of Σ in terms of its invariants, constitutive equation of stress are determined in material and spatial coordinates after taking first and second order terms of deformation tensor. Using Finite Element Methods, a hyperelastic material under force is study solution of displacement, stress and strain.

KEYWORDS: Constitutive Equation, Deformation, Stress, Hyperelasticity, Isotropy, Composite Material

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın yapılmasında yardım ve desteklerini esirgemeyen, çalışmayı titizlikle yöneten, fikir ve eleştirileri ile beni yönlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr Melek USAL 'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarımnda karşılaştığım problem ve engellerde bilgi ve tecrübelerine başvurduğum değerli hocam Yrd. Doç. Dr Mustafa Reşit USAL'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç biliyorum.

Tez çalışmalarımnda rahat çalışabilmem için her türlü fedakarlığı ve sabrı gösteren eşime ve aileme teşekkür ederim. Ayrıca tezin yazılması esnasında yardımlarını esirgemeyen tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ahmet KABUL

04.06.2004

SİMGELER DİZİNİ

$A(X)$	A – Fiber ailesinin deformasyondan önceki dağılımı
$a(X)$	a – Fiber ailesinin deformasyondan sonraki dağılımı
a	İvme
a_1, a_2, \dots, a_6	Serbest enerjiyi tanımlayan polinomun katsayıları
C_{KL}, C_{KL}^{-1}	Gren – Piola deformasyon tansörleri
c_{kl}, c_{kl}^{-1}	Cauchy – Finger deformasyon tansörleri
d_{kl}	Şekil Değiştirme (genleme) hızı tansörü
dL, dl	Deformasyondan önceki ve sonraki elemanter fiber uzunluğu
dS, ds	Deformasyondan önceki ve sonraki köşegen uzunluğu
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla$	Zamana göre hareketi takip eden türev
E	İç enerji
E_{KL}, e_{kl}	Maddesel (lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörü
f	Birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet
$F_{kK} = x_{k,K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}$	Deformasyon gradyanı
h	Birim kütle başına ısı kaynağı
$I_i (i=1, 2, \dots, 6)$	İnvariant değerler
$I_K, i_k (K, k=1,2,3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlardaki birim vektörler
$J = \det F$	Deformasyon gradyanına ait matrisin determinanı
M	Momentum
K	Kinetik enerji
L	Hız gradyanı tansörü
m	Kütle
n	Dış birim normal vektör
P	Maddesel koordinatlarda parçacığın işgal ettiği nokta
p	Hidrostatik basınç
p	P noktasının t anında uzaysal koordinatlardaki yeri
q	Isı akısı vektörü

Q	Maddesel koordinat sisteminin tam ortogonal transformasyon matrisi
$Q_K(X) = X_{K,k} q_k$	Maddesel koordinat sisteminde ısı vektörü
R, r	Maddesel noktanın deformasyondan önceki ve sonraki konum vektörleri
S	Simetri grubuna ait dönüşüm matrisi
t	Gerilme Tansörü
$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl}$	Maddesel koordinatlarda gerilme tansörü
$t_{(n)}$	n yüzeyine tesir eden gerilme vektörü
u	Yer değiştirme vektörü
V, v	Deformasyondan önceki ve sonraki hacim
$V_{k,l} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$	Deformasyon hızı tansörü
w_{kl}	Spin veya çevri tansörü
δ_{KL}, δ_{kl}	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda kronecker delta
$\alpha_i, \beta_i, (i=1, 2, \dots)$	Denklemleri kısaltmak için kullanılan kısaltmalar
ω	Açısal hız vektörü
ε	Birim kütle başına iç enerji
$\varepsilon_{KLM}, \varepsilon_{klm}$	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda permütasyon sembolü
η	Birim kütle başına entropi yoğunluğu
$\theta(X,t)$	Bir t anında X maddesel noktasının mutlak sıcaklığı
λ_a	A fiber ailesinin uzama oranı
$\rho\gamma$	Birim kütle başına entropi üretimi
ρ_0, ρ	Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
σ	Sürekli ortam içinde yer alan süreksizlik yüzeyi
$\Sigma \equiv \rho_0 \psi$	Gerilme potansiyeli
$X_K, x_k (K,k=1,2,3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
X, x	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta$	Genelleştirilmiş serbest enerji yoğunluğu
∇	Gradyan operatörü
Γ	Toplam entropi üretimi

ψ	Birim kütle başına herhangi bir alan büyüklüğü
λ, Λ	Shifter (kaydırıcı)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Ortalama yoğunluğun değişimi	11
Şekil 1.2. Maddesel ve uzaysal koordinatlar	12
Şekil 1.3. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme	15
Şekil 1.4. Maddesel türev	24
Şekil 1.5. Yay elemanındaki değişim	25
Şekil 1.6. Süreksizlik yüzeyi içeren bölge	29
Şekil 1.7. Hareketli süreksizlik yüzeyi	31
Şekil 1.8. Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi	45
Şekil 4.1 Problemin ve kesit alınan geometri	87
Şekil 4.2 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki gerilmeler	88
Şekil 4.3 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki gerinmeler	89
Şekil 4.4 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler	89
Şekil 4.5 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki gerilme	90
Şekil 4.6 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki gerinmeler	91
Şekil 4.7 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler	91
Şekil 4.8 Hiperelastik malzemedeki gerilme - gerinme ilişkisi	93
Şekil 4.9 Problemin geometrisi	94
Şekil 4.10 Yüklerin uygulanmış hali	94
Şekil 4.11 Yer değiştirmelerin (a) yandan görünümü, (b) alttan görünümü	95
Şekil 4.12 Ortalama gerilmeler	96
Şekil 4.13 Ortalama gerinme	96

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 Hiperelastik eleman tipinin kullanıldığı analizde elde edilen sonuçlar	92
Çizelge 4.2 Çelik eleman tipinin kullanıldığı analizde elde edilen sonuçlar	92
Çizelge 4.3 Hiperelastik eleman tipinde düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler	92
Çizelge 4.4 Çelik eleman tipinde düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler	92

1. GİRİŞ

Bu çalışma, fiber takviyeli hiperelastik malzemenin mekanik davranışını temsil eden bünye denklemlerine ait matematiksel bir modelin oluşturulması amacını taşımaktadır. Modern sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilke ve aksiyomları, bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde yol gösterici ve belirleyici olmuştur. Hazırlanan bu tezin bilimsel bütünlük içindeki özel yerini tespit etmek için gerekli görülen kavramlarla ilgili genel bilgiler sistematik içinde incelenmiştir.

Hiperelastik cisimler ortamın bir X parçacığında ve t anındaki gerilme tansörünün, sadece aynı yerde ve andaki şekil değiştirme, ya da genleme, tansörüyle belirlendiği cisimler olarak tanımlanır. Dolayısıyla böyle cisimlerde gerilme durumu cismin şekli değiştirilirken izlenen yola bağlı değildir ve cismi şeklini değiştirmeye zorlayan etken ortadan kaldırılırsa cisim ilk şekline geri döner. Bu özellik elastiklik olarak adlandırılır ve bu özelliği taşıyan cisimler elastik cisim adını alır. Deneyimler elastik cismin gerilmesiz olduğu bir durumun varlığını gösterir. Bu duruma doğal durum denir ve elastik bir cisim daima doğal durumuna dönmeye çalışır. Elastiklik özelliği taşıyan çeşitli ortamlar bulunmakla birlikte ancak bünye denklemi yukarıda varsayıldığı türden olan elastik cisimler hiperelastik cisim olarak adlandırılır. Genellikle bir sürekli ortamın gerilme durumunu belirleyen o ondaki genlemelerden başka etmenler de vardır. Bunların tümüyle ihmal edilme zorunluluğu hiperelastisiteyi bir ölçüde matematik soyutlama olarak nitelendirmeyi akla getirir. Bu temelde doğru olmakla beraber uygulama aralığı iyi belirlendiğinde hiperelastisite teorisinin çeşitli mühendislik dallarında geniş bir yelpazede yer alan problemlerin çözümünde çok başarılı olarak kullanıldığı da bir gerçektir. Bu yüzden teori, boyutlandırma gibi pratik açıdan çok önemli bazı mühendislik problemlerin çözümünü ampirik yaklaşımdan kurtarıp matematiksel analize olanak sağlayan rasyonel bir çerçeveye oturtmakla bilim ve teknoloji tarihinde önemli bir yer almış bulunmaktadır (Şuhubi, 1994).

Hemen hemen bütün mühendislik malzemeleri belirli ölçüde elastisite özelliğine sahiptir. Eğer şekil değiştirmeyi meydana getiren dış kuvvetler belirli bir limiti

aşmıyorsa, şekil değiştirme dış kuvvetlerin kaldırılmasıyla ortadan kalkar. Bir elastik cismin önemi homojen olması ve hacmi boyunca sürekli olarak dağılmış yani cisimden kesilen küçük bir parça cisme benzer fiziksel özelliklere sahip olmasıdır. Aynı zamanda cismin izotropik olduğu kabul edilir. Yapısal malzemeler yukarıda belirtilen kabullerin tamamını sağlamaz. Herhangi yapısal bir malzeme mikroskopla incelendiğinde çeşitli türlerde ve çeşitli oryantasyonlarda kristallerden meydana geldiği görülmektedir. Malzeme homojenlikten oldukça uzak olmasına rağmen deneyimler homojenlik ve izotropi kabullerine dayanan elastisite teorisi sonuçlarının büyük bir doğrulukla yapısal malzemelere uygulanabileceğini gösterir. Bunun sebebi, kristaller çok küçük ve genellikle bir santimetre küp içerisinde milyonlarca kristal olmasıdır. Tek kristallerin elastiklik özellikleri doğrultulara göre değişirken, kristaller gelişi güzel dağılır ve büyük metal parçalarının elastiklik özellikleri kristal özelliklerinin ortalamasıyla temsil edilir. Cismin şeklini tanımlayan geometrik boyutlar kristalin boyutlarıyla karşılaştırıldığında çok büyük olduğu sürece homojenlik kabulü büyük bir doğrulukla kullanılabilir ve kristaller rasgele bir şekilde yönlendirilmiş ise malzeme izotropik bir davranış sergiler (Timoshenko, 1970).

Hiperelastik malzeme, elastik malzemenin bir alt sınıfı olarak tanımlanır. Bölgesel olarak entropi üretmeyen malzeme güçlü elastik malzeme olarak tanımlanır. Hiperelastik malzemelerde entropi ve sıcak gibi termodinamik değişkenler sabit kabul edildiğinden sadece mekanik teori kullanılır. Hiperelastik malzeme literatürde Green elastik malzeme olarak da kullanılmaktadır. Bu malzemelerde Helmholtz serbest enerji fonksiyonunun var olduğunu kabul edilir. Helmholtz serbest enerji fonksiyonu gerinme enerjisi fonksiyonunu veya depolanmış enerji fonksiyonunu gösterir (Holzapfel, 2000).

Bir hiperelastik malzeme dikkate değer hacim değişikliği olmaksızın sonlu gerinmeye uğruyorsa bu tip malzemelere sıkıştırılmaz hiperelastik malzeme denir. Bu yüzden sadece sabit hacimli hareketler mümkündür. Sıkışmazlık durumu sürekli ortamlar mekaniğinde sık sık başvurulan bir varsayımdır. Hareket boyunca hacmini muhafaza eden malzemeler $J=1$ sıkışmazlık kısıtlamasıyla karakterize edilir (Holzapfel, 2000).

Kompozit malzemeler en genel anlamda doğal kompozitler ve yapay kompozitler olmak üzere ikiye ayrılır. Kompozitler yapısal olarak fiber takviyeli, tabakalı ve partikül takviyeli olarak üç alt sınıfta incelenmektedir. Doğal ve yapay kompozit malzemelerde fonksiyonel açıdan benzerlikler olmakla birlikte imalat yöntemleri ve kullanım maksatları açısından çok büyük farklılıklar vardır. Ağaç, kemik, adale, ve diğer biyolojik dokular gibi doğal kompozitler insanoğlunun belli maksatlar doğrultusunda gerçekleştirmiş olduğu bir imalat ve fabrikasyon işleminin sonucu değildir. Son derece ince ve karmaşık alt sistemlere sahip olan bu yapılar bazen mikroskobik bazen de makroskobik ölçeklerde evrensel bir programa göre tayin edilmiş bir zaman ve zeminde belli bir dağılımda bir araya gelerek bilinen doğal yapı elemanlarını oluşturur. Yapay kompozitler ise üstün özelliklere sahip ve kullanım amacı belli olan bir malzeme oluşturmak için insanoğlunun beyin gücü ölçüsünde belli bir fabrikasyonun ürünü olarak ortaya çıkmaktadır. Yapay kompozitleri oluşturan bileşenlerin bütün fiziksel ve mekanik özellikleri önceden bilinmektedir. Doğal ve yapay kompozit yapı elemanlarının mikro düzeyde ele alınması mikro mekaniğin konusudur (Usal, 2001). Bu çalışmada ise sürekli ortamlar mekaniği kapsamında kompozitlerin makro davranışlarının bir göstergesi olan bazı malzeme modüllerini ve bu davranışları yöneten bünye denklemleri incelemektedir.

Kompozit malzeme, iki yada daha fazla sayıdaki, aynı veya farklı gruptaki malzemelerin en iyi özelliklerini, yeni ve tek bir malzemedeki toplamak amacıyla, makro düzeyde birleştirilmesiyle oluşturulan malzemeler olarak adlandırılır. Bir kompozit malzeme bünyesinde, çekirdek olarak adlandırılan takviye elemanı ve bunun etrafını çevreleyen matris malzemesinin bulunduğu bilinmektedir. Takviye elemanı olarak değişik morfolojiye sahip kısa ve uzun elyaflar, Whiskerler (kılcal kristaller), kırılmış veya parçacıklı seramikler kullanılmaktadır. Bunların temel fonksiyonu gelen yükü taşımak ve matrisin rijitlik ve dayanımını artırmaktır. Matrisin fonksiyonu ise elyaflara yük ve gerilim transferi sağlayabilmek için elyaf matrisi bir arada tutmak yanında çoğu takviye elemanları çok gevrek ve kırılgan olduğundan onların yüzeylerini dış ve çevresel etkilere karşı korumaktır. Kompozit malzeme üretilmesiyle genel olarak yüksek dayanım, yüksek rijitlik, yüksek yorulma

dayanımı, mükemmel aşınma direnci, yüksek sıcaklık kapasitesi, iyi korozyon direnci, iyi termal ve ısı iletkenliği, düşük ağırlık, çekicilik ve estetik görünüm gibi özellikler sağlanabilir. Bütün bu özellikler aynı zamanda oluşmaz ve herhangi bir uygulama için böyle bir gereksinime ihtiyaç yoktur. Fakat yukarıda belirtilen bu özellikler için gerekli şartlar, uygun matris ve takviye elemanı çifti, üretim tekniği, optimizasyonu, bileşenlerin mukavemet özellikleri ve diğer faktörler göz önüne alınarak üretim yapılırsa istenilen özelliği elde etmek mümkündür. Bu avantajları yanında bazı dezavantajları da mevcuttur. Bunlardan bazıları, üretim güçlüğü, pahalı olması, işlenmesinin güç olması, gerekli yüzey kalitesinin elde edilemeyişi ve diğer malzemeler gibi geri dönüşümünün olmayışı gibi sıralanabilir (Şahin, 2000).

Kompozit malzemeler için kullanımda çok farklı fiber ve matris malzemeler bulunmaktadır. Mühendislikte önemli olan diğer bir nokta ise fiberlerin dayanımının yüksek ve maliyetinin düşük olmasıdır. Bor, cam, karbon grafit (farklı karbon içerikli), organik fiber aramid, seramik fiber silikon karpit ve alüminyum oksit fiberlere örnek olarak verilebilir. Termoplastik polimerler, termoset polimerler, metaller (alüminyum, titanyum ve bakır gibi) ve seramikler matris malzemelere örnek olarak verilebilir (Holzapfel, 2000).

Fiber takviyeli kompozit malzemeler endüstri mühendisliğinde ve tıp alanında değişik uygulamalarda kullanılır. Endüstride kemerlerin ve yüksek basınç tüplerinin sonlu elastik tepkisi, tekerleklerde kullanılan çelik takviyeli lastikler ve elektronik aletlerde kullanılan ufak bir silikon parçadaki çok kısmımlı elektronik devreler gibi bir çok uygulama alanı kompozit malzemelerle ilgilidir. Kalça eklemi dikme aleti ve hafif tekerlekli sandalye ise tıp alanındaki uygulamalardır (Holzapfel, 2000).

Çok sayıda malzeme matris malzeme ve tek veya daha çok fiber ailelerinden oluşmaktadır. Bu tip malzemeler kompozit malzemeler veya fiber takviyeli malzemeler olarak adlandırılırlar. Fiber takviyeli kompozitlerin dizaynındaki en önemli problem elde edilen malzemenin istenilen uygulama için en etkili şekilde olması açısından matris malzeme ile fiberlerin birleştirilmesidir. Mühendislik uygulamaları açısından kompozit malzemeler yüksek katılık ve dayanım, düşük

ağırlık ve ısı yayılım ve korozyona direnç gibi avantajları sağlamalıdır. Bununla birlikte kompozit malzemelerin kullanımındaki dezavantajı ise yüksek maliyetli olması ve uygulama açısından bakıldığında bu tip malzemelerin nasıl birleştirilecekleri konusundaki bilginin sınırlı olmasıdır (Holzapfel, 2000).

Bir fiber ailesi ile takviye edilmiş bir malzeme tek tercihli doğrultuya sahiptir. Bu tip kompozitlerin fiber doğrultusundaki katılığı, fiberlere dik doğrultulardan daha büyüktür ve fiberlerin bütün malzeme düzgün bir şekilde dağıldığı durum göz önüne alındığından tercihli doğrultuya göre enine izotropi söz konusudur. Tercihli doğrultuya dik doğrultu boyunca malzeme tepkisi izotropudur (Holzapfel, 2000).

Enine izotropik malzeme için yazılan serbest enerji fonksiyonu izotropik malzemeler içinde geçerlidir. Hiçbir kısıtlama getirmeden izotropik hiperelastik malzemenin serbest enerji fonksiyonu beş tane bağımsız invaryanta bağlıdır. İlk kısıtlama olarak, sıkıştırılmaz izotropik matris malzeme dikkate alınır. Sıkıştırılmazlık koşulu olarak $I_3=1$ kabul edildiğinden serbest enerji fonksiyonu dört bağımsız invaryant ile tanımlanır. Bu durumda serbest enerji fonksiyonu reaksiyon basıncı olarak tanımlanan belirsiz $-\frac{1}{2}p(I_3-1)$ lagrange çarpanı ile artırılır. İkinci kısıtlama olarak sıkıştırılmaz izotropik matris malzemenin uzamaz fiberlerle takviye edildiği dikkate alınır. Fiber ailesinin uzamazlığı $I_4 = \lambda = 1$ kabul edildiğinden serbest enerji fonksiyonu üç bağımsız invaryant ile tanımlanır. Fiber ailesinin uzamazlığından dolayı serbest enerji fonksiyonuna belirsiz $-\frac{1}{2}T_a(I_4-1)$ lagrange çarpanı eklenir. Bu iki kısıtlama dikkate alındığında serbest enerji fonksiyonu, sıkıştırılmaz hiperelastik malzemenin davranışını tanımlayan I_1 , I_2 ve uzamaz fiber ailesinin davranışını tanımlayan I_5 'in bir fonksiyonudur (Holzapfel, 2000).

Sürekli ortamlar mekaniği akışkanları (su, yağ, hava, vb.) ve katıları (kauçuk, metal, seramik, ahşap ve yaşayan doku gibi) içerir. Süreklilik gibi malzemenin makroskopik doğasını tanımlamada fenomenolojik yaklaşım tekniği kullanılır. Fenomenolojik yaklaşım matematiksel denklemler ile deneysel verileri uygun hale getirmeyle uğraşır ve özellikle katı mekaniğinde başarılı olmuştur (Holzapfel, 2000).

Sürekli ortamlar mekaniği, kütle dağılımı sürekli kabul edilebilen maddesel cisimlerin mekanik davranışını belirlemekle uğraşan bir bilim dalıdır. Maddesel bir cisim gerçekte ayrı parçacıklardan oluştuğu için sürekli model ancak bir matematik soyutlama olarak değerlendirilebilir. Bununla beraber sonlu bir hacimdeki parçacık sayısının sonlu kalmasına karşın, çok özel durumlar dışında, genellikle çok büyük olması, bu parçacıkların sayısını sonsuz kabul etmekle yapılan hatayı pek çok, özellikle teknolojik, uygulamada kabul edilebilir sınırların içine sokar ve ortamın makroskopik davranışı ile ilgilendiğimiz sürece sürekli model ile elde ettiğimiz sonuçlar, çoğu zaman, aradığımız büyüklüklerin yerel çalkantılarının sistematik olarak düzgünleştirilmiş değerlerine karşı gelir ve pratik açıdan gereksinimlerimizi hemen hemen tümüyle karşılayabilen bilgileri bize sağlar. Ancak ortamı oluşturan parçacıkların yapısı çok çeşitli türden etkileşimlere yol açtığı için ilke olarak sürekli ortamların genel mekanik davranışını, çeşitli alanlarla etkileşimini göz önüne almadan belirlemek mümkün değildir. Çağdaş sürekli ortamlar mekaniği bütün bu etkileşimleri en genel biçimiyle rasyonel bir çerçeveye sokabilme çabalarının bir ürünüdür (Şuhubi, 1994).

Kısım 1.1’de sürekli ortam modeli tanımlanmıştır. Geometrik ve kinematik temsilde maddesel noktaların başlangıç anında buldukları yer ve daha sonra işgal etmiş oldukları yerlerin tespiti için bir referans sistemine ihtiyaç vardır. Bu nedenle kısım 1.2’de sürekli ortamın hareketi ile koordinat sistemleri hakkında bilgi verilmiştir. Kısım 1.3’de maddesel ve uzaysal koordinatlarda yer vektörü, hareket deformasyonu temsili, deformasyon gradyanı, Green, Cauchy, Piola ve Finger deformasyon tansörleri, gerilmeyi oluşturan genleme (Strain) tansörü hakkında kısa bilgiler ve ilgili notasyon verilmiştir.

Kısım 1.4’de ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler ve daha genel olarak da şekil değiştirme karakteristiklerinin zamanla değişim hızının nasıl ölçüleceği (maddesel türev) belirlenmeye çalışılmıştır. Süreksizlik yüzeyi tanımlanarak genelleştirilmiş Green – Gauss (diverjans) teoremi verilmiştir.

Kısım 1.5'te denge denklemleri hem ortam içinde ve hem de süreksizlik yüzeyi üzerinde (veya ortam sınırında) geçerli olan hali ile birlikte verilmiş olup sırasıyla kütle korunumu, lineer momentum denkliği, açısal momentum denkliği, enerji dengesi ve entropi eşitsizliğinden oluşmaktadır.

Kısım 1.6'da ortamla birlikte hareket ettiği varsayılan fiberlerin, deformasyon sırasındaki mekanik davranışı, fiber dağılımını temsil eden fiber vektörünün deformasyondan önceki ve sonraki durumu, fiber uzama hızı, fiber vektörünün zamana göre değişimi hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Kısım 3.1.1'de fiber takviyeli hiperelastik ortamların termodinamiğinden bahsedilmektedir. Burada Termodinamiğin 1. ve 2. kanunlarının birleştirilmesinden elde edilen Clausius – Duhem eşitsizliği temel başlangıç noktası olarak dikkate alınmaktadır. Bu eşitsizlikte; entropi yoğunluğunun, iç enerjinin ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç enerji ve entropi değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından, (3.2) ifadesinde verildiği tarzda bir Legendre transformasyonu uygulanarak, zamanla değişen terimler iç enerji ve entropi yerine serbest enerji ve sıcaklık cinsinden yazılmıştır.

Clausius – Duhem eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerjinin zamana göre maddesel türevinin hesaplanıp yerine konulması gerekir. Ancak bu işlem Σ nın hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunu tespit etmeden önce yapılamaz. Burada her şeye ait bilginin serbest enerji fonksiyonuna ait bilgiden kaynaklandığını göz önünde bulundurarak daha kısa bir yol izlenmiştir. Eringen (1980) ve Şuhubi (1994) tarafından tüm bünye fonksiyonları için geliştirilmiş olan bünye aksiyomları tek tek ele alınmış ve bunların neticeleri, Clausius – Duhem eşitsizliğini temsil eden (3.11) eşitsizliğinde yer alan serbest enerji Σ için dile getirilmiştir. Kozalite, determinizm, eşbulma, uygunluk, objektivite, maddesel simetri ve yöresellik aksiyomları kullanılarak Σ nın genelde hangi argümanlara bağlı olması gerektiği (3.39) denkleminde verilmiştir. Malzemenin homojen olduğu kabul edilerek (3.40) ifadesiyle verilen Σ nın argümanlarından X kaldırılır ve bu durumda Σ

nın bağılı olduğu argümanlar Green deformasyon tansörü C_{KL} , deformasyondan önce fiber vektör alanının X noktasındaki değeri A_K ve sıcaklık θ_0 şeklindedir. Σ nın bünye aksiyomlarına uygun haliyle, sonunda kimlere bağılı olduğu açıkça belirlendikten sonra, zamana göre maddesel türevler alınır. Sıcaklık sabit olduğu için sıcaklığa bağılı ifadelerin maddesel türevi sıfır olur. Gerilme C deformasyon tansörüne ve A fiber vektörüne bağılı olan Σ dan türetildiği görülmektedir. Ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edilerek gerilme tansörünün bünye denklemleri maddesel (3.56) ve uzaysal (3.55) koordinatlardaki formu elde edilmiştir.

Kısım 3.2’de matris malzeme izotrop alınarak Σ üzerindeki bağlayıcı etkenlerden kaynaklanan sonuçlar açıkça ortaya konmakta ve serbest enerji ifadesine son şekli verilerek, fiber takviyeli hiperelastik izotrop ortamlar için matematiksel bir bünye modeli oluşturulmaktadır. Bunun için Cebrik İnvaryantlar Teorisine göre, Σ gerilme potansiyeli C , A ve bunların müşterek invaryantları olan (3.60) ifadesiyle verilen 6 adet bağımsız invaryantlara bağılıdır. Bu invaryantlardan ilk üçünün yerine (3.62) ifadesi ile verilen asal invaryantlar kullanılmıştır. Ancak ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edildiğinden III , I_4 ve I_5 invaryantlarının 1’e eşit olduğu görülür ve bu invaryantlar Σ nın bağılı olduğu invaryantlar listesinden çıkarılır. Σ nın C tansörüne göre türevi alınıp (3.66) denkleminde yerine yazılarak, bu çalışmada ele alınan malzeme için gerilmenin nonlinear bünye denklemi maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden (3.69) ve matris formunda (3.70) elde edilmiştir.

Kısım 4.1’de Σ nın bağılı olduğu invaryantların analitik bir fonksiyonu olduğu kabul edilerek, Σ ikinci dereceden bir polinom açılımı ile temsil edilmiştir. (3.69) denklemlerinde bulunan Σ invaryantlarına göre türevleri bu açılımdan hesaplanarak, kısmi türevlerde yer alan Green deformasyon tansörüne bağılı invaryantlar ve (3.69) ifadesindeki Green deformasyon tansörüne bağılı terimler genleme tansörü E cinsinden ifade edilmiştir. (3.69) denklemindeki terimler (4.2), (4.3) ve (4.4) ifadeleri kullanılarak tek tek hesaplanmıştır. Bu işlemler yapılırken mekanik etkileşimler nonlinear kabul edildiğinden E tansörünün ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınmıştır. Diğer taraftan malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından matematiksel olarak $A \rightarrow -A$ değişiminden etkilenmeyeceği için A

vektörünün bileşenlerinin dış çarpımda çift sayıda olanlar alınmıştır. Ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği, tek fiber aileli hiperelastik izotrop ortamda mekanik etkileşimlerin nonlineer kabul edildiği durumda gerilmenin bünye denklemi maddesel formda (4.14) ifadesinde elde edilmiştir. Kısım 4.2’de gerilme bünye denklemi (4.20) ifadesinde uzaysal formda elde edilmiştir. Daha sonra genleme ve Finger deformasyon tansörleri lineer yer değiştirme gradyanı nonlineer kabul edilerek ikinci dereceye kadar olan terimleri dikkate alınarak (4.29) ifadesiyle gerilme bünye denklemi, uzaysal formda yer değiştirme gradyanı cinsinden elde edilmiştir.

Kısım 4.3’de hiperelastik malzemelerin, diğer malzemelerden farkını göstermek için Ansys paket programı ile analiz yapılmıştır. Benzer geometri üzerine aynı sınır şartları ve yüklemeler uygulanarak yer değiştirmeler, gerilmeler ve gerinmeler arasındaki farklar tablo ve geometri üzerinde gösterilmiştir.

