T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL LİMİT VE YIĞILMA NOKTALARI

SALİH AYTAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2005

BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL LİMİT VE YIĞILMA NOKTALARI

Salih AYTAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jurimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:	Prof. Dr. Öner ÇAKAR
Üye	:	Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN (Danışman)
Üye	:	Prof. Dr. Ali KÖKÇE
Üye	:	Doç. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

ONAY

Bu tez 30 /09/ 2005 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki juri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

27 / 10 /2005

S.D.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Prof.Dr. Çiğdem SAVAŞKAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(Bulanık Sayı Dizilerinin İstatistiksel Limit ve Yığılma Noktaları)

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti verilerek çalışmanın amacı ve literatürdeki yeri açıklanmıştır.

İkinci bölümde, bulanık kümeler teorisi ile istatistiksel yakınsaklık teorisindeki bazı tanımlamalara, notasyonlara ve sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca bulanık sayı dizileri için istatistiksel sınırlılık kavramı tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, bir bulanık sayı dizisi için istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktası kavramları tanımlanarak, bu kavramlar ile klasik limit noktası kavramı arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca istatistiksel sınırlı bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesinin boş olabileceği gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, istatistiksel sınırlı bir bulanık sayı dizisi için istatistiksel limit infimum ve supremum kavramları tanımlanarak bunlarla ilgili temel sonuçlara yer verilmiştir. Bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit infimumu ve supremumu birbirine eşit olduğu halde dizinin istatistiksel yakınsak olmayabileceği gösterilerek, böyle bir durumda dizinin istatistiksel yakınsak olabilmesi için dizi üzerine konulacak bir koşul verilmiştir.

Son bölümün ilk kısmında, bulanık sayı dizileri için klasik limit infimum ve supremum kavramları tanımlanmıştır. İkinci kısımda ise bir bulanık sayı dizisinin çekirdeği kavramı tanımlanarak, çekirdek ile alt ve üst limitlerin ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca sınırlı bir bulanık sayı dizisinin çekirdeğinin tek nokta kümesi olmasının dizinin yakınsaklığını gerektirmediği gösterilerek, dizinin yakınsak olabilmesi için dizi üzerine konulacak bir koşul verilmiştir. Son kısımda ise istatistiksel çekirdek kavramı tanımlanıp, klasik çekirdek ile ilişkisi ortaya konulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel yığılma noktası, istatistiksel limit noktası, istatistiksel limit infimum ve istatistiksel limit supremum, çekirdek, istatistiksel çekirdek, bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, bulanık sayı dizilerinin limit infimum ve limit supremumu.

ABSTRACT

(Statistical Limit and Cluster Points of Sequences of Fuzzy Numbers)

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, a brief overview of the literature is given and the goal of the work and its importance in the literature are emphasized.

In the second chapter, certain definitions, notations and results related both to the theories of fuzzy sets and statistical convergence are recalled. Furthermore, the concept of statistical boundedness for sequences of fuzzy numbers is introduced.

In the third chapter, we define the statistical limit and statistical cluster points of a sequence of fuzzy numbers and investigate the relations between these concepts and the notion of ordinary limit point. Moreover, it is shown that the set of statistical cluster points of a statistically bounded sequence of fuzzy numbers could be empty.

In the fourth chapter, the notions of statistical limit infimum and supremum for a statistically bounded sequence of fuzzy numbers are introduced and some main results associated with these notions are given. Even though the statistical limit infimum and supremum of a sequence of fuzzy numbers are equal, it is shown that the sequence may not be statistically convergent. In such a case, a condition for this sequence to be statistically convergent is given.

In the first section of the final chapter, the notions of ordinary limit infimum and supremum for sequences of fuzzy numbers are introduced. In the second section the core of a sequence of fuzzy numbers is defined and the relations between the core and lower-upper limits are examined. In addition, it is shown that if the core of a bounded sequence of fuzzy numbers is a singleton, then this does not imply the convergence of the sequence. Hence, a condition for this sequence to be convergent is given. In the last section the concept of statistical core is introduced and its relationship with the classical core is investigated.

KEY WORDS: Density, statistical convergence, statistical boundedness, statistical cluster point, statistical limit point, statistical limit infimum and statistical limit supremum, core, statistical core, statistical convergence of sequences of fuzzy numbers, limit infimum and limit supremum of sequences of fuzzy numbers.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, ayrıca diğer üniversitelerdeki uzman bilim adamlarıyla iletişim kurma hususunda beni cesaretlendiren danışman hocam Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN'a, çalışmanın dördüncü bölümü hazırlanırken bazı problemleri tartıştığımız Prof. Dr. Musa MAMEDOV (Ballarat Üniversitesi, Avusturalya)'a, çalışmamın her döneminde manevi desteklerini devamlı hissettiğim eşime ve aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bulanık kümeler teorisini öğrenmeye başlarken büyük katkılarını gördüğüm merhum Prof. Dr. Doğan ÇOKER (Akdeniz Üniversitesi)'i saygıyla anıyorum.

Bu tez, SDÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi'nin 828-D-04 nolu projesi kapsamında gerçekleştirilmiştir. Maddi desteklerinden dolayı SDÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi'ne teşekkür ederim.

Salih AYTAR

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	:	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$	:	Bulanık sayılar kümesi
$x = (x_n)$	:	Reel sayıların bir dizisi
$X = \{X_k\}$	:	Bulanık sayıların bir dizisi
μ, ν, γ	:	Bulanık sayılar
a_1	:	$a \in \mathbb{R}$ reel sayısının karakteristik fonksiyonu
A^c	:	A kümesinin tümleyeni
$\delta(A)$	:	A kümesinin doğal yoğunluğu
$\overline{\delta}(A)$	:	A kümesinin üst yoğunluğu
Γ_X	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
L_X	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin limit noktalarının kümesi
Λ_X	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
$\lim X$	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin limiti
$C\left(L(\mathbb{R})\right)$	:	Bulanık sayıların tüm yakınsak dizilerinin kümesi
$SC\left(L(\mathbb{R})\right)$	:	Bulanık sayıların tüm istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesi
$B\left(L(\mathbb{R})\right)$	:	Bulanık sayıların tüm sınırlı dizilerinin kümesi
$SB\left(L(\mathbb{R})\right)$	:	Bulanık sayıların tüm istatistiksel sınırlı dizilerinin kümesi
$\mu^\alpha = [\underline{\mu}^\alpha, \overline{\mu}^\alpha]$	:	μ bulanık sayısının α-kesmesi
$\mu \preceq \nu$	:	$\forall\alpha \in [0,1]$ için $\overline{\mu}^\alpha \leq \overline{\nu}^\alpha$ ve $\underline{\mu}^\alpha \leq \underline{\nu}^\alpha$
$\mu \prec \nu$	:	$\mu \preceq \nu$ ve $\exists\alpha \in [0,1]$ öyle ki $\overline{\mu}^\alpha < \overline{\nu}^\alpha$ veya $\underline{\mu}^\alpha < \underline{\nu}^\alpha$
$\mu \nsim \nu$	:	μ ve ν karşılaştırılamaz, yani ne $\mu \preceq \nu$ ne de $\mu \succeq \nu$ geçerlidir
$st - \lim X$	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin istatistiksel limiti
$st - \limsup X$	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin istatistiksel limit supremumu
$st - \liminf X$	:	$X = \{X_k\}$ dizisinin istatistiksel limit infimumu
$[\mu, \nu]$	:	Bulanık sayıların kapalı aralığı
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$	:	$\mathbb{N}$ nin altkümelerinin kümesi
$\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$	:	$\mathbb{N}$ nin sonlu elemana sahip tüm altkümelerinin kümesi
$\mathcal{P}_I(\mathbb{N})$	:	$\mathbb{N}$ nin sonsuz elemana sahip tüm altkümelerinin kümesi
$\mathcal{P}_\triangle(\mathbb{N})$	:	$= \{A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mathbb{N}\backslash A$ sonlu sayıda elemana sahip$\}$
$\liminf X$	:	$= \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} X_n$
$\mathrm{Lim\ inf}\, X$	:	$= \inf\{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})\}$
$coreX$	:	X bulanık sayı dizisinin çekirdeği
$st - coreX$	:	X bulanık sayı dizisinin istatistiksel çekirdeği

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Klasik yakınsaklığın bir genellemesi olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak 1951 yılında Steinhaus (1951) tarafından Polonya'da Wroclaw Üniversitesi'nde düzenlenen bir konferansta tanıtılmış ve yine aynı yılda Fast (1951) tarafından geliştirilmiştir. Bu kavramın toplanabilme teorisi ile ilişkisini ilk olarak Schoenberg (1959) incelemiştir. Yaklaşık 20 yıllık bir duraklama sürecinden sonra Salat (1980) ve Fridy (1985)'nin çalışmalarıyla bu teorinin önemi anlaşılmaya başlamış ve sonrasında birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir. 80'li yılların sonlarında hızlı bir ivme kazanan istatistiksel yakınsaklığın; Connor (1988;1989) ve Kline (1995) fonksiyonel analizle, Erdös ve Tenenbaum (1989) sayılar teorisiyle, Miller ve Orhan (2001) ölçü teorisiyle, Pehlivan ve Mamedov (2000^1;2000^2) optimizasyon teorisiyle, Duman ve Orhan (2004) fonksiyon dizileriyle, Pehlivan ve Karaev (2004) Abel yakınsaklıkla ilişkisini ortaya koymuştur.

1995 de Nuray ve Savaş'ın, istatistiksel yakınsaklık teorisinin bulanık sayı dizilerine uygulanabileceğini göstermesiyle bu teorinin yeni bir dalı ortaya çıkmıştır. Reel sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı üzerine yapılan çalışmalar Nuray (1998), Kwon (2000;2001) ve Savaş (2000) tarafından bulanık sayı dizilerine genişletilmiştir.

Reel sayılar kümesi bulanık sayılar kümesi içine gömülebileceğinden bulanık sayı dizileri için verilen bütün sonuçlar, karakteristik fonksiyonların göz önüne alınmasıyla reel sayı dizileri için de sağlanacaktır. Bulanık sayılar kümesi reel sayıları içine alan bir küme olmanın yanı sıra kısmi sıralı olan ve grup yapısı oluşturmayan bir kümedir. Bu nedenle reel sayılarda sıralama ve grup özelliği kullanılarak elde edilen veya edilecek sonuçların bulanık sayı dizilerine genişletilmesi basit bir genelleştirme olarak düşünülmemelidir. Çalışmamızdan da görüleceği üzere verdiğimiz özgün sonuçlar ve ispat teknikleri üçüncü bölümün ilk birkaç teoremi hariç reel dizilerin istatistiksel yakınsaklığı teorisinden farklıdır.

Bu çalışmada reel sayıların istatistiksel yakınsaklığına dair bazı özelliklerin, kısmi sıralı olan ve grup yapısı oluşturmayan bulanık sayılar kümesi üzerinde nasıl değişebileceği gözlemlendi ve bu özelliklerin invaryant olabilmesi için bulanık sayı dizileri üzerine hangi koşulların konulabileceği tartışıldı. Ayrıca bu çalışma ile, bulanık sayıların istatistiksel yakınsaklığı teorisine; istatistiksel yığılma noktaları, istatistiksel limit infimum, istatistiksel limit supremum ve istatistiksel çekirdek gibi kavramları kazandırmayı amaçlamaktayız.