1.1. Sürekli Ortam Modeli

Bir maddesel cismin içinde alacağımız tamamen keyfi her hacim bu cismin kütesinin bir kısmını içeriyorsa bu cisim bir sürekli ortam olarak nitelendirilebilir. Buna göre sürekli bir ortamın bir noktası etrafında keyfi, yani istediğimiz kadar küçük seçebileceğimiz bir Δv hacmini dikkate alırsak bu hacimde cismin bir Δm kütlesi bulunacaktır. Bu nokta civarında ortalama yoğunluk,

$$\rho_{ort} = \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Sürekli ortam varsayımına göre Δv ne kadar küçük olursa olsun içinde kütle bulunacağından yukarıdaki ifadenin $\Delta v \rightarrow 0$ için bir limiti olacaktır. Dolayısıyla ortamın göz önüne alınan noktadaki yoğunluğu bu limit işleminin sonucu olarak,

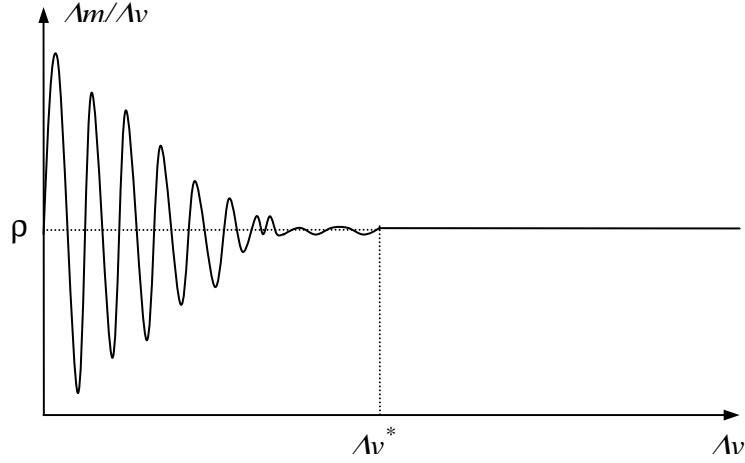
$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (1.2)$$

bulunur. Atomistik ölçeğe indiğimizde madde büyük ölçüde boşluklu bir yapı sergiler. Buna göre bir noktada tanımlanan yoğunluğun statik olarak anlamlı bir ortalamaya karşı gelebilmesi için Δv hacminin bir Δv^* kritik değerinden büyük olması gerekir. $\Delta v < \Delta v^*$ için bir noktada yoğunluk, Δv ye bağlı olarak, büyük çalkantılar gösterir (Şekil 1.1).

Sürekli ortam modeli, sonlu bir hacimdeki parçacık sayısını sonsuz almaya eşdeğerdir. Buna göre cismin içinde alınan bir V hacminde bulunan kütle miktarı,

$$M = \int_V \rho dv \quad (1.3)$$

integrali ile hesaplanır.

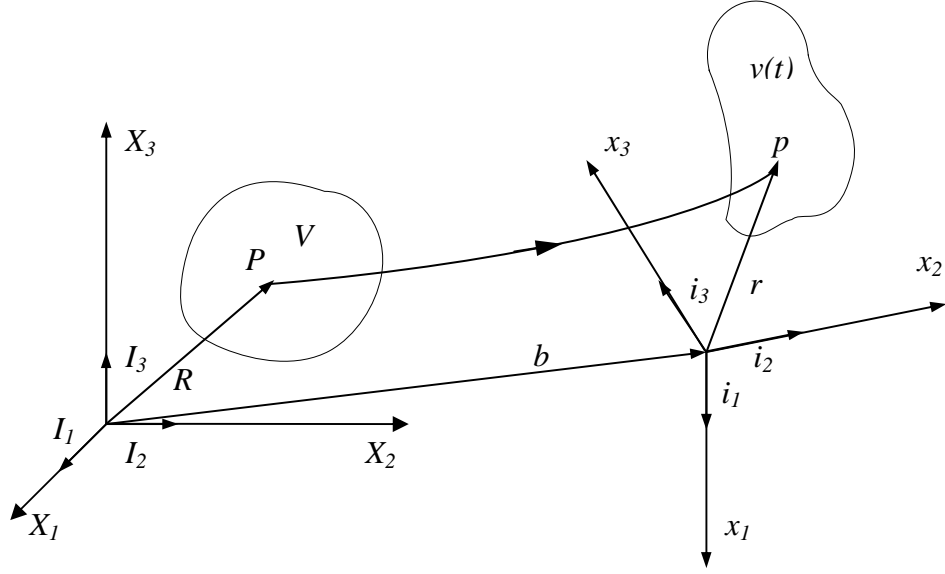


Şekil 1.1. Ortalama yoğunluğun değişimi (Şuhubi, 1994).

1.2. Sürekli Ortam Hareketi

Bir sürekli ortamın hareketini belirlemek için bu ortamı oluşturan, sonsuz sayıdaki bütün parçacıkların zamanla buldukları uzaysal konumlarının belirlenmesi gerekir. Ortamın belli bir andaki konumunun tamamen bilindiği varsayılır, bu konum referans konumu olarak adlandırılır ve oluşturduğu hacimsel bölge V ile gösterilir. Ortamın referans konumunu belirli kılmak için bir X_1, X_2, X_3 kartezyen koordinat takımı seçilir. Ortamın bir parçacığı, şimdi referans konumunda işgal ettiği P noktasının yerini tanımlayan R yer vektörü, ya da eşdeğer olarak X_K ($K = 1, 2, 3$) koordinatlarıyla tamamen belirlenir. X_K koordinatlarına maddesel koordinatlar (Lagrange Koordinatları) adı verilir.

Sürekli bir ortamın hareketini belirlemek için referans konumundaki herhangi bir P maddesel noktasının t anında uzayda bulunduğu konumu, yani p noktasının yerini, belirlemek için x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinat takımı seçilir (Şekil 1.2). Bu koordinat takımında p uzaysal noktası r yer vektörü, ya da x_k ($k = 1, 2, 3$) koordinatlarıyla belirlenir. Bu koordinatlara uzaysal koordinatlar (Euler koordinatları) adı verilir. Gerek duyulduğu takdirde maddesel ve uzaysal koordinatlar çakışık olarak seçilebilir.



Şekil 1.2. Maddesel ve uzaysal koordinatlar (Şuhubi, 1994).

Bir t anında her P parçacığının işgal ettiği p noktaları zamanla değişen bir $v(t)$ bölgesini oluşturur. Bu bölge ortamın t anındaki konumunu belirler. Buna göre sürekli ortamın hareketi, her P noktasına bir t anında hangi p noktasının karşı geldiğini gösteren bir dönüşüm olarak tanımlanır. Böyle bir dönüşüm,

$$r = r(R, t), \quad x_k = x_k(X_K, t) \quad (1.4)$$

sürekli bağıntıları yardımıyla tanımlanır. Tersini söylenmedikçe referans konumunun $t = 0$ anına karşı geldiği kabul edilir. Sürekli ortamın hareketini tanımlayan (1.4) dönüşümünün bir fiziksel harekete karşı gelebilmesi için sürekli olması gerekir. Ayrıca bu dönüşümün hacmi sonlu olan bir bölgeyi hacmi sıfır, ya da sonsuz bir bölgeye dönüştürmemesi için, dönüşümün jakobyeni sıfırdan ve sonsuzdan farklı olması gerekir. Yani,

$$J(X, t) = \det(x_{k,K}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0, \infty \quad (1.5)$$

şartının sağlanması gerekir. Bir $J(X,t)$ fonksiyonunu (1.5) in mutlak değeri,

$$j(X,t) = |J(X,t)| = |\det(x_{k,K})|, \quad 0 < j < \infty \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır. Temel varsayımımız uyarınca $J \neq 0$ olduğundan j ile J arasındaki fark çoğu zaman pratik bakımdan ortadan kalkar. Kapalı fonksiyon uyarınca (1.5) ya da (1.6) koşulu (1.4) dönüşümünün sürekli bir tersinin olacağını ifade eder. Bu ilke uyarınca (1.4) dönüşümünden,

$$R = R(r,t), \quad X_K = X_K(x_k,t) \quad (1.7)$$

yazılabilir. Fiziksel olarak bu bağıntılar, seçilmiş, belli bir uzay noktasından çeşitli zamanlarda ortamın hangi parçacıklarının geçtiğini belirler ve $v(t)$ uzaysal bölgeler ailesini tek bir V maddesel bölgesine dönüştürür.

1.3. Şekil Değiştirme

Referans konumunda verilen bir V bölgesini dolduran bir sürekli ortamın belli bir t , örneğin t_1 , anında $v(t)$ uzay bölgesine dönüştüğünü ve bu sürekli dönüşümün verilen,

$$x_k = x_k(X_K,t) \quad \text{veya} \quad X_K = X_K(x_k,t) \quad (1.8)$$

hareket denklemlerinin t parametresinin t_1 değeriyle tamamen belirlenmiş olduğu varsayılır. Dolayısıyla başlangıçtaki, yani referans konumundaki herhangi bir P parçacığı t_1 anında p uzay noktasına taşınmış olur. P ve p noktalarının yer vektörleri,

$$R = X_K I_K, \quad r = x_k i_k \quad (1.9)$$

ile verilir ve (1.8) bağıntıları yardımıyla birbirlerine bağlanır (Şekil 1.3). Bundan sonra Einstein toplama uyuşumundan yararlanılarak ve tekrarlanan iki indis üzerinde

1 den 3 e kadar toplama yapılacağı kabul edilir. Uzaysal ve maddesel koordinat takımları arasındaki dönüşüm,

$$i_k = \lambda_{kK} I_K, \quad I_K = \Lambda_{Kk} i_k \quad (1.10)$$

bağıntıları ile belirlenir. λ ve Λ katsayı matrisleri birbirinin tersidir ve,

$$\lambda_{kK} = i_k \cdot I_K, \quad \Lambda_{Kk} = I_K \cdot i_k \quad (1.11)$$

olarak tanımlanır. Her iki koordinat takımı da dik olduğundan bu dönüşüm ortogondur. Yani,

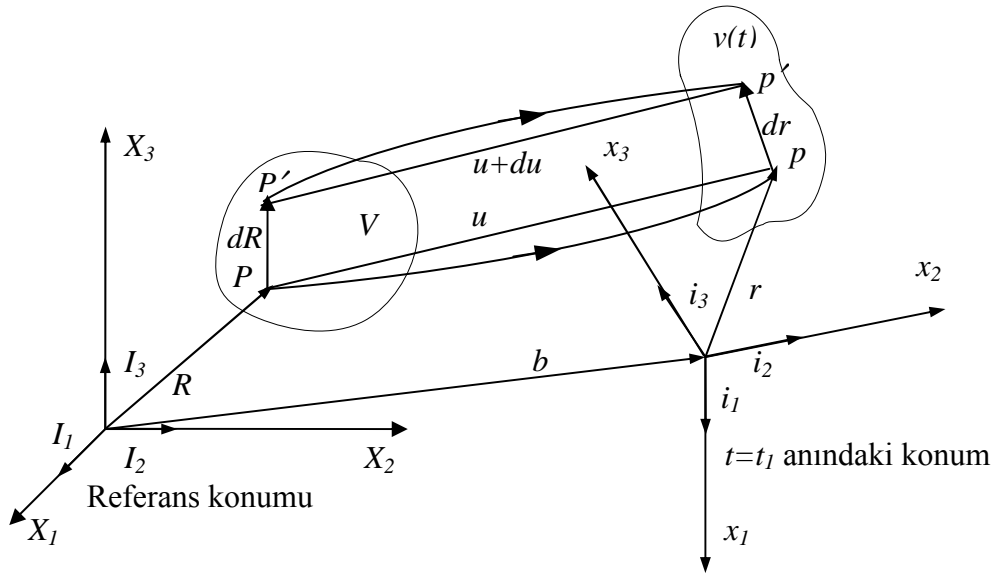
$$\Lambda = \lambda^{-1} = \lambda^T \quad \text{veya} \quad \Lambda_{Kk} = \lambda_{kK} \quad (1.12)$$

yazılabilir. Λ_{Kk} matrisi λ_{kK} matrisinin transpozu olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bu katsayılar,

$$\lambda_{kK} \lambda_{lK} = \delta_{kl}, \quad \lambda_{kK} \lambda_{kL} = \delta_{KL} \quad (1.13)$$

bağıntılarını gerçeklemek zorundadır. Burada δ_{kl} ve δ_{KL} büyüklükleri Kronecker delta olarak adlandırılır ve birim matrisi temsil eder. Yani iki indis birbirine eşitse 1, farklı ise 0 değerini alırlar. λ matrisi yardımıyla uzaysal koordinat takımında tanımlanmış bir vektörü kendisine paralel kalarak maddesel koordinat takımına kaydırabilir, ya da bu işlemin tersi yapabilir. Bu özellikler nedeniyle λ_{kK} katsayıları kaydırıcılar (Shifter) olarak adlandırılır.

Deformasyonu temsil etmek için, şekil 1.3 de P parçacığına çok yakın olan başka bir P' parçacığı göz önüne alınır. P' nün P ye göre konumunu sonsuz küçük dR vektörüyle belirlenir. P' maddesel noktası hareketle t_1 anında p' uzay noktasına taşınmış olur. p' noktasının P nin görüntüsü olan p noktasına göre konumu da yine sonsuz küçük olan dr vektörüyle belirlenir.



Şekil 1.3. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme (Şuhubi, 1994).

Bu vektörler maddesel ve uzaysal koordinat eksenleri üzerindeki bileşenleri cinsinden,

$$dR = dX_K I_K, \quad dr = dx_k i_k \quad (1.14)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (1.8) bağıntısında zamanın sabit olduğunu göz önünde tutularak diferansiyeli alınırsa,

$$dx_k = x_{k,K} dX_K, \quad dX_K = X_{K,k} dx_k \quad (1.15)$$

ifadeleri elde edilir. Bir alt indisten önceki virgül o indisin belirttiği değişkene göre kısmi türevini gösterir, (1.15) deki $x_{k,K}$ ve $X_{K,k}$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_{k,K} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K}, \quad X_{K,k} \equiv \frac{\partial X_K}{\partial x_k} \quad (1.16)$$

Bir P parçacığında, örneğin t_1 anında, hesaplanmış $x_{k,K}$ büyüklüklerine o maddesel noktada ve o andaki şekil değiştirme gradyanı adı verilir ve boyutsuz F matrisi ile gösterilir.

$$F(X, t_1) = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$j = |\det F| \neq 0$ olduğundan F matrisinin bir F^{-1} tersi vardır. (1.8) bağıntılarını göz önüne alır ve belli bir anda kısmi türevin zincir kuralını uygularsak,

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl}, \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL} \quad (1.18)$$

yazılabilir, buradan da,

$$F^{-1} = [X_{K,k}] \quad (1.19)$$

ifadesi elde edilir. Bir matrisin tersini hesaplamak için her elemanın yerine kofaktörünü koyarak oluşturduğumuz matrisin transpozunu matrisin determinantına bölünmesi gerekir.

$$X_{K,k} = \frac{\text{Kofaktör}[x_{k,K}]}{J} \quad (1.20)$$

Bilindiği gibi bir determinanı hesaplarken bir satırdaki elemanları kofaktörleriyle çarpıp işaret kuralına uygun şekilde toplanır. Buna göre determinantın açılımı o satırdaki elemanlara göre birinci derecedendir ve determinantın bir elemanına göre türevini alırsak bu elemanın kofaktörünü elde ederiz. Bu sonuç,

$$\frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} = \text{Kofaktör}[x_{k,K}] = J X_{K,k} \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = j X_{K,k} \quad (1.21)$$

özdeşliğini verir. dR vektörünün boyu dS , dr vektörünün boyu ise ds ile gösterildiği takdirde,

$$dS^2 = dR \cdot dR = dX_K dX_K, \quad ds^2 = dr \cdot dr = dx_k dx_k \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir. (1.15) bağıntılarını kullanarak yukarıdaki ifadeler,

$$\begin{aligned} dS^2 &= x_{k,K} x_{k,L} dX_K dX_L = C_{KL} dX_K dX_L, \\ dS^2 &= X_{K,k} X_{K,l} dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l \end{aligned} \quad (1.23)$$

şeklinde elde edilir. Burada t anında hesaplanmış bileşenleri,

$$C_{KL}(X, t) = x_{k,K} x_{k,L}, \quad c_{kl}(x, t) = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.24)$$

ile verilen ifadeler sırasıyla Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörleri veya matrisleri adını alır. Bu matrislerin simetrik olduğu ve,

$$C_{KL} = C_{LK}, \quad c_{kl} = c_{lk} \quad (1.25)$$

bağıntılarının sağlandığı görülmektedir. C ve c büyüklüklerini matrisin yanı sıra tansör olarak ta nitelendirilmesinin nedeni sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatları dönüştürüp yeni koordinat takımlarına geçildiğinde bileşenlerinin belirli bir kurala göre değişmesidir. X_K koordinat eksenleri yine dik X'_K koordinat eksenlerine dönüştürülsün. Bu dönüşüm Q ortogonal matrisi yardımıyla gerçekleşir ve koordinat eksenleri arasında,

$$X'_K = Q_{KL} X_L, \quad X_K = Q_{LK} X'_L \quad (1.26)$$

ilişkileri yazılabilir. Buna göre C tansörünün yeni koordinat takımındaki bileşenleri,

$$\begin{aligned}
C'_{KL} &= \frac{\partial x_k}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X'_L} = \frac{\partial x_k}{\partial X_M} \frac{\partial X_M}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_N} \frac{\partial X_N}{\partial X'_L} \\
&= Q_{KM} Q_{LN} x_{k,M} x_{k,N} = Q_{KM} Q_{LN} C_{MN}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

şeklinde bulunur. Bu da C nin ikinci mertebe bir maddesel tansör olduğunu gösterir. Burada (1.26) bağıntısının Q ortogonal bir matris olmasa da, yani koordinatları dik olmayan bir takıma dönüştürüldüğünde de Q^T yerine Q^{-1} matrisini alma koşuluyla geçerli kalacağına dikkat edilmeli. Benzer olarak uzaysal koordinatları,

$$x'_k = Q_{kl} x_l \tag{1.28}$$

ile dönüştürülürse c nin ikinci mertebe bir uzaysal tansör olduğunu gösteren,

$$c'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} c_{mn} \tag{1.29}$$

ifadesi elde edilir. Buraya kadar verilen ifadeler matris notasyonu kullanılarak yazılırsa; dX ve dx sütun vektörleri,

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}, \quad dx = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

şeklinde tanımlanır. (1.15) bağıntıları matris notasyonu ile,

$$dx = F dX, \quad dX = F^{-1} dx \tag{1.31}$$

yazılabilir. (1.22) ve (1.31) bağıntılarından,

$$ds^2 = dx^T dx = dX^T F^T F dX, \quad dS^2 = dX^T dX = dx^T F^{T-1} F^{-1} dx \tag{1.32}$$

bulunur. (1.23) bağıntısı göz önünde tutulduğunda Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörlerinin şekil değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$C = F^T F, \quad c = F^{T^{-1}} F^{-1} \quad (1.33)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Bazı durumlarda (1.33) ile verilen matrisler yerine terslerinin kullanılması gerekebilir. Bu matrisler ise,

$$c^{-1} = F F^T, \quad C^{-1} = F^{-1} F^{-1^T} \quad (1.34)$$

veya bileşenleri cinsinden,

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}, \quad C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k} \quad (1.35)$$

şeklinde ifade edilir. c^{-1} ve C^{-1} tansörleri sırasıyla Finger ve Piola şekil değiştirme tansörleri olarak bilinir. Hareket denklemleri $r = r(R, t)$ şeklinde verilmesi yerine P parçacığının u yer değiştirme vektörüne bağlı olarak ifade edilir. Yer değiştirme vektörünü (Şekil 1.3),

$$u = r - R + b \quad (1.36)$$

olarak tanımlanır. u vektörünü,

$$u = u_k i_k = U_K I_K \quad (1.37)$$

şeklinde yazarak uzaysal ve maddesel bileşenleri belirlenir. (1.8) hareket denklemlerinden yararlanarak uzaysal ve maddesel yer vektörlerini $r = r(X_K, t)$ ve $R = R(x_k, t)$ olarak ifade edilirse,

$$dr = C_K dX_K, \quad dR = c_k dx_k \quad (1.38)$$

yazılabilir. Burada C_K ve c_k vektörleri,

$$C_K = \frac{\partial r}{\partial X_K} = x_{k,K} i_k, \quad c_k = \frac{\partial R}{\partial x_k} = X_{K,k} I_K \quad (1.39)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu vektörler cinsinden şekil değiştirme tansörleri,

$$C_{KL} = C_K \cdot C_L, \quad c_{kl} = c_k \cdot c_l \quad (1.40)$$

olarak bulunur. (1.39)₁ bağıntısından,

$$C_K \cdot C_L = x_{k,K} i_k \cdot x_{l,L} i_l = x_{k,K} x_{l,L} \delta_{kl} = x_{k,K} x_{k,L} \quad (1.41)$$

bulunur ve benzer şekilde (1.39)₂ bağıntısından da,

$$c_k \cdot c_l = X_{K,k} I_K \cdot X_{L,l} I_L = X_{K,k} X_{L,l} \delta_{KL} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.42)$$

bağıntısı bulunur. C_K ve c_k vektörlerinin fiziksel anlamı tanımlardan açıkça görülmektedir. (1.39) ifadelerine benzer olarak,

$$c_k^{-1} = x_{k,K} I_K, \quad C_K^{-1} = X_{K,k} i_k \quad (1.43)$$

vektörleri tanımlanır. c_k^{-1} vektörlerinin c_k vektörlerine karşıt olduğu, yani,

$$c_k^{-1} \cdot c_l = \delta_{kl} \quad (1.44)$$

bağıntısını sağladıkları görülür. (1.39) ve (1.43) bağıntılarından,

$$c_k^{-1} \cdot c_l = x_{k,K} I_K \cdot X_{L,l} I_L = x_{k,K} X_{L,l} \delta_{KL} = x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad (1.45)$$

bulunur. Benzer şekilde C_K^{-1} vektörlerinin de C_K vektörlerine karşıt olduğu ve

$$C_K^{-1} \cdot C_L = \delta_{KL} \quad (1.46)$$

bağıntılarının sağlandığı gösterilebilir. (1.35) bağıntısı göz önünde tutulursa,

$$c_{kl}^{-1} = c_k^{-1} \cdot c_l^{-1}, \quad C_{KL}^{-1} = C_K^{-1} \cdot C_L^{-1} \quad (1.47)$$

yazılabilir. c^{-1} ile c ve C^{-1} ile C tansörleri birbirlerinin tersleri olduğu için,

$$c_{km}^{-1} c_{ml} = \delta_{kl}, \quad C_{KM}^{-1} C_{ML} = \delta_{KL} \quad (1.48)$$

bağıntılarının da geçerli olacağı açıktır. Cismin şekil değiştirmesinden söz edebilmek için parçacıkları arasındaki uzaklığın hareketi sırasında değişmesi gerekmektedir. Ortamın iki parçacığı arasındaki uzaklığın değişmesi için $ds \neq dS$ olması gerektiğinden ortamın bir noktasındaki şekil değiştirmenin ölçümü olarak $ds^2 - dS^2$ büyüklüğü seçilir. (1.22) ve (1.23) bağıntıları yardımıyla,

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (1.49)$$

yazılabilir. Burada E_{KL} ve e_{kl} simetrik tansörleri,

$$E_{KL}(X, t) = \frac{1}{2}(C_{KL} - \delta_{KL}), \quad e_{kl}(x, t) = \frac{1}{2}(\delta_{kl} - c_{kl}) \quad (1.50)$$

olarak tanımlanır ve sırasıyla maddesel (Lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörleri adını alır. Bir maddesel noktada E tansörünün değerini bildiğimiz takdirde bu noktadan geçen sonsuz küçük dX_K maddesel vektörünün hareketi sırasında boyundaki değişim (1.49) bağıntısıyla belirlenir. Aynı boy değişimi bu parçacığın t anındaki yerinde e tansörünün değeri yardımıyla da hesaplanabilir. (1.50) bağıntıları matris formunda,

$$E = \frac{1}{2}(C - I), \quad e = \frac{1}{2}(I - c) \quad (1.51)$$

yazılabilir. (1.15) bağıntılarından (1.49) da yararlanılırsa maddesel ve uzaysal genleme tansörlerinin,

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \quad E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.52)$$

eşitlikleriyle birbirlerine bağlandığı görülebilir. (1.36) ve (1.39) bağıntıları, b vektörü koordinatlara bağlı olmadığı için yer değiştirme vektörü cinsinden,

$$C_K = \frac{\partial R}{\partial X_K} + \frac{\partial u}{\partial X_K} = I_K + U_{L,K} I_L = (\delta_{LK} + U_{L,K}) I_L \quad (1.53)$$

$$c_k = \frac{\partial r}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} = i_k - u_{l,k} i_l = (\delta_{lk} - u_{l,k}) i_l$$

sonucu elde edilir. Şekil değiştirme tansörleri için yer değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$C_{KL} = C_K \cdot C_L = (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{NL} + U_{N,L}) \delta_{MN}$$

$$= (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{ML} + U_{M,L}) = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}, \quad (1.54)$$

$$c_{kl} = c_k \cdot c_l = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{nl} - u_{n,l}) \delta_{mn} = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{ml} - u_{m,l})$$

$$= \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k} u_{m,l}$$

sonuçları bulunur. Maddesel ve uzaysal genleme tansörleri de (1.50) tanımları yer değiştirme gradyanı cinsinden,

$$E_{KL} = \frac{1}{2}(U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} U_{M,L}) \quad (1.55)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l})$$

şeklinde ifade edilir.

1.4. Hareket

Bu bölümde, ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler hesaplanacak ve daha genel olarak ta şekil değiştirme karakteristiklerinin zamanla değişim hızının nasıl ölçülebileceği belirlenmeye çalışılacak. Ortamın hareketini tanımlayan maddesel koordinatlarla uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm (1.4) bağıntısıyla aşağıdaki şekilde verilmişti.

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad X \in v \quad (1.56)$$

(1.56) bağıntısı V bölgesindeki belli bir X parçacığı seçildiğinde t parametresine bağlı bir eğri gösterir. Sürekli ortamın hareketi sırasında X parçacığının izlediği yolu gösteren bu eğriye göz önüne alınan parçacığın yörüngesi adı verilir. (1.56) bağıntısı tüm ortam parçacıklarının yörüngeler ailesini tanımlamaktadır. Bunun için ilk olarak sürekli ortamın parçacıklarına bağlı bir fonksiyonun zamanla değişim hızını ölçmek gerekir.

Sürekli ortama bağlı bir skaler, vektör ya da tansör değerli bir alan büyüklüğü $f(X, t)$ şeklinde verilebilir. Maddesel gösterimde böyle bir fonksiyon, ilgili alan büyüklüğünün bir parçacıkta aldığı değer bu parçacık yörüngesi üzerinde hareket ederken zamanla nasıl değiştiğini bize verir. (1.56) ifadesinin tersi f fonksiyonunda kullanılırsa,

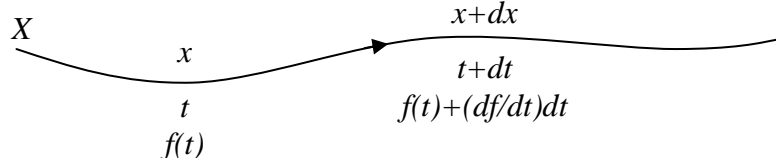
$$f[X(x, t), t] = f(x, t) \quad (1.57)$$

yazılabilir. $f(x, t)$ fonksiyonu göz önüne alınan alan büyüklüğünün uzaysal gösterilimi adını alır. Maddesel ve uzaysal gösterimde bu fonksiyon aynı sembole göstermesine karşın birbirine karşı gelen maddesel ve uzaysal noktalarda sayısal değerleri eşit olmakla beraber $f(X, t)$ ve $f(x, t)$ fonksiyonları tümüyle farklı fonksiyonlardır. Bir x uzay noktasında $f(x, t)$ fonksiyonu alan büyüklüğünün bu

noktadan çeşitli zamanlarda geçen farklı parçacıklarda aldığı değerleri gösterir. Uzaysal gösterilimden maddesel gösterilime geçiş,

$$f(X, t) = f[x(X, t), t] \quad (1.58)$$

dönüşümü yardımıyla sağlanır. Bir alan büyüklüğünün sürekli ortamın bir parçacığını izlerken zamana göre değişim hızı maddesel türev olarak tanımlanır (Şekil 1.4).



Şekil 1.4. Maddesel türev (Şuhubi, 1994).

Eğer maddesel gösterilim kullanılıyorsa maddesel türev X_K koordinatlarını sabit tutarak zamana göre hesaplanan türev olduğundan,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f(X, t)}{\partial t} = \dot{f} \quad (1.59)$$

yazılabilir. Uzaysal gösterilim kullanıldığında (1.57) bağıntısını X değişkenlerini sabit tutarak t değişkenine göre türetirsek zincir kuralına göre,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f[x(X, t), t]}{\partial t} \Big|_{X=Sbt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{x=Sbt} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \Big|_{X=Sbt} \quad (1.60)$$

elde edilir. Bir parçacığın hızı $r(R, t)$ yer vektörüne bağlı olarak,

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r(R, t)}{\partial t} = \frac{dx_k}{dt} i_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} i_k \quad (1.61)$$

veya bileşenleri cinsinden,

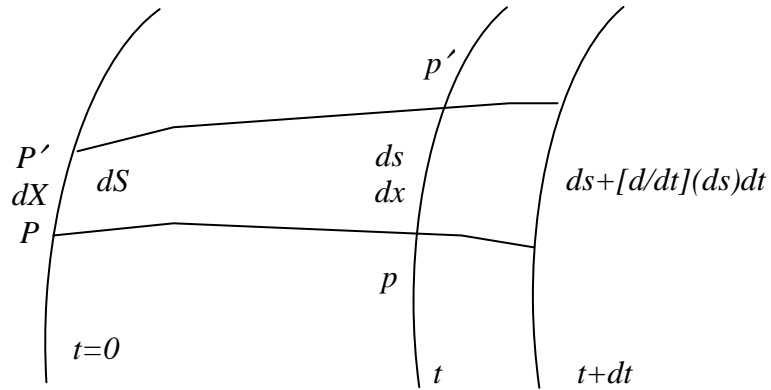
$$v_k(X, t) = \frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad v = v_k i_k \quad (1.62)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre uzaysal gösterimde f alanının (1.60) ile verilen maddesel türevi,

$$\dot{f} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + f_{,k} v_k \quad (1.63)$$

olur. (1.63) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim x koordinatları sabit tutularak zamana göre alınmış türev olduğundan yerel değişme hızını gösterir. İkinci terim ise t anında x noktasında bulunan parçacığın hareketinden kaynaklandığı için konvektif değişme hızı adını alır.

1.4.1 Yay ve Hacim Elemanlarının Maddesel Türevi



Şekil 1.5. Yay elemanındaki değişim (Şuhubi, 1994).

Referans konumunda bir P maddesel noktasından geçen sonsuz küçük bir dS yay elemanı ve bu elemanın t anındaki ds görüntüsü göz önüne alınırsa (Şekil 1.5), t anına sonsuz yakın $t+dt$ anında bu elemandaki değişim maddesel türevin tanımına göre $ds + (\dot{ds})dt$ olur. ds yay elemanının maddesel türevini belirlemek amacıyla önce

p noktasını p' noktasına birleştiren dx vektörünün maddesel türevi hesaplanmaya çalışılacak. Bu vektör referans konumundaki dX elemanter vektörünün hareket altında t anındaki görüntüsü olduğundan $dx_k = x_{k,K} dX_K$ yazılabilir. dX_K bileşenleri zamana bağlı olmadığından türetmenin zincir kuralından uygun şekilde yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dx_k) &= \frac{d}{dt}(x_{k,K} dX_K) = \frac{\partial}{\partial t}(x_{k,K}) dX_K = \frac{\partial}{\partial X_K} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) dX_K \\ &= v_{k,K} dX_K = v_{k,K} X_{K,l} dx_l = v_{k,l} dx_l \end{aligned} \quad (1.64)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(\dot{dx}_k \right) = v_{k,l} dx_l \quad (1.65)$$

yazılabilir. (1.64) de üçüncü ve beşinci ifadelerde dX_K bileşenlerinin katsayılarını eşitlersek şekil değiştirme gradyanının maddesel türevi,

$$\frac{d}{dt}(x_{k,K}) = \left(\dot{x}_{k,K} \right) = v_{k,K} = v_{k,l} x_{l,K} \quad (1.66)$$

olarak bulunur. Hız gradyanı tansörü,

$$L = \nabla v, \quad L_{kl} = v_{l,k} \quad (1.67)$$

ile tanımlanırsa, (1.65) ve (1.66) bağıntıları,

$$\left(\dot{dx} \right) = L^T dx, \quad \dot{F} = L^T F \quad (1.68)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Hız gradyanı tansörünün simetrik ve antisimetrik kısımlarından oluşan iki yeni tansörü,

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) = d_{lk}, \quad w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) = -w_{lk} \quad (1.69)$$

veya,

$$d = \frac{1}{2}(L^T + L), \quad w = \frac{1}{2}(L^T - L), \quad L^T = d + w \quad (1.70)$$

bağıntılarıyla tanımlanır. d tansörüne şekil değiştirme hızı (bazen de genleme hızı) tansörü, w tansörüne ise spin veya çevri tansörü adı verilir. (1.21) bağıntısından yararlanarak önce,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} \frac{d}{dt}(x_{k,K}) = J X_{K,k} v_{k,l} x_{l,K} = J v_{k,k} \quad (1.71)$$

şeklinde jakobyenin maddesel türevi elde edilir. Bir ortamın hacim elemanının değişme hızı, $dv = jdV$ olduğundan türetme ile,

$$\frac{d}{dt}(dv) = \frac{dj}{dt} dV \quad (1.72)$$

yazılabilir. jakobyenin maddesel türevinden faydalanılarak,

$$\frac{d}{dt}(dv) = j v_{k,k} dV = v_{k,k} dv = \nabla \cdot v dv \quad (1.73)$$

bulunur. Referans konumunda V hacmi hareketle t anında $v(t)$ hacmine dönüşürse $v(t)$ hacim integralinin maddesel türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi(x,t) dv &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi(X,t) j dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} [j \Phi(X,t)] dV \\ &= \int_{v(t)} (\dot{j} \phi) j^{-1} dv = \int_{v(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \phi v_{k,k} \right) dv \end{aligned} \quad (1.74)$$

Maddesel türevin tanımından faydalanarak (1.74) ifadesi,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] dv \quad (1.75)$$

şeklinde yazılabilir. t ye göre kısmi türevi x değişkenleri sabit tutularak alındığı için (1.75) bağıntısında sağ taraftaki ilk terimde türev ile integral operatörünün yeri değiştirilebilir. Son terim de Green – Gauss integral teoremi kullanılarak $v(t)$ hacmini içine alan $S(t)$ kapalı yüzeyi üzerindeki bir integrale dönüştürülürse,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v(t)} \phi dv + \int_{S(t)} \phi v_n da \quad (1.76)$$

elde edilir. $v_n = v \cdot n$ ortam hızının yüzeye dik bileşenidir. ϕv_n büyüklüğüne ϕ alanının yüzey boyunca akısı adı verilir ve ortam hareketiyle bu fiziksel alanın $S(t)$ yüzeyinin bir tarafından öteki tarafına bu yüzeyin birim alanı başına birim zamanda aktarılan kısmını gösterir.

1.4.2 Green – Gauss (Diverjans) Teoremi

Doğa yasalarından sürekli ortamların hareketini yöneten denklemlerin çıkartılmasına olanak sağlayan bazı integral teoremlerinin genelleştirilmesi gerekir. Bilindiği gibi bir ∂v kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v hacminde tanımlanmış vektör ya da tansör değerli sürekli bir fonksiyon için Green – Gauss veya diverjans teoremi olarak bilinen teorem bu alanın diverjansının hacim içindeki integralini normal bileşeninin yüzey üzerindeki integraline dönüştürür,

$$\int_v \nabla \cdot \phi dv = \int_{\partial v} n \cdot \phi da \quad (1.77)$$

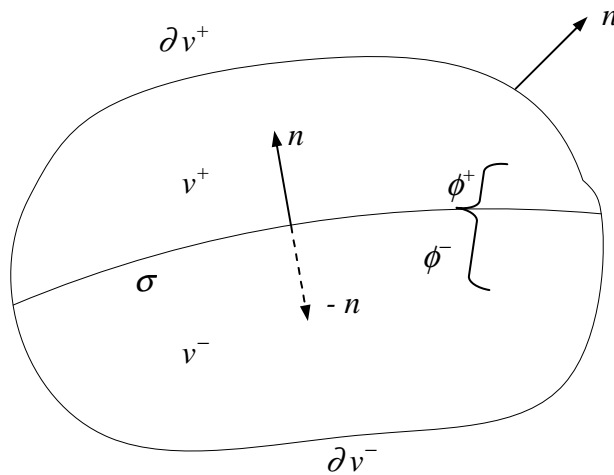
n yüzeyin birim dış normalidir. ϕ bir vektör alanı olduğu takdirde yukarıdaki skaler denklemin anlamı açıktır. ϕ ikinci mertebe bir tansör alanı ise (1.77) vektör değerlidir ve,

$$\nabla \cdot \phi = \phi_{kl,k} i_l, \quad n \cdot \phi = n_k \phi_{kl} i_l \quad (1.78)$$

olarak tanımlanır. Şimdi v bölgesinde hareketli de olabilen bir σ yüzeyi üzerinde ϕ tansör alanının süreksizlik göstermesi halinde diverjans teoreminin genelleştirilmiş şeklini elde etmeye çalışacağız. v hacmini iki parçaya ayıran σ yüzeyinin dış normalini keyfi olarak yönleyelim ve v bölgesini σ yüzeyinin dış normalinin yöneldiği tarafta kalan parçasını v^+ , öteki parçasını ise v^- ile gösterelim. $v = v^+ \cup v^-$ olduğu açıktır. σ yüzeyi ϕ alanı için bir süreksizlik yüzeyi ise bu alan σ üzerindeki bir noktada, bu noktaya v^+ ya da v^- bölgeleri içinden yaklaşıldığına göre farklı değerler alır. Bu değerler sırasıyla ϕ^+ ve ϕ^- ile gösterilir (Şekil 1.6). ϕ tansör alanının σ üzerindeki süreksizliğini ölçen sıçraması,

$$\|\phi\| = \phi^+ - \phi^- \quad (1.86)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1.6. Süreksizlik yüzeyi içeren bölge (Şuhubi, 1994).

Doğal olarak bu büyüklük σ yüzeyinin koordinatlarının bir fonksiyonudur. ϕ alanı $v^+ \cup \sigma$ kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^+ ve $v^- \cup \sigma$ kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^- bölgelerinde süreklidir. Dolayısıyla bu bölgelerde Green – Gauss teoremi (1.77) şekliyle uygulanabilir. σ yüzeyinin bu anlamda dış normalinin v^+ için $-n$ olduğuna dikkat edilirse,

$$\int_{v^+} \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v^+} n \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} n \cdot \phi^+ \, da, \quad (1.80)$$

$$\int_{v^-} \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v^-} n \cdot \phi \, da + \int_{\sigma} n \cdot \phi^- \, da$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa genelleştirilmiş Green – Gauss teoremi,

$$\int_v \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v} n \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} n \|\phi\| \, da \quad (1.81)$$

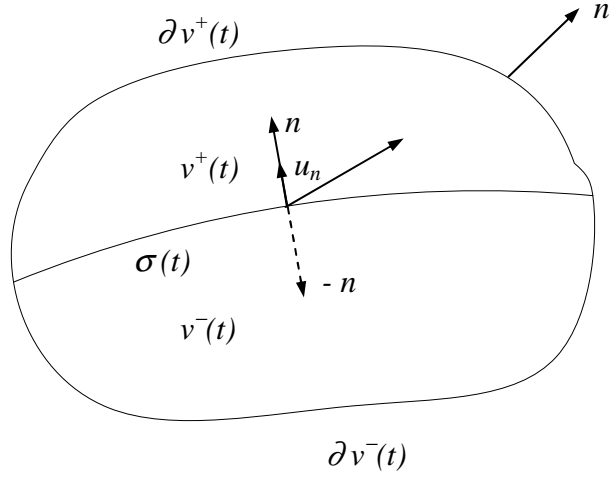
şeklinde elde edilir. Sürekli alanlar için σ yüzeyi üzerinde $\|\phi\|=0$ olacağı için (1.81) denklemi (1.77) denkleme indirgenir. $v(t)$ bölgesinin sürekli ortamda bir maddesel bölge olduğu kabul edilirse ve σ süreksizlik yüzeyinin de verilen bir u hızı ile hareket ettiği varsayılır (Şekil 1.7). Amaç (1.75) denklemini ϕ tansör alanının σ üzerinde süreksizlik gösterdiği hale genelleştirmektir. Bunun için kısmi türev operatörünü integralin içine sokarak (1.76) denklemini ϕ alanının içinde sürekli v^+ ve v^- bölgelerine ayrı ayrı uygulanırsa (Şekil 1.7),

$$\frac{d}{dt} \int_{v^+(t)} \phi \, dv = \int_{v^+(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v^+(t)} \phi v_n \, da - \int_{\sigma(t)} \phi^+ u_n \, da, \quad (1.82)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{v^-(t)} \phi \, dv = \int_{v^-(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v^-(t)} \phi v_n \, da + \int_{\sigma(t)} \phi^- u_n \, da$$

elde edilir. Bu denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi \, dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} \, dv + \int_{\partial v(t)} \phi v_n \, da - \int_{\sigma(t)} u_n \|\phi\| \, da, \quad (1.83)$$



Şekil 1.7. Hareketli süreksizlik yüzeyi (Şuhubi, 1994).

sonucu elde edilir. $v_n = n_k v_k$ olduğuna dikkat edilerek süreksizlik yüzeyi içeren bir bölgede diverjans teoremini ifade eden (1.81) denklemi kullanılırsa,

$$\int_{\partial v(t)} \phi v_n da = \int_{\partial v(t)} n_k v_k \phi da = \int_{v(t)} (v_k \phi)_{,k} dv + \int_{\sigma(t)} n_k \|v_k \phi\| da \quad (1.84)$$

yazılabilir. Bu ifade (1.83) bağıntısına yerleştirilir, $v(t)$ ve $\sigma(t)$ bölgeleri üzerindeki integralleri bir araya toplanır ve $\sigma(t)$ yüzeyinin u_n normal hızının süreksizlik gösteremeyeceğine dikkat edilirse sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv &= \int_{v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + (\phi v_k)_{,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} \|U\phi\| da \\ &= \int_{v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi v_{k,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} \|U\phi\| da \end{aligned} \quad (1.85)$$

elde edilir. Burada $\sigma(t)$ yüzeyi üzerinde tanımlanan,

$$U = u_n - v_n = (u - v) \cdot n \quad (1.86)$$

büyükluğüne yer değiştirme hızı adı verilir ve $\sigma(t)$ yüzeyinin sürekli ortama göre bağlı normal hızını gösterir. $\|u_n\|=0$ olduğundan,

$$\|U\| = -\|v_n\| \quad (1.87)$$

bağıntısı geçerlidir.

1.5. Denge Denklemleri

Bu kısımda bütün sürekli ortamların mekanik davranışlarını yöneten temel ilkelerden söz edilecek. Klasik fiziğin çerçevesi içinde bu ilkeler bir maddesel cismin kütesinin hareketinden etkilenmemesinden ve sürekli bir ortamın Newton'un üç yasasına uyarak etkileşen çok sayıda parçacıkla modellenmesinden kaynaklanır. Sürekli ortamlar mekaniğinde, ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olmaksızın geçerli olan termomekanik davranışı yöneten denklemler, global ve yerel denge (balans) denklemleri olarak adlandırılır. Termomekanik denge denklemleri yazılırken, denklemler önce global olarak yazılmış sonra da genelleştirilmiş Green – Gauss ve Stokes teoremleri yardımıyla elde edilen denklemler yerelleştirilmiştir.

1.5.1. Kütleinin Korunumu

Kütleinin korunumu, bir maddesel hacmin toplam kütesinin hareketi sırasında değişmediğini ifade eder. Matematiksel olarak bu ilke, $\rho(x,t)$ yoğunluk fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \, dv = 0 \quad (1.88)$$

(1.85) bağıntısında ϕ yerine, yoğunluk fonksiyonu ρ alınırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho dv = \int_{v(t)} \left(\dot{\rho} + \rho v_{k,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} \|U\rho\| da = 0 \quad (1.89)$$

olur. Burada $v(t)$ sürekli ortamın t anında doldurduğu uzay bölgesini, $\sigma(t)$ ise bu ortamda hareketli bir süreksizlik yüzeyini göstermektedir. Maddesel türevin tanımından faydalanarak ρ nun maddesel türevi,

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v_k \quad (1.90)$$

şeklinde yazılır. (1.89) denkleminde integral altındaki ifadelerin sürekli olduğu kabul edilirse, integrandların sıfır olması gerekir. Buna göre süreklilik denkleminin yerel formu için,

$$\begin{aligned} v(t) \text{ içinde; } \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \\ \sigma(t) \text{ üzerinde; } \quad \|U\rho\| = 0 \end{aligned} \quad (1.91)$$

eşitlikleri elde edilir. Kütlemin korunumu bir parçacığı içine alan bir elemanter maddesel hacim için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho_0(X) dV(X) = \rho(x,t) dv(x,t) \quad (1.92)$$

Daha önce tanımlandığı gibi $dv = JdV$ ye göre (1.92) denklemi,

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0(X)}{J(x,t)} \quad (1.93)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde, $\rho_0(X)$; referans konumundaki ortamın bilinen yoğunluğudur, $J(x,t)$; jakobyendir. (1.85) denkleminde $\phi \equiv \rho \psi$ alınarak ve kütlemin korunumundan yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \psi dv = \int_{v(t)} \rho \frac{d\psi}{dt} dv - \int_{\sigma(t)} U \rho \|\psi\| da \quad (1.94)$$

burada ψ birim kütle başına herhangi bir alan büyüklüğüdür.

1.5.2. Linear Momentum Denkliği

Bu ilke herhangi bir maddesel cismin toplam lineer momentumunun zamana göre değişme hızının, bu cismin üzerine etkiyen toplam kuvvete eşit olduğunu ifade eder. Sürekli ortamın bir $dm = \rho dv$ elemanter parçacığının hızı v ise elemanter momentum $v dm = \rho v dv$ ve t anındaki toplam momentum,

$$P(t) = \int_{v(t)} \rho v dv \quad (1.95)$$

olur. Ortamın üzerine etkiyen toplam kuvvet F ise bu ilkeye göre,

$$\frac{dP}{dt} = F \quad (1.96)$$

yazılabilir. Newton mekaniğinin temel varsayımları uyarınca F yalnız cisme etkiyen dış kuvvetlerin toplamını gösterir. Bu kuvvet genellikle iki parçadan oluşur. Bunlardan biri herhangi bir fiziksel dış alanın madde ile etkileşimi nedeniyle ortamın parçacıklarına etkiyen, ortamda yayılı kütle kuvvetidir. Bu kuvvet cismin birim kütlesi başına f yoğunluğuyla verilebilir. Dış kuvvetlerin diğer parçası ortamın çevresiyle yüzeyi aracılığı ile etkileşiminden kaynaklanan, değme kuvveti türünden, yüzeyinde yayılı yüzey kuvvetlerinden oluşur. Bu kuvvet, birim dış normal n vektörü olan bir alan elemanına birim alanı başına etkiyen $t_{(n)}$ vektörü ile belirlenir. Bu tanımlamalardan faydalanılarak F ,

$$F = \int_{v(t)} \rho f dv + \int_{\partial v(t)} t_{(n)} da \quad (1.97)$$

şeklinde yazılabilir. $t_{(n)}$ herhangi bir noktada yönelimi n normal vektörüyle belirlenmiş bir alan elemanına etkiyen gerilme vektörü olup,

$$t_{(n)} = n \cdot t \quad \text{veya} \quad t_{(n)k} = n_l t_{lk} \quad (1.98)$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda lineer momentum denkliği,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho v dv = \int_{v(t)} \rho f dv + \int_{\partial v(t)} n \cdot t da \quad (1.99)$$

şeklinde yazılabilir. Lineer momentum denkliğinin k . bileşeni,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho v_k dv = \int_{v(t)} \rho f_k dv + \int_{\partial v(t)} n_l t_{lk} da \quad (1.100)$$

olarak ifade edilir. (1.100) bağıntısının sol tarafındaki ifade (1.94) bağıntısında ψ yerine v_k alınarak,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho v_k dv = \int_{v(t)} \rho \frac{dv_k}{dt} dv - \int_{\sigma(t)} U \rho \|v_k\| da \quad (1.101)$$

şeklinde yazılabilir. (1.100) denkleminin sağ tarafında yer alan yüzey integrali terimi Green – Gauss teoreminden faydalanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{\partial v(t)} n_l t_{lk} da = \int_{v(t)} t_{lk,l} dv + \int_{\sigma(t)} n_l \|t_{lk}\| da \quad (1.102)$$

(1.101) ve (1.102) ifadeleri (1.100) denkleminde yerine yazılıp eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler sol tarafa geçirilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{v(t)} \left[\rho \dot{v}_k - t_{lk,l} - \rho f_k \right] dv - \int_{\sigma(t)} \|n_l t_{lk} + \rho v_k U\| da = 0 \quad (1.103)$$

(1.103) eşitliğinin sağlanabilmesi için integrandların sıfıra eşit olması gerekir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$\begin{aligned} v(t) \text{ içinde; } \quad \rho \dot{v}_k &= t_{lk,l} + \rho f_k \\ \sigma(t) \text{ üzerinde } \quad \| n_t t_{lk} + \rho v_k U \| &= 0 \end{aligned} \quad (1.104)$$

(1.104)₁ denklemindeki \dot{v} terimi ivme olarak adlandırılır ve maddesel türevin tanımından aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \quad (1.105)$$

1.5.3. Açısal Momentum Denkliği

Bu korunum yasası, herhangi bir maddesel cismin sabit bir noktaya göre açısal momentumunun zamana göre değişme hızının cisme etkiyen dış kuvvetlerin aynı noktaya göre toplam momentine eşit olduğunu ifade eder. t anında ortamın bir elemanter parçacığının sabit O noktasına göre yer vektörü r ise aynı noktaya göre açısal momentumu, veya momentumunun momenti, $r \times v dm = \rho r \times v dv$ olur. dolayısıyla O noktasına göre toplam açısal momentum,

$$H_0 = \int_{v(t)} \rho r \times v dv \quad (1.106)$$

şeklinde yazılabilir. O noktasına göre dış kuvvetlerin toplam momenti M_0 , açısal momentum ilkesiyle,

$$\frac{dH_0}{dt} = M_0 \quad (1.107)$$

şeklinde elde edilir. Dış kuvvetlerin dağılımına göre,

$$M_0 = \int_{v(t)} \rho r \times f dv + \int_{\partial v(t)} r \times t_{(n)} da \quad (1.108)$$

denklemini elde edilir. (1.108) denklemindeki $t_{(n)}$ terimiyle (1.98) denkleminde verilen ifadeyle aynıdır. (1.107) ve (1.108) ifadelerinden aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho r \times v dv = \int_{v(t)} \rho r \times f dv + \int_{\partial v(t)} r \times t_{(n)} da \quad (1.109)$$

(1.109) denkleminin sol tarafındaki ifade (1.94) denkleminde ψ terimi yerine $r \times v$ yazılarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho r \times v dv = \int_{v(t)} \rho \frac{d}{dt} (r \times v) dv - \int_{\sigma(t)} \rho U \| r \times v \| da \quad (1.110)$$

(1.109) denkleminin sağ tarafında yer alan $\partial v(t)$ yüzey integrali Green – Gauss integral teoremi yardımıyla hacim integraline dönüştürülüp gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{\partial v(t)} n_r (\varepsilon_{klp} r_l t_{rp} i_k) da = \int_{v(t)} (\varepsilon_{krp} t_{rp} + \varepsilon_{klp} r_l t_{rp,r}) i_k dv + \int_{\sigma(t)} n_r \varepsilon_{klp} r_l t_{rp} i_k da \quad (1.111)$$

(1.110) ve (1.111) denklemleri (1.109) denkleminde yerine yazılır, sağ taraftaki ifadeler sol tarafa geçirilirse, (k) bileşeni cinsinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{v(t)} \varepsilon_{klp} r_l (\rho \dot{v}_p - \rho f_p - t_{rp,r}) dv - \int_{v(t)} \varepsilon_{krp} t_{rp} dv - \int_{\sigma(t)} \varepsilon_{klp} r_l \| n_r t_{rp} + \rho v_p \| da = 0 \quad (1.112)$$

(1.112) denklemindeki birinci ve üçüncü integraller lineer momentumun yerel denklemini gösteren (1.104) denklemini gereğince sıfırdır. Dolayısıyla (1.112) denkleminin,

$$\int_{v(t)} \varepsilon_{krp} t_{rp} dv = 0 \quad (1.113)$$

şeklinde elde edilir. (1.113) denkleminde açısal momentumun yerel denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v(t) \text{ içinde; } \varepsilon_{krp} t_{rp} = 0 \quad (1.114)$$

(1.114) denklemindeki permütasyon tansörü ε_{krp} antisimetrik olduğundan eşitliğin sağlanması için aynı denklemin diğer ifadesi olan gerilme tansörü t_{rp} ifadesinin simetrik olması gerekir ve aşağıdaki şekilde yazılabilir. Gerilme tansörünün simetrik olması bünye denklemlerinin bulunmasında kolaylık sağlar.

$$t_{rp} = t_{pr} \quad (1.115)$$

(1.112) denkleminde sıçrama şartı olarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \varepsilon_{klp} r_l \parallel n_r t_{rp} + \rho v_p U \parallel = 0 \quad (1.116)$$

(1.116) denklemi, (1.104)₂ denklemi ile verilen lineer momentumun korunumundaki sıçrama şartı ile aynı olduğundan, denge denklemlerine ilave bir katkı getirmez.

1.5.4. Enerji Denkliği

Bu ilke herhangi bir maddesel cismin toplam kinetik enerjisi ile toplam iç enerjisinin toplamının zamana göre değişme hızının, cisme etkiyen dış kuvvetlerin gücü ile birim zamanda cisme giren ya da cisimden çıkan tüm enerjilerin toplamına eşit olduğunu ifade eder. Enerji denkliği matematik olarak,

$$\frac{d}{dt}(K + E) = W + Q + \sum_{\alpha} U_{\alpha} \quad (1.117)$$

denklemi ile gösterilebilir. Burada toplam kinetik enerji K , elemanter parçacıkların $dm|v|^2/2 = \rho|v|^2 dv/2$ elemanter kinetik enerjilerinin toplamıdır,

$$K = \frac{1}{2} \int_{v(t)} \rho |v|^2 dv \quad (1.118)$$

W cisme etkiyen kuvvetlerin birim zamandaki toplam işi, başka bir deyişle toplam gücüdür. Dolayısıyla W büyüklüğü,

$$W = \int_{\partial v(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_{(n)} da + \int_{v(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dv \quad (1.119)$$

olarak tanımlanır. Q birim zamanda cisme giren, ya da cisimden çıkan ısı enerjisidir. Q iki türlü oluşur. Uygun bir etkileşim mekanizmasıyla, örneğin kimyasal, nükleer reaksiyonlarla ya da elektrik akımıyla cismin içinde ısı enerjisi üretilir veya cisimden ısı enerjisi çekilebilir. Böyle bir enerji birim zamanda cismin birim kütlesi başına h büyüklüğü ile belirlenebilir. Radyasyon ve ısı iletimi yoluyla da cismin yüzeyinden cisme giren veya cisimden çıkan ısı enerjisi ise q ısı akısı vektörü ile belirlenir. Bu vektör doğrultusuna dik olan bir birim alandan birim zamanda geçen ısı enerjisini gösterir. Buna göre,

$$Q = \int_{\partial v(t)} q \cdot \mathbf{n} da + \int_{v(t)} \rho h dv \quad (1.120)$$

yazılabilir. Gerçekten cismin $\partial v(t)$ yüzeyinde bir alan elemanından cisme giren ya da cisimden çıkan ısı enerjisi buradaki ısı akısı vektörünün alan elemanının normali doğrultusundaki bileşeni ile ölçülür. Zira q vektörünün yüzeye teğet olan bileşeni cismin yüzeyini yalayıp geçen, dolayısıyla cismin enerji bilançosuna katkıda bulunmayan bir ısı enerjisine karşı gelir. Toplam ısı enerjisi (1.120) ifadesi ile tanımlandığında, n yüzeyin birim dış normalini gösterdiği takdirde $q \cdot n > 0$ olduğunda bu durumun cismin içinden dışına doğru bir enerji akısına karşı geleceğine dikkat edilmelidir. U_α büyüklükleri çeşitli etkileşimler nedeniyle cismin

birim zamandaki enerji bilançosuna katkıda bulunan elektromagnetik, kimyasal gibi başka kanyaklı enerjileri gösterir ve bu çalışma çerçevesinde bu tür etkileşimler göz önüne alınmayacak. E iç enerji ise, gözlemler ve deneyler cisme etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı işin, ısı enerjisinin v.s. yalnız cismin kinetik enerjisini değiştirmeye harcanmadığını açıkça göstermektedir. Bu farkın, cismin iç enerjisini değiştirmekte kullanıldığı kabul edilecek. İç enerji varlığı, kabaca, cismin parçacıkları arasında çeşitli etkileşimlerden kaynaklanan iç kuvvetlerin yaptığı işe bağlanabilir. Cismin sıcaklığının değişimi iç enerji değişiminin en belirgin göstergesini oluşturur. Cismin iç enerjisi genellikle birim kütlesi başına ε iç enerji yoğunluğu yardımıyla belirlenebilir,

$$E = \int_{v(t)} \rho \varepsilon dv \quad (1.121)$$

dolayısıyla bu verilen ifadeler (1.117) enerji denkleminde yerine yazılırsa enerji denkleği aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dv = \int_{v(t)} (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho h) dv + \int_{\partial v(t)} (\mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} - q \cdot \mathbf{n}) da \quad (1.122)$$

(1.94) denkleminde ψ terimi yerine $\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ alınırsa ve (1.122) denkleminin sol tarafındaki ifade,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dv = \int_{v(t)} (\dot{\varepsilon} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dv - \int_{\sigma(t)} \rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right\| da \quad (1.123)$$

şeklinde elde edilir. (1.123) denklemindeki, $\dot{\varepsilon}$ ve $\dot{\mathbf{v}}$ terimleri iç enerji ve hızın maddesel türevlerini göstermektedir. (1.122) denkleminin sağ tarafındaki $\partial v(t)$ üzerindeki yüzey integrali Green – Gauss teoremi yardımıyla hacim integraline dönüştürülerek gerekli işlemler yapılırsa,

$$\int_{\partial v(t)} n_k (t_{kl} v_l - q_k) da = \int_{v(t)} (t_{kl,k} v_l + t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k}) dv + \int_{\sigma(t)} n_k \|t_{kl} v_l - q_k\| da \quad (1.124)$$

ifadesi elde edilir. (1.123) ve (1.124) denklemleri (1.122) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$\int_{v(t)} \left[\rho \dot{\varepsilon} - t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} - \rho h + v_l (\rho \dot{v}_l - t_{kl,k} - \rho f_l) \right] dv \quad (1.125)$$

$$- \int_{\sigma(t)} \left(\rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |v|^2 \right\| + n_k \|t_{kl} v_l - q_k\| \right) da = 0$$

(1.125) denkleminde (1.104) ifadesiyle verilen lineer momentumun korunumu dikkate alınarak gerekli sadeleştirme yapıldığında,

$$\int_{v(t)} \left(\rho \dot{\varepsilon} - t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} - \rho h \right) dv \quad (1.126)$$

$$- \int_{\sigma(t)} \left(\rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |v|^2 \right\| + n_k \|t_{kl} v_l - q_k\| \right) da = 0$$

ifadesine ulaşılır ve gerekli yerelleştirilme işlemleri sonucunda,

$$v(t) \quad \text{içinde;} \quad \rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h$$

$$\sigma(t) \quad \text{üzerinde;} \quad \rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |v|^2 \right\| + n_k \|t_{kl} v_l - q_k\| = 0 \quad (1.127)$$

denklemleri elde edilir.