Klasik teorideki sonuçların Zadeh (1965)'in önderliğindeki bulanık küme teorisine taşınması çok kolay olmamıştır. Örneğin bulanık sayılardan oluşan bir kümenin infimum ve supremumunun varlığı problemi uzun yıllar boyunca çözülememiştir. 1997 de Congxin ve Cong sınırlı bir kümenin infimum ve supremumunun varlığını ispatlamış ve bunların nasıl hesaplanabileğini göstermiştir. Fang ve Huang (2004) ise Congxin ve Cong (1997)'un bu varlık ve gösterim teoremini (yine sınırlı bulanık sayı kümeleri için) daha da anlaşılabilir ve uygulanabilir hale getirmiştir. Biz de Fang ve Huang (2004)'ın bu çalışmasını dikkate alarak infimum ve supremum kavramlarını kullanırken dizilerin alttan veya üstten sınırlı olmalarına dikkat ettik. Bu nedenle özellikle dördüncü ve beşinci bölümlerde bulanık sayı dizilerini bazen istatistiksel sınırlı, bazen de sınırlı almak zorunda kaldık.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bulanık sayılar teorisinin zenginliğinden dolayı bu teoride kullanılan bir matematiksel kavramın birbirinden çok farklı tanımlarıyla karşılaşmak mümkündür. Bu nedenle bu bölümde çalışmamızda kullanılan bütün kavramlar ve sonuçlar tüm ayrıntılarıyla tanıtılacak, yeri geldiğinde literatürde olmayan bazı sonuçlar verilecektir. Kullanılacak temel kavramlar seçilirken literatürde en çok benimsenen ve bulanık sayıların istatistiksel yakınsaklığı teorisinde kullanılan kavramlardan yararlanılmaya özen gösterildi. Bu bölümde ilk olarak bulanık sayılar teorisindeki bazı kavramlara, ardından istatistiksel yakınsaklık teorisinde kullanılan bazı notasyonlara ve son olarak bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı teorisindeki bazı sonuçlara yer verilecektir.

Tanım 2.1: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinden $[0,1]$ aralığına tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir X fonksiyonuna bulanık sayı denir:

▶ X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır,

▶ X bulanık konvekstir, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $X(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$ dir,

▶ X üstten yarı süreklidir,

▶ X^0 olarak tanımlanan $\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompakttır (Chang ve Zadeh, 1972).

Yukarıdaki dört özellik her $\alpha \in (0,1]$ için X bulanık sayısının $\alpha-$kesmesi olarak tanımlanan $X^\alpha := \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} = [\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha]$ kümesinin, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan kompakt ve konveks altkümesi olması anlamını taşır. Benzer durum X^0 için de söylenebilir. Ayrıca $X^0 = \lim_{\alpha \to 0^+} X^\alpha$ şeklinde de yazılabilir (Diamond ve Kloeden, 1994). Tüm bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Her bir reel sayı onun karakteristik fonksiyonu ile ifade edilebilir. Ayrıca yukarıdaki bulanık sayı tanımına göre her bir karakteristik fonksiyonun bir bulanık sayı olduğu açıktır. Bu düşünce yardımıyla reel sayılar kümesi bulanık sayılar kümesi içine gömülebilir. Bu nedenle bulanık sayılar için verilen bütün sonuçlar reel sayılar için verilen sonuçların bir genellemesi olacaktır ve bulanık sayılar için sağlanan bütün özellikler altkümesi olan reel sayılar (karakteristik fonksiyonları göz önüne alınarak) için de sağlanacaktır. Fakat bulanık sayılar kümesi kısmi sıralı ve grup yapısı oluşturmayan bir küme olduğundan bazı sonuçlar $\mathbb{R}$ deki sonuçlardan farklı çıkacaktır. Bu farklılıklar da çalışmamızı zenginleştirecektir.

$L(\mathbb{R})$ üzerindeki Hausdorff metriği olarak adlandırılan metrik

$$d(\mu,\nu) := \sup_{\alpha\in[0,1]} \max(|\underline{\mu}^\alpha - \underline{\nu}^\alpha|, |\overline{\mu}^\alpha - \overline{\nu}^\alpha|)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Puri ve Ralescu (1983) $(L(\mathbb{R}), d)$ ikilisinin bir tam metrik uzay olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca bu metriğin, karakteristik fonksiyonlar gözönüne alındığında $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgendiği görülebilir. Bu nedenle çalışmamızda kullanacağımız bu d metriğinin, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğinin iyi bir genişlemesi olduğu söylenebilir.

Bulanık sayılar kümesi üzerinde çok farklı sıralama bağıntılarıyla karşılaşmak mümkündür. Çalışmamızda bulanık sayılar teorisinde en çok benimsenen tanımlamalar kullanılmaya çalışıldı. Bu sıralama bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$\mu, \nu \in L(\mathbb{R})$ için

$$\mu \preceq \nu \;:\Leftrightarrow\; \forall\alpha \in [0,1] \text{ için } \overline{\mu}^\alpha \le \overline{\nu}^\alpha \text{ ve } \underline{\mu}^\alpha \le \underline{\nu}^\alpha$$

şeklinde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$\mu \prec \nu \;:\Leftrightarrow\; \mu \preceq \nu \text{ ve } \exists\alpha \in [0,1] \text{ öyle ki } \overline{\mu}^\alpha < \overline{\nu}^\alpha \text{ veya } \underline{\mu}^\alpha < \underline{\nu}^\alpha$$

şeklindedir (Diamond ve Kloeden, 1994). Eğer $\mu \preceq \nu$ ve $\nu \preceq \mu$ bağıntılarından her ikisi de gerçeklenmiyor ise μ ve ν karşılaştırılamaz denir ve $\mu \nsim \nu$ sembolüyle gösterilir.

$E \subset L(\mathbb{R})$ olsun. Eğer her $X \in E$ için $X \preceq \mu$ olacak şekilde bir μ bulanık sayısı varsa E kümesi üstten sınırlıdır ve μ bulanık sayısı E kümesinin bir üst sınırıdır denir. Eğer E kümesinin bütün μ' üst sınırları için $\mu \preceq \mu'$ oluyorsa μ ye E

kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. Alttan sınırlılık ve en büyük alt sınır kavramları da benzer şekilde verilebilir (Nanda, 1989). Congxin ve Cong (1997) sınırlı bir $E \subset L(\mathbb{R})$ kümesinin infimum ve supremumunun mevcut olduğunu ve nasıl hesaplanabileceğini göstermişlerdir. Fang ve Huang (2004) supremum ve infimum için varlık ve gösterim teoremini daha da sadeleştirerek aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

Teorem 2.2: $A \subset L(\mathbb{R})$ olsun. Eğer A kümesi alttan sınırlı ise $\mu \in L(\mathbb{R})$ infimumuna sahiptir ve bu infimum aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \mu &= \inf A = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \left[\inf_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{\lambda}, \inf_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{\lambda}\right], \\ \text{her } \lambda &\in (0,1] \text{ için} \quad \underline{\mu}^{\lambda} = \sup_{r<\lambda}\inf_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{r}, \quad \overline{\mu}^{\lambda} = \inf_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{\lambda}, \\ \underline{\mu}^{0} &= \inf_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{0}, \quad \overline{\mu}^{0} = \sup_{\lambda>0}\inf_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Benzer şekilde, A üstten sınırlı ise $\nu \in L(\mathbb{R})$ supremumuna sahiptir ve bu supremum aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} \nu &= \sup A = \bigcup_{\lambda\in(0,1]} \lambda \left[\sup_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{\lambda}, \sup_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{\lambda}\right], \\ \text{her } \lambda &\in (0,1] \text{ için} \quad \underline{\nu}^{\lambda} = \sup_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{\lambda}, \quad \overline{\nu}^{\lambda} = \inf_{r<\lambda}\sup_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{r} \\ \underline{\nu}^{0} &= \inf_{\lambda>0}\sup_{\gamma\in A}\underline{\gamma}^{\lambda}, \quad \overline{\nu}^{0} = \sup_{\gamma\in A}\overline{\gamma}^{0}. \end{aligned}$$

(Fang ve Huang, 2004).

Zadeh'in Genişleme Prensibi yardımıyla μ ve ν bulanık sayılarının toplamı

$$(\mu+\nu)(x) := \sup_{x=y+z} \min\{\mu(y), \nu(z)\} \tag{2.1}$$

ve farkı

$$(\mu-\nu)(x) := \sup_{x=y-z} \min\{\mu(y), \nu(z)\} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır (Dubois ve Prade, 1980). $\alpha-$kesmelerine göre toplam ve fark da

$$\text{her } \alpha \in [0,1] \text{ için } \underline{(\mu+\nu)}^{\alpha} := \underline{\mu}^{\alpha} + \underline{\nu}^{\alpha} \quad \text{ve} \quad \overline{(\mu+\nu)}^{\alpha} := \overline{\mu}^{\alpha} + \overline{\nu}^{\alpha}, \tag{2.3}$$

$$\text{her } \alpha \in [0,1] \text{ için } \underline{(\mu-\nu)}^{\alpha} := \underline{\mu}^{\alpha} - \overline{\nu}^{\alpha} \quad \text{ve} \quad \overline{(\mu-\nu)}^{\alpha} := \overline{\mu}^{\alpha} - \underline{\nu}^{\alpha} \tag{2.4}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Burada (2.1) ile (2.3) ve (2.2) ile (2.4) tanımları birbirlerine denktir (Diamond ve Kloeden, 1994).

$\mu \in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısının karakteristik fonksiyonla toplam ve farkı da, yukarıdaki işlemde ν bulanık sayısı bir karakteristik fonksiyon şeklinde alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir: $a \in \mathbb{R}$ reel sayısının karakteristik fonksiyonu

$$a_1(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ eğer } x = a \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olmak üzere

$$(\mu + a_1)^{\alpha} := \left[\underline{\mu}^{\alpha}, \overline{\mu}^{\alpha}\right] + [a,a] = \left[\underline{\mu}^{\alpha} + a, \overline{\mu}^{\alpha} + a\right],$$

$$(\mu - a_1)^{\alpha} := \left[\underline{\mu}^{\alpha}, \overline{\mu}^{\alpha}\right] - [a,a] = \left[\underline{\mu}^{\alpha} - a, \overline{\mu}^{\alpha} - a\right]$$

dır (Kaufmann ve Gupta, 1984). Burada $(\mu + a_1), (\mu - a_1) \in L(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca sıralamanın tanımına göre, eğer $a > 0$ ise $\mu - a_1 \prec \mu \prec \mu + a_1$ yazılabilir. Bu ise $d(\mu, \mu + a_1) = d(\mu, \mu - a_1) = a$ demektir.

$X, Y \in L(\mathbb{R})$ olmak üzere, $L(\mathbb{R})$ kümesinin bir kapalı aralığı

$$[X,Y] := \{Z \in L(\mathbb{R}) : X \preceq Z \preceq Y\} \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki kapalı aralık, elemanları bulanık sayılar (yani özel fonksiyonlar) olan klasik bir kümedir, yani bulanık küme değildir. Dolayısıyla bu kümenin kapalılığı ve konveksliği için klasik teorideki kavramlar kullanılacaktır.

Klasik teoride olduğu gibi, bulanık sayılardan oluşan bir E kümesinin konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $\lambda \in [0,1]$ ve $\mu_1, \mu_2 \in E$ için

$$\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\,\mu_2 \in E$$

olmasıdır (Rockafellar ve Tyrrell, 1997). Bu halde $L(\mathbb{R})$ nin konveks ve kapalı kümelerinin (2.5) formunda olduğu söylenebilir.