1.5.5. Termodinamiğin İkinci Kanunu (Clausius – Duhem Eşitsizliği)

Entropi eşitsizliği veya Clausius – Duhem eşitsizliği de denilen bu kanuna göre, serbest cisim içindeki entropinin zamana göre artışı, cisme hacim kaynaklarından ve

yüzeyden giren entropiden daha büyüktür veya en az ona eşittir. Termodinamiğin ikinci kanunu matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \eta dv - \left[\int_{v(t)} \rho \frac{h}{\theta} dv - \int_{\partial v(t)} n \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) da \right] \equiv \Gamma \geq 0 \quad (1.128)$$

(1.128) denkleminin sol tarafındaki ilk terim, (1.94) denkleminde ψ yerine (η) yazılırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \eta dv = \int_{v(t)} \rho \dot{\eta} dv - \int_{\sigma(t)} \rho U \|\eta\| da \quad (1.129)$$

şeklinde elde edilir. (1.128) denkleminde son integral terimi Green – Gauss teoreminden faydalanılarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\int_{\partial v(t)} n \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) da = \int_{v(t)} \nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) dv + \int_{\sigma(t)} n \cdot \left\| \frac{q}{\theta} \right\| \quad (1.130)$$

(1.129) ve (1.130) denklemleri (1.128) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{v(t)} \left[\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \nabla \cdot \left(\frac{q}{\theta} \right) \right] dv - \int_{\sigma(t)} \left[\rho U \|\eta\| - n \cdot \left\| \frac{q}{\theta} \right\| \right] da \geq 0 \quad (1.131)$$

(1.131) denkleminin yerelleştirilmesi sonucunda,

$$v(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta^2} q \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \|\eta\| - \left\| \frac{n \cdot q}{\theta} \right\| \leq 0 \quad (1.132)$$

denklemleri elde edilir. Burada ifade edilen denge denklemleri aşağıdaki gibi özetlenerek maddeler halinde yazılabilir.

1. Kütle Korunumu:

$$v(t) \text{ içinde; } \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \|U\rho\| = 0$$

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0(X)}{J(x,t)} \quad (1.133)$$

2. Lineer Momentumun Korunumu:

$$v(t) \text{ içinde; } \rho \dot{v}_p = \rho f_p + t_{rp,r}$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \|n_r t_{rk} + \rho v_k U\| = 0 \quad (1.134)$$

3. Açısal Momentumun Korunumu:

$$v(t) \text{ içinde; } \varepsilon_{krp} t_{rp} = 0, \quad t_{rp} = t_{pr}$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \varepsilon_{klp} r_l \|n_r t_{rp} + \rho v_p U\| = 0 \quad (1.135)$$

4. Enerji denklği:

$$v(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \left\| \varepsilon + \frac{1}{2} |v|^2 \right\| + n_k \|t_{kl} v_l - q_k\| = 0 \quad (1.136)$$

5. Entropi Eşitsizliği:

$$v(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta^2} q \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \|\eta\| - \left\| \frac{n \cdot q}{\theta} \right\| \leq 0 \quad (1.137)$$

Sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilkeleri olan kütle korunumu, lineer momentumun korunumu, açısal momentumun korunumu, enerjinin korunumu ve entropi eşitsizliği kullanılarak 5 adet denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{v}_p = \rho f_p + t_{rp,r} \quad (3)$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \quad (1) \quad (1.138)$$

Bu denklemlerde f ve h gibi dış kuvvetlerin bilindiği kabul edilmiştir. Bu denklemlere karşılık aşağıda belirtilen 16 tane bilinmeyen vardır.

$$\rho(1), v_k(3), t_{kl}(6), q_k(3), \theta(1), \eta(1), \varepsilon(1) \quad (1.139)$$

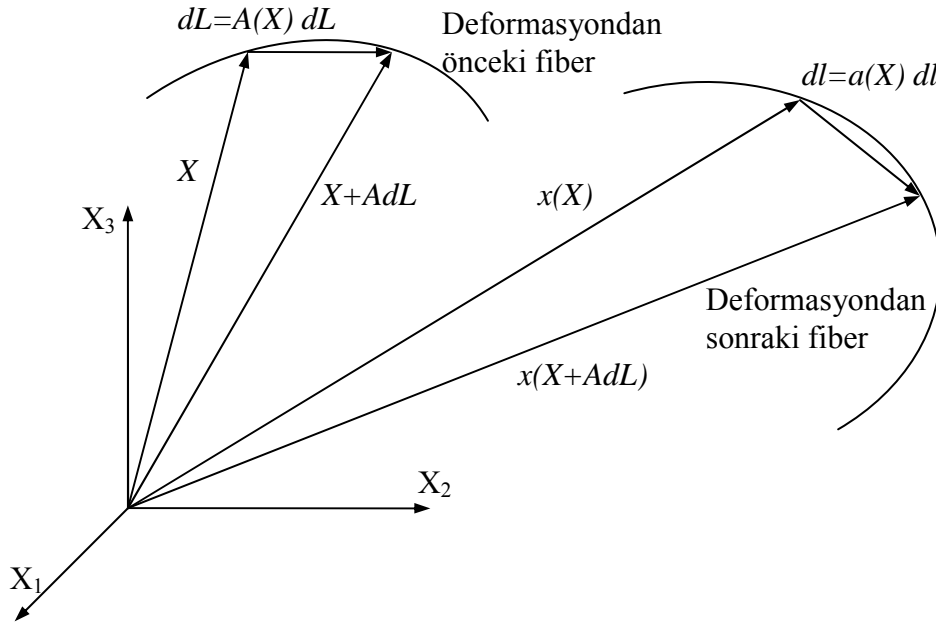
Elde edilen denklemler, yukarıda verilen bilinmeyenlerin belirlenmesi için yeterli değildir. Denklem sayısı ile bilinmeyen arasındaki fark (11) bünye denklemleri kullanılarak kapatılır (Kabul, 2004).

1.6. Fiber Deformasyon Geometrisi ve Kinematığı

Bu çalışmada göz önüne kompozit malzemenin her X noktasından A ile gösterilen fiber ailesinden bir elemanın geçtiği varsayılmıştır. Bu fiber elemanı ele alınan malzeme boyunca $A(X)$ ile gösterilen bir vektör alanı oluşturur. A ailesine ait bir fiber ailesinin parametrik denkleminde o fiber eğrisine ait birim teğet vektörün nasıl bulunacağı, eğrilerin diferansiyel geometrisinden bilinmektedir. Bu durumda A ailesine ait fiber dağılımı geometrik olarak bilinirse, $A(X)$ vektör alanı bu dağılımdan bulunur (Spencer, 1972). Malzemenin deformasyonu sırasında, fiber ailesinin ortamla birlikte taşındığı kabul edilerek, fiber deformasyonuna ait geometrik bağıntılar aşağıdaki gibi yazılabilir.

Deformasyondan önce $A(X)$ olan fiber vektörü, deformasyondan sonra $a(x)$ fiber vektörüne dönüşür (şekil 1.8). Fiber vektörünün dönüşümü ortamla birlikte sürüklenme şeklinde olduğuna göre şekil (1.8) deki geometriden görüldüğü gibi A fiber ailesi için aşağıda verilen bağıntılar geçerlidir (Usal, 1994).

$$a(x)dl = x(X + Adl) - x(X) \quad (1.140)$$



Şekil 1.18 Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi (Usal, 1994).

a birim vektörünün bileşenleri cinsinden (1.140) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$a_k dl = x_k (X + Adl) - x_k (X) \quad (1.141)$$

(1.141) bağıntısının sağ tarafı, X noktası civarında Taylor serisine açılıp yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse, aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$a_k dl = x_{k,K} A_K dL \quad \text{veya} \quad a_k \frac{dl}{dL} = x_{k,K} A_K \quad (1.142)$$

A ailesine ait fiber uzama oranı olan λ_a aşağıdaki şekilde tanımlanır (Spencer, 1970).

$$\lambda_a = \left(\frac{dl}{dL} \right)_a \quad (1.143)$$

Bu ifade (1.142) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a_k = \lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K, \quad a = \lambda_a^{-1} FA \quad (1.144)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, A fiber ailesine ait deformasyon geometrisini veren ifadedir.

$|A| = |a| = 1$ olduğundan $A_K A_K$ ve $a_k a_k$ terimleri aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$A_K A_K = |A|^2 = 1, \quad a_k a_k = |a|^2 = 1 \quad (1.145)$$

(1.144) bağıntısı (1.145) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_k a_k &= (\lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K) (\lambda_a^{-1} x_{k,L} A_L) \\ 1 &= \lambda_a^{-2} x_{k,K} x_{k,L} A_K A_L = \lambda_a^{-2} C_{KL} A_K A_L \end{aligned} \quad (1.146)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da aşağıdaki ifade elde edilebilir.

$$\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L, \quad \lambda_a^2 = A^T C A \quad (1.147)$$

Fiber kinematiği, λ_a fiber uzama oranının ve a fiber vektörünün zamanla değişimlerinin deformasyonunu takiben türevleri alınarak belirlenir. (1.147) ifadesinin türevi alınırsa,

$$2\lambda_a \dot{\lambda}_a = \dot{C}_{KL} A_K A_L = \overline{x_{k,K} x_{k,L}} A_K A_L \quad (1.148)$$

olarak bulunur. Bu bağıntıdaki \dot{C}_{KL} terimi,

$$\overline{x_{k,K} x_{k,L}} = v_{k,l} x_{l,K} x_{k,L} + x_{k,k} v_{k,l} x_{l,L} \quad (1.149)$$

şeklinde ifade edilebilir. (1.149) ifadesi (1.148) da yerine yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa $\dot{\lambda}_a$ yı veren ifade aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\lambda}_a = \lambda_a v_{k,l} a_k a_l \quad (1.150)$$

(1.144) ifadesinin türevi alınıp gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\dot{a}_k = -\lambda_a^{-1} \dot{\lambda}_a a_k + v_{k,l} a_l \quad (1.151)$$

ifadesi elde edilir.

Kronecker delta'nın tanımından yararlanarak $v_{k,j}$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$v_{k,j} = \delta_{ki} v_{i,j} \quad (1.152)$$

(1.150) ve (1.152) bağıntıları (1.151) denkleminde yerine yazılırsa \dot{a}_k en son haliyle aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{a}_k = (\delta_{ki} - a_k a_i) v_{i,j} a_j \quad (1.153)$$

Bu kısımda, A fiber ailesinin deformasyonunu ve kinematığını veren bağıntılar tamamlanmış oldu. Fiber ailesinin hareket ve deformasyonu daha ilerideki bölümlerde verilecek olan bünye denklemlerinde yeni terimler ortaya çıkaracaktır.

2. KAYNAK BİLGİSİ

Modern sürekli ortamlar mekaniğine ait temel kavram, aksiyom ve denklemler çalışmamızın her aşamasında kullanılmıştır. Sürekli ortamlar mekaniği alanında Eringen (1967, 1980), ve Şuhubi (1994)'nin kitapları temel kaynaklar olarak kullanılmıştır. Eringen (1967), modern sürekli ortamlar mekaniğinin ana iskeletini oluşturduğu bu eserinde sırasıyla gerinme, hareket, gerilme, sürekli ortamın termodinamiği, bünye denklemleri ve elastisite teorisi konularını sistematik bir tarzda incelemiştir. Şuhubi (1994)'nin eseri ise Eringen (1967)'nin paralelinde ancak daha detaylı yazılmış ve sürekli ortamlar mekaniği konusunda Türkçe literatüre kazandırılmış bir baş yapıt mahiyetindedir. Holzapfel (2000) ise çalışmasında sürekli ortamlar mekaniği ile fiber takviyeli kompozit malzemeleri incelemiştir. Hiperelastikle ilgili olarak sıkıştırılabilir ve sıkıştırılmaz şartlarını ayrı ayrı irdelemiştir. Sürekli ortamlar mekaniği konusunda yabancı literatürde çok sayıda yayın bulunmaktadır. Bunlar arasında Jaunzemis (1967), Malvern (1969), Dawson (1976), Spencer (1980), Chandrasekharaii ve Debnath (1994) önemli eserler olarak görülmektedir.

Sürekli ortamlar mekaniğinin en önemli matematiksel araçlarından olan invaryantlar teorisi ilk defa Rivlin ve Ericksen (1955) tarafından izotropik malzemeler için gerilme – deformasyon bağıntıları konusunda ele alınmıştır. Sürekli ortamlar ve invaryantlar konusunda önemli çalışmalar yapan Rivlin'in makaleleri, editörlüğünü Barenblatt ve Joseph (1996)'ın yaptığı 2828 sayfalık eserde bir araya gerilmiştir. Bu eser izotropik sonlu elastisite, anizotropik sonlu elastisite, elastik malzemelerde sonlu deformasyonlar üzerinde küçük deformasyonların süperpozisyonu, bünye denklemleri ve invaryantlar konusunda önemli bir başvuru kaynağı oluşturmaktadır. İnvaryantlar teorisini derli toplu bir kitap halinde bir araya getiren ilk çalışma Spencer (1971) tarafından yapılmıştır. Bu alanda Spencer (1960, 1964), Spencer ve Rivlin (1959, 1961), Adkins (1959, 1960, 1962), Wineman ve Pipkin (1964), Simith (1962, 1964) ve Zheng (1993-a, 1993-b, 1993-c, 1993-d) tarafından yapılan çalışmalar vektör, simetrik ve antisimetrik tansör değerli fonksiyonların temsilleri ve

bünye denklemleri üzerindeki maddesel simetri kısıtlamaları gibi konularda kapsamlı bilgiler vermektedir.

Kompozit malzemeler, özellikle fiber takviyeli kompozit malzemelerle ilgili temel referansımız Spencer (1972) olmuştur. Spencer (1972) fiber takviyeli malzemelerin deformasyonlarını açıklayan bu çalışmasında, kısıtlama şartları ve kinematik, düzlem gerinmenin kinematiği, kinematik olarak uygun diğer deformasyonlar, kısıtlanmış malzemelerde gerilmeler, fiber takviyeli kompozitlerin elastisitesi ve plastisitesi konularını detaylı bir şekilde incelemiştir. Fiber takviyeli kompozitler mekaniğinin sürekli ortam teorisi yine Spencer (1984)' in editörlüğünde uluslar arası mekanik bilimleri merkezi tarafından yayınlanan kurs notlarında bir araya getirilmiştir. Bu çalışmada, güçlü anizotropik katılar için bünye teorisi, ideal fiber takviyeli malzemelerde sonlu deformasyonlar ve gerilmeler, fiber takviyeli lineer elastik katılar için düzlem problemler, helisel olarak sarılmış liflerle takviyeli silindirlerde mekanik davranış, fiber takviyeli malzemelerin kırılma mekaniği, fiber takviyeli diskler ve plakalardaki boşlukların güçlendirilmesi, fiber takviyeli plastik kiriş ve plakların dinamiği, uzamaz fiber ailelerine ait şebeke teorisi kapsamlı bir şekilde izah edilmiştir.

Kompozit malzemelerin mühendislik mekaniği ile ilgili önemli bir çalışma Danial ve Isahi (1994) tarafından yapılmıştır. Bu kitapta kompozit malzemelerin tarihsel gelişimi, avantajları ve sınırları incelenmiş, kompozitlere ait temel kavramlar ve karakteristikler sunulmuştur. Ayrıca kompozitlerin karakterizasyonu ve testleri için kullanılan deneysel metotlar anlatılmaktadır.

Tek yönlü bir tabakanın gerilme – gerinme davranışını belirlemek için nonlineer elastik matris özelliklerini lineer elastik fiber özellikleri ile birleştiren yaklaşık bir teori Frost (1990)'un çalışmasında görülmektedir. Bu çalışmanın sonucunda, eksenel doğrultulardaki yüklemeler için fiber etkileri belirginleşirken nonlineer etkiler fazla hissedilmemekte, eksenel olmayan yüklenme durumlarında ise matris etkileri ön plana çıkmakta dolayısıyla nonlineer etkilerin önemli olduğu belirtilmektedir (Usal, 2001).

Diani vd. (2004) yaptıkları çalışmada, izotropik ve anizotropik kauçuk benzeri malzemelerin büyük deformasyonu için malzeme yönüne bağımlı bünye modelini formüle etmişlerdir. Bu gibi malzemeler genellikle izotropik özellik göstermesine rağmen silindirden geçirilmiş kauçuklarda anizotropik davranış gözlenmiştir. Kauçuk benzeri malzemeleri karakterize eden gerinme enerjisi yoğunluğu fonksiyonu genellikle asal germe oranlarına bağlıdır, bundan dolayı anizotropiyi ifade etmek zordur. Bunun yanında önerilen gerinme enerji yoğunluğu malzeme yönüne bağlıdır ve anizotropiyi ifade eder. Malzeme tepkisinin gerinmeye bağlı olduğu durum için temel gerinme enerji formunu fenomenolojikselsel olarak elde etmişlerdir. Bu modelin tepkisini anizotropik hiperelastik kauçuk benzeri malzemeler için eksenel olmayan çekme deneyi verileriyle ve izotropik kauçuk benzeri malzemeler için eksenel olmayan ve çift eksenli çekme ile karşılaştırmışlardır.

Attord (2003) çalışmasında, izotropik hiperelastik malzemeler için gerinme enerjisi yoğunluğunu türetmiştir. Gerinme enerjisi yoğunluğu sıkıştırılabilirlik ve sıkıştırılmazlık bileşenlerine ayrılmıştır. Sıkıştırılmazlık bileşeni sadece hacim invariantı J nin bir fonksiyonu olarak gösterilirken sıkıştırılmazlık bileşeni genelleştirilmiş Mooney ifadesiyle aynıdır. Elde edilen gerinme enerji yoğunluğu homojen gerinme altında kauçuk, hidrostatik basınç altında sıkıştırılabilir izotropik malzemeler ve eksenel olmayan çekme altında hacmi değişen sıkıştırılmaz izotropik malzemeleri içeren problemlerin incelenmesinde kullanılmıştır. Elde edilen verileri deneysel sonuçlarla karşılaştırmıştır. Aynı zamanda bu formülasyonu sıkıştırılabilir izotropik Neo – Hooke malzemeler için gerinme enerji yoğunluğunu türetmek için kullanmıştır.

Criscione vd. (2000) yaptıkları çalışmada, referans konfigürasyonuna göre izotropik davranış sergileyen hiperelastik malzemelerin sonlu deformasyonu için orijinal bir bünye formülasyonu geliştirmişlerdir.

Dluzewski (2000) çalışmasında, anizotropik elastik malzemeler için gerilme – gerinme bünye denklemlerini elde etmiştir ve özellikle logaritmik gerinme üzerinde durmuştur. Spesifik iç enerji için Cauchy gerilme denklemini içeren bünye

denklemini türetmiştir. Nispeten basit ve elastik malzemelerin geniş bir sınıfını içeren matematiksel ilişkileri vermiştir.

Park ve Youn (1998) yaptıkları çalışmada, eğrisel koordinatları kullanarak anizotropik nonlinear hiperelastik malzemeler için bünye denklemini elde etmişlerdir. Ayrıca aynı koordinat sisteminde gerekli sonlu eleman formülasyonunu türetmişlerdir. Bu formülasyon malzemenin hiperelastik teorisine ve karma sonlu eleman metoduna bağlıdır. Elde edilen bünye denkleminin ve metodun uygulanabilirliğini göstermek için birkaç nümerik örnek çözmüşlerdir. Bu çalışma biyolojik dokular ve fiber takviyeli kauçuk'umsu kompozit malzemeler gibi cisimlerin analizinde kullanılabilir.

Bonet ve Burtan (1998) çalışmalarında, tamamen nonlinear alanında fiber doğrultusunda elastik malzemelerin modellenmesinde kullanılabilecek basit enine izotropik hiperelastik malzemelerin bünye denklemleri üzerinde çalışmışlardır. İkinci Piola – Kirchhoff tansörü, Cauchy gerilme tansörü ve Lagrange – Euler elastisite tansörü ifadelerini elde etmişlerdir. Kullandıkları malzemenin performansını göstermek için statik ve dinamik uygulamalar yapmışlardır.

Gadala (1997) çalışmasında, nonlinear bünye ilişkilerinin sayısal ve sonlu eleman modeli alanlarındaki gelişmeler üzerine bir çalışma yapmıştır. Bu çalışma elastik, hiperelastik, elastoplastik ve anizotropik plastik malzeme modellerini içermektedir. Hiperelastik modelde sıkıştırılmazlık kısıtlamasını uygulamıştır. Hiperelastik modelin sayısal davranışı için sistematığı ve genel prosedürü vermiştir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Materyal

Bu çalışmada, tek fiber aileli hiperelastik ortamlar için matematiksel bir model geliştirilmiştir. Materyal olarak, fiber takviyeli hiperelastik bir ortam ele alınmış ve mekanik yüklemeler sonucunda böyle bir ortamda oluşan gerilme ifadesinin hesabını sağlayan bünye ve alan denklemleri ortaya konmuştur.

3.1.1. Fiber Takviyeli Hiperelastik Ortamların Termodinamiği

Kısım 1.5’de bahsedildiği gibi denge denklemleri herhangi bir fiziksel ortam için geçerli olan denklemlerdir. Bu bölümde termodinamiğin birinci ve ikinci kanunu birleştirilerek ve gerekli bünye aksiyomları kullanılarak gerilme, entropi yoğunluğu iç enerji ve ısı akısı yoğunluğu tespit edilecektir. Yine bu bölümde ilk önce yukarıda adı geçen büyüklükler üzerindeki termodinamik kısıtlamaları kullanarak, ortamın fiziksel ve topolojik özellikleri de dikkate alınıp bünye denklemlerine ait genel formüller çıkarılacak daha sonrada bünye aksiyomlarından ilgili olanları kullanılarak bu formüller somutlaştırılacaktır.

Kısım 1.5 deki (1.132)₁ ifadesini pratik kullanım bakımından daha yararlı şekillerde yazmak için, (1.127)₁ ifadesinden ısı kaynağı (ρh) terimini çekip, (1.132)₁ ifadesinde yerine yazdığımızda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho\gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta} \left(\dot{\varepsilon} - \theta \dot{\eta} \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.1)$$

Bu ifadedeki entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içerisinde kontrol edilemeyeceğinden, bu türevi kontrol edilebilen büyüklük olan θ cinsinden yazmak için aşağıdaki gibi tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılır.

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta \quad (3.2)$$

Entropi yerine sıcaklık bağımsız değişken olarak kullanıldığı zaman iç enerji yoğunluğu yerine yukarıdaki ifade tanımlanır ve genelleştirilmiş Helmholtz serbest enerji yoğunluğu adını alır. Termodinamik bakımdan enerjinin kullanılabilir kısmını temsil eder. Daha sonra belirtileceği gibi, serbest enerji yoğunluğunun hangi büyüklüklere bağlı olduğunu malzemenin bünyesi belirleyecektir. (3.2) ifadesindeki ε u çekip maddesel türevini alarak (3.1) eşitsizliğinde yerine yazarsak, kontrol edilebilir bağımsız değişkenler cinsinden entropi eşitsizliği (Termodinamiğin ikinci kanunu) aşağıdaki şekli alır (Şuhubi, 1994).

$$\rho\gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta} \left(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta \right) + \frac{1}{\theta} t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta^2} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.3)$$

θ pozitif değerli olduğundan (3.3) eşitsizliği θ ile çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirmez. (3.3) eşitsizliği θ ile çarpılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta \right) + t_{kl} v_{l,k} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.4)$$

Bu ifadede yer alan gerilme tansörü mekanik yüklemelerden kaynaklanmaktadır ve simetriktir. Bu ifadedeki ikinci terim olan gerime tansörü ile hız gradyanı çarpımı, (1.70) daki tanımlama la kullanılarak gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$t_{kl} v_{l,k} = t_{kl} d_{lk} \quad (3.5)$$

(3.5) ifadesi (3.4) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho \left(\dot{\psi} + \dot{\theta}\eta \right) + t_{kl} d_{lk} - \frac{1}{\theta} q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.6)$$

(1.24) denklemiyle verilen Green deformasyon tansörünün maddesel türevi alınır, d_{kl} cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\dot{C}_{KL} = 2d_{kl}x_{k,K}x_{l,L} \quad (3.7)$$

(3.7) eşitliğinde gerekli işlemler yapılırsa, d_{kl} simetrik şekil değiştirme hızı tansörü \dot{C}_{KL} cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d_{lk} = d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (3.8)$$

(3.6) eşitsizliğinde, ρ yerine (1.93) ifadesini, d_{kl} yerine (3.8) ifadesini yazar ve eşitsizlik J ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho_0 \left(\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta \right) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} - \frac{1}{\theta} J q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.9)$$

ψ ye bağlı olarak gerilme potansiyeli,

$$\Sigma = \rho_0 \psi \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır ve gerilme potansiyelinin (3.9) da yerine yazılmasıyla eşitsizlik aşağıdaki yeni formuna kavuşur.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta \right) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} - \frac{1}{\theta} J q_k \theta_{,k} \geq 0 \quad (3.11)$$

Bundan böyle (3.10) denklemi ile tanımlanan Σ yı gerilme potansiyeli ismi ile kullanacağız. (3.11) içinde yer alan argümanların maddesel koordinatlar ile uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm formülleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl} \quad (3.12)$$

$$Q_K \equiv J X_{K,k} q_k \quad (3.13)$$

$$\theta_{,K} \equiv x_{k,K} \theta_{,k} \quad (3.14)$$

(3.12) – (3.14) tanımlarından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$t_{kl} = J^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} \quad (3.15)$$

$$q_k = J^{-1} x_{k,K} Q_K \quad (3.16)$$

$$\theta_{,k} = X_{K,k} \theta_{,K} \quad (3.17)$$

(3.11) eşitsizliğinde (3.12), (3.14) ve (3.16) ifadeleri kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa (3.6) eşitsizliği maddesel koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta\right) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} - \frac{1}{\theta} \theta_{,K} Q_K \geq 0 \quad (3.18)$$

Yukarıdaki eşitsizlik entropi üretiminin genel bir ifadesidir. Bu eşitsizliğin kullanılabilmesi için Σ gerilme potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunun ve ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Buna göre Σ nın argümanlarını seçmek, formal olarak belli bir malzeme seçmek demektir. Şu aşamada problem, yukarıdaki entropi eşitsizliğinde Σ gerilme potansiyelinin nelere bağlı olduğunu tespit etmektir.

Bu çalışmada tek fiber aileli hiperelastik davranış gösteren bir maddesel cisim seçilmiştir. Seçilen bu malzemeye göre Σ nın argümanları ve bağlı olduğu değişkenler Eringenin (1980) ve Şuhubinin (1994) daha genel ve sistematik bir yaklaşım izleyerek tüm bünye fonksiyonları için geliştirdikleri bünye aksiyomları kullanılarak bulunacaktır.

3.1.2 Bünye Aksiyomları

Şimdiye kadar elde ettiğimiz ve bütün sürekli ortamlarda geçerli olan alan denklemlerinin ortamın davranışını belirlememize yetmeyeceği açıktır. Belirli bir malzemenin davranışını kestirebilmek için o malzemeyi başka malzemelerden ayıran özellikleri bir şekilde denkleminin içine sokmalıyız. Bir malzemenin fiziksel olarak geçerli bütün davranışlarında etkili olacak tüm özelliklerini yansıtıcı genellikte ilişkilere çoğu zaman gerek yoktur. Malzemenin incelemek istediğimiz davranışını belirgin kılan, daha basit tür ilişkiler çoğunlukla yeterli olur. Çeşitli alan büyüklükleri arasında geçerli olan ve göz önüne alınan malzemenin yapısal özelliklerinden kaynaklanan denklemlere bünye denklemleri adı verilir. Bu denklemlerin cisimlerin gözlenen ve de incelenmesi arzu edilen özelliklerini yansıtacak şekilde rasyonel ve sistematik olarak üretilmesiyle uğraşan teori'de bünye teorisidir. Her aksiyom dizisinde olduğu gibi bünye aksiyomları da doğadan edinilen ilkel izlenimlere ve rasyonel bir düşün sistemine uyumlu bazı önermelerdir.

3.1.2.1. Kozalite Aksiyomu

Termomekanik davranışlarda gözlemlenebilir kabul edilen hareket $x(X,t)$ ile sıcaklık $\theta(X,t)$ alanlarının bağımsız bünye değişkenleri olduğunu ve verilmiş kabul edilen dış kuvvetlerle ısı kaynağı dışında entropi eşitsizliğine giren diğer alanların bağımlı bünye değişkenleri olduğunu ifade eder. Bağımlı bünye değişkenleri, bağımsız bünye değişkenlerinden türeyen büyüklüklerdir.