I herhangi bir indeks kümesi olmak üzere $\{W_i\}_{i \in I} := \{[A_i, B_i]\}_{i \in I} \subset L(\mathbb{R})$

ailesini tanımlayalım. Eğer her $i \in I$ için $E \subseteq W_i$ oluyorsa $\{W_i\}_{i\in I}$ ailesine E nin kapalı konveks örtüsü denir. Eğer her $i \in I$ için $W_{i_0} = [A_{i_0}, B_{i_0}] \subseteq [A_i, B_i]$ olacak şekilde bir $i_0 \in I$ varsa W_{i_0} aralığına E bulanık sayılar kümesini örten en küçük kapalı konveks aralık denir.

Şimdi de bulanık sayı dizileri için tanımlanmış bazı kavramlar verilecektir.

Tanım 2.3: Eğer $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisine sınırlıdır denir (Matloka, 1986).
$L(\mathbb{R})$ üzerindeki bütün sınırlı dizilerin kümesini $B(L(\mathbb{R}))$ ile gösterelim.

Tanım 2.4: Eğer her $\varepsilon > 0$ için $k > k_0$ olduğunda $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ kalacak şekilde ε a bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_k X_k = X_0$ veya $k \to \infty$ için $X_k \to X_0$ şeklinde gösterilir (Matloka, 1986; Kaleva, 1985).
$L(\mathbb{R})$ üzerindeki bütün yakınsak dizilerin kümesini $C(L(\mathbb{R}))$ ile gösterelim.

Matloka (1986), yakınsak her bulanık sayı dizisinin sınırlı olduğunu göstermiştir, yani $C(L(\mathbb{R})) \subset B(L(\mathbb{R}))$ dir.

Tanım 2.5: $X = \{X_k\}$ dizisinin γ bulanık sayısına yakınsak bir altdizisi varsa γ sayısına $X = \{X_k\}$ dizisinin limit noktası denir.

$X = \{X_k\}$ dizisinin tüm limit noktalarının kümesini L_X ile gösterelim.

Bölümün geriye kalan kısmında ise bulanık sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile ilgili bazı sonuçlara yer verilecektir. İlk olarak istatistiksel yakınsaklık teorisinin temelini oluşturan doğal yoğunluk kavramını tanıtalım. $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n := \{k \in K : k \leq n\}$ olsun. $|K_n|$, K_n kümesinin eleman sayısını göstermek üzere K kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$ şeklinde ve üst yoğunluğu da $\overline{\delta}(K) := \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$ şeklinde tanımlanır (Niven ve Zuckerman, 1980). Yoğunluğun özelliklerinden, $K^c := \mathbb{N} \backslash K$ olmak üzere $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$ ve eğer $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ yazabiliriz (Freedman ve Sember, 1981).

Bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel yakınsaklığı ilk olarak Nuray ve Savaş

(1995) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.6: Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_k X_k = X_0$ şeklinde gösterilir (Nuray ve Savaş, 1995).
$L(\mathbb{R})$ üzerindeki bütün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini $SC(L(\mathbb{R}))$ ile gösterelim.

Sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan $C(L(\mathbb{R})) \subset SC(L(\mathbb{R}))$ kapsaması açıktır. Kapsamanın kesin olduğu da aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 2.7: $X = \{X_k\}$ dizisi

$$\mu(x) := \begin{cases} 0 & , \text{eğer } x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \text{ ise} \\ x & , \text{eğer } x \in [0,1] \text{ ise} \\ -x+2 & , \text{diğer hallerde (d.h.)} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) := \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 0 & , x \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, \infty) \\ x-(k-1) & , x \in [k-1, k] \\ -x+(k+1) & , \text{d.h.} \end{array}\right\} & , k = n^2 \text{ ise } (n = 1,2,3,...) \\ \mu(x) & , \text{d.h.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada her $\varepsilon > 0$ için

$$K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \geq \varepsilon\} \subseteq \{4, 9, 16, 25, ...\}$$

ve $\delta(K(\varepsilon)) = 0$ olduğundan $X = \{X_k\}$ dizisi μ ye istatistiksel yakınsaktır fakat yeterince küçük ε lar için $K(\varepsilon)$ kümesi sonlu olamayacağından $X = \{X_k\}$ dizisi μ ye yakınsak değildir.

Tanım 2.8: Eğer

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu\}) = 0$$

olacak şekilde bir μ bulanık sayısı varsa $X = \{X_k\}$ dizisi üstten istatistiksel sınırlıdır denir. Benzer şekilde,

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu\}) = 0$$

olacak şekilde bir ν bulanık sayısı varsa $X = \{X_k\}$ dizisi alttan istatistiksel sınırlıdır denir. Buradaki μ ve ν bulanık sayılarına da, sırasıyla, X dizisinin istatistiksel üst ve alt sınırı denir.

Eğer bir $X = \{X_k\}$ dizisi hem üstten hem de alttan istatistiksel sınırlı ise bu diziye istatistiksel sınırlıdır denir.

$L(\mathbb{R})$ üzerindeki bütün istatistiksel sınırlı dizilerin kümesini $SB(L(\mathbb{R}))$ ile gösterelim. Bu durumda $B(L(\mathbb{R})) \subset SB(L(\mathbb{R}))$ olduğu açıktır. İstatistiksel yakınsaklıkta olduğu gibi kapsamanın kesin olduğu aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 2.9: $X = \{X_k\}$ dizisini

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ x & , x \in [0, 1] \\ -x+2 & , \text{d.h.} \end{cases}$$

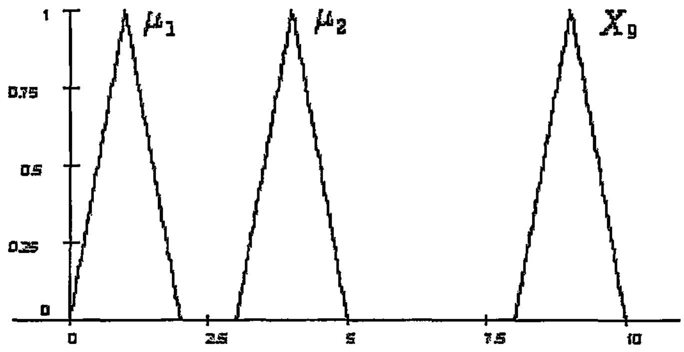
ve

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty) \\ x-3 & , x \in [3, 4] \\ -x+5 & , \text{d.h.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$X_k(x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 0 & , x \in (-\infty, k-1) \cup (k+1, \infty) \\ x-(k-1) & , x \in [k-1, k] \\ -x+(k+1) & , \text{d.h} \end{array}\right\} & , k = n^2 \text{ ise } (n = 1, 2, 3, ...) \\ \mu_1(x) & , k \text{ tek fakat tam kare değil ise} \\ \mu_2(x) & , \text{d.h.} \end{cases} ,$$

şeklinde tanımlayalım (bknz Şekil 2.1).



Şekil 2.1

Burada

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu_1\}\right) = \delta\left(\{\emptyset\}\right) = 0$$

ve

$$\begin{aligned} \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu_2\}\right) &= \delta\left(\{9, 16, 25, ...\}\right) = 0, \\ \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu_2\}\right) &= \delta\left(\{\emptyset\}\right) = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $X = \{X_k\}$ dizisi istatistiksel sınırlıdır. Fakat her $k \in \mathbb{N}$ için $X_k \preceq \nu$ olacak şekilde bir ν bulanık sayısı bulunamayacağından X dizisi sınırlı değildir.

3. BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL LİMİT VE YIĞILMA NOKTALARI

Bu bölümde, ilk olarak bir bulanık sayı dizisi için istatistiksel limit ve yığılma noktası kavramları tanıtılarak bu noktalar ve klasik limit noktası arasındaki bağıntılar incelenecektir. Bölümün ilk kısmında kullandığımız tanımlama ve ispat teknikleri Fridy (1993)'nin hemen hemen aynısıdır. Fakat bölümün sonlarına doğru reel sayı dizilerinden farklı sonuçlara yer verdik. Bu farklılıkları ilginç örneklerle açıklamaya çalıştık. İlk olarak Fridy (1993)'nin reel sayı dizileri için verdiği seyrek olmayan altdizi kavramını bulanık sayı dizilerine genişletelim.

Tanım 3.1: $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi verilsin. Eğer,

$$\delta(\{k_j : j \in N\}) = 0$$

ise $\{X_{k_j}\}$ altdizisine seyrek (thin) altdizi, aksi takdirde seyrek olmayan (nonthin) altdizi adı verilir. Kısalık bakımından, $\{X_{k_j}\}$ altdizisini $K = \{k_j : j \in N\}$ olmak üzere $\{X\}_K$ ile gösterelim.

Temeli seyrek olmayan altdizi kavramına dayanan istatistiksel limit noktası kavramı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2: $X = \{X_k\}$ dizisinin ν bulanık sayısına yakınsak seyrek olmayan bir altdizisi varsa, ν ye X dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir.

X bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesini Λ_X ile gösterelim.

Tanım 3.3: $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) < \varepsilon\}) > 0$$

koşulu sağlanıyorsa μ bulanık sayısına X dizisinin istatistiksel yığılma noktası denir.

X bulanık sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesini Γ_X ile gösterelim.

Teorem 3.4: $X = \{X_k\}$ ve $Y = \{Y_k\}$ bulanık sayıların iki dizisi olsun. Eğer $\delta(\{k \in N : X_k \neq Y_k\}) = 0$, ise $\Lambda_X = \Lambda_Y$ ve $\Gamma_X = \Gamma_Y$ dir.

İspat. İlk olarak $\Lambda_X = \Lambda_Y$ eşitliğini gösterelim. Hipotez gereği $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ yazılabilir. Keyfi bir $\nu \in \Lambda_Y$ seçelim. Bu halde Y bulanık sayı dizisinin ν bulanık sayısına yakınsak seyrek olmayan bir $\{Y\}_K$ altdizisi vardır. Hipotez gereği $\delta(\{k \in \mathbb{N} : k \in K \text{ ve } X_k \neq Y_k\}) = 0$ olduğundan $\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : k \in K \text{ ve } X_k = Y_k\}) > 0$ yazabiliriz. Bu ise $\{X\}_K$ nın ν ye yakınsak bir $\{X\}_{K'}$ seyrek olmayan altdizisinin varlığını ifade eder. Böylece $\nu \in \Lambda_X$ dir, yani sonuç olarak $\Lambda_Y \subseteq \Lambda_X$ dir. Kapsamanın diğer yönü de benzer şekilde gösterilebilir. O halde $\Lambda_X = \Lambda_Y$ elde edilir.

Şimdi de $\Gamma_X = \Gamma_Y$ eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim. $\mu \in \Gamma_X$ keyfi olsun. $\mu \in \Gamma_X$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) < \varepsilon\}) > 0$ yazabiliriz. Hipotez gereği hemen her k için $X_k = Y_k$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(Y_k, \mu) < \varepsilon\}) > 0$, yani $\mu \in \Gamma_Y$ elde edilir. Bu ise $\Gamma_X \subseteq \Gamma_Y$ kapsamasının varlığını gösterir. Benzer şekilde kapsamanın diğer yönü de gösterilebilir. Sonuç olarak $\Gamma_X = \Gamma_Y$ bulunur.

Teorem 3.5: Bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için $\Lambda_X \subseteq \Gamma_X$ dir.

İspat. $\nu \in \Lambda_X$ keyfi olsun. Tanım 3.2 ye göre X in ν ye yakınsak seyrek olmayan bir $\{X_{k(j)}\}$ altdizisi vardır, yani

$$\overline{\delta}(\{k(j) : j \in \mathbb{N}\}) = d > 0$$

dür. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \nu) < \varepsilon\} \supseteq \{k(j) : j \in \mathbb{N}\} \backslash \{j \in \mathbb{N} : d(X_{k(j)}, \nu) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. $\{X_{k(j)}\}$ altdizisi ν ye yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{j \in \mathbb{N} : d(X_{k(j)}, \nu) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} \overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \nu) < \varepsilon\}) &\geq \overline{\delta}(\{k(j) : j \in \mathbb{N}\}) - \overline{\delta}(\{j \in \mathbb{N} : d(X_{k(j)}, \nu) \geq \varepsilon\}) \\ &= d > 0 \end{aligned}$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikten $\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \nu) < \varepsilon\}) > 0$ elde edilir, yani $\nu \in \Gamma_X$ dir.

Teorem 3.6: Bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için $\Gamma_X \subseteq L_X$ dir.

İspat. $\mu \in \Gamma_X$ keyfi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) < \varepsilon\}) > 0$$

yazılabilir. $K(\varepsilon) := \{k(j) \in \mathbb{N} : d(X_{k(j)}, \mu) < \varepsilon\}$ olmak üzere $\{X\}_K$, X in seyrek olmayan bir altdizisidir, yani her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\delta}(\{K\}) > 0$ elde edilir. Bu halde $K \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ olacağından $\mu \in L_X$ yazılabilir.

Teorem 3.6 daki kapsamanın kesin olduğu aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 3.7: $X = \{X_k\}$ dizisini

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \\ x & , x \in [0, 1] \\ -x + 2 & , \text{d.h.} \end{cases}$$

ve

$$\mu_2(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty) \\ x - 3 & , x \in [3, 4] \\ -x + 5 & , \text{d.h.} \end{cases}.$$

olmak üzere

$$X_k := \begin{cases} \mu_1, & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise } (n = 1, 2, 3, \ldots) \\ \mu_2, & \text{d.h.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $L_X = \{\mu_1, \mu_2\}$ olmasına karşın $\Gamma_X = \{\mu_2\}$ dir.

Teorem 3.8: Eğer $st - \lim X_k = X_0$ ise $\Lambda_X = \Gamma_X = \{X_0\}$ dır.

İspat. İlk olarak $\Lambda_X = \{X_0\}$ olduğunu gösterelim. Tersine, en az bir $\varepsilon > 0$ için $d(X_0, Y_0) > 2\varepsilon$ olmak üzere $\Lambda_X = \{X_0, Y_0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisinin X_0 ve Y_0 a yakınsayan iki tane $\{X_{k(j)}\}$ ve $\{X_{l(i)}\}$ seyrek olmayan altdizileri vardır. $\{X_{l(i)}\}$ altdizisi Y_0 a yakınsak olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ yazılabilir. Ayrıca

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\} = \{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \cup \{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\}$$

olduğundan

$$\overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : i \in \mathbb{N}\}) = \overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\}) + \overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) \geq \varepsilon\})$$

yazabiliriz. Böylece

$$\overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\}) > 0 \tag{3.1}$$

elde edilir. Hipotezden $st - \lim_k X_k = X_0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{3.2}$$

ve buradan da

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\}) > 0$$

yazabiliriz. $\varepsilon < \frac{d(X_0, Y_0)}{2}$ olacak şekildeki her $\varepsilon > 0$ için

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \cap \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\} = \emptyset$$

olduğundan

$$\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

yazılabilir. Üst yoğunluğun tanımından da

$$\overline{\delta}(\{l(i) \in \mathbb{N} : d(X_{l(i)}, Y_0) < \varepsilon\}) \leq \overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Bu ise (3.1) ile çelişir. O halde $\Lambda_X = \{X_0\}$ olmalıdır.
Benzer şekilde en az bir $\varepsilon > 0$ için $d(X_0, Z_0) > 2\varepsilon$ olmak üzere $\Gamma_X = \{X_0, Z_0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu halde

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Z_0) < \varepsilon\}) > 0 \tag{3.3}$$

yazılabilir. Ayrıca, $\varepsilon < \frac{d(X_0, Z_0)}{2}$ olduğundan

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\} \cap \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Z_0) < \varepsilon\} = \emptyset,$$

dolayısıyla

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Z_0) < \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Her iki taraftan limit supremuma geçilirse

$$\overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) \geq \overline{\delta}(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Z_0) < \varepsilon\}) \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada (3.3) numaralı eşitsizlikten, (3.4) ün sağ tarafının sıfırdan büyük olduğu ve (3.2) numaralı eşitsizlikten (3.4) ün sol tarafının sıfıra eşitliği elde edilir. Bu ise çelişkidir. O halde $\Gamma_X = \{X_0\}$ olmalıdır.

Şimdi de bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktaları kümesinin Hausdorff metriğinin ürettiği topolojiye göre kapalı olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi verelim. Aslında bu teoremin genel bir metrik uzayda ispatı Kostyrko vd. (2000) tarafından verilmiştir. Çalışmamızın akışı içerisinde bu teoremin farklı bir ispatı aşağıdaki şekilde verilecektir.

Teorem 3.9: Bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için Γ_X kümesi kapalıdır.

İspat. $\Gamma_X = \varnothing$ ise ispat aşikardır. $\Gamma_X \neq \varnothing$ olsun. $i \to \infty$ için $Y(i) \to X_0$ olacak şekilde keyfi bir $\{Y(i)\} \subseteq \Gamma_X \subset L(\mathbb{R})$ dizisi seçelim. Bu keyfi $\{Y(i)\}$ dizisi için $X_0 \in \Gamma_X$ olduğunu gösterirsek ispatımız tamamlanır.

$\varepsilon > 0$ keyfi olsun. $Y(i) \to X_0$ olduğundan $\frac{\varepsilon}{2}$ için en az bir $n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$d(Y(i), X_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Şimdi de ε a bağlı bir $i_0 = i_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ seçelim, öyle ki $i_0 > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olsun (bu halde ε sabit olduğundan i_0 da sabitlenebilir). Bu durumda

$$d(Y(i_0), X_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz.

Ayrıca

$$\left\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Y(i_0)) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\} \tag{3.5}$$

kapsaması gerçeklenir. Bunu gösterebilmek için keyfi bir

$k_0 \in \left\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Y(i_0)) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ alalım. Bu halde $d(X_{k_0}, Y(i_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ yazabiliriz, böylece

$$\begin{aligned} d(X_{k_0}, X_0) &\leq d(X_{k_0}, Y(i_0)) + d(Y(i_0), X_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $k_0 \in \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\}$ demektir, yani (3.5) kapsaması gerçeklenir.

$Y(i_0) \in \Gamma_X$ olduğundan $\delta\left\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, Y(i_0)) < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \neq 0$ ve (3.5) kapsamasından $\delta\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\} \neq 0$ yazabiliriz. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan son eşitsizlik bize $X_0 \in \Gamma_X$ sonucunu verir.

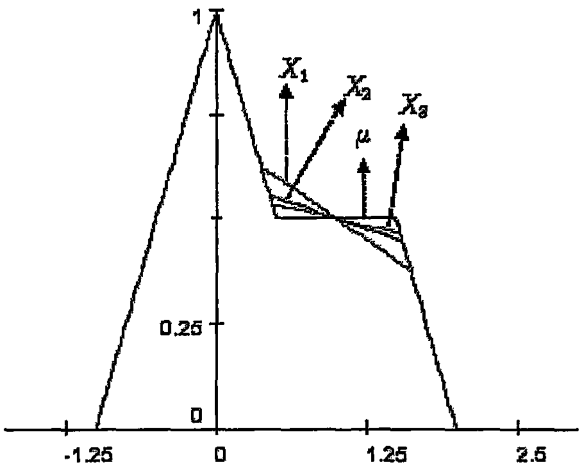
İstatistiksel sınırlı bir reel sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesinin boş küme olmadığını biliyoruz (Fridy, 1993). Fakat aşağıdaki örnek bize istatistiksel sınırlı (hatta sınırlı) bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için $\Gamma_X = \varnothing$ olabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.10: Grafiği Şekil 3.1 de verilen $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi ve μ bulanık sayısı

$$X_k(x) := \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & ,0 \leq x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{5k-2}{5k-1}\right) \\ -\frac{1}{5k}(x-1)+\frac{1}{2} & ,\frac{1}{2}\left(\frac{5k-2}{5k-1}\right) \leq x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{15k-2}{5k-1}\right) \\ -x+2 & ,\frac{1}{2}\left(\frac{15k-2}{5k-1}\right) \leq x \leq 2 \\ 0 & ,\text{d.h.} \end{cases},$$

$$\mu(x) := \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & ,0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ,\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -x+2 & ,\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \\ 0 & ,\text{d.h} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.



Şekil 3.1

Burada her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|\overline{X}_k^{\frac{1}{2}} - \overline{\mu}^{\frac{1}{2}}\right| = \left|1 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ olduğundan Hausdorff metriğinin tanımına göre her $k \in \mathbb{N}$ için $d\left(X_k, \mu\right) \geq \frac{1}{2}$ elde edilir. Böylece $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, \mu\right) < \frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

olduğundan $\mu \in \Gamma_X$ olamaz. Başka bir bulanık sayının da bir istatistiksel yığılma noktası olması söz konusu olamayacağından $\Gamma_X = \varnothing$ sonucuna ulaşırız.

Burada şu soru akla gelebilir: Acaba hangi koşullar altında istatistiksel sınırlı bir bulanık sayı dizisi için $\Gamma_X \neq \varnothing$ olabilir? Dördüncü bölümde bu sorumuza bir cevap niteliğinde, dizinin istatistiksel limit supremumu veya infimumu ile ilişkili bir koşul vereceğiz.

4. BULANIK SAYI DİZİLERİNİN İSTATİSTİKSEL LİMİT İNFİMUM VE SUPREMUMU

Şimdiye kadar bulanık sayılar için $\mp\infty$ kavramları tanımlanamadığı için henüz sınırsız bir dizi için infimum ve supremum kavramları tanımlanamamıştır. Bu nedenle, bu bölümde vereceğimiz istatistiksel limit infimum ve supremum kavramlarını istatistiksel sınırlı bulanık sayı dizileri (yani $SB\left(L(\mathbb{R})\right)$) üzerine kısıtlamak zorunda kaldık. Şimdi bir $X = \{X_k\} \in SB\left(L(\mathbb{R})\right)$ dizisinin istatistiksel limit infimumunu ve supremumunu tanımlamada anahtar niteliğinde olan aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$A_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}\right) \neq 0\};$$

$$\overline{A}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\}\right) = 1\};$$

$$B_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\}\right) \neq 0\};$$

$$\overline{B}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}\right) = 1\}$$

olsun. Burada $\overline{A}_X$ ve $\overline{B}_X$ kümeleri, X dizisinin sırasıyla istatistiksel alt ve üst sınırlarının kümeleridir. $X = \{X_k\} \in SB\left(L(\mathbb{R})\right)$ olduğundan yukarıdaki dört küme boş değildir. Ayrıca A_X ve $\overline{B}_X$ kümeleri birer alt sınıra, $\overline{A}_X$ ve B_X kümeleri de birer üst sınıra sahiptir. Böylece Fang ve Huang (2004) ın supremum ve infimumun varlığı teoremi olan Teorem 2.2 yardımıyla $\inf A_X$, $\sup \overline{A}_X$, $\sup B_X$ ve $\inf \overline{B}_X$ bulanık sayılarının varlığı söylenebilir.

Şimdi hem bir dizinin istatistiksel limit infimumu ve supremumunu hesaplarken farklı iki alternatif sunmak, hem de bu bölümdeki ispatları kolaylaştırmak amacıyla oldukça kullanışlı olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1: $X = \{X_k\} \in SB\left(L(\mathbb{R})\right)$ dizisi için $\inf A_X = \sup \overline{A}_X$ ve $\sup B_X = \inf \overline{B}_X$ dir.