3.1.2.2. Determinizm Aksiyomu

Sürekli ortamın belli bir parçacığındaki bağımlı bünye değişkenlerinin, ortamın bütün parçacıklarındaki hareket ve sıcaklığın, ortamın tüm geçmişinden aldıkları değerler ile belirleneceğini ifade eder. Cismin belli bir andaki ve belli bir noktadaki davranışı bütün parçacıkların o andan önceki tüm zamanlardaki hareket ve sıcaklıkların bilinmesiyle belirlenir. Buna göre X maddesel noktasının t anındaki gerilme potansiyeli,

$$\Sigma(X,t) = \Sigma[x(X't'), \theta(X't'), X] \quad X' \in V \quad -\infty < t' \leq t \quad (3.19)$$

şeklinde olur. Malzemenin hafızasının olmadığını göz önüne alırsak bu ifade aşağıdaki şekli alır.

$$\Sigma(X,t) = \Sigma[x(X't), \theta(X't), X] \quad (3.20)$$

3.1.2.3. Eşbulma (Ekiprezans) Aksiyomu

Bir malzemenin bünye denklemleri geliştirilirken başlangıçta bütün denklemlerin aynı bağımsız bünye değişkenlerini içermesi gerekir.

3.1.2.4. Uygunluk (Tutarlılık) Aksiyomu

Her türlü bünye denkleminin sürekli ortamlar mekaniğinin ilkelerine, yani kütlelin korunumuna, lineer momentum korunumuna, açıl momentum korunumuna, enerji denklğine ve entropi eşitsizliğine uyumlu olması gerekir.

3.1.2.5. Objektivite Aksiyomu

Bünye denklemleri uzaysal koordinat takımının her hangi bir rijid hareketi altında form – invaryant kalması gerekir, başka bir deyişle bünye fonksiyonellerinin biçimleri objektif olarak eşdeğer hareketler altında değişmeden kalması gerekir.

Burada $\underline{\underline{Q}}(t)$ uygun bir ortogonal taransformasyon matrisi ($\underline{\underline{QQ}}^T = \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$),

$\det \underline{\underline{Q}} = +1$, $\underline{\underline{I}}$ = birim matris, $\underline{\underline{b}}(t)$ = öteleme matrisi, \bar{t} ise zaman orjininin t den sabit

bir a kayması ile elde edilen zaman dilimidir. Objektif olarak eşdeğer \bar{x} ve x hareketi,

$$\bar{x}(X', \bar{t}) = \underline{\underline{Q}}(t) \underline{x}(X', t) + \underline{\underline{b}}(t) \quad \bar{t} = t - a \quad (3.21)$$

bağıntısıyla tanımlanır. Skaler değerli gerilme potansiyeli,

$$\begin{aligned} \Sigma[\bar{x}(X', \bar{t}), \bar{\theta}(X', \bar{t}), X] &= \Sigma[x(X', t), \theta(X', t), X] \quad \text{veya} \\ \Sigma[\underline{Q}(t)\underline{x}(X', t) + \underline{b}(t), \bar{\theta}(X', \bar{t}), X] &= \Sigma[x(X', t), \theta(X', t), X] \end{aligned} \quad (3.22)$$

bağıntılarını sağlamak zorundadır.

A- Uzaysal Koordinat Sisteminin Rijid Ötelenmesi

Bu durum için $\underline{Q}(t) = \underline{I}$, $a = 0$, $\underline{b}(t) = -\underline{x}(X, t)$ alınır. Bu değerler (3.21) de yerine yazılırsa,

$$\bar{x}(X', \bar{t}) = \underline{x}(X', t) - \underline{x}(X, t) \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23) denklemini (3.22) de yerine yazılırsa gerilme potansiyeli aşağıdaki şekilde olur.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[\underline{x}(X', t) - \underline{x}(X, t), \theta(X', t), X] \quad (3.24)$$

B- Uzaysal Koordinat Sisteminin Rijid Dönmesi

Bu durum için, $\underline{b} = \underline{0}$, $a = 0$, $\underline{Q}(t)$ =keyfi olarak alınır. Bu değerler (3.21) de yerine yazılırsa,

$$\bar{x}(X', \bar{t}) = \underline{Q}(t)\underline{x}(X', t) \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) denklemini (3.22) ifadesinde yerine yazılırsa gerilme potansiyeli aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[\underline{Q}(t)\underline{x}(X', t), \theta(X', t), X] \quad (3.26)$$

3.1.2.6. Maddesel Simetri Aksiyomu

Bir sürekli ortamın bir parçacığına bağlı fiziksel özellikler o maddesel noktadan geçen doğrultulara bağlı değilse ve bu özellik ortamın bütün parçacıkları için geçerli ise ortam izotropdur. Fiziksel özellikler doğrultuya göre değişiyorsa anizotropdur. Ortamın fiziksel özellikleri parçacıktan parçacığa değişmiyorsa ortam homojendir, değişiyorsa heterojendir. Bu durumda bünye denklemleri, maddesel koordinat sisteminin \underline{B} ötelenmesi ve \underline{Q} ortogonal transformasyonuna göre form invarianttır.

$$\underline{X}' = \underline{Q}\underline{X} + \underline{B} \quad (3.27)$$

Bu ifade (3.24) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma \left[x \left(\underline{Q}\underline{X} + \underline{B} \right) - x(X, t), \theta(X', t), X \right] \quad (3.28)$$

3.1.2.1.7. Yöresellik Aksiyomu

X noktasındaki bağımlı bünye değişkenlerinin (t, q, ε, η) değerlerinin ancak o parçacığın yakın yöresindeki bağımsız bünye değişkenlerinden (x, θ) etkileneceğini ifade eder. Bir bakıma ortamı oluşturan parçacıklar arasındaki etkileşimlerin kısa erişimli olduğu anlamına gelir. Matematiksel bir yapı kazandırabilmek için ortamın bir X noktası civarındaki hareketi Taylor serisine açarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$x(X', t) = x(X, t) + x_{,K}(X, t)(X'_K - X_K) + \frac{1}{2}x_{,KL}(X, t)(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots$$

Bu ifade bileşenleri cinsinden, (3.29)

$$x_k(X', t) = x_k(X, t) + x_{k,K}(X, t)(X'_K - X_K) + \frac{1}{2}x_{k,KL}(X, t)(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots$$

şekilde yazılabilir. Benzer şekilde sıcaklık içinde X civarında Taylor serisine açarsak,

$$\theta(X', t) = \theta(X, t) + \theta_{,K}(X, t)(X'_K - X_K) + \frac{1}{2}\theta_{,KL}(X, t)(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots \quad (3.30)$$

şeklinde olur. (3.29) ve (3.30) ifadelerinde yöresellik aksiyomu nedeniyle sağ taraftaki ilk iki terimi alırız. (3.29) ifadesinin ilk iki teriminin alınmasıyla tanımlanan malzemelere basit termomekanik malzemeler denir (Eringen, 1980). Yöresellik aksiyomuna göre Σ nin argümanlarına olan bağıllığı X' ve X arasındaki mesafe arttıkça hızla sönümlenmektedir. Hiperelastik bir cismin bünye denklemini elde etmek için denklemlerimizden sıcaklık bağımlılığını ortadan kaldırmalıyız. Bunun için sıcaklığı sabit almak yeter. Yani tanımladığımız termomekanik malzeme ancak izotermal süreçlerde bir hiperelastik malzeme gibi davranır. Aynı zamanda hiperelastik malzemelerde de ısı iletimin olmadığı kabul edilir. Bu durumda (3.30) denkleminde $\theta_{,K} = 0$ olur. Bu şekilde bağımsız bünye değişkenleri aşağıdaki formu alır.

$$\begin{aligned} x(X', t) - x(X, t) &= x_{,K}(X, t)(X'_K - X_K) \\ \theta(X', t) &= \theta(X, t) = \theta_0(X, t) = \text{sbt} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Buna göre gerilme potansiyeli,

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[x_{,K}(X, t), \theta_0(X, t), X, D_K] \quad (3.32)$$

şekline indirgenmiş olur ve bu ifade indeks notasyonunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[x_{,k,K}(X, t), \theta_0(X, t), X, D_K] \quad (3.33)$$

(3.32) ifadesindeki D_K vektörü (3.31) ifadesindeki $(X'_K - X_K)$ şeklindeki terimleri temsil etmektedir. D_K vektörü, malzemenin anizotrop özelliklerinin bünye

aksiyomlarından kaynaklandığını göstermektedir. Buradan görüldüğü gibi objektivite aksiyomu ortamın anizotropisini temsil etme imkanını ortaya çıkarmaktadır. Bu çalışmada seçilen malzeme homojen ve izotrop olmakla birlikte, fiber takviyeli olması nedeniyle anizotropi özelliği göstermektedir. Tek fiber ailesi için D_K vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır (Öntürk, 1993; Usal 1994).

$$D_K = A(X) \quad (3.34)$$

Objektivite aksiyomu (3.33) ifadesine bir kısıtlama daha getirir. Objektivite aksiyomunda açıklandığı gibi gerilme potansiyeli, deforme olmuş malzemenin rijid hareketleri altında invaryant kalmalıdır. Bu durumda, uzaysal koordinatlar sistemin zamana bağlı transformasyonları altında Σ nın invaryant kalması gerekir. Cauchy teoremine göre bu şartın sağlanması ve Σ nın ilk argümanlarının tek değerli bir fonksiyon olabilmesi için $x_{,K} = x_{k,K} i_k$ ya olan bağımlılığı $x_{,K}$ vektörlerinin ikişer ikişer ve üçlü skaler karışık çarpımlarına yani,

$$x_{,K} \cdot x_{,L} \quad (3.35)$$

$$x_{,K} \cdot x_{,L} \times x_{,M} \quad (3.36)$$

çarpımlarına bağlı olması gerekmektedir (Şuhubi, 1994). (3.33) ifadesindeki diğer argümanlar maddesel koordinat sisteminde ifade edildiğinden Cauchy teoremi bu argümanlar için söz konusu değildir ve bu argümanlar aynen yerinde kalır. (3.35) ifadesi Green deformasyon tansörünün tanımını ve (1.24)₁ ifadesindeki gibi yazılır (usal 1994). (3.36) ifadesi ise deformasyon gradyanının determinantını tanımlamakta olup (1.6) ve (1.93) denklemlerinde gösterildiği gibi aşağıdaki şekilde yazılabilir (Şuhubi, 1994).

$$J \equiv \det(x_{k,K}) = \frac{\rho_0}{\rho(X,t)} = \frac{1}{3!} \epsilon_{KLM} \epsilon_{klm} x_{l,L} x_{m,M} \quad (3.37)$$

(1.24)₁ ve (3.37) ifadelerinden faydalanarak (3.33) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[C_{KL}(X, t), \rho^{-1}(X, t), \theta_0(X, t), X_K, D_K] \quad (3.38)$$

Tutarlılık aksiyomuna göre, daha önce kütle korunumu yasasını

$$J = \frac{\rho_0}{\rho(X, t)} = \sqrt{\det C_{KL}} \quad \text{şeklinde belirtmiştik, (3.38) ifadesinde de } C_{KL} \text{ nin mevcut}$$

olması nedeniyle ρ^{-1} değişkenler listesinden çıkarılabilir, bu durumda (3.38) ifadesi aşağıdaki şekle indirgenir.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[C_{KL}(X, t), \theta_0(X, t), X_K, D_K] \quad (3.39)$$

Bu çalışmada ele alınan ortam için maddesel tasvir vektörü olan D_K vektörü, (3.34) ifadesiyle yapılan tanımlamadan da görülebileceği gibi, kısım 1.6 da bahsedilen $A(X)$ fiber vektörünü temsil etmektedir. Malzeme fiber ailesi ile kompozit hale geldiğine göre fiber dağılımı ile yönlü bir ortam özelliği kazanmıştır. Normalde matris malzemenin izotrop olduğunu farzediyor ve anizotropinin sadece fiber dağılımından kaynaklandığını varsayılmaktadır (Usal, 1994 ve Usal, 2001). Bu durumda mekanik bir yüklemeye maruz, tek fiber aileli hiperelastik bir ortamın gerilme potansiyelinin hangi argümanlara bağlı olduğu aşağıdaki denklem ile ortaya çıkmış olur.

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[C_{KL}(X, t), \theta_0(X, t), A_K(X), X_K] \quad (3.40)$$

(3.18) eşitsizliğinin bağımsız değişkenlerinin değişiminin bir lineer kombinezonu olarak ifade edebilmek için Σ nın (3.40) ifadesiyle belirlenen argümanlarının maddesel türevinin bilinmesi gerekir. Malzemenin homojen olduğu kabul edilerek (3.40) ifadesinde verilen Σ nın bağlı olduğu argümanlardan X kaldırılır. A_K fiber vektörü zamana bağlı olmadığı ve θ_0 sıcaklık sabit olduğu için bu ifadelerin

maddesel türevlerinin sıfır olduğunu düşünerek (3.40) ifadesinin maddesel türevini alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} \quad (3.41)$$

Bu ifadeyi (3.18) eşitsizliğinde yerine yazar ve daha önce belirttiğimiz $\theta_{,K} = 0$ kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{2} \left(T_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \right) \dot{C}_{KL} \geq 0 \quad (3.42)$$

Bu eşitsizlikte parantez içerisindeki terim sadece C ye bağlı olduğu için \dot{C} cinsinden lineerdir. Dolayısıyla C_{KL} nin katsayısı sıfır olmalıdır.

$$T_{KL} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.43)$$

(3.43) ifadesi elastik gerilme için bünye denklemdir. Buna göre gerilme potansiyelinin bağlı olduğu argümanlar aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma[C_{KL}, \theta_0, A_K] \quad (3.44)$$

(3.15) ifadesinde $J^{-1} = \rho / \rho_0$ şeklinde kütle korunumu kullanılır ve (3.43) ifadesi T_{KL} teriminin yerine yazılırsa, gerilme tansörü uzaysal koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x_{k,K} x_{l,L} \quad (3.45)$$

İncelenen malzemenin uymak zorunda olduğu maddesel simetri kısıtlamaları vardır. \mathfrak{S} tercihli doğrultulara karşılık gelen bir maddesel koordinat takımını yeni bir maddesel koordinat takımına dönüştüren ve yapının fiziksel özelliklerini invariant bırakan ortogonal matrislerden oluşmuş sonlu bir grup olsun. Bu gruba incelenen kristal yapının simetri grubu denir ve ortogonal grubun bir alt grubunu oluşturur, dolayısıyla $\mathfrak{S} \subseteq O(3)$ yazılabilir. Simetri grubu tam ortogonal gruba eşitse malzeme izotropdur. \mathfrak{S} simetri grubunun üyesi olan ve sonlu sayıda $\underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S}$ matrislerinden oluşmuş bir simetri grubu dikkate alındığında, bünye fonksiyonellerinin aşağıdaki koordinat dönüşümleri altında form – invariant kalması gerektiği görülmektedir (Şuhubi, 1994).

$$X'_K = S_{KL} X_L, \quad X_L = S_{LK}^T X'_K = S_{KL} X'_K, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T, \quad \forall \underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S} \quad (3.46)$$

Bu maddesel simetri kısıtlamasına göre, $\Sigma = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \theta_0, \underline{\underline{A}})$ bünye fonksiyoneli,

$$\Sigma = \Sigma \Rightarrow \Sigma = \Sigma(\underline{\underline{C}}', \theta_0, \underline{\underline{A}}') = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \theta_0, \underline{\underline{A}}) \quad (3.47)$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyonelin argümanları ise (3.46) ifadesinde verilen dönüşümler dikkate alınarak,

$$\begin{aligned} C'_{KL} = S_{KM} S_{LN} C_{MN} &\Rightarrow \underline{\underline{C}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T \\ A'_K = S_{KM} A_M &\Rightarrow \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}} \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde yazılabilir. (3.48) de verilen ifadeler (3.47) de yerine yazıldığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Sigma(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{A}}, \theta_0) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \theta_0) \quad (3.49)$$

Fiber ailesinin uzamazlığı ve ortamın sıkışmazlığını Spencer (1972), Şuhubi (1994) ve bir çok araştırmacı tarafından makul kabuller olarak görülmektedir. Bu kabuller

bünye denklemine bazı kısıtlamalar getirmekle birlikte pratikteki uygulamalar açısından önemli bir yaklaşım ve basitleştirme sağlamaktadır. Şuhubi (1994) gerilme bünye denkleminin Kirchoff formunu,

$$T_{kk}(\underline{F}, \underline{X}) = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \quad (3.50)$$

şeklinde vermiştir ve bu bağıntı Cauchy gerilme tansörü ile aşağıdaki şekilde ilişkilendirilebilir.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} x_{l,K} \quad (3.51)$$

Fiber ailesi uzamaz alındığı zaman, referans konumunda fiberlerin doğrultusu A birim vektör alanı ile verildiğine göre ortamın herhangi bir noktasından geçen fiber doğrultusunda germe 1 olmalıdır. Bu durumda germe ve Green şekil değiştirme tansörü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\lambda_{(a)}^2 = C_{KL} A_K A_L = 1 \quad (3.52)$$

Ortamın sıkışmaz olduğu durumda ise,

$$J = 1 \quad \text{veya} \quad \det \underline{\underline{C}} = III = 1 \quad (3.53)$$

şartı sağlanmalıdır. Buna göre (3.51) denkleminde Σ yerine kendisine eş değer olan fakat sözü edilen kısıtlamaları içeren aşağıdaki fonksiyon alınır.

$$\Sigma - p(x, t) (J - 1) + \frac{1}{2} T_a(x, t) (C_{KL} A_K A_L - 1) \quad (3.54)$$

Bu ifade de p ve $\frac{1}{2}T_a$ fonksiyonları uzay ve zaman değişkenlerinin bir fonksiyonu olup Lagrange çarpanları olarak adlandırılırlar. (3.54) ifadesinin $x_{k,K}$ ya göre türevini alıp (3.51) ifadesinde yerine yazarsak,

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + T_a a_k a_l + 2x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.55)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade fiber ailesi uzamaz ve ortam sıkışmaz kabul edildiğinde gerilme tansörünün uzaysal koordinatlardaki formudur. (3.55) ifadesinin maddesel koordinatlardaki formu ise aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$T_{KL} = -pC_{KL}^{-1} + T_a A_K A_L + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (3.56)$$

(3.55) ve (3.56) denklemleriyle uzaysal ve maddesel formda verilen gerilme tansörünün açıkça ortaya konulması için p ve T_a Lagrange çarpanları, alan denklemlerinden ve sınır şartlarından hesaplanır. Son terimin hesaplanması için argümanları belli olan Σ nın C_{KL} ye göre türevi alınmalıdır. Öncelikle ortamın izotrop yada anizotrop olduğu belirlenmesi gerekir. Bu çalışmada tek fiber aileli hiperelastik ortamın izotrop olduğu kabul edilmiştir. Ortam izotrop olduğundan Σ nın argümanları sonlu sayıda invaryantlara bağlı olması gerekir.

Bir sonraki kısımda, argümanları belli olan Σ nın bağlı olduğu invaryantlar belirlenecek ve gerilmenin bünye denklemi açıkça elde edilecektir.

3.2. Metot

Bu çalışmada ele alınan fiber takviyeli hiperelastik ortamın izotrop olduğu kabul edilmiştir. Spencer'in (1972) izotrop ortamlar için geliştirmiş olduğu invariants teorisi kullanılarak argümanları belli olan Σ nin invariantsları belirlendikten sonra gerilmenin bünye denklemi somut bir şekilde ortaya konulmuştur.

3.2.1. İzotrop Ortam için Bünye Modelinin Oluşturulması

Ortamın anizotropisi fiber dağılımından kaynaklanmaktadır. Bundan dolayı ortam izotrop olarak kabul edildiğinde bünye denklemleri ve Σ nin argümanları $\underline{\underline{Q}}^{-1} = \underline{\underline{Q}}^T$ ortogonal matrisi ile belirlenen koordinat dönüşümü altında form – invariants kalmalıdır. Bu durumda gerilme potansiyeli Σ ,

$$\Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{A}}, \theta_0) = \Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{A}}', \theta_0) \quad (3.57)$$

şekline dönüşür. Σ nin argümanları bu dönüşüm altında,

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= Q_{KM} Q_{LN} C_{MN}, & \underline{\underline{C}}' &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}}^T \\ A'_K &= Q_{KL} A_L, & \underline{\underline{A}}' &= \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

olarak ifade edilir. (3.57) ve (3.58) ifadeleri kullanılarak,

$$\Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{A}}', \theta_0) = \Sigma(\underline{\underline{Q}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}}^T, \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{A}}, \theta_0) \quad \forall \underline{\underline{Q}} \in O(3) \quad (3.59)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $O(3)$ materyal bölümünde ifade edildiği gibi 3 boyutlu ortogonal simetri grubunu ifade etmektedir. Bu durumda invariants teorisine göre Σ nin argümanlarının sonlu sayıda invariantslara bağlı olması gerekir. Buna göre, bir simetrik matrisin $(\underline{\underline{C}})$ ve bir vektörün $(\underline{\underline{A}})$ birbirinden bağımsız 6 adet müşterek invariants olduğunu gösterebilir.

$$\begin{aligned}
I_1 &= tr \underline{\underline{C}} = C_{KK} \\
I_2 &= tr \underline{\underline{C}}^2 = C_{KL} C_{LK} \\
I_3 &= tr \underline{\underline{C}}^3 = C_{KL} C_{LM} C_{MK} \\
I_4 &= A \cdot A = A_K A_K = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \\
I_5 &= A \cdot CA = A_K C_{KL} A_L = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{CA}}) = \lambda_a^2 \\
I_6 &= A \cdot C^2 A = A_K C_{KL} C_{LM} A_M = \underline{\underline{A}}^T (\underline{\underline{C}}^2 \underline{\underline{A}})
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Bu durumda gerilme potansiyeli fonksiyonumuz yukarıdaki tanımlanan argümanların fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \tag{3.61}$$

İkinci dereceden bir tansör olan Green deformasyon tansörünün asal invariantlarının,

$$\begin{aligned}
I &= I_1 = tr \underline{\underline{C}} \\
II &= \frac{1}{2} [I_1^2 - I_2] = \frac{1}{2} [(tr \underline{\underline{C}})^2 - tr \underline{\underline{C}}^2] \\
III &= \frac{1}{6} [I_1^3 - 3I_1 I_2 + 2I_3] = \det \underline{\underline{C}}
\end{aligned} \tag{3.62}$$

şeklinde olduğu (Şuhubi, 1994) dikkate alınarak (3.60) ifadesindeki (I_1, I_2, I_3) invariantları yerine (3.62) ifadesinde asal invariantları kullanırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\Sigma = \Sigma(I, II, III, I_4, I_5, I_6) \tag{3.63}$$

Bu aşamada ortamın sıkışmazlığını ve (1.147) ifadesinde verilen fiber kinematiği ve fiber uzamazlığı dikkate alındığı takdirde (3.63) deki listede yer alan III, I_4, I_5 invariantlarının değeri 1 olur. Σ nın bu invariantlara bağımlılığı kalkar ve bağlı olduğu invariantlar aşağıdaki şekilde ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
I &= \text{tr} \underline{\underline{C}} = C_{KK} \\
II &= \frac{1}{2} (C_{KK} C_{LL} - C_{KL} C_{LK}) \\
I_6 &= A_K C_{KL} C_{LM} A_M
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Bu durumda Σ ,

$$\Sigma = \Sigma(I, II, I_6) \tag{3.65}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu çalışmada ele alınan ortam için kabul edilen kısıtlamalar altında gerilmeye ait bünye denklemi 3.1.1 kısmında (3.56) bağıntısıyla maddesel koordinatlarda aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$T_{PR} = -p C_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PR}} \tag{3.66}$$

Bu ifade de yer alan kısmi türev (3.65) ifadesiyle belirtilen invaryantlara göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{PR}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial C_{PR}} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \frac{\partial I_6}{\partial C_{PR}} \tag{3.67}$$

(3.64) ifadesinden de görüldüğü gibi I, II, I_6 invaryantları C tansörüne bağlıdır. Bundan dolayı türev işlemlerinin sonucu sıfır olmaz ve aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial C_{PR}} &= \delta_{PR} \\
\frac{\partial II}{\partial C_{PR}} &= \delta_{PR} C_{KK} - C_{PR} \\
\frac{\partial I_6}{\partial C_{PR}} &= A_P A_K C_{KR} + C_{PK} A_K A_R
\end{aligned} \tag{3.68}$$

(3.68) elde edilen sonuçlar (3.67) eşitliğinde yerine yazılıp (3.66) denklemine taşınırsa, mekanik yüklemeye maruz tek fiber aileli izotrop bir ortamda, ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği durumda gerilme bünye denklemi maddesel koordinatlardaki bileşenleri cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$T_{PR} = -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + 2 \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{QQ} \right) \delta_{PR} - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (A_P A_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q A_R) \right] \quad (3.69)$$

Bünye denkleminin matris formundaki ifadesi,

$$T_{PR} = -pC^{-1} + T_a \underline{AA}^T + 2 \left\{ \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C \right) \underline{I} - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} \underline{C} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (\underline{AA}^T \underline{C} + \underline{C} \underline{AA}^T) \right\} \quad (3.70)$$

şeklindedir. (3.70) denkleminde gözüken $-p$ ve T_a lagrange çarpanlarıdır. Lagrange çarpanları alan denklemleri ve sınır şartları ile belirlenecektir. (3.70) denklemi daha somut şekilde elde etmek için Σ nın invariantlarına göre türevlerinin bilinmesi gerekir. Bu işlemler bundan sonraki bulgular bölümünde verilmiştir.

4. BULGULAR

4.1 Gerilmenin Maddesel Formu

Mekanik bir yüklemeye maruz tek fiber aileli hiperelastik bir malzeme için bünye denklemi Σ nın invariantslarına göre türevlerine bağlı olarak (3.70) denkleminde verilmiştir. (3.65) ifadesinde Σ nın hangi argümanlara bağlı olduğu görülmektedir. Bu aşamada Σ nın bu invariantslara nasıl bağlı olduğu bilinmemektedir. Σ invariantslarının analitik bir fonksiyonu ise bir kuvvet serisi ile temsil edilebilir. Ancak kuvvet serisinin kaçınıcı mertebeden olacağı ve kaç teriminin alınacağı başka bir ifadeyle Σ nın kaçınıcı mertebeden bir polinomla temsil edileceği, deformasyon invariantslarının büyüklüğüne ve olaydaki etkileşim paylarına kısacası nonlinearlik mertebesine bağlıdır.