İspat. Burada sadece ilk eşitlik ispatlanacaktır, diğer eşitlik de benzer şekilde ispatlanabilir. $\nu := \inf A_X$ ve $\mu := \sup \overline{A}_X$ olsun. A_X ve $\overline{A}_X$ kümelerinin

tanımından her $\widetilde{\nu} \in A_X$ için $\nu \preceq \widetilde{\nu}$ ve her $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için $\mu \succeq \widetilde{\mu}$ yazabiliriz.
Ayrıca $\widetilde{\nu} \in A_X$ ve $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ ise

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \widetilde{\nu}\}) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \widetilde{\mu}\}) = 1$$

yazılabilir. Bu ise $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \widetilde{\nu}\} \cap \{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \widetilde{\mu}\}) \neq 0$ demektir. Başka bir ifadeyle en az bir $k \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\widetilde{\mu} \prec X_k \prec \widetilde{\nu}$ biçimindedir. Böylece her $\widetilde{\nu} \in A_X$, $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için

$$\widetilde{\mu} \prec \widetilde{\nu} \tag{4.1}$$

yazabiliriz. (4.1) numaralı eşitsizlikten $\widetilde{\mu}$ nın A_X kümesinin bir alt sınırı olduğunu söyleyebiliriz. İnfimum tanımından ise her $\widetilde{\mu} \in \overline{A}_X$ için

$$\widetilde{\mu} \preceq \nu = \inf A_X$$

yazılabilir. Supremum tanımından da

$$\mu \preceq \nu$$

yazabiliriz. İspatı tamamlamak için $\mu \prec \nu$ olamayacağını göstermemiz yeterlidir. Tersine, $\mu \prec \nu$ olsun. Bu halde en az bir $\alpha \in [0,1]$ sayısı vardır öyle ki

$$\underline{\mu}^\alpha < \underline{\nu}^\alpha \quad \text{veya} \quad \overline{\mu}^\alpha < \overline{\nu}^\alpha$$

dır. Biz en az bir $\alpha \in [0,1]$ için

$$\underline{\mu}^\alpha < \underline{\nu}^\alpha \tag{4.2}$$

olduğunu kabul edelim (Benzer şekilde $\overline{\mu}^\alpha < \overline{\nu}^\alpha$ kabul edilerek de aynı çelişkiye ulaşılabilir). $b := \nu(\underline{\mu}^\alpha)$ şeklinde tanımlayalım. Bu halde $b < \alpha$ yazabiliriz (b sıfır da olabilir). Ayrıca, her $\lambda \in (b, \alpha]$ için $\underline{\mu}^\lambda < \underline{\nu}^\lambda$ yazabiliriz.
$\mu(x)$ ve $\nu(x)$ fonksiyonları üstten yarı sürekli olduklarından bir (z, β) noktası vardır öyle ki $z \in (\underline{\mu}^\alpha, \underline{\nu}^\alpha)$, $\beta \in (b, \alpha)$ ve her $\lambda \in [\beta, \alpha]$ için

$$\underline{\mu}^\lambda < z \text{ ve } \underline{\nu}^\lambda > z \tag{4.3}$$

dir. $\underline{x}^0 := st - \liminf \underline{X}_k^0 - 1$ ve $\overline{x}^0 := st - \limsup \overline{X}_k^0 + 1$ (burada $\underline{x}^0$ ve $\overline{x}^0$ ın sonlu olduğu açıktır) olmak üzere

$$\gamma_1 := \begin{cases} 0, & x < \underline{x}^0 \\ \beta, & x \in [\underline{x}^0, z) \\ 1, & x = z \\ 0, & x > z \end{cases},$$

$$\gamma_2 := \begin{cases} 0, & x < z \\ \beta, & x \in [z, \overline{x}^0) \\ 1, & x = \overline{x}^0 \\ 0, & x > \overline{x}^0 \end{cases}$$

şeklinde iki tane bulanık sayı tanımlayalım. Bu tanımlamaya göre

$$\mu \nsim \gamma_1 \text{ ve } \nu \nsim \gamma_2 \tag{4.4}$$

yazabiliriz. Gerçekten (4.3) nolu eşitsizlikten

$$\underline{\mu}^\beta \geq st - \liminf \underline{X}_k^\beta \geq st - \liminf \underline{X}_k^0 > \underline{x}^0 = \underline{\gamma_1}^\beta, \qquad \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma_1}^\alpha;$$

$$\underline{\nu}^b = \underline{\mu}^\alpha < z = \underline{\gamma_2}^b, \qquad \underline{\nu}^\beta > z = \underline{\gamma_2}^\beta$$

elde edilir. Şimdi de

$$C_1 := \{k \in \mathbb{N} : \ \underline{X}_k^\lambda \leq z \quad \text{bazı } \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için}\},$$

$$C_2 := \{k \in \mathbb{N} : \ \underline{X}_k^\lambda \geq z \quad \text{bazı } \lambda \in (\beta, \alpha] \text{ için}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $C_1 \cup C_2 = \mathbb{N}$ olduğundan

$$\delta(C_1) + \delta(C_2) \geq 1 \tag{4.5}$$

elde edilir. İlk olarak $\delta(C_1) > 0$ olduğunu kabul edelim. γ_2 bulanık sayısının ve $\overline{x}^0$ reel sayısının tanımından $K_1 := \left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X}_k^\lambda > \overline{x}^0 \quad \text{bazı } \lambda \in [0,1] \text{ için}\right\}$ olmak üzere, her $k \in C_1 \backslash K_1$ için

$$X_k \prec \gamma_2$$

olur. Burada $\delta(K_1) = 0$ olduğundan $\delta(C_1 \backslash K_1) = \delta(C_1)$ yazılabilir. Bu halde

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \gamma_2\}) \geq \delta(C_1) > 0,$$

yani $\gamma_2 \in A_X$ dir. $\inf A_X$ bulanık sayısının tanımından da $\gamma_2 \succeq \nu = \inf A_X$ bulunur ki bu da (4.4) ile, yani, $\nu \nsim \gamma_2$ ile çelişir. O halde $\delta(C_1) = 0$ olmalıdır. (4.5) numaralı eşitsizlikte $\delta(C_1) = 0$ ise $\delta(C_2) = 1$ dir. Diğer taraftan γ_1 bulanık sayısının ve $\underline{x}^0$ reel sayısının tanımından

$$K_2 := \left\{k \in \mathbb{N} : \underline{X}_k^{\lambda} < \underline{x}^0 \qquad \text{bazı } \lambda \in [0, \beta] \text{ için}\right\}$$

olmak üzere her $k \in C_2 \backslash (C_1 \cup K_2)$ için

$$X_k \succ \gamma_1$$

olur. $\delta(K_2) = 0$ olduğundan $\delta(C_2 \backslash (C_1 \cup K_2)) = 1$ yazılabilir. Bu ise

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \gamma_1\}) \geq \delta(C_2 \backslash (C_1 \cup K_2)) = 1$$

ifadesini, yani $\gamma_1 \in \overline{A}_X$ olmasını garantiler. Sonuç olarak $\gamma_1 \preceq \mu = \sup \overline{A}_X$ elde edilir. Bu da (4.4) ile çelişir. Bu çelişkilere μ ve ν nün farklı olmasından dolayı tanımlanabilen γ_1 ve γ_2 sayıları ile μ ve ν nün karşılaştırılamaması kabulüyle geldik. O halde $\mu \prec \nu$ olamaz, yani $\mu = \nu$ olmalıdır.

Tanım 4.2: $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit infimumu ve supremumu

$$\begin{aligned} st - \liminf X &:= \inf A_X, \\ st - \limsup X &:= \sup B_X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Ek olarak, Teorem 4.1 den $st - \liminf X = \sup \overline{A}_X$ ve $st - \limsup X = \inf \overline{B}_X$ yazabiliriz. Şimdi de bir bulanık sayı dizisi için istatistiksel limit infimum ve supremumun nasıl hesaplanabileceğini gösteren aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 4.3: $X = \{X_k\}$ dizisi Örnek 2.9 daki gibi olmak üzere $Y = \{Y_k\}$ dizisini

$$Y_k(x) := \begin{cases} \mu_1(x) & , k \text{ çift fakat tam kare değil ise} \\ \mu_2(x) & , k \text{ tek ve tam kare ise} \\ 0_1(x) & , k \text{ tek fakat tam kare değil ise} \\ X_k(x) & , \text{d.h.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $Y = \{Y_k\}$ dizisi üstten sınırlı değildir fakat üstten istatistiksel sınırlıdır. Ayrıca bu dizi alttan sınırlıdır (dolayısıyla alttan istatistiksel sınırlıdır). Sonuç olarak $st - \limsup Y = \sup B_Y = \mu_1$ ve $st - \liminf Y = \inf A_Y = 0_1$ elde edilir.

Teorem 4.4: Alttan istatistiksel sınırlı bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için eğer $\nu := st - \liminf X$ ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu - \varepsilon_1\}\right) = 0 \quad \text{ve} \tag{4.6}$$

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\}\right) \neq 0 \tag{4.7}$$

dir.

İspat. İlk olarak (4.6) ifadesini ispatlayalım. Tersine, en az bir $\varepsilon > 0$ için $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu - \varepsilon_1\}) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu halde $\nu - \varepsilon_1 \in A_X$ dir. $\nu \preceq \nu - \varepsilon_1$ olduğundan $\nu - \varepsilon_1 \in A_X$ ifadesi infimum tanımıyla çelişir.
Şimdi de (4.7) eşitsizliğini ispatlayalım. Tersine, en az bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu + \varepsilon_1\}) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\}) = 0 \tag{4.8}$$

olduğunu kabul edelim. Her $k \in \mathbb{N}$ için sadece $X_k \prec \nu + \varepsilon_1$, $X_k \nsim \nu + \varepsilon_1$, $X_k \succeq \nu + \varepsilon_1$ durumlarından bir tanesi gerçeklenebileceğinden

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \succeq \nu + \varepsilon_1\} = \mathbb{N}$$

yazılabilir. Böylece (4.8) den

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succeq \nu + \varepsilon_1\}) = 1$$

elde edilir, bu ise $\nu + \varepsilon_1 \in \overline{A}_X$ demektir. Sonuç olarak supremum tanımından $\nu + \varepsilon_1 \preceq \sup \overline{A}_X = \nu$ elde edilir. Bu ise çelişkidir.

Yukarıdaki teoremin tersi reel sayı dizileri için geçerli olduğu halde aşağıdaki örnekten görüleceği üzere bulanık sayı dizileri için geçerli olmayabilir.

Örnek 4.5:

$$\mu_1(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 1) \cup (6, \infty) \\ \frac{x-1}{4} & , x \in [1, 5] \\ 6 - x & , \text{d.h.} \end{cases}$$

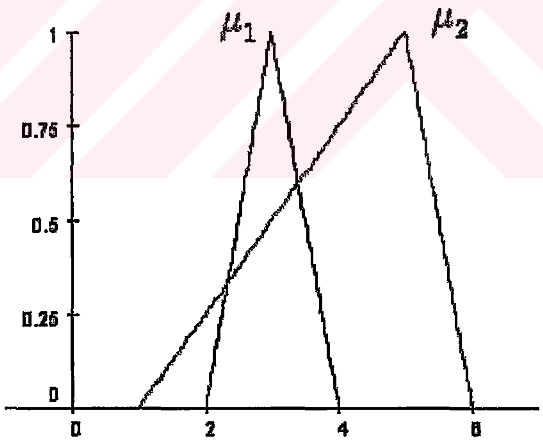
ve

$$\mu_2(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty) \\ x - 2 & , x \in [2, 3] \\ 4 - x & , \text{d.h.} \end{cases}$$

olmak üzere $X = \{X_k\}$ dizisini

$$X_k(x) := \begin{cases} \mu_1(x) & , k \text{ tek ise} \\ \mu_2(x) & , \text{d.h.} \end{cases},$$

şeklinde tanımlayalım. Aşağıdaki Şekil 4.1 de $\mu_1$ve μ_2 sayılarının grafikleri verilmiştir.

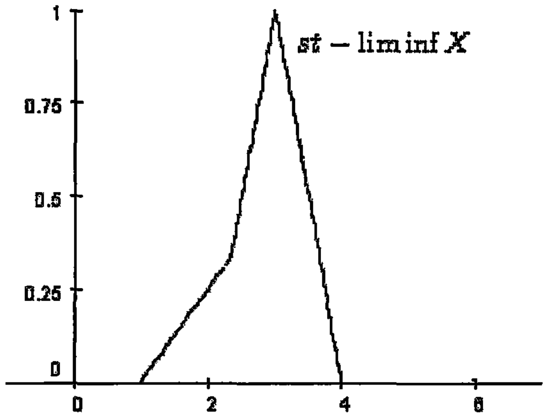


Şekil 4.1

Burada μ_1 için (4.6) ve (4.7) koşulları sağlanmasına rağmen

$$\mu_1 \neq st - \liminf X = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \\ \frac{x-1}{4} & , x \in \left[1, \frac{7}{3}\right] \\ x - 2 & , x \in \left(\frac{7}{3}, 3\right] \\ 4 - x & , \text{d.h.} \end{cases}$$

dir. Aşağıdaki Şekil 4.2 de $st - \liminf X$ in grafiği verilmiştir.



Şekil 4.2

Teorem 4.4 ün istatistiksel limit supremum için benzeri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.6: Üstten istatistiksel sınırlı bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi için eğer $\mu := st - \limsup X$ ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu + \varepsilon_1\}\right) = 0 \quad \text{ve} \\ &\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu - \varepsilon_1\} \cup \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}\right) \neq 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

dir.

Teoremin ispatı Teorem 4.4 e benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca Örnek 4.5 e benzer şekilde Teorem 4.6 nın tersinin bulanık sayı dizileri için sağlanmadığı gösterilebilir.

Teorem 4.7: $X = \{X_k\} \in SB\left(L(\mathbb{R})\right)$ olmak üzere

$$st - \liminf X \preceq st - \limsup X$$

dir.

İspat. $st - \liminf X = \sup \overline{A}_X$ ve $st - \limsup X = \sup B_X$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\overline{A}_X$ ve B_X kümelerinin tanımından $\overline{A}_X \subset B_X$ dir. Böylece supremum tanımından $\sup \overline{A}_X \preceq \sup B_X$ yazılabilir.

Teorem 4.8: $st - \lim X = X_0$ ise

$$st - \liminf X = st - \limsup X = X_0$$

dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. $X = \{X_k\}$ dizisi X_0 bulanık sayısına istatistiksel yakınsak olduğundan

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}) = 0;$$

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, X_0) < \varepsilon\}) = 1;$$

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : \sup_{\alpha\in[0,1]} \max(|\underline{X_k}^{\alpha} - \underline{X_0}^{\alpha}|, |\overline{X_k}^{\alpha} - \overline{X_0}^{\alpha}|) < \varepsilon\}) = 1$$

yazılabilir, yani hemen her k için

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} \max(|\underline{X_k}^{\alpha} - \underline{X_0}^{\alpha}|, |\overline{X_k}^{\alpha} - \overline{X_0}^{\alpha}|) < \varepsilon$$

veya

$$\sup_{\alpha\in[0,1]} |\underline{X}_k^{\alpha} - \underline{X}_0^{\alpha}| < \varepsilon, \text{ ve } \sup_{\alpha\in[0,1]} |\overline{X}_k^{\alpha} - \overline{X}_0^{\alpha}| < \varepsilon$$

yazılabilir. Böylece hemen her k için

$$X_0 - \varepsilon_1 \prec X_k \prec X_0 + \varepsilon_1$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik aşağıdaki iki durumun varlığını garantiler:

1) $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec X_0 + \varepsilon_1\}) = 1$ dir, bu halde $X_0 + \varepsilon_1 \in \overline{B}_X$ olduğundan

$$st - \limsup X = \inf \overline{B}_X =: \mu \preceq X_0 + \varepsilon_1 \tag{4.10}$$

yazılabilir.

2) $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ X_0 - \varepsilon_1\}) = 1$ dir, bu halde $X_0 - \varepsilon_1 \in \overline{A}_X$ olduğundan

$$st - \liminf X = \sup \overline{A}_X =: \nu \succeq X_0 - \varepsilon_1 \tag{4.11}$$

yazılabilir.

Sonuç olarak (4.10), (4.11) ve Teorem 4.7 den

$$X_0 - \varepsilon_1 \preceq \nu \preceq \mu \preceq X_0 + \varepsilon_1$$

yazılabilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\nu = \mu = X_0$ elde edilir.

Yukarıdaki teoremin tersi reel sayı dizileri için geçerlidir (Fridy ve Orhan, 1997). Fakat her bulanık sayı dizisi için aşağıdaki örnekten görüleceği gibi geçerli değildir.

Örnek 4.9: $X = \{X_k\}$ dizisi ve μ bulanık sayısı Örnek 3.10 daki gibi tanımlansın. Tanım 4.2 den $st - \limsup X_k = st - \liminf X_k = \mu$ elde edilir. Fakat her $k \in \mathbb{N}$ için $\left|\overline{X}_k^{\frac{1}{2}} - \overline{\mu}^{\frac{1}{2}}\right| = \left|1 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ olduğundan, $d(X_k, \mu) \geq \frac{1}{2}$ olur. Böylece

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \geq \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$$

bulunur, yani $\mu = st - \lim X_k$ olamaz.

Bu noktada şu soru akla gelebilir: Acaba hangi koşullar altında Teorem 4.9 un tersi sağlanır? Bu koşullardan birini aşağıdaki Teorem 4.11 de verdik. Şimdi, sözü edilen teoremi ispatlamadan önce ispatta kullanacağımız bir yardımcı teorem verelim.

Yardımcı Teorem 4.10: Herhangi iki X ve μ bulanık sayısı ve her $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki önermeler denktir:

(i) $d(X, \mu) \leq \varepsilon$,

(ii) $\mu - \varepsilon_1 \preceq X \preceq \mu + \varepsilon_1$.

İspat.

$$d(X, \mu) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \max\{|\underline{X}^\alpha - \underline{\mu}^\alpha|, |\overline{X}^\alpha - \overline{\mu}^\alpha|\},$$

olduğundan (i) eşitsizliği her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$|\underline{X}^\alpha - \underline{\mu}^\alpha| \leq \varepsilon \text{ ve } |\overline{X}^\alpha - \overline{\mu}^\alpha| \leq \varepsilon$$

ifadesine denktir. Buradan her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\underline{X}^\alpha \leq \underline{\mu}^\alpha + \varepsilon, \quad \overline{X}^\alpha \leq \overline{\mu}^\alpha + \varepsilon \text{ ve } \underline{X}^\alpha \geq \underline{\mu}^\alpha - \varepsilon, \quad \overline{X}^\alpha \geq \overline{\mu}^\alpha - \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır, yani $X \preceq \mu + \varepsilon_1$ ve $X \succeq \mu - \varepsilon_1$ olur.

Teorem 4.11: $st - \limsup X_k = st - \liminf X_k = \mu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \not\sim \mu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \not\sim \mu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa $st - \lim X_k = \mu$ dir.

İspat. $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ olsun. $st - \liminf X_k = \mu$ olduğundan Teorem 4.4 e göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu - \varepsilon_1\}) = 0 \tag{4.12}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde $st - \limsup X_k = \mu$ olduğundan Teorem 4.6 ya göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu + \varepsilon_1\}) = 0 \tag{4.13}$$

yazabiliriz.

Teoremin hipotezinden $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}) = 0$, $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}) = 0$ ve (4.12) ile (4.13) eşitliklerinden $K_1(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \succeq \mu - \varepsilon_1\}$ ve $K_2(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\}$ olmak üzere $\delta(K_1(\varepsilon)) = 1$ ve $\delta(K_2(\varepsilon)) = 1$ yazabiliriz.

K_1 ve K_2 kümelerinin tanımından

$$K_1(\varepsilon) \cap K_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \mu - \varepsilon_1 \preceq X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\}$$

elde edilir. Bu halde Yardımcı Teorem 4.10 dan

$$K_1(\varepsilon) \cap K_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \leq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Böylece $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \leq \varepsilon\}) = 1$, yani $\delta(\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) > \varepsilon\}) = 0$ olur. Sonuç olarak $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan son ifade bize $st - \lim X_k = \mu$ eşitliğini verir.

Teorem 4.12: $X = \{X_k\}$, $Y = \{Y_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ koşulu sağlanıyorsa

(i) $st - \limsup X = st - \limsup Y$,

(ii) $st - \liminf X = st - \liminf Y$

dir.

İspat. Burada sadece (i) ifadesi ispatlanacaktır, benzer şekilde (ii) ifadesi de ispatlanabilir. $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \neq Y_k\}) = 0$ olduğundan

$$\{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\}) \neq 0\} = \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta(\{k \in \mathbb{N} : Y_k \succ \mu\}) \neq 0\},$$

yani $B_X = B_Y$ yazılabilir. Supremum tanımından $\sup B_X = \sup B_Y$ olduğundan $st - \limsup X = st - \limsup Y$ elde edilir.

Fridy ve Orhan (1997) bir reel sayı dizisinin en büyük istatistiksel yığılma noktasının dizinin istatistiksel limit supremumu olduğunu, benzer şekilde en küçük istatistiksel yığılma noktasının da dizinin istatistiksel limit infimumu olduğunu göstermişlerdir. Fakat bulanık sayı dizilerinde bu durum geçerli değildir, hatta dizinin istatistiksel limit supremumu (veya limit infimumu) aşağıdaki örnekten de görüleceği gibi bir yığılma noktası bile olmayabilir.

Örnek 4.13: $X = \{X_k\}$ dizisi Örnek 4.5 deki gibi tanımlansın.

$$st - \liminf X = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty) \\ \frac{x-1}{4} & , x \in \left[1, \frac{7}{3}\right] \\ x - 2 & , x \in \left(\frac{7}{3}, 3\right] \\ 4 - x & , \text{d.h.} \end{cases}$$

ve $\Gamma_X = \{\mu_1, \mu_2\}$ olduğu halde yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, st - \liminf X) < \varepsilon\} = 0$$

olduğundan $st - \liminf X \notin \Gamma_X$ olmalıdır.

Yukarıdaki örnekten bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit supremumunun (veya infimumunun) en büyük (veya en küçük) istatistiksel yığılma noktası olmayabildiğini gördük. Bu noktada şu soru akla gelebilir: Acaba hangi koşul altında bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit supremumu (veya infimumu) en büyük (veya en küçük) istatistiksel yığılma noktası olur? Bu soruya cevap bulabilmek için ilk önce acaba hangi koşul altında bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit supremumunun (veya infimumunun) dizinin bir istatistiksel yığılma noktası olduğunu bulmamız gerekir. Teorem 4.14 ve 4.15 de bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit supremumunun (veya infimumunun) istatistiksel yığılma noktası olması için bir koşul verilmiştir. Teorem 4.17 de bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının, dizinin istatistiksel alt ve üst limiti arasında kaldığı ispatlanmıştır. Teorem 4.14, 4.15 ve 4.17 nin birleştirilmesiyle elde edilen Sonuç 4.18 yukarıdaki sorunun yanıtını oluşturacaktır.