Diğer taraftan iç enerji pozitif tanımlı olduğundan bu polinomun pozitif tanımlı olması gerekir. Ayrıca invariantsların sırasının Σ yı etkilememesi için bu polinomun simetrik katsayılı olması yani kuadratik bir form şeklinde olması gerekir. Buna göre bir polinom yaklaşımı seçilmesi durumunda, gerilme potansiyeli Σ mevcut invariantsları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma = \sum_{i,j} a_{ij} I_i I_j \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (4.1)$$

$$\Sigma = a_{11} I^2 + 2a_{12} I II + 2a_{16} I I_6 + a_{22} II^2 + 2a_{26} II I_6 + a_{66} I_6^2$$

Diğer taraftan lastik ve benzeri özellikleri taşıyan malzemelerde Σ nın formu, Money – Rivlin tipi malzemeler için yazılmış türden ifadelerin fiberli ortamlara genelleştirilmesi ile elde edebilir. (3.70) ifadesindeki Σ nın invariantslara göre türevleri (4.1) polinom açılımından faydalanılarak bulunacaktır. (4.1) ifadesinin ihtiva ettiği invariantslara göre Σ nın kısmi türevleri alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial I} &= 2a_{11} I + 2a_{12} II + 2a_{16} I_6 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial II} &= 2a_{12} I + 2a_{22} II + 2a_{26} I_6 \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} &= 2a_{16} I + 2a_{26} II + 2a_{66} I_6
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Burada invariantsların hangi fonksiyona ait olduğuna dikkat edilmeksizin gerilme potansiyelinin invariantslarına göre türevleri alınmıştır. (4.2) ifadesindeki invariantsların (3.64) ifadesiyle nelere bağlı olduğu verilmiştir. Green deformasyon tansörüne (C) bağlı invariantslar daha kullanışlı olan genleme tansörü (E) cinsinden ifade edilebilir. Green deformasyon tansörüne bağlı invariantsları aşağıdaki bilinen ifadeler kullanılarak genleme tansörü cinsinden bulabiliriz.

$$\begin{aligned}
C_{KL} &= \delta_{KL} + 2E_{KL} \\
C_{KK} &= 3 + 2E_{KK} \\
A_K A_K &= |A|^2 = 1 \quad \text{ve} \quad C_{KS} A_K A_S = \lambda_a = 1 \\
E_{KS} A_K A_S &= \frac{1}{2} (C_{KS} A_K A_S - A_K A_K) = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned}
I &= C_{KK} = 3 + 2E_{KK} \\
II &= \frac{1}{2} [6 + 8E_{KK} + 4E_{KK} E_{LL} - 4E_{KL} E_{LK}] \\
I_6 &= 1 + 4A_K E_{KS} E_{SL} A_L
\end{aligned} \tag{4.4}$$

invariantsları yazılabilir. 3.2.1 bölümünde gerilmenin bünye denklemi (3.69) ifadesiyle aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + 2 \left[\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{QQ} \right) \delta_{PR} - \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} \right. \\
& \left. + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (A_P A_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q A_R) \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

(4.5) denkleminin sağ tarafında bulunan Lagrange çarpanlarını içeren terimlerin dışında kalan bütün terimler (4.2) ifadesiyle verilen kısmi türevler ve (4.4) ifadesiyle verilen invaryantlar kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I} + \frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{QQ} \right) \delta_{PR} = & (6a_{11} + 24a_{12} + 2a_{16} + 18a_{22} + 6a_{26}) \delta_{PR} \\
& + (4a_{11} + 32a_{12} + 36a_{22} + 4a_{26}) E_{kk} \delta_{PR} + (12a_{12} + 28a_{22}) E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} \\
& - (4a_{12} + 12a_{22}) E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} + (8a_{16} + 24a_{26}) A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} \\
& + 8a_{22} E_{KK} E_{LL} E_{QQ} \delta_{PR} - 8a_{22} E_{KL} E_{LK} E_{QQ} \delta_{PR} + 16a_{26} A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{QQ} \delta_{PR}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial II} C_{PR} = & (6a_{12} + 6a_{22} + 2a_{26}) \delta_{PR} + (12a_{12} + 12a_{22} + 4a_{26}) E_{PR} \\
& + (4a_{12} + 8a_{22}) E_{KK} \delta_{PR} + (8a_{12} + 16a_{22}) E_{KK} E_{PR} + 8a_{22} E_{KK} E_{LL} E_{PR} \\
& + 4a_{22} E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} - 8a_{22} E_{KL} E_{LK} E_{PR} - 4a_{22} E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} \\
& + 16a_{26} A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{PR} + 8a_{26} A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (A_P A_Q C_{QR} + C_{PQ} A_Q A_R) = & 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} (A_P A_R + A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) \\
= & (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66}) A_P A_R + (8a_{16} + 16a_{26}) E_{KK} A_P A_R \\
& + (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66}) A_P A_Q E_{QR} + (8a_{16} + 16a_{26}) E_{KK} A_P A_Q E_{QR} \\
& + (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66}) E_{PQ} A_Q A_R + (8a_{16} + 16a_{26}) E_{KK} E_{PQ} A_Q A_R \\
& + 8a_{26} E_{KK} E_{LL} A_P A_R - 8a_{26} E_{KL} E_{LK} A_P A_R + 16a_{66} A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_R \\
& + 8a_{26} E_{KK} E_{LL} A_P A_Q E_{QR} - 8a_{26} E_{KL} E_{LK} A_P A_Q E_{QR} + 16a_{66} A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_Q E_{QR} \\
& + 8a_{26} E_{KK} E_{LL} E_{PQ} A_Q A_R - 8a_{26} E_{KL} E_{LK} E_{PQ} A_Q A_R + 16a_{66} A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{PQ} A_Q A_R
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(4.6), (4.7) ve (4.8) denklemlerinde verilen ifadeleri (4.5) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + 2[(6a_{11} + 24a_{12} + 2a_{16} + 18a_{22} + 6a_{26})\delta_{PR} \\
& + (4a_{11} + 32a_{12} + 36a_{22} + 4a_{26})E_{KK}\delta_{PR} + (12a_{12} + 28a_{22})E_{KK}E_{LL}\delta_{PR} \\
& - (4a_{12} + 12a_{22})E_{KL}E_{LK}\delta_{PR} + (8a_{16} + 24a_{26})A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} \\
& + 8a_{22}E_{KK}E_{LL}E_{QQ}\delta_{PR} - 8a_{22}E_{KL}E_{LK}E_{QQ}\delta_{PR} + 16a_{26}A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{QQ}\delta_{PR} \\
& - (6a_{12} + 6a_{22} + 2a_{26})\delta_{PR} - (12a_{12} + 12a_{22} + 4a_{26})E_{PR} \\
& - (4a_{12} + 8a_{22})E_{KK}\delta_{PR} - (8a_{12} + 16a_{22})E_{KK}E_{PR} - 8a_{22}E_{KK}E_{LL}E_{PR} \\
& - 4a_{22}E_{KK}E_{LL}\delta_{PR} + 8a_{22}E_{KL}E_{LK}E_{PR} + 4a_{22}E_{KL}E_{LK}\delta_{PR} \\
& - 16a_{26}A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{PR} - 8a_{26}A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} \\
& + (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66})A_P A_R + (8a_{16} + 16a_{26})E_{KK}A_P A_R \\
& + (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66})A_P A_Q E_{QR} + (8a_{16} + 16a_{26})E_{KK}A_P A_Q E_{QR} \\
& + (12a_{16} + 12a_{26} + 4a_{66})E_{PQ}A_Q A_R + (8a_{16} + 16a_{26})E_{KK}E_{PQ}A_Q A_R \\
& + 8a_{26}E_{KK}E_{LL}A_P A_R - 8a_{26}E_{KL}E_{LK}A_P A_R + 16a_{66}A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_R \\
& + 8a_{26}E_{KK}E_{LL}A_P A_Q E_{QR} - 8a_{26}E_{KL}E_{LK}A_P A_Q E_{QR} + 16a_{66}A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_Q E_{QR} \\
& + 8a_{26}E_{KK}E_{LL}E_{PQ}A_Q A_R - 8a_{26}E_{KL}E_{LK}E_{PQ}A_Q A_R + 16a_{66}A_K E_{KS} E_{SL} A_L E_{PQ}A_Q A_R]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Bu çalışmada mekanik etkileşimler nonlineer kabul edildiğinden (4.9) denkleminde E genleme tansörünün 2. mertebeye kadar olan terimleri dikkate alınmıştır. Diğer taraftan malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarlı kalacağından matematiksel olarak $A \rightarrow -A$ değişiminden etkilenmez. O halde A vektörünün bileşenlerinin dış çarpımında sadece çift sayıda olanları dikkate alınmalıdır. Ortak terimler paranteze alındığında aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + 2[2(3a_{11} + 9a_{12} + a_{16} + 6a_{22} + 2a_{26})\delta_{PR} \\
& + 4(a_{11} + 7a_{12} + 7a_{22} + a_{26})E_{KK}\delta_{PR} + 4(a_{12} + 2a_{22}) \\
& (3E_{KK}E_{LL}\delta_{PR} - E_{KL}E_{LK}\delta_{PR} - 2E_{KK}E_{PR}) - 4(3a_{12} + 3a_{22} + a_{26})E_{PR} \\
& + 4(3a_{16} + 3a_{26} + a_{66})(A_P A_R + A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + 8(a_{16} + 2a_{26})(A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} + E_{KK} A_P A_R + E_{KK} A_P A_Q E_{QR} + E_{KK} E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + 8a_{26}(E_{KK} E_{LL} A_P A_R - E_{KL} E_{LK} A_P A_R) + 16a_{66} A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_R]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Bu elde ettiğimiz denklemi matris notasyonunda aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\underline{T} = & -p\underline{C}^{-1} + T_a \underline{A}\underline{A}^T + 2[2(3a_{11} + 9a_{12} + a_{16} + 6a_{22} + 2a_{26})\underline{I} \\
& + 4(a_{11} + 7a_{12} + 7a_{22} + a_{26})(\text{tr}\underline{E})\underline{I} + 4(a_{12} + 2a_{22}) \\
& (3(\text{tr}\underline{E})^2 \underline{I} - (\text{tr}\underline{E}^2)\underline{I} - 2(\text{tr}\underline{E})\underline{E}) - 4(3a_{12} + 3a_{22} + a_{26})\underline{E} \\
& + 4(3a_{16} + 3a_{26} + a_{66})(\underline{A}\underline{A}^T + \underline{A}\underline{A}^T \underline{E} + \underline{E}\underline{A}\underline{A}^T) \\
& + 8(a_{16} + 2a_{26})(\underline{A}^T \underline{E}\underline{E}\underline{A}\underline{I} + (\text{tr}\underline{E})\underline{A}\underline{A}^T + (\text{tr}\underline{E})\underline{A}\underline{A}^T \underline{E} + (\text{tr}\underline{E})\underline{E}\underline{A}\underline{A}^T) \\
& + 8a_{26}((\text{tr}\underline{E})^2 \underline{A}\underline{A}^T - (\text{tr}\underline{E}^2)\underline{A}\underline{A}^T) + 16a_{66} \underline{A}\underline{A}^T \underline{E}\underline{E}\underline{A}\underline{A}^T]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.10) denklemindeki a_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) katsayıları X parçacığına ve θ_0 sabit sıcaklığına bağlıdır. Bu denklemde a_{ij} katsayılarının her biri için α_k ($k = 1, 2, 3, \dots, 8$) şeklinde yeni atamalar yapılır ve aşağıdaki katsayılar tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 & \equiv 4(3a_{11} + 9a_{12} + a_{16} + 6a_{22} + 2a_{26}) \\
\alpha_2 & \equiv 8(a_{11} + 7a_{12} + 7a_{22} + a_{26}) \\
\alpha_3 & \equiv 8(a_{12} + 2a_{22}) \\
\alpha_4 & \equiv -8(3a_{12} + 3a_{22} + a_{26}) \\
\alpha_5 & \equiv 8(3a_{16} + 3a_{26} + a_{66}) \\
\alpha_6 & \equiv 16(a_{16} + 2a_{26}) \\
\alpha_7 & \equiv 16a_{26} \\
\alpha_8 & \equiv 32a_{66}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Bu katsayıları kullanarak gerilme bünye denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \alpha_1 \delta_{PR} + \alpha_2 E_{KK} \delta_{PR} \\
& + \alpha_3 (3E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} - E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} - 2E_{KK} E_{PR}) + \alpha_4 E_{PR} \\
& + \alpha_5 (A_P A_R + A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + \alpha_6 (A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} + E_{KK} A_P A_R + E_{KK} A_P A_Q E_{QR} + E_{KK} E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + \alpha_7 (E_{KK} E_{LL} A_P A_R - E_{KL} E_{LK} A_P A_R) + \alpha_8 A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_R]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Başlangıçta gerilmemiş ve yüksüz durumda, (4.13) denklemindeki $\alpha_1 \delta_{PR}$ terimi sıfır olur. Buna göre (4.13) denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılır.

$$\begin{aligned}
T_{PR} = & -pC_{PR}^{-1} + T_a A_P A_R + \alpha_2 E_{KK} \delta_{PR} + \alpha_3 (3E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} - E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} - 2E_{KK} E_{PR}) \\
& + \alpha_4 E_{PR} + \alpha_5 (A_P A_R + A_P A_Q E_{QR} + E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + \alpha_6 (A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} + E_{KK} A_P A_R + E_{KK} A_P A_Q E_{QR} + E_{KK} E_{PQ} A_Q A_R) \\
& + \alpha_7 (E_{KK} E_{LL} A_P A_R - E_{KL} E_{LK} A_P A_R) + \alpha_8 A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_P A_R]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) denklemi mekanik yüklemelere maruz tek fiber aileli izotrop bir ortamda ortamın sıkışmaz fiber ailesinin uzamaz ve mekanik etkileşimlerin nonlineer kabul edilip 2. mertebeye kadar alındığı durumda gerilmenin maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden bünye denklemdir.

4.2 Gerilmenin Uzaysal Formu

Kısım 3.1.1 de gerilmenin uzaysal formu maddesel koordinatlara bağı olarak,

$$t_{pr} = J^{-1} x_{p,P} x_{r,R} T_{PR} \quad (4.15)$$

şeklinde verilmişti. Ortam sıkışmaz kabul edildiğinden,

$$III = 1 \quad \Rightarrow \quad J^{-1} = \frac{1}{\sqrt{III}} = 1 \quad (4.16)$$

şeklinde alınır ve buna göre (4.15) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$t_{pr} = x_{p,P} x_{r,R} T_{PR} \quad (4.17)$$

(4.14) denklemindeki maddesel koordinatlara bağı olan genleme deformasyon tansörünün, fiber vektörlerinin uzaysal koordinatlardaki şekilleri (fiber ailesinin uzamazlığı dikkate alınarak) ile kronecker delta, Piola ve Finger deformasyon tansörleri aşağıdaki şekildedir (Usal, 2001 ve Şuhubi, 1994).

$$\begin{aligned} E_{KL} &= x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} \\ A_K &= \lambda_a X_{K,m} a_m, \quad \lambda_a = 1 \quad \text{ise} \quad A_K = X_{K,m} a_m \\ \delta_{mn} &= x_{m,K} X_{K,n} \\ C_{PR}^{-1} &= X_{P,k} X_{R,k} \\ c_{pr}^{-1} &= x_{p,K} x_{r,K} \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.14) denklemini (4.17) denkleminde yerine yazılıp ve ortaya çıkan her terim (4.18) ifadeleri kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$-pC_{PR}^{-1}x_{p,P}x_{r,R} = -pX_{P,k}X_{r,R}x_{p,P}x_{r,R} = -p\delta_{pk}\delta_{rk} = -p\delta_{pr}$$

$$T_a A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} = T_a X_{P,m} a_m X_{R,n} a_n x_{p,P} x_{r,R} = T_a \delta_{pm} a_m \delta_{rn} a_n = T_a a_p a_r$$

$$E_{KK} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{p,P} x_{r,R} = c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{pr}^{-1}$$

$$3E_{KK} E_{LL} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = 3x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{i,L} x_{j,L} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} = 3c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ij}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$E_{KL} E_{LK} \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{i,L} x_{j,K} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} = c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1}$$

$$2E_{KK} E_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = 2x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{i,P} x_{j,R} e_{ij} x_{p,P} x_{r,R} = 2c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ip}^{-1} e_{ij} c_{jr}^{-1}$$

$$E_{PR} x_{p,P} x_{r,R} = x_{m,P} x_{n,R} e_{mn} x_{p,P} x_{r,R} = c_{mp}^{-1} e_{mn} c_{nr}^{-1}$$

$$A_P A_R x_{p,P} x_{r,R} = X_{P,m} a_m X_{R,n} a_n x_{p,P} x_{r,R} = a_m a_n \delta_{pm} \delta_{rn} = a_p a_r$$

$$\begin{aligned} A_P A_Q E_{QR} x_{p,P} x_{r,R} &= X_{P,i} a_i X_{Q,j} a_j x_{m,Q} x_{n,R} e_{mn} x_{p,P} x_{r,R} = a_i \delta_{mi} a_j \delta_{pj} e_{mn} c_{nr}^{-1} \\ &= a_m a_p e_{mn} c_{nr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{PQ} A_Q A_R x_{p,P} x_{r,R} &= x_{m,P} x_{n,Q} e_{mn} X_{Q,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,P} x_{r,R} = c_{mp}^{-1} e_{mn} a_i \delta_{ni} a_j \delta_{jr} \\ &= c_{mp}^{-1} e_{mn} a_n a_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KS} E_{SL} A_L \delta_{PR} x_{p,P} x_{r,R} &= X_{K,i} a_i x_{m,K} x_{n,S} e_{mn} x_{k,S} x_{l,L} e_{kl} X_{L,j} a_j x_{p,P} x_{r,R} \\ &= a_i \delta_{im} e_{mn} c_{nk}^{-1} \delta_{lj} e_{kl} a_j c_{pr}^{-1} = a_m e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_l c_{pr}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} A_p A_R x_{p,p} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} X_{P,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,p} x_{r,R} = c_{mn}^{-1} e_{mn} \delta_{ip} a_i \delta_{jr} a_j \\ &= c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} A_p A_Q E_{QR} x_{p,p} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} X_{P,i} a_i X_{Q,j} a_j x_{k,Q} x_{l,R} e_{kl} x_{p,p} x_{r,R} \\ &= c_{mn}^{-1} e_{mn} \delta_{ip} a_i \delta_{jk} a_j c_{lr}^{-1} e_{kl} = c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_k c_{lr}^{-1} e_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} E_{PQ} A_Q A_R x_{p,p} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{k,P} x_{l,Q} e_{kl} X_{Q,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,p} x_{r,R} \\ &= c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kp}^{-1} e_{kl} \delta_{li} a_i \delta_{jr} a_j = c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kp}^{-1} e_{kl} a_l a_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KK} E_{LL} A_p A_R x_{p,p} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,K} e_{mn} x_{k,L} x_{l,L} e_{kl} X_{P,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,p} x_{r,R} \\ &= c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kl}^{-1} e_{kl} \delta_{ip} a_i \delta_{jr} a_j = c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kl}^{-1} e_{kl} a_p a_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{KL} E_{LK} A_p A_R x_{p,p} x_{r,R} &= x_{m,K} x_{n,L} e_{mn} x_{k,L} x_{l,K} e_{kl} X_{P,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,p} x_{r,R} \\ &= c_{ml}^{-1} e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} \delta_{ip} a_i \delta_{jr} a_j = c_{ml}^{-1} e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_p a_r \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} A_K E_{KS} E_{SL} A_L A_p A_R x_{p,p} x_{r,R} &= X_{K,s} a_s x_{m,K} x_{n,S} e_{mn} x_{k,S} x_{l,L} e_{kl} X_{L,t} a_t X_{P,i} a_i X_{R,j} a_j x_{p,p} x_{r,R} \\ &= \delta_{sm} a_s c_{nk}^{-1} e_{mn} e_{kl} \delta_{lt} a_t \delta_{ip} a_i \delta_{jr} a_j = a_m c_{nk}^{-1} e_{mn} e_{kl} a_l a_p a_r \end{aligned}$$

Bu elde edilen ifadeleri (4.14) ifadesinde yerlerine yazarsak gerilmenin uzaysal formu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} t_{PR} &= -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \alpha_2 c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{pr}^{-1} + \alpha_3 \left(3c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ij}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} - c_{mj}^{-1} e_{mn} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} \right. \\ &\quad \left. - 2c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ip}^{-1} e_{ij} c_{jr}^{-1} \right) - \alpha_4 c_{mp}^{-1} e_{mn} c_{nr}^{-1} + \alpha_5 \left(a_p a_r + a_m a_p e_{mn} c_{nr}^{-1} + c_{mp}^{-1} e_{mn} a_n a_r \right) \\ &\quad + \alpha_6 \left(a_m e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_l c_{pr}^{-1} + c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_r + c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_k c_{lr}^{-1} e_{kl} + c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kp}^{-1} e_{kl} a_l a_r \right) \\ &\quad + \alpha_7 \left(c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kl}^{-1} e_{kl} a_p a_r - c_{ml}^{-1} e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_p a_r \right) + \alpha_8 a_m c_{nk}^{-1} e_{mn} e_{kl} a_l a_p a_r \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.20) denklemi gerilme tansörünün, Euler genleme tansörü ve Finger deformasyon tansörü cinsinden uzaysal koordinatlardaki formudur. Kronecker delta, şekil

değiştirme gradyanları, yer değiştirme gradyanları, maddesel ve uzaysal genleme tansörleri sürekli ortamın bilinen bağıntılarından aşağıdaki şekildedir (Şuhubi, 1994). Bu bağıntılar kullanılarak (4.20) denklemi uzaysal koordinatlarda yer değiştirme gradyanı cinsinden elde edilmeye çalışılacaktır.

$$\begin{aligned}
\lambda_{kK} \lambda_{IK} &= \delta_{kl}, \quad \lambda_{IK} \lambda_{IL} = \delta_{KL} \\
x_{k,K} &= \lambda_{kK} + \lambda_{kL} U_{L,K} \\
X_{K,k} &= \lambda_{kK} - \lambda_{IK} u_{l,k} \\
U_{K,L} &= U_{K,l} x_{l,L} = \lambda_{kK} u_{k,l} x_{l,L} = \lambda_{kK} \lambda_{IL} (u_{k,l} + u_{k,m} u_{m,l}) \\
e_{kl} &= \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k} u_{m,l})
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Burada notasyon kolaylığı için sonsuz küçük genleme tansörünü ve yer değiştirme gradyanının maddesel koordinatlardan uzaysal koordinatlara dönüşümünü aşağıdaki şekilde alırız (Şuhubi, 1994).

$$\begin{aligned}
U_{M,N} &= \lambda_{mM} \lambda_{nN} u_{m,n} \\
e_{kl} &\equiv \tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})
\end{aligned} \tag{4.22}$$

(4.21)₁, (4.21)₂ ve (4.22) ifadelerini kullanarak ve yer değiştirme gradyanının 1. mertebe terimleri alınarak, finger deformasyon tansörü yer değiştirme gradyanı cinsinden aşağıdaki gibi bulunur.

$$c_{pr}^{-1} = x_{p,K} x_{r,K} = (\lambda_{pK} + \lambda_{pL} U_{L,K}) (\lambda_{rK} + \lambda_{rPL} U_{M,K}) = \delta_{pr} + u_{r,p} + u_{p,r} \tag{4.23}$$

(4.20) denklemindeki finger deformasyon tansörüne ve uzaysal genleme tansörüne bağlı terimler, (4.23) ve (4.22)₂ ifadeleri kullanılarak ve yer değiştirme gradyanının 2. dereceden terimleri alınarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{pr}^{-1} = \frac{1}{2} (2u_{m,m} \delta_{pr} + 2u_{m,m} u_{r,p} + 2u_{m,m} u_{p,r} + 2u_{n,m} u_{m,n} \delta_{pr} \\ + u_{n,m} u_{n,m} \delta_{pr} + u_{m,n} u_{m,n} \delta_{pr})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ij}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} = u_{m,m} u_{i,i} \delta_{pr}$$

$$c_{mj}^{-1} e_{mj} c_{ni}^{-1} e_{ij} c_{pr}^{-1} = \frac{1}{4} \delta_{pr} (2u_{j,n} u_{n,j} + u_{j,n} u_{j,n} + u_{n,j} u_{n,j})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{ip}^{-1} e_{ij} c_{jr}^{-1} = \frac{1}{2} u_{m,m} (u_{p,r} + u_{r,p})$$

$$c_{mp}^{-1} e_{mp} c_{nr}^{-1} = \frac{1}{2} (u_{p,r} + u_{r,p} + u_{p,n} u_{r,n} + u_{p,n} u_{n,r} + u_{n,p} u_{r,n} + u_{n,p} u_{n,r} \\ u_{p,m} u_{m,r} + u_{p,m} u_{r,m} + u_{m,p} u_{m,r} + u_{m,p} u_{r,m})$$

$$a_m a_p e_{mn} c_{nr}^{-1} = \frac{1}{2} a_m a_p (u_{m,r} + u_{r,m} + u_{r,n} u_{m,n} + u_{r,n} u_{n,m} + u_{n,r} u_{m,n} + u_{n,r} u_{n,m})$$

$$c_{mp}^{-1} e_{mn} a_n a_r = \frac{1}{2} (u_{p,n} + u_{n,p} + u_{p,m} u_{m,n} + u_{p,m} u_{n,m} + u_{m,p} u_{m,n} + u_{m,p} u_{n,m}) a_n a_r$$

$$a_m e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_l c_{pr}^{-1} = \frac{1}{4} a_m a_l (u_{m,k} u_{k,l} \delta_{pr} + u_{m,k} u_{l,k} \delta_{pr} + u_{k,m} u_{k,l} \delta_{pr} + u_{k,m} u_{l,k} \delta_{pr})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_r = \frac{1}{2} a_p a_r (2u_{m,m} + 2u_{n,m} u_{m,n} + u_{n,m} u_{n,m} + u_{m,n} u_{m,n})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} a_p a_k c_{lr}^{-1} e_{kl} = \frac{1}{2} a_p a_k u_{m,m} (u_{k,r} + u_{r,k})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kp}^{-1} e_{kl} a_l a_r = \frac{1}{2} a_l a_r u_{m,m} (u_{p,l} + u_{l,p})$$

$$c_{mn}^{-1} e_{mn} c_{kl}^{-1} e_{kl} a_p a_r = a_p a_r u_{m,m} u_{k,k}$$

$$c_{ml}^{-1} e_{mn} c_{nk}^{-1} e_{kl} a_p a_r = \frac{1}{4} a_p a_r (2u_{l,n} u_{n,l} + u_{l,n} u_{l,n} + u_{n,l} u_{n,l}) \quad (4.24)$$

$$a_m c_{nk}^{-1} e_{mn} e_{kl} a_l a_p a_r = \frac{1}{4} a_m a_l a_p a_r (u_{m,k} u_{k,l} + u_{m,k} u_{l,k} + u_{k,m} u_{k,l} + u_{k,m} u_{l,k})$$

(4.24) ifadesindeki terimler (4.20) ifadesinde yerlerine yazılırsa gerilme yer değiştirme gradyanına bağlı olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} t_{pr} = & -p \delta_{pr} + T_a a_p a_r + \frac{1}{2} \alpha_2 (2u_{m,m} \delta_{pr} + 2u_{m,m} u_{r,p} + 2u_{m,m} u_{p,r} + 2u_{n,m} u_{m,n} \delta_{pr} \\ & + u_{n,m} u_{n,m} \delta_{pr} + u_{m,n} u_{m,n} \delta_{pr}) + \alpha_3 [3u_{m,m} u_{i,i} \delta_{pr} - \frac{1}{4} \delta_{pr} (2u_{j,n} u_{n,j} + u_{j,n} u_{j,n} + u_{n,j} u_{n,j}) \\ & u_{m,m} (u_{p,r} + u_{r,p})] + \frac{1}{2} \alpha_4 (u_{p,r} + u_{r,p} + u_{p,n} u_{r,n} + u_{p,n} u_{n,r} + u_{n,p} u_{r,n} + u_{n,p} u_{n,r} \\ & u_{p,m} u_{m,r} + u_{p,m} u_{r,m} + u_{m,p} u_{m,r} + u_{m,p} u_{r,m}) + \alpha_5 [a_p a_r + \frac{1}{2} a_m a_p (u_{m,r} + u_{r,m} + u_{r,n} u_{m,n} \\ & + u_{r,n} u_{n,m} + u_{n,r} u_{m,n} + u_{n,r} u_{n,m}) + \frac{1}{2} (u_{p,n} + u_{n,p} + u_{p,m} u_{m,n} + u_{p,m} u_{n,m} + u_{m,p} u_{m,n} \\ & + u_{m,p} u_{n,m}) a_n a_r] + \alpha_6 [\frac{1}{4} a_m a_l (u_{m,k} u_{k,l} \delta_{pr} + u_{m,k} u_{l,k} \delta_{pr} + u_{k,m} u_{k,l} \delta_{pr} + u_{k,m} u_{l,k} \delta_{pr}) \\ & \frac{1}{2} a_p a_r (2u_{m,m} + 2u_{n,m} u_{m,n} + u_{n,m} u_{n,m} + u_{m,n} u_{m,n}) + \frac{1}{2} a_p a_k u_{m,m} (u_{k,r} + u_{r,k}) \\ & + \frac{1}{2} a_l a_r u_{m,m} (u_{p,l} + u_{l,p})] + \alpha_7 [a_p a_r u_{m,m} u_{k,k} - \frac{1}{4} a_p a_r (2u_{l,n} u_{n,l} + u_{l,n} u_{l,n} + u_{n,l} u_{n,l}) \\ & \frac{1}{4} \alpha_8 a_m a_l a_p a_r (u_{k,l} + u_{l,k}) (u_{m,k} + u_{k,m}) \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) denkleminde gerekli indis d6n6ř6mlerini yaparak ortak terimler dikkate alınırşa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
t_{pr} = & -p\delta_{pr} + T_a a_p a_r + \alpha_5 a_p a_r + \alpha_2 u_{m,m} \delta_{pr} + \frac{1}{2} \alpha_4 (u_{p,r} + u_{r,p}) + \frac{1}{2} \alpha_5 [a_p a_m (u_{m,r} + u_{r,m}) \\
& + (u_{p,n} + u_{n,p}) a_n a_r] + \alpha_6 u_{m,m} a_p a_r + \left[3\alpha_3 u_{m,m} u_{n,n} + \left(\frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3 \right) (2u_{n,m} u_{m,n} + u_{n,m} u_{n,m} \right. \\
& \left. + u_{m,n} u_{m,n}) \right] \delta_{pr} + (\alpha_2 - \alpha_3) u_{m,m} (u_{p,r} + u_{r,p}) + \frac{1}{2} \alpha_4 [(u_{p,n} + u_{n,p}) (u_{r,n} + u_{n,r}) \\
& (u_{p,m} + u_{m,p}) (u_{m,r} + u_{r,m})] + \frac{1}{2} \alpha_5 [a_p a_m (u_{r,n} u_{m,n} + u_{r,n} u_{n,m} + u_{n,r} u_{m,n} + u_{n,r} u_{n,m}) + a_r a_n \\
& (u_{p,m} u_{m,n} + u_{p,m} u_{n,m} + u_{m,p} u_{m,n} + u_{m,p} u_{n,m})] + \frac{1}{4} \alpha_6 [a_m a_l \delta_{pr} (u_{m,k} u_{k,l} + u_{m,k} u_{l,k} + u_{k,m} u_{k,l} \\
& + u_{k,m} u_{l,k}) + a_p a_r (4u_{n,m} u_{m,n} + 2u_{n,m} u_{n,m} + 2u_{m,n} u_{m,n}) + a_p a_k (2u_{m,m} u_{k,r} + 2u_{m,m} u_{r,k}) \\
& a_l a_r (2u_{m,m} u_{p,l} + 2u_{m,m} u_{l,p})] + \frac{1}{4} \alpha_7 a_p a_r (4u_{m,m} u_{k,k} - 2u_{l,n} u_{n,l} - u_{l,n} u_{l,n} - u_{n,l} u_{n,l}) \\
& \frac{1}{4} \alpha_8 a_m a_l a_p a_r (u_{k,l} u_{m,k} + u_{k,l} u_{k,m} + u_{l,k} u_{m,k} + u_{l,k} u_{k,m}) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

(4.26) denklemindeki yer değiştirme gradyanlarının indislerini $u_{a,b}$ ve $u_{c,d}$ olacak şekilde değiştirmek için kronecker deltadan faydalanarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
t_{pr} = & -p\delta_{pr} + T_a a_p a_r + \alpha_5 a_p a_r + \alpha_2 \delta_{pr} \delta_{ab} u_{a,b} + \frac{1}{2} \alpha_4 (\delta_{pa} \delta_{rb} + \delta_{ra} \delta_{pb}) u_{a,b} \\
& + \frac{1}{2} \alpha_5 (a_p a_a \delta_{rb} + a_p a_b \delta_{ra} + \delta_{pa} a_b a_r + \delta_{pb} a_a a_r) u_{a,b} + \alpha_6 a_p a_r \delta_{ab} u_{a,b} \\
& + 3\alpha_3 \delta_{pr} \delta_{ab} \delta_{cd} u_{a,b} u_{c,d} + \left(\frac{1}{2} \alpha_2 - \frac{1}{4} \alpha_3 \right) (2\delta_{pr} \delta_{ad} \delta_{bc} + 2\delta_{pr} \delta_{ac} \delta_{bd}) u_{a,b} u_{c,d} \\
& + (\alpha_2 - \alpha_3) (\delta_{ab} \delta_{pc} \delta_{rd} + \delta_{ab} \delta_{rc} \delta_{pd}) u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{2} \alpha_4 (2\delta_{pa} \delta_{rc} \delta_{bd} + 2\delta_{pa} \delta_{bc} \delta_{rd} \\
& + 2\delta_{pb} \delta_{rc} \delta_{ad} + 2\delta_{pb} \delta_{ac} \delta_{rd}) u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{2} \alpha_5 (a_p a_c \delta_{ra} \delta_{bd} + a_p a_d \delta_{ra} \delta_{bc} + a_p a_c \delta_{rb} \delta_{ad} \\
& + a_p a_d \delta_{rb} \delta_{ac}) u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{2} \alpha_5 (a_r a_d \delta_{pa} \delta_{bc} + a_r a_c \delta_{pa} \delta_{bd} + a_r a_d \delta_{pb} \delta_{ac} + a_r a_c \delta_{pb} \delta_{ad}) \\
& u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{4} \alpha_6 (\delta_{pr} a_a a_d \delta_{bc} + \delta_{pr} a_a a_c \delta_{bd} + \delta_{pr} a_b a_d \delta_{ac} + \delta_{pr} a_b a_c \delta_{ad}) u_{a,b} u_{c,d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \alpha_6 (4a_p a_r \delta_{ad} \delta_{bc} + 4a_p a_r \delta_{ac} \delta_{bd}) u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{4} \alpha_6 (2a_d a_r \delta_{ab} \delta_{pc} + 2a_c a_r \delta_{ab} \delta_{pd}) \\
& u_{a,b} u_{c,d} + \frac{1}{4} \alpha_7 (4a_p a_r \delta_{ab} \delta_{cd} - 2a_p a_r \delta_{ad} \delta_{bc} - 2a_p a_r \delta_{ac} \delta_{bd}) u_{a,b} u_{c,d} \\
& \frac{1}{4} \alpha_8 a_p a_r (a_c a_b \delta_{ad} + a_d a_b \delta_{ac} + a_c a_a \delta_{bd} + a_d a_a \delta_{bc}) u_{a,b} u_{c,d}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

(4.27) denklemleri daha düzenli yazmak için yeniden λ_k ($k = 1, 2, \dots, 13$) şeklinde bir tanımlama yapılırsa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha_3 \\
\lambda_2 &= \alpha_2 \\
\lambda_3 &= \alpha_6 \\
\lambda_4 &= \frac{1}{2} \alpha_4 \\
\lambda_5 &= \frac{1}{2} \alpha_5 \\
\lambda_6 &= 3\alpha_3 \\
\lambda_7 &= \alpha_2 - \frac{1}{2} \alpha_3 \\
\lambda_8 &= \alpha_2 - \alpha_3 \\
\lambda_9 &= \alpha_4 \\
\lambda_{10} &= \frac{1}{4} \alpha_6 \\
\lambda_{11} &= \frac{1}{2} \alpha_6 \\
\lambda_{12} &= \frac{1}{2} \alpha_7 \\
\lambda_{13} &= \frac{1}{4} \alpha_8
\end{aligned} \tag{4.28}$$

(4.28) ifadesindeki katsayılar (4.27) ifadesinde yerine yazılır ve $u_{a,b}$ ve $u_{a,b} u_{c,d}$ parantezine alınır, gerilmenin uzaysal formu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
t_{pr} = & -p\delta_{pr} + T_a a_p a_r + \lambda_1 a_p a_r + [\lambda_2 \delta_{pr} \delta_{ab} + \lambda_5 a_p a_r \delta_{ab} + \lambda_4 (\delta_{pa} \delta_{rb} + \delta_{ra} \delta_{pb}) \\
& + \lambda_5 (a_p a_a \delta_{rb} + a_p a_b \delta_{ra} + \delta_{pa} a_b a_r + \delta_{pb} a_a a_r)] u_{a,b} + [\lambda_6 \delta_{pr} \delta_{ab} \delta_{cd} \\
& + \lambda_7 (\delta_{pr} \delta_{ad} \delta_{bc} + 2\delta_{pr} \delta_{ac} \delta_{bd}) + \lambda_8 (\delta_{ab} \delta_{pc} \delta_{rd} + \delta_{ab} \delta_{rc} \delta_{pd}) \\
& + \lambda_9 (2\delta_{pa} \delta_{rc} \delta_{bd} + 2\delta_{pa} \delta_{bc} \delta_{rd} + 2\delta_{pb} \delta_{rc} \delta_{ad} + 2\delta_{pb} \delta_{ac} \delta_{rd}) \\
& + \lambda_5 \{ a_p a_c (\delta_{ra} \delta_{bd} + \delta_{rb} \delta_{ad}) + a_p a_d (\delta_{ra} \delta_{bc} + \delta_{rb} \delta_{ac}) + (\delta_{pa} \delta_{bc} + \delta_{pb} \delta_{ac}) a_r a_d \\
& + (\delta_{pa} \delta_{bd} + \delta_{pb} \delta_{ad}) a_r a_c \} + \lambda_5 a_p a_r (\delta_{ad} \delta_{bc} + \delta_{ac} \delta_{bd}) + \lambda_{10} \delta_{pr} (a_a a_d \delta_{bc} + a_a a_c \delta_{bd} \\
& + a_b a_d \delta_{ac} + a_b a_c \delta_{ad}) + \lambda_{11} \delta_{ab} (a_p a_c \delta_{rd} + a_p a_d \delta_{rc} + a_d a_r \delta_{pc} + a_c a_r \delta_{pd}) \\
& + \lambda_{12} a_p a_r (2\delta_{ab} \delta_{cd} - \delta_{ad} \delta_{bc} - \delta_{ac} \delta_{bd}) + \lambda_{13} a_p a_r (a_c a_b \delta_{ad} + a_d a_b \delta_{ac} + a_c a_a \delta_{bd} \\
& + a_d a_a \delta_{bc})] u_{a,b} u_{c,d}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

(4.29) denklemi, mekanik bir yüklemeye maruz tek fiber aileli izotrop ortamda ortamın sıkışmaz, fiber ailesinin uzamaz ve mekanik etkileşimlerin nonlinear kabul edildiği durumda gerilmenin uzaysal koordinatlarda yer değiştirme gradyanına bağlı olarak verilen bünye denklemidir. (4.29) bünye denklemi fiber takviyesiz sıkışmaz bir ortam için 1, 4, 6, 8, 9, 10 ve 11. terimlerini ihtiva edecek şekilde indirgenebilir. 4, 5, 6, ve 7. terimler yer değiştirme gradyanının lineer etkisinden, 8 ile 17. terimler arasındaki bütün terimler yer değiştirme gradyanının nonlinear etkisinden kaynaklanır. Eğer yer değiştirme gradyanı lineer alınsaydı ikinci mertebeden terimler ihmal edilebilirdi. (4.29) denkleminde, nonlinear terimler atıldığında Usal (2001) ın elektrik alanının olmadığı ortam için elde edilen denklem ile örtüştüğü, fiber etkisi ihmal edildiğinde 1. ve 2. merteben yer değiştirme gradyanı cinsinden elde edilen denklem Şuhubi (1994) nin elde ettiği denklem ile örtüştüğü görülmektedir.

4.3 Hiperelastik Bir Malzemenin Analizi

Hiperelastisite, malzemelerin tamamen geri alınabilen sonlu elastik deformasyonları ile ilgili bir kavramdır. Kauçuk ve bir çok polimer malzeme bu kategoriye girer. Bu tip malzemeler için gerilme, gerinme enerjisi yoğunluğu fonksiyonu ile belirlenir. Ansys programı bu tip davranış sergileyen malzemeleri karakterize etmek için iki farklı model sunar. Bunlardan birincisi, sıkıştırılmaz malzemeler için kullanılan Mooney – Rivlin modelidir, ikincisi ise sıkıştırılabilir köpük ve köpük tipi malzemeler için kullanılan Blatz – Ko modelidir. Mooney – Rivlin modeli hemen hemen sıkıştırılmaz doğal kauçukların gerilme – gerinme davranışını temsil etmek için uygun bir modeldir. Malzemenin gerinme enerjisi yoğunluğu fonksiyonundaki hiperelastik sabitler malzemenin mekanik tepkisi olarak tanımlanır. Bu yüzden hiperelastik analiz esnasında doğru sonuçlar elde etmek için malzemenin Mooney – Rivlin sabitlerini iyi bir inceleme ile doğru şekilde belirlemek gerekir. Mooney – Rivlin sabitleri genellikle deneysel gerilme – gerinme bilgileri kullanılarak belirlenir.

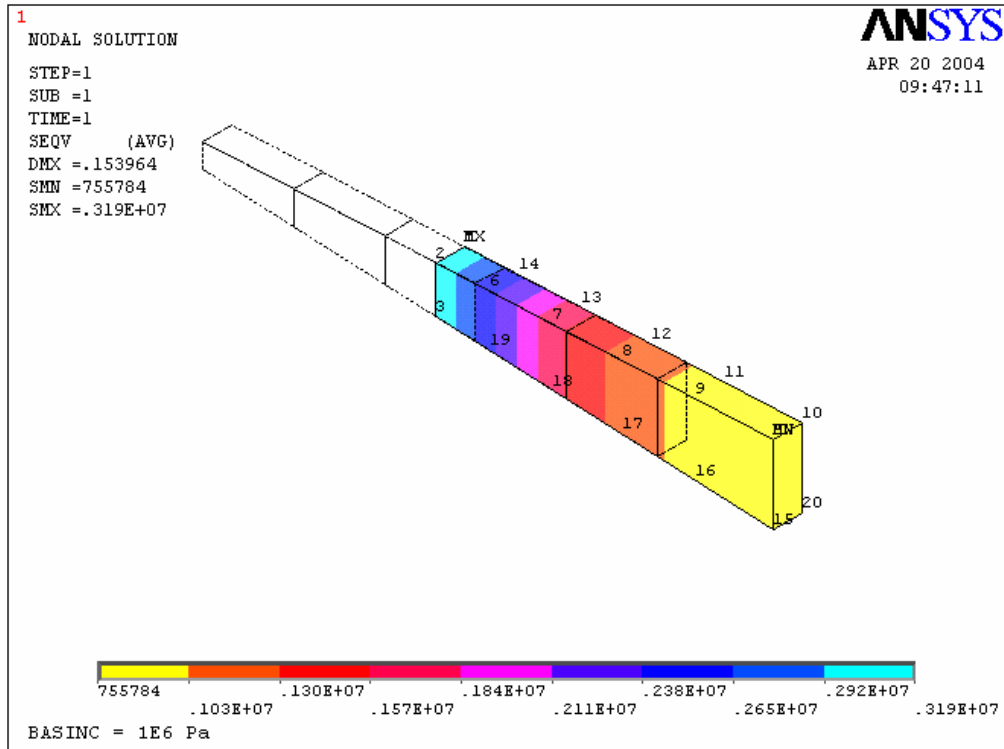


Şekil 4.1 Problemin ve kesit alınan geometri

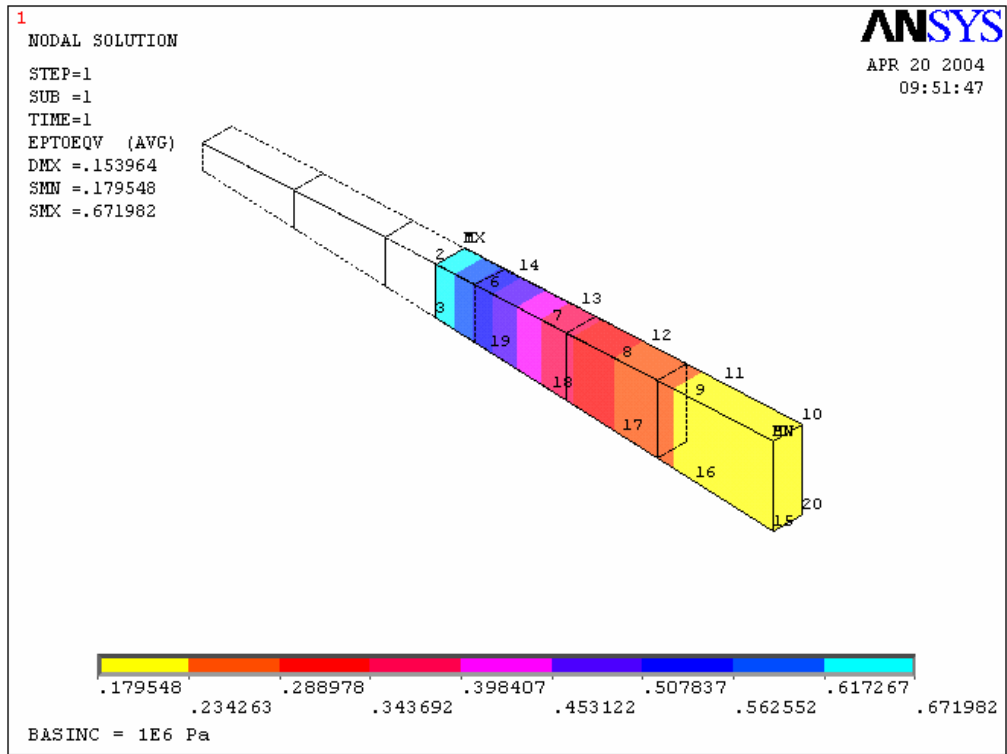
Bu çalışmada; malzeme sabitleri $C_1 = 550$ kPa ve $C_2 = 138$ kPa (Chang ve Pan, 2001) olan hiperelastik bir malzeme için Mooney – Rivlin modeli kullanılarak analiz yapılmıştır. Şekilde gösterildiği gibi içi boşaltılmış silindirik kauçuğun iç yüzeyine 1000 kPa basınç uygulanmıştır. Ele alınan izotropik malzeme için Poisson oranı 0.49 olarak alınmıştır. Silindirin iç çapı 17 cm, dış çapı ise 47 cm'dir.

İç basınç bütün yüzeye homojen dağıldığı ve aksisimetri şartından dolayı çözüm esnasında geometriyi tam olarak modellemeye ihtiyaç yoktur. Göz önüne alınan kesitte elde edilecek sonuçlar modelin tamamı için geçerlidir. Eleman tipi olarak; hem Mooney – Rivlin hem de Blatz – Ko tipi modellemeye uygun üç boyutlu HYPER86 eleman kullanılmıştır. Hiperelastik malzeme için analiz özelliklerinden büyük deformasyon etkileri aktif hale getirilir. Malzeme için seçilen Poisson oranı değeri girilir. Veri tablosundan hiperelastik malzemeye ait değerler girilir. Geometriyi oluşturmak için koordinat sistemi silindirik koordinatlara dönüştürülür.

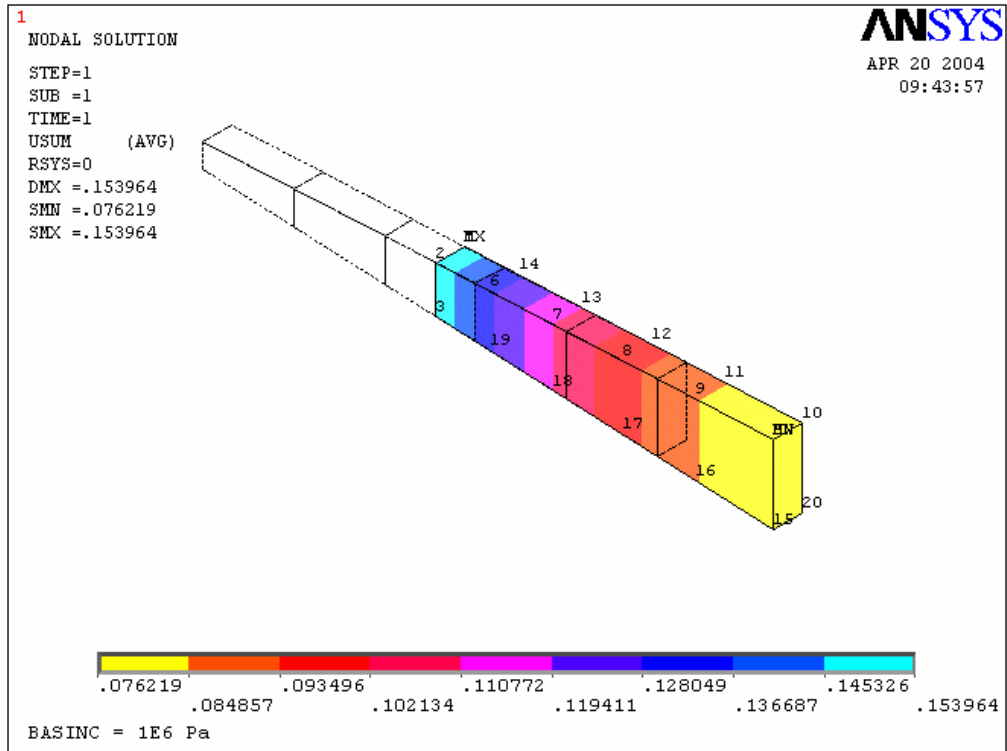
Şekil 4.1 da gösterilen geometriyi oluşturmak için, sol taraftaki keypointler oluşturulduktan sonra x eksenini boyunca 0.3 m ileriye kopyalanır. Bu keypointler kullanılarak hacim oluşturulur. Oluşturulan hacim sonlu elemanlar çözümü için alt elemanlara bölünür. Ele alınan parça silindirin bir kısmını temsil ettiğinden tüm düğüm noktaları y ve z ekseninde simetri şartını tanımlamak için mesnetlenir. Daha sonra şekil 4.1 da görülen elemanın sol yüzeyine 1000 kPa'lık basınç uygulanır.



Şekil 4.2 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki gerilmeler

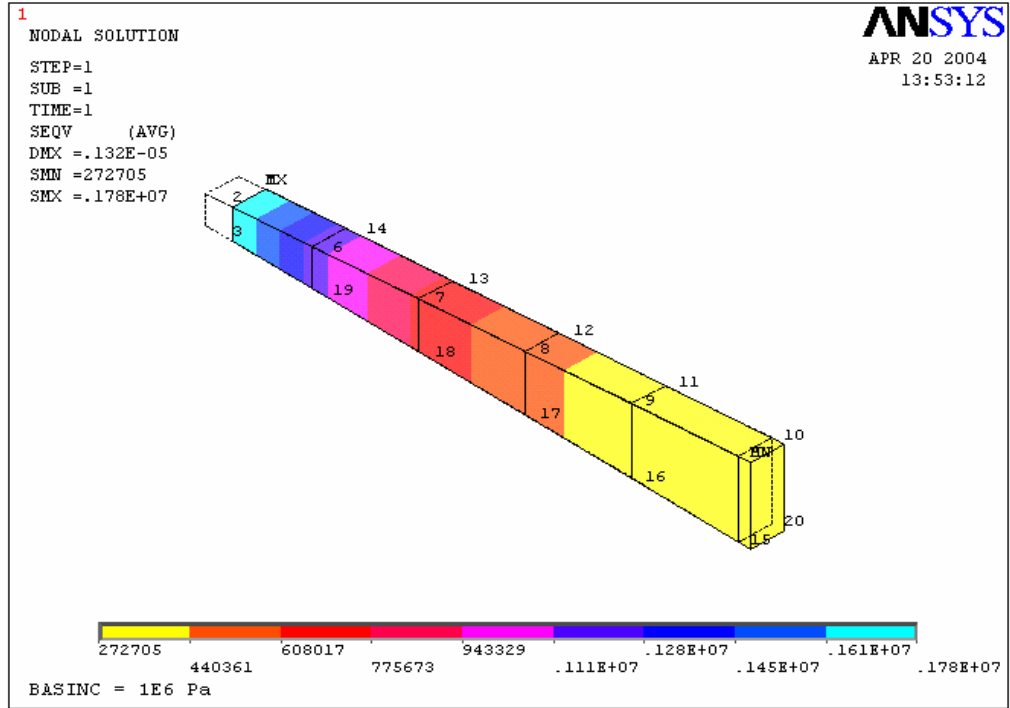


Şekil 4.3 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki gerinmeler

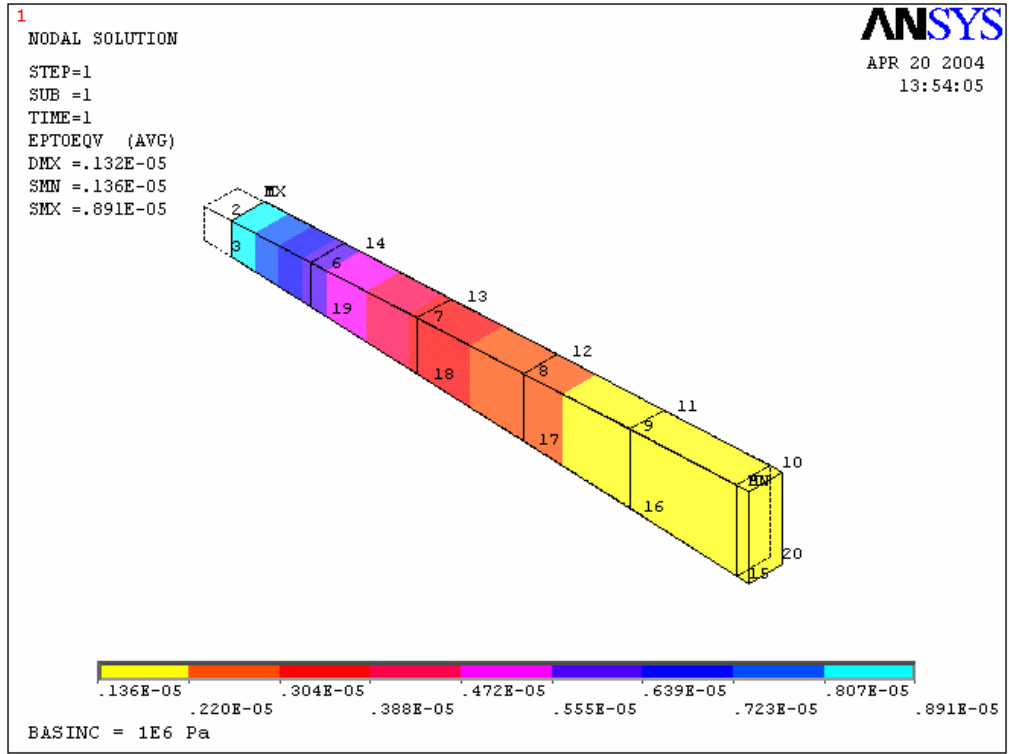


Şekil 4.4 Hiperelastik malzemenin düğüm noktalarındaki yer değıştirmeler

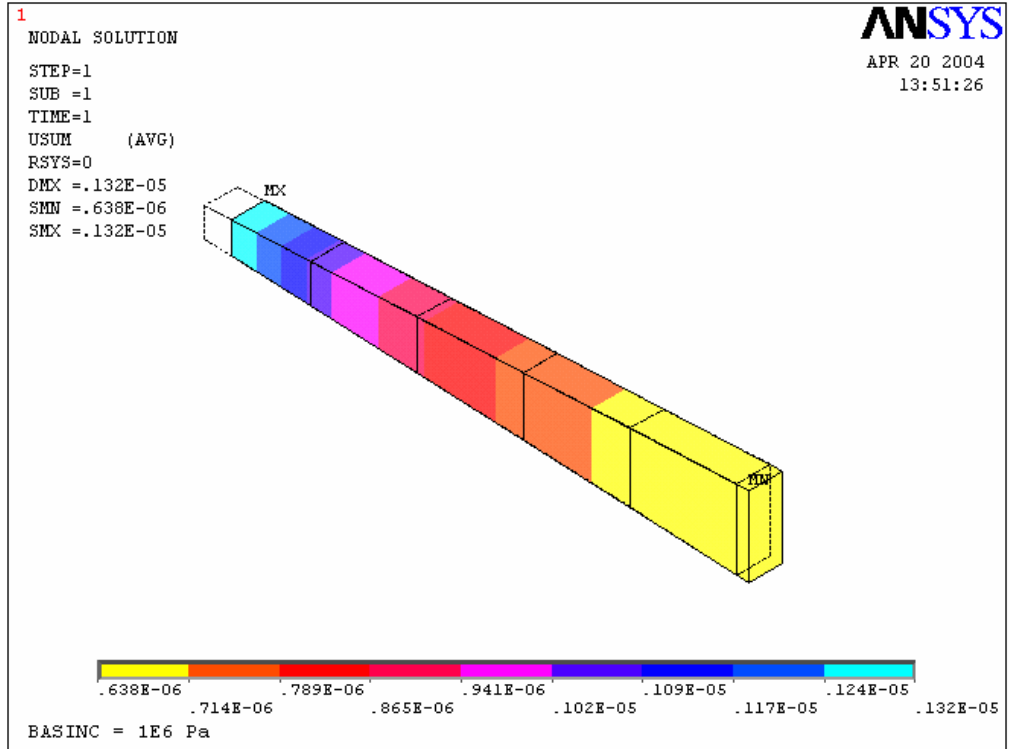
Problemde elde edilen sonuçları kıyaslamak açısından; aynı geometri ve sınır şartlarına sahip, elastisite modülü 200 GPa ve Poisson oranı 0.3 olan izotropik bir malzeme için yeni bir analiz daha yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.5 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki gerilme



Şekil 4.6 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki gerinmeler



Şekil 4.7 Çelik malzemenin düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler

Çizelge 4.1 Hiperelastik eleman tipinin kullanıldığı analizde elde edilen sonuçlar

ELEMAN NUMARASI	X Eksenindeki Yer değiştirme (m)	Y Eksenindeki Yer değiştirme (m)	Ortalama Gerilme (Pa)	Ortalama Gerinme	X Eksenindeki Kuvvet (N)	Y Eksenindeki Kuvvet (N)
1	0.14157	0.16243E-13	0.30144E+07	0.91253	576.21	0.17161E-09
2	0.12004	0.16462E-13	0.19492E+07	0.64604	0.42633E-13	-0.22737E-12
3	0.10356	0.96277E-16	0.13751E+07	0.47587	-0.11369E-12	0.56843E-13
4	0.90752E-01	-0.13553E-16	0.10242E+07	0.36228	0.71054E-14	0.85265E-13
5	0.80629E-01	0.15721E-17	0.79220E+06	0.28355	0.11191E-12	0.25580E-12

Çizelge 4.2 Çelik eleman tipinin kullanıldığı analizde elde edilen sonuçlar

ELEMAN NUMARASI	X Eksenindeki Yer değiştirme (m)	Y Eksenindeki Yer değiştirme (m)	Ortalama Gerilme (Pa)	Ortalama Gerinme	X Eksenindeki Kuvvet (N)	Y Eksenindeki Kuvvet (N)
1	0.11676E-05	0.12725E-18	0.14654E+07	0.95248E-05	304.00	0.28422E-12
2	0.93285E-06	0.12957E-18	0.85915E+06	0.55845E-05	-0.21316E-13	-0.28422E-13
3	0.79757E-06	0.13342E-20	0.56602E+06	0.36791E-05	-0.10658E-13	-0.15632E-12
4	0.71330E-06	-0.50789E-21	0.40244E+06	0.26159E-05	0.12434E-13	-0.42633E-13
5	0.65876E-06	0.12821E-21	0.30228E+06	0.19648E-05	0.44409E-14	0.28422E-13

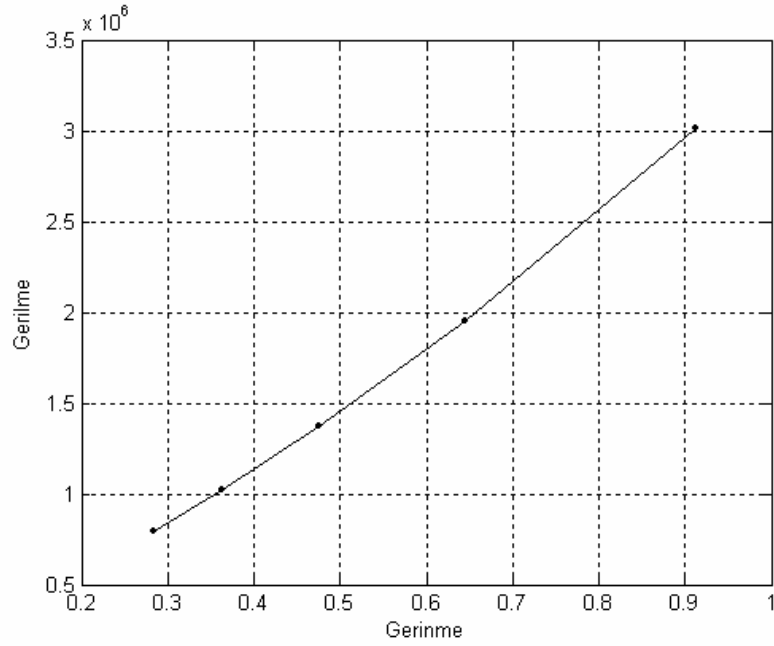
Çizelge 4.3 Hiperelastik eleman tipinde düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler

Düğüm Numarası	X Eksenindeki Yerdeğiştirmeler(m)	Y Eksenindeki Yerdeğiştirmeler(m)
1	0.15379	0.72373E-02
2	0.15379	0.72373E-02
3	0.15379	-0.72373E-02
4	0.15379	-0.72373E-02
5	0.76135E-01	0.35828E-02
6	0.12934	0.60868E-02
7	0.11074	0.52111E-02
8	0.96383E-01	0.45357E-02
9	0.85122E-01	0.40058E-02
10	0.76135E-01	0.35828E-02
11	0.85122E-01	0.40058E-02
12	0.96383E-01	0.45357E-02
13	0.11074	0.52111E-02
14	0.12934	0.60868E-02
15	0.76135E-01	-0.35828E-02
16	0.85122E-01	-0.40058E-02
17	0.96383E-01	-0.45357E-02
18	0.11074	-0.52111E-02
19	0.12934	-0.60868E-02
20	0.76135E-01	-0.35828E-02
21	0.85122E-01	-0.40058E-02
22	0.96383E-01	-0.45357E-02
23	0.11074	-0.52111E-02
24	0.12934	-0.60868E-02

Çizelge 4.4 Çelik eleman tipinde düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler

Düğüm Numarası	X Eksenindeki Yerdeğiştirmeler(m)	Y Eksenindeki Yerdeğiştirmeler(m)
1	0.13184E-05	0.62040E-07
2	0.13184E-05	0.62040E-07
3	0.13184E-05	-0.62040E-07
4	0.13184E-05	-0.62040E-07
5	0.63717E-06	0.29985E-07
6	0.10168E-05	0.47850E-07
7	0.84889E-06	0.39948E-07
8	0.74625E-06	0.35118E-07
9	0.68036E-06	0.32017E-07
10	0.63717E-06	0.29985E-07
11	0.68036E-06	0.32017E-07
12	0.74625E-06	0.35118E-07
13	0.84889E-06	0.39948E-07
14	0.10168E-05	0.47850E-07
15	0.63717E-06	-0.29985E-07
16	0.68036E-06	-0.32017E-07
17	0.74625E-06	-0.35118E-07
18	0.84889E-06	-0.39948E-07
19	0.10168E-05	-0.47850E-07
20	0.63717E-06	-0.29985E-07
21	0.68036E-06	-0.32017E-07
22	0.74625E-06	-0.35118E-07
23	0.84889E-06	-0.39948E-07
24	0.10168E-05	-0.47850E-07

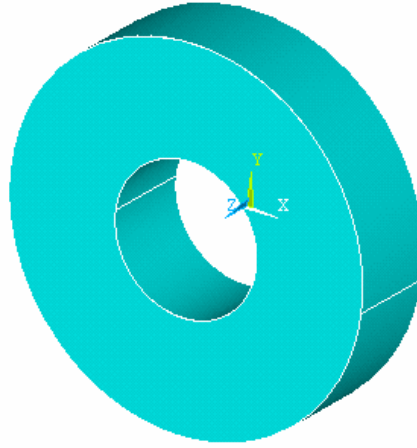
Sonuçlardan da görüldüğü gibi; hiperelastik ve çelik malzemeler için yer değiştirmeler ve gerilmeler kıyaslandığında, iki malzemenin gerilme değerleri arasındaki oran hiperelastik malzeme lehine 2 kat olurken, yer değiştirme oranları 100000 kat gibi oldukça büyük bir değere ulaşmaktadır. Yer değiştirmeler arasındaki bu büyük farkın sebebi; hiperelastik malzemelerin yüksek elastik şekil değiştirme kabiliyetine sahip olmasıdır.