Teorem 4.14: $X = \{X_k\}$ dizisi üstten istatistiksel sınırlı ve $st - \limsup X_k = \mu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa $\mu \in \Gamma_X$ dir.

İspat. $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ keyfi olsun. Hipotezden $\delta\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\} = 0$ olduğundan Teorem 4.6 ya göre

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu - \varepsilon_1\} \neq 0 \tag{4.14}$$

ve $\delta\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu + \varepsilon_1\} = 0$ yazılabilir. Hipotezden $\delta\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\} = 0$ olduğundan

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\} = 1 \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) den

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : \mu - \varepsilon_1 \prec X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\} \neq 0$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 4.10 a göre

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, \mu\right) \leq \varepsilon\} \neq 0$$

yazabiliriz. Son eşitsizlik her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için sağlandığından

$$\delta\{k \in \mathbb{N} : d\left(X_k, \mu\right) < \varepsilon\} \neq 0$$

bulunur. Bu ise $\mu \in \Gamma_X$ sonucunu verir.

Yukarıdaki teoremin istatistiksel limit infimum için benzeri aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.15: $X = \{X_k\}$ dizisi alttan istatistiksel sınırlı ve $st - \liminf X_k = \nu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa $\nu \in \Gamma_X$

dir.

Şimdi, Teorem 4.17 de kullanacağımız, bulanık sayılar için oldukça kullanışlı bir özelliği verelim.

Yardımcı Teorem 4.16: Her $\varepsilon > 0$ için $X \preceq Y + \varepsilon_1$ ise $X \preceq Y$ dir.
İspat. Tersine $X \npreceq Y$ olduğunu kabul edelim. Bu halde en az bir $\alpha_0 \in [0,1]$ vardır öyle ki $\underline{X}^{\alpha_0} > \underline{Y}^{\alpha_0}$ veya $\overline{X}^{\alpha_0} > \overline{Y}^{\alpha_0}$ olur. Genelliği bozmadan $\underline{X}^{\alpha_0} > \underline{Y}^{\alpha_0}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\underline{X}^{\alpha_0} > \underline{Y}^{\alpha_0} + \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ bulabiliriz. Buradan $\underline{X}^{\alpha_0} > \underline{Y}^{\alpha_0} + \underline{\varepsilon_1}^{\alpha_0}$ elde edilir. Bu ise $X \npreceq Y + \varepsilon_1$ demektir, yani hipotezle çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.17: Her $\gamma \in \Gamma_X$ için $st - \liminf X \preceq \gamma \preceq st - \limsup X$ dir.
İspat. Burada sadece $\gamma \preceq st - \limsup X$ olduğu gösterilecektir. Benzer şekilde $st - \liminf X \preceq \gamma$ olduğu da ispatlanabilir.
$\gamma \in \Gamma_X$ keyfi olsun. Bu halde her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \gamma) < \varepsilon\} \neq 0$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 4.10 dan her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta \{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k \prec \gamma + \varepsilon_1\} \neq 0$$

dır.

$$\{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k \prec \gamma + \varepsilon_1\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k\}$$

olduğundan yoğunluk özelliklerinden her $\varepsilon > 0$ için $\delta \{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k\} \neq 0$ yazılabilir. B_X kümesinin tanımından $\gamma - \varepsilon_1 \in B_X$ ve supremum tanımından da her $\varepsilon > 0$ için $\gamma - \varepsilon_1 \preceq \sup B_X$ elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.16 ya göre $\gamma \preceq \sup B_X = st - \limsup X$ yazılabilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi, Teorem 4.14, 4.15 ve 4.17 yi birleştirerek aşağıdaki sonucu verelim.

Sonuç 4.18: $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ ve $st - \liminf X_k = \nu$, $st - \limsup X_k = \mu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\}$, $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu - \varepsilon_1\}$, $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa $st-\limsup X$ en büyük ve $st-\liminf X$ en küçük istatistiksel yığılma noktasıdır.

Örnek 4.9 dan istatistiksel sınırlı bir dizinin, istatistiksel limit infimumuna (ve supremumuna) istatistiksel yakınsak bir altdizisinin bulunamayabileceğini söyleyebiliriz. O halde böyle bir altdizinin olabilmesi için dizi üzerine hangi koşullar konulmalıdır? Aslında bu koşulları Teorem 4.14 ve 4.15 ile verdik. Yani, istatistiksel sınırlı bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisinin istatistiksel limit supremumunun (veya infimumunun) mevcut olduğunu biliyoruz. O halde bulanık sayı dizisi üzerine Teorem 4.14 (veya Teorem 4.15) de verdiğimiz koşullardan biri konulursa, o bulanık sayı dizisi için, dizinin istatistiksel limit supremumuna (veya infimumuna) istatistiksel yakınsak bir altdizisinin var olduğu, hatta $\Gamma_X \neq \varnothing$ olduğu söylenebilir. Bu durumu aşağıdaki teoremle ifade edelim.

Teorem 4.19: $X = \{X_k\}$ dizisi üstten istatistiksel sınırlı ve $st-\limsup X_k = \mu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa X dizisinin μ ye istatistiksel yakınsak bir altdizisi vardır.

İspat. Teorem 4.14 den açıktır.

Benzer şekilde $st-\liminf$ için de aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.20: $X = \{X_k\}$ dizisi alttan istatistiksel sınırlı ve $st-\liminf X_k = \nu$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu + \varepsilon_1\}$ ve $\{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \nu - \varepsilon_1\}$ kümelerinin doğal yoğunluğu sıfır olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa X dizisinin ν ye istatistiksel yakınsak bir altdizisi vardır.
İspat. Teorem 4.15 den açıktır.

Not 4.21: Teorem 4.19 ve 4.20 deki koşullar değiştilerek de teoremlerin geçerliliği sağlanabilir. Yani, istatistiksel sınırlı bir $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi üzerine farklı koşullar konularak Teorem 4.19 ve 4.20 nin değişik formlarının elde edilebileceğini düşünüyoruz.

5. BULANIK SAYI DİZİLERİNİN ÇEKİRDEĞİ VE İSTATİSTİKSEL ÇEKİRDEĞİ

Bu bölümde asıl amacımız bir bulanık sayı dizisinin istatistiksel çekirdeğini tanımlayıp istatistiksel çekirdek ile klasik çekirdek arasındaki bağıntıyı bulmaktır. Fakat bulanık sayılar teorisi ile ilgili literatürü taradığımızda bir bulanık sayı dizisinin çekirdeği kavramına, hatta çalışmada kullandığımız bulanık sayı dizileri için Hausdorff metriğine göre limit infimum ve supremum kavramlarına rastlayamadık. Bu bağlamda üç kısma ayırdığımız bu bölümün ilk kısmında bulanık sayı dizileri için limit infimum ve supremum kavramlarını tanımlayarak bunlara dayalı bazı sonuçlar vereceğiz. Reel sayı dizileri için denk olan tanımların burada birbirlerinden farklı olduklarını göstereceğiz. İkinci kısımda ise Knopp (1930)'un çekirdek kavramını bulanık sayı dizileri için tanımlayarak bu tanımla limit infimum (supremum) kavramının ilişkisini inceleyeceğiz. Son kısımda ise bir dizinin klasik çekirdeği ve istatistiksel çekirdeği arasındaki ilişki ortaya konulacaktır.

5.1. Limit İnfimum ve Supremum

Bu kısımda reel sayı dizileri için birbirine denk fakat bulanık sayı dizileri için bu denklikten söz edemediğimiz iki tanım verilecek ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar ispatlanacaktır.

Tanım 5.1.1: $X = \{X_k\} \in B\left(L(\mathbb{R})\right)$ dizisinin limit infimumu ve supremumu

$$\liminf_{k\to\infty} X_k := \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} X_k$$

ve

$$\limsup_{k\to\infty} X_k := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} X_k$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem bu kısımdaki hemen her teoremin ispatında yer alacak önemli bir sonuçtur.

Yardımcı Teorem 5.1.2: $X = \{X_k\}$, $Y = \{Y_k\} \in C\,(L(\mathbb{R}))$ olsun. Eğer her $k > n_0$ için $X_k \preceq Y_k$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\lim X_k \preceq \lim Y_k$ dır.

İspat. $\nu := \lim X_k$ ve $\mu := \lim Y_k$ olsun. Tersine $\nu \npreceq \mu$ olduğunu kabul edelim, yani en az bir $\alpha_0 \in [0,1]$ için $\underline{\nu}^{\alpha_0} > \underline{\mu}^{\alpha_0}$ veya $\overline{\nu}^{\alpha_0} > \overline{\mu}^{\alpha_0}$ olsun. $\underline{\nu}^{\alpha_0} > \underline{\mu}^{\alpha_0}$ durumunun gerçeklendiğini kabul edelim (benzer şekilde $\overline{\nu}^{\alpha_0} > \overline{\mu}^{\alpha_0}$ kabulü için de aynı sonuç elde edilir). $\widetilde{\varepsilon} := \frac{\underline{\nu}^{\alpha_0} - \underline{\mu}^{\alpha_0}}{2}$ olsun. $\lim X_k = \nu$ olduğundan her $k > n_1$ için $d(X_k, \nu) < \widetilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $n_1 = n_1\,(\widetilde{\varepsilon})$ sayısı vardır. d metriğinin tanımından her $k > n_1$ için $|\underline{X}_k^{\alpha_0} - \underline{\nu}^{\alpha_0}| < \widetilde{\varepsilon}$, yani

$$\underline{X}_k^{\alpha_0} > \underline{\nu}^{\alpha_0} - \widetilde{\varepsilon}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde, $\lim Y_k = \mu$ olduğundan her $k > n_2$ için

$$\underline{Y}_k^{\alpha_0} < \underline{\mu}^{\alpha_0} + \widetilde{\varepsilon}$$

olacak şekilde bir $n_2 = n_2\,(\widetilde{\varepsilon})$ sayısı vardır. $N := \max\{n_1, n_2\}$ olsun. Bu halde her $k > N$ için

$$\underline{X}_k^{\alpha_0} > \underline{\nu}^{\alpha_0} - \widetilde{\varepsilon} \quad \text{ve} \quad \underline{Y}_k^{\alpha_0} < \underline{\mu}^{\alpha_0} + \widetilde{\varepsilon}$$

olduğundan

$$\underline{X}_k^{\alpha_0} > \frac{\underline{\nu}^{\alpha_0} + \underline{\mu}^{\alpha_0}}{2} \quad \text{ve} \quad \underline{Y}_k^{\alpha_0} < \frac{\underline{\nu}^{\alpha_0} + \underline{\mu}^{\alpha_0}}{2}$$

yazabiliriz. Buradan her $k > N$ için $X_k \npreceq Y_k$ bulunur ki bu da hipotezle çelişir.

Teorem 5.1.3: $X = \{X_k\} \in B\,(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere $\liminf X_k$ ve $\limsup X_k$ mevcut ise $\liminf X_k \preceq \limsup X_k$ dir.

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf_{k \geq n} X_k \preceq \sup_{k \geq n} X_k$ olduğundan Yardımcı Teorem 5.1.2 yardımıyla $\liminf X_k \preceq \limsup X_k$ elde edilir.

Teorem 5.1.4: $\liminf X_k$, $\liminf Y_k$, $\limsup X_k$, $\limsup Y_k$ mevcut ve yeterince büyük k lar için $X_k \preceq Y_k$ ise

$$\liminf X_k \preceq \liminf Y_k \qquad \text{ve} \qquad \limsup X_k \preceq \limsup Y_k$$

dir.

İspat. Her $k > n_0$ için $X_k \preceq Y_k$ olsun. İnfimum ve supremum tanımlarından her $n > n_0$ için

$$\inf_{k \geq n} X_k \preceq \inf_{k \geq n} Y_k \qquad \text{ve} \qquad \sup_{k \geq n} X_k \preceq \sup_{k \geq n} Y_k$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 5.1.2 den $\lim(\inf X_k) \preceq \lim(\inf Y_k)$ ve $\lim(\sup X_k) \preceq \lim(\sup Y_k)$ elde edilir.

Teorem 5.1.5: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ olsun. Eğer $\nu := \liminf X$ ve $\mu := \limsup X_k$ mevcut ise her $\varepsilon > 0$ için

$$M_1(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu - \varepsilon_1\} \quad \text{ve} \quad M_2(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu + \varepsilon_1\}$$

olmak üzere $M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon) \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ dir.

İspat. Tersine en az bir $\widetilde{\varepsilon} > 0$ için $M_1(\widetilde{\varepsilon}) \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ olsun. İnfimum tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için $\inf_{k \geq n} X_k \preceq X_n$ yazılabilir. Bu halde her $n \in M_1(\widetilde{\varepsilon})$ için

$$\inf_{k \geq n} X_k \preceq X_n \prec \nu - \widetilde{\varepsilon}_1,$$

yani

$$d\left(\inf_{k \geq n} X_k, \nu\right) > \widetilde{\varepsilon}$$

yazabiliriz. $M_1(\widetilde{\varepsilon}) \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ olduğundan son eşitsizlik $\lim_{n \to \infty} \inf_{k \geq n} X_k = \nu$ olmasıyla çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi bulanık sayı dizileri için Tanım 5.1.1 den farklı bir limit infimum (ve supremum) kavramı verelim.

Tanım 5.1.6: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ için

$$A'_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})\};$$

$$\overline{A'}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\} \in \mathcal{P}_\Delta(\mathbb{N})\};$$

$$B'_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})\};$$

$$\overline{B'}_X := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in \mathcal{P}_\Delta(\mathbb{N})\}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \operatorname*{Lim}_{k \to \infty} \inf X_k &: = \inf A'_X = \sup \overline{A'}_X \\ \operatorname*{Lim}_{k \to \infty} \sup X_k &: = \sup B'_X = \inf \overline{B'}_X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

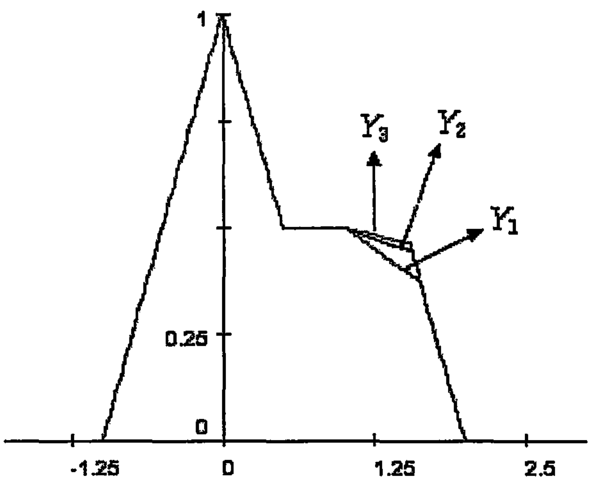
Not 5.1.7: Tanım 5.1.6 için 4. bölümde verilen hemen her sonuç küçük değişiklerle geçerli olacaktır. Yani 4. bölümde kullandığımız; bir $K \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\delta(K) = 0$ yerine $K \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$, $\delta(K) \neq 0$ yerine $K \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ ve $\delta(K) = 1$ yerine de $K \in \mathcal{P}_\Delta(\mathbb{N})$ notasyonlarını kullanırsak sonuçlar Tanım 5.1.6 için yine sağlanacaktır.

Şimdi Tanım 5.1.1 ve 5.1.6 nın birbirinden farklı olduğunu gösteren aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 5.1.8: $X = \{X_k\}$ bulanık sayı dizisi Örnek 3.10 da olduğu gibi tanımlansın. Tanım 5.1.6 dan $\operatorname{Lim\,sup} X_k = \operatorname{Lim\,inf} X_k = \mu$ dür. Fakat bu dizi için $\limsup X_k$ ve $\liminf X_k$ mevcut değildir. Gerçekten, grafiği Şekil 5.1.1 de verilen $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$ dizisi;

$$Y_n(x) = \begin{cases} x+1 & , -1 \leq x \leq 0 \\ -x+1 & ,0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & ,\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{5n}(x-1)+\frac{1}{2} & ,1 \leq x \leq \frac{1}{2}\left(\frac{15n-2}{5n-1}\right) \\ -x+2 & ,\frac{1}{2}\left(\frac{15n-2}{5n-1}\right) \leq x \leq 2 \\ 0 & ,\text{d.h.} \end{cases}$$

şeklindedir.



Şekil 5.1.1

Burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\left|\overline{Y}_n^{\frac{1}{2}} - \overline{\mu}^{\frac{1}{2}}\right| = \left|1 - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$ olduğundan $d(Y_n, \mu) \geq \frac{1}{2}$ olur. O halde $\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} X_k = \mu$ olamaz. Başka bir bulanık sayının da Y_n dizisinin limiti olması söz konusu olamayacağından $\liminf X_k$ mevcut değildir.

Bu örneğin bir sonucu olarak, $\text{Lim inf}\, X_k = \text{Lim sup}\, X_k$ olduğu halde dizinin limitinin mevcut olmadığını söyleyebiliriz.

Teorem 5.1.9: $\liminf X_k$ ve $\limsup X_k$ mevcut ise $\liminf X_k = \text{Lim inf}\, X_k$ ve $\limsup X_k = \text{Lim sup}\, X_k$ dır.
Teoremin ispatı 5.2 kısmında vereceğimiz Önerme 5.2.2 ve 5.2.3 den direkt olarak elde edilir. Bu nedenle teoremin ispatını bu kısımda vermiyoruz.

5.2. Çekirdek

Bu kısımda Knopp (1930)'un çekirdek tanımının (bknz. Cooke (1955)) bulanık sayı dizileri için de geçerli olduğu gösterilip, yukarıda tanımlanan limit infimum (supremum) kavramlarıyla çekirdek kavramı arasındaki bağıntılar incelenecektir.

Tanım 5.2.1: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için R_n; $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ terimlerini örten, $L(\mathbb{R})$ nin en küçük konveks ve kapalı aralığı olmak üzere X dizisinin çekirdeği,

$$coreX = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$$

şeklinde tanımlanır.

R_n lerin tanımından

$$R_1 \supseteq R_2 \supseteq R_3 \supseteq ...$$

olduğu açıktır.

Önerme 5.2.2: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ için

$$coreX = [\text{Lim inf}\, X, \text{Lim sup}\, X]$$

dir.

İspat. $coreX := [Y, W]$ ve $Z := \text{Lim inf}\, X$ olsun. Burada sadece $Y = Z$ olduğu gösterilecektir, benzer şekilde $\operatorname{Lim}\sup X = W$ olduğu da gösterilebilir.

Tersine $Y \neq Z$ olsun. Bu halde dört durum söz konusudur: En az bir $\lambda \in [0,1]$ için (i) $\overline{Z}^{\lambda} < \overline{Y}^{\lambda}$, (ii) $\underline{Y}^{\lambda} < \underline{Z}^{\lambda}$, (iii) $\underline{Z}^{\lambda} < \underline{Y}^{\lambda}$, (iv) $\overline{Y}^{\lambda} < \overline{Z}^{\lambda}$ olabilir. Şimdi bu durumların her biri için bir çelişki elde etmeye çalışacağız. Burada $\lambda \neq 0$ için ispat yapılacaktır. Benzer işlemler Teorem 2.2 yardımıyla $\lambda = 0$ için verilen tanımlama kullanılarak yapılabilir.

(i) nolu durum var olsun. Bu halde Teorem 2.2 ye göre $\overline{Z}^{\lambda} = \inf_{\mu \in A'_x} \overline{\mu}^{\lambda}$ yazabiliriz. Klasik infimum tanımına göre en az bir $\nu \in A'_X$ vardır öyle ki her $\varepsilon > 0$ için $\overline{\nu}^{\lambda} < \overline{Z}^{\lambda} + \varepsilon$ yazabiliriz. $\nu \in A'_X$ olduğundan $\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \nu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$, dolayısıyla $\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X_k}^{\lambda} < \overline{\nu}^{\lambda}\right\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ elde edilir. Buradan

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X_k}^{\lambda} < \overline{Z}^{\lambda} + \varepsilon\right\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N}) \tag{5.1}$$

yazabiliriz. Kabul gereği $\overline{Z}^{\lambda} < \overline{Y}^{\lambda}$ olduğundan, $\frac{|\overline{Z}^{\lambda} - \overline{Y}^{\lambda}|}{2}$ sayısından küçük pozitif bir $\widetilde{\varepsilon}$ seçebiliriz. Y, X dizisinin çekirdeğinin sol ucu olduğundan $\varepsilon > 0$ için $\overline{Y}^{\lambda} - \varepsilon$ den küçük olacak şekilde ancak sonlu sayıda $\overline{X_k}^{\lambda}$ kalır. Özel olarak $\widetilde{\varepsilon}$ için de

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X_k}^{\lambda} < \overline{Y}^{\lambda} - \widetilde{\varepsilon}\right\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \tag{5.2}$$

olur. Sonuç olarak (5.1) ve (5.2) aynı anda gerçeklenmez. Bu ise çelişkidir.

(ii) nolu durum var olsun. Bu halde Teorem 2.2 ye göre $\underline{Z}^{\lambda} = \sup_{\mu \in \overline{A'}_X} \underline{\mu}^{\lambda}$ yazabiliriz. Klasik supremum tanımına göre en az bir $\nu \in \overline{A'}_X$ vardır öyle ki her $\varepsilon > 0$ için $\underline{\nu}^{\lambda} > \underline{Z}^{\lambda} - \varepsilon$ yazabiliriz. $\nu \in \overline{A'}_X$ olduğundan $\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \nu\} \in \mathcal{P}_{\Delta}(\mathbb{N})$, dolayısıyla $\left\{k \in \mathbb{N} : \underline{X_k}^{\lambda} > \underline{\nu}^{\lambda}\right\} \in \mathcal{P}_{\Delta}(\mathbb{N})$ elde edilir. Buradan

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \underline{X_k}^{\lambda} > \underline{Z}^{\lambda} - \varepsilon\right\} \in \mathcal{P}_{\Delta}(\mathbb{N}) \tag{5.3}$$

yazabiliriz. Kabul gereği $\underline{Y}^{\lambda} < \underline{Z}^{\lambda}$ olduğundan $\frac{|\underline{Y}^{\lambda} - \underline{Z}^{\lambda}|}{2}$ sayısından küçük pozitif bir $\widetilde{\varepsilon}$ seçebiliriz. Y, X dizisinin çekirdeğinin sol ucu olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\underline{Y}^{\lambda} + \varepsilon$ den küçük olacak şekilde sonsuz sayıda $\underline{X_k}^{\lambda}$ kalır. Özel olarak $\widetilde{\varepsilon}$ için de

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \underline{X_k}^{\lambda} < \underline{Y}^{\lambda} + \widetilde{\varepsilon}\right\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N}) \tag{5.4}$$

olur. Sonuç