Şekil 4.8 Hiperelastik malzemede gerilme – gerinme ilişkisi

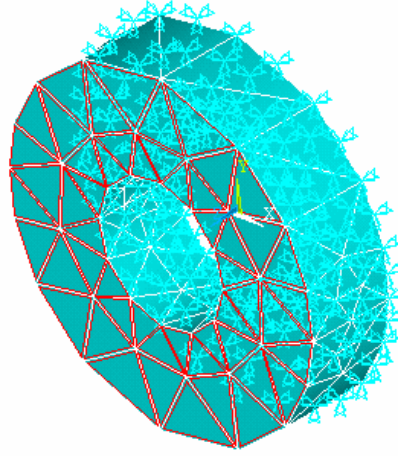
Basınç Altında Hiperelastik Bir Malzemenin Analizi

Bu çalışmada bir taraftan sabitlenmiş ve diğer taraftan basınç uygulanan içi boş bir silindiriğin analizi yapılmıştır. Malzeme sabitleri $C_1 = 550$ kPa ve $C_2 = 138$ kPa olan hiperelastik bir malzeme için Mooney – Rivlin modeli kullanılmıştır. Şekilde gösterildiği gibi içi boşaltılmış silindirik kauçuğun üst yüzeyine 1000 kPa basınç uygulanmış ve diğer yüzey ise sabitlenmiştir. Ele alınan izotropik malzeme için Poisson oranı 0.49 olarak alınmıştır. Silindirin iç çapı 4 cm, dış çapı 10 cm ve derinlik ise 5cm'dir.



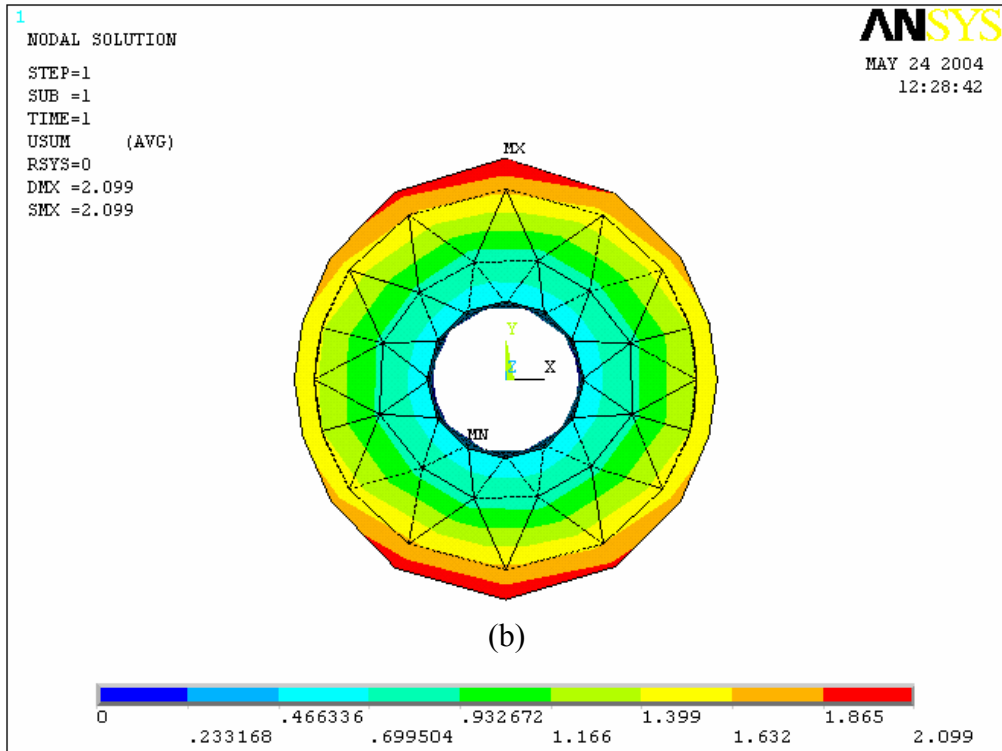
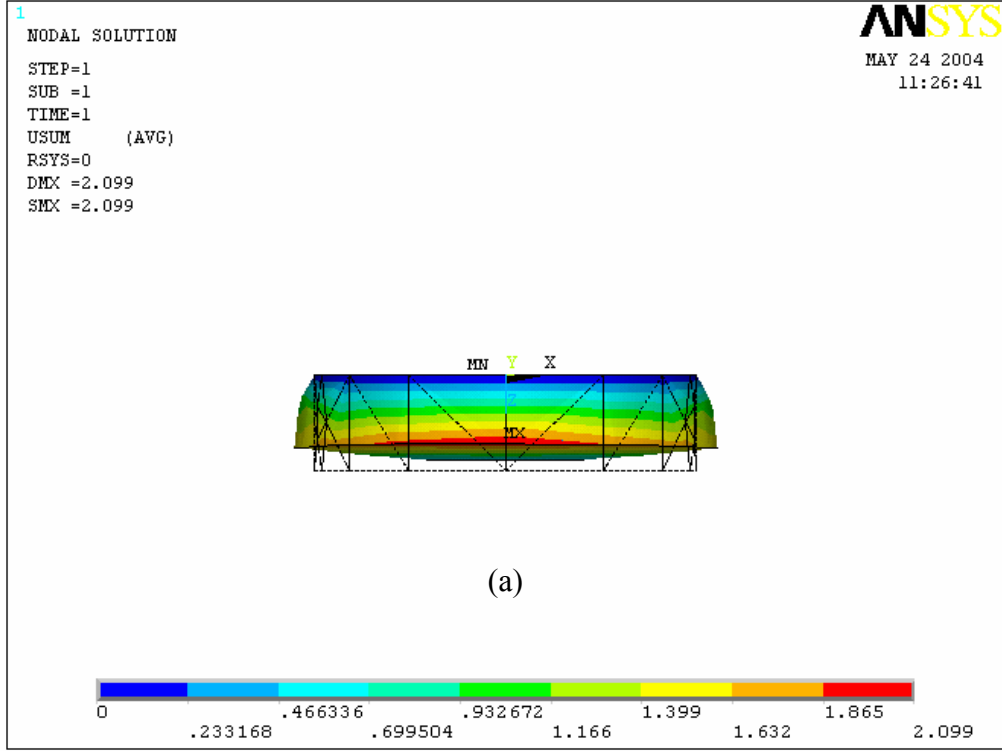
Şekil 4.9 Problemin geometrisi

Eleman tipi olarak; Mooney – Rivlin tipi modellemeye uygun üç boyutlu HYPER158 eleman kullanılmıştır. Hiperelastik malzeme için analiz özelliklerinden büyük deformasyon etkileri aktif hale getirilir. Malzeme için seçilen Poisson oranı değeri girilir. Veri tablosundan Mooney – Rivlin sabitleri girilir.

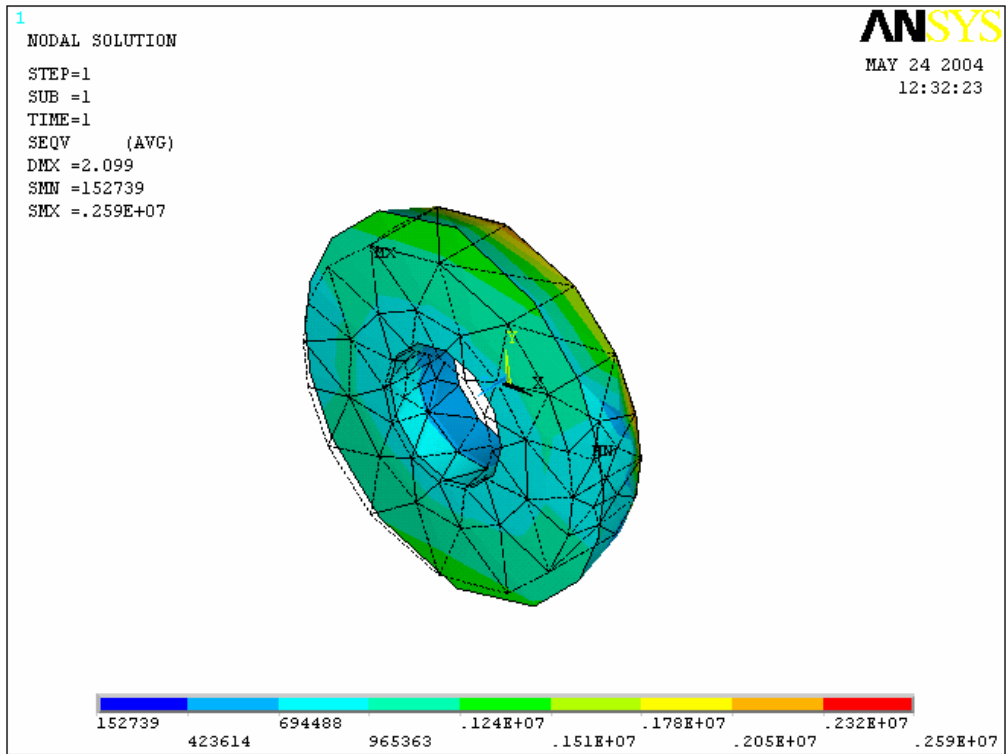


Şekil 4.10 Yüklerin uygulanmış hali

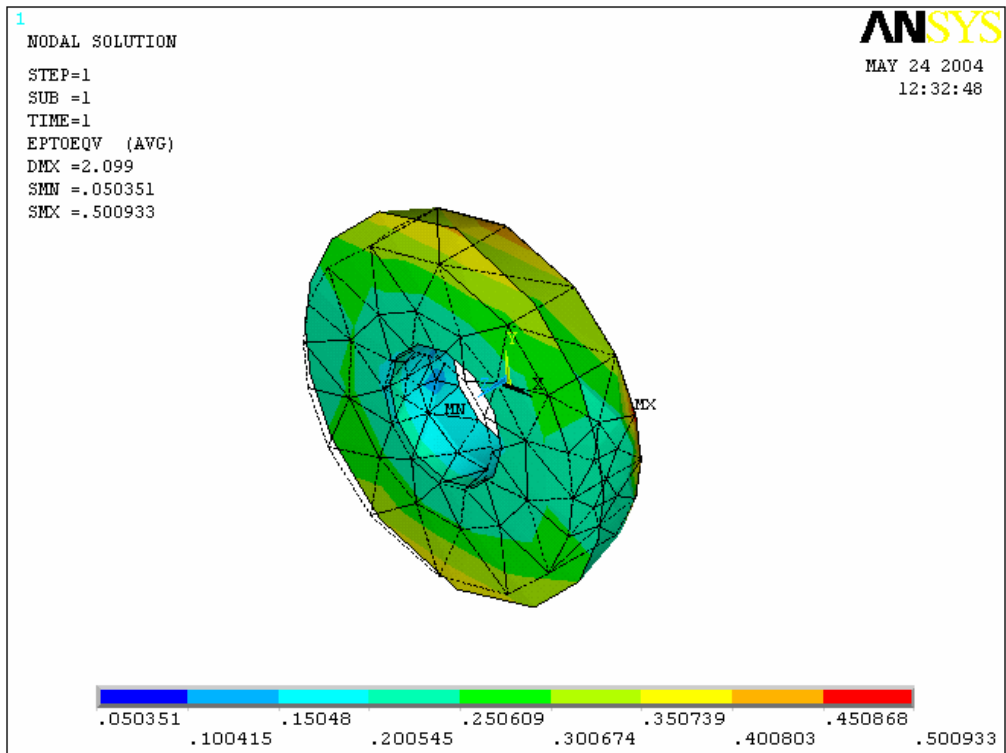
Hollow Cylinder komutu kullanılarak belirtilen ölçülerde içi boş silindir oluşturulur. Oluşturulan hacim Sonlu Elamanlar metodu ile çözüm için elemanlara bölünür. Daha sonra şekil 4.10 da görülen elemanın üst yüzeyine 1000 kPa'lık basınç uygulanır ve diğer yüzey ise sabitlenir. Malzeme hiperelastik olduğu için çözüm özelliklerinden büyük deformasyon etkileri açılır. Problem çözdürüldükten sonra aşağıdaki sonuçlar elde edilir.



Şekil 4.11 Yer değiştirmelerin (a) yandan görü nü, (b) alttan görü nü



Şekil 4.12 Ortalama gerilmeler



Şekil 4.13 Ortalama gerinme

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada, mekanik yüklemeye maruz tek fiber aileli hiperelastik – izotrop bir ortamın nonlinear davranışını modellemek için modern sürekli ortamlar mekaniği kapsamında bir yol izlenmiştir. Bu modellemeyi gerçekleştirirken genel termodinamik balans denklemleri, Clausius – Duhem eşitsizliği, bünye teorisi aksiyomlarına ilişkin kavramlar, bünye denklemlerinin bulunması ve argümanların somut olarak tayini için invaryantlar teorisine ait bulgular, ele alınan malzemenin nonlinear davranışının modellenmesinin teorik temellerini oluşturulmuştur.

Termodinamiğin 1. ve 2. kanunlarının birleştirilmesinden elde edilen Clausius – Duhem eşitsizliği temel başlangıç noktası olarak dikkate alınmaktadır. Bu eşitsizlikte; entropi yoğunluğunun, iç enerjinin ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç enerji ve entropi değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından, (3.2) ifadesinde verildiği tarzda bir Legendre transformasyonu uygulanarak, zamanla değişen terimler iç enerji ve entropi yerine serbest enerji ve sıcaklık cinsinden yazılmıştır.

Clausius – Duhem eşitsizliğinin kullanılabilir hale getirilebilmesi için serbest enerjinin zamana göre maddesel türevinin hesaplanıp yerine konulması gerekir. Ancak bu işlem Σ nın hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunu tespit etmeden önce yapılamaz. Kozalite, determinizm, eşbulma, uygunluk, objektivite, maddesel simetri ve yöresellik aksiyomları kullanılarak Σ nın genelde hangi argümanlara bağlı olması gerektiği (3.39) denkleminde verilmiştir. Malzemenin homojen olduğu kabul edilerek (3.40) ifadesiyle verilen Σ nın argümanlarından X kaldırılır ve bu durumda Σ nın bağlı olduğu argümanlar Green deformasyon tansörü C_{KL} , deformasyondan önce fiber vektör alanının X noktasındaki değeri A_K ve sıcaklık θ_0 şeklindedir. Σ nın bünye aksiyomlarına uygun haliyle, sonunda kimlere bağlı olduğu açıkça belirlendikten sonra, zamana göre maddesel türevler alınır. Hiperelastik bir malzemenin gerilme durumunu incelerken sıcaklık sabit olacağı için sıcaklığa bağlı ifadelerin ve sıcaklık gradyanının maddesel türevi sıfır olur. Gerilmenin, C

deformasyon tansörüne ve A fiber vektörüne bağlı olan Σ dan türetildiği görülmektedir. Uygulamalarda makul kabul gören, ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edildiğinde gerilme tansörünün bünye denklemleri maddesel koordinatlarda (3.56) denklemiyle ve uzaysal uzaysal koordinatlarda (3.55) denklemiyle verilmiştir.

Matris malzeme izotrop alınarak Σ üzerindeki bağlayıcı etkenlerden kaynaklanan sonuçlar açıkça ortaya konmakta ve serbest enerji ifadesine son şekli verilerek, fiber takviyeli hiperelastik izotrop ortamlar için matematiksel bir bünye modeli oluşturulmaktadır. Bunun için Cebrik İnvaryantlar Teorisine göre, Σ gerilme potansiyeli C, A ve bunların müşterek invaryantları olan ve (3.60) ifadesiyle verilen 6 adet bağımsız invaryantlara bağlıdır. Bu invaryantlardan ilk üçünün yerine (3.62) ifadesi ile verilen asal invaryantlar kullanılmıştır. Ancak ortam sıkışmaz ve fiber ailesi uzamaz kabul edildiğinden III, I_4 ve I_5 invaryantlarının 1'e eşit olduğu görülür ve bu invaryantlar Σ nın bağlı olduğu invaryantlar listesinden çıkarılır. Σ nın C tansörüne göre türevi alınıp (3.66) denklemde yerine yazılarak, göz önüne alınan ortamda gerilmenin nonlinear bünye denklemi maddesel koordinatlarda bileşenleri cinsinden (3.69) ve matris formunda (3.70) elde edilmiştir.

Σ bağlı olduğu invaryantların analitik bir fonksiyonu olduğunu düşünülerek, Σ ikinci dereceden bir polinom açılımı ile temsil edilmiştir. (3.69) denklemlerinde bulunan Σ invaryantlarına göre türevleri bu açılımdan hesaplanarak, kısmi türevlerde yer alan Green deformasyon tansörüne bağlı invaryantlar ve (3.69) ifadesindeki Green deformasyon tansörüne bağlı terimler genleme tansörü E cinsinden ifade edilmiştir. Bu çalışmada mekanik etkileşimler nonlinear kabul edildiğinden E tansörünün ikinci dereceden terimleri dikkate alınmıştır. Diğer taraftan malzeme fiber boyunca yön değişimine duyarsız kalacağından matematiksel olarak $A \rightarrow -A$ değişiminden etkilenmeyeceği için A vektörünün bileşenlerinin dış çarpımda çift sayıda olanlar alınmıştır. Bu ifadeler (4.5) denklemde yerlerine yazılarak ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği, tek fiber aileli hiperelastik izotrop ortamda mekanik etkileşimlerin nonlinear kabul edildiği durumda gerilmenin bünye denklemi maddesel formda (4.14) ifadesinde elde edilmiştir. gerilme bünye denklemi (4.20)

ifadesinde uzaysal formda Finger ve Genleme deformasyon tansörleri cinsinden elde edilmiştir. Daha sonra (4.29) denklemiyle yer değiştirme gradyanına bağlı olarak gerilmenin nonlinear bünye denklemi uzaysal formda verilmiştir. Bu denklemde, nonlinear terimler atıldığında Usal (2001) ın elektrik alanının olmadığı ortam için elde edilen denklem ile örtüştüğü, fiber etkisi ihmal edildiğinde 1. ve 2. merteben yer değiştirme gradyanı cinsinden elde edilen denklem Şuhubi (1994) nin elde ettiği denklem ile örtüştüğü görülmektedir.

Bulguların sonunda ise hiperelastik bir malzemede dış kuvvetlerin etkisi altında oluşan deformasyonlar Sonlu Elemanlar Metodu kullanılarak gösterilmiştir. Farklı bir malzeme ile karşılaştırılarak hiperelastik malzemenin gösterdiği sonuçlar verilmiştir.

Bu çalışmanın devamında, ortamı iki fiber aileli düşünerek farklı bir matematiksel modelleme yapılabilir. Ayrıca hiperelastik ve dielektrik özellikli bir ortamın nonlinear elektromekanik davranışını belirleyen bünye denklemi ortaya konabilir.

6. KAYNAKLAR

- Adkins, J.E., (1959). Further Symmetry Relations for Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal., 4.
- Adkins, J.E., (1960). Symmetry Relations for Orthotropic and Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal., 5, 263 – 274.
- Adkins, J.E., (1962). Syzgies Relating the Invariants for Transversely Isotropic Materials, Arch. Rational Mech. Anal., 9.
- Attard, M.M. (2003). Finite Strain – Isotropic Hyperelasticity, International Journal of Solids and Structures 40 , 4353 – 4378.
- Barenblatt, G.I., Joseph, D.D., (1976). Collected Papers of R. S. Rivlin, Volume I and II, Springer – Verlag, New York, 2828p.
- Bonet, J., Burton, J.A., (1998). A Simple Orthotropic, Transversely Isotropic Hyperelastic Constitutive Equation for Large Strain Computations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 162, 151 – 164.
- Chandrasekhariah, D.S., Debnath, L., (1994). Continuum Mechanics, Academic Press, Boston, 595 p.
- Chang, W.j., Pan, J., (2001). Cavitation instability in rubber with consideration of failure, Journal of Materials Science 36, 1901 – 1909.
- Criscione, C.J., Humphrey, D.J., Douglas, S.A., Hunter, C.W., (2000). An Invariant Basis for Natural Strain Which Yields Orthogonal Stress Response Terms in Isotropic Hyperelasticity, Journal of The mechanics of Solids 48, 2445 – 2465.
- Dawson, T.H., (1976). Theory and Practice of Solid Mechanics, Plenum Press, New York and London, 281p.
- Diani, J., Brieu, M., Vacherand, M.J., Rezugui, A., (2004). Directional Model for Isotropic and Anisotropic Hyperelastic Rubber – Like Materials, Mechanics of Materials 36, 313 – 321.
- Dluzewski, P., (2000). Anisotropic Hyperelasticity Based Upon General Strain Measures, Journal of Elasticity 6, 119 – 129.
- Eringen, A.C., (1967). Mechanics of Continua, John Wiley and Sons. Inc, New York, 502 p.
- Eringen, A.C., (1980). Mechanics of Continua, Robert E. Krieger Pub. Co., Huntington, New York, 590 p.

- Frost, S.R., (1990). An Approximate Theory for Predicting the Moduli of Uni-Directional Laminates with Non-linear Stress/Strain Behaviour, *J. Composite Materials*, 24, 269 – 292.
- Gadala, M.S., (1997). Recent Advances in the Numerical Modeling of Constitutive Relations, *Finite Elements in Analysis and Design* 24, 171 – 185.
- Holzapfel, A.G., (2000). *Nonlinear Solid Mechanics*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 455p.
- Jaunzemis, W., (1967). *Continuum Mechanics*, The Macmillan Company, New York, 602 p.
- Kabul, A., (2004). *Sürekli Ortamlar Mekaniğine Giriş*, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri, 40 s, Isparta.
- Malvern, L.E., (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, New Jersey, 713 p.
- Öntürk, N., (1993). İki Fiber Ailesi ile takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerin Modellenmesi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi – Fen Bilimleri Enstitüsü, 179 s, Ankara.
- Park, H.C. ve Youn, S.K., (1998). Finite Element Analysis and Constitutive of Anisotropic Nonlinear Hyperelastic Bodies with Convected Frames, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 151, 605-618.
- Rivlin, R.S., Ericksen, J.L., (1955). Stress – Deformation Relations for Isotropic Materials, *Mechanics Division, Naval Research Laboratory, Washington, D.C.*, 323 – 424.
- Smith, G.F., (1962). Further Results on the Strain Energy Function for Anisotropic Elastic Materials, *Arch. Rat. Mech. Anal*, 10, 108 – 118.
- Smith, G.F., (1964). On Isotropic Integrity Bases, *Arch. Rat. Mech. Anal*, 17, 282 – 292.
- Spencer, A.J.M., Rivlin, R.S., (1959). Further Results in the Theory Matrix Polynomials, *Arch. Rational Mech. Anal*, 4, 214 – 230.
- Spencer, A.J.M., Rivlin, R.S., (1961). Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second Order Tensors: *Arch. Rational Mech. Anal*, 9, 45 – 65.

- Spencer, A.J.M., (1960). The Invariants of six Symmetric 3x3 Matrices, Arch. Rational Mech. Anal, 7, 309 – 336.
- Spencer, A.J.M., (1964). Isotropic Integrity Bases for Vectors and Second Order Tensors: Part II, Arch. Rational Mech. Anal, 18, 51 – 82.
- Spencer, A.J.M., (1971). Theory of Invariants in Continuum Physics, Vol. 1, Ed. A.C. Eringen, Academic Press, New York, 115 p.
- Spencer, A.J.M., (1972). Deformation of Fibre-Reinforced Materials, Clarendon Press, Oxford, 127p.
- Spencer, A.J.M., (1980). Continuum Mechanics, Longman Inc, 182 p.
- Spencer, A.J.M., (1984). Continuum Theory of the Mechanics of Fibre-Reinforced Composites, Springer Verlag, New York, 284 p.
- Şuhubi, S.E., (1994). Sürekli Ortamlar Mekaniği – Giriş, İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, 243 s.
- Şahin, Y., (2000). Kompozit Malzemelere Giriş, Gazi Üniversitesi, 327s.
- Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., (1970). Theory of Elasticity, Mcgraw Hill, 567p.
- Usal M.R., (1993). Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro – Termomekanik Davranışına ait Matematiksel bir Model, Erciyes Üniversitesi – Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 108 s, Kayseri.
- Usal M., (2001). Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı için Matematiksel Modelleme, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 232 s, Isparta.
- Wineman, A.S., Pipkin, A.C., (1964). Material Symmetry Restrictions on Constitutive Equations, Arch. Rational Mech. Anal, 17, 184 – 214.
- Zheng, Q. S., (1933 – a). On Transversely Isotropic, Orthotropic and Relative Isotropic Functions of Symmetric Tensors, Skew – Symmetric Tensors and Vectors. Part I: Two Dimensional Orthotropic and Relative Isotropic Functions and Three Dimensional Relative Isotropic Functions, Int. J. Engng Sci., 31, 1399 – 1409.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ahmet KABUL

Doğum Yeri : Isparta

Doğum Yılı : 1975

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise	1993-1994	Isparta ŞAİK Lisesi
Ön Lisans	1994-1996	Süleyman Demirel Üniversitesi
Lisans	1997-2001	Süleyman Demirel Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi:

2002-..... Araştırma Görevlisi (Süleyman Demirel Üniversitesi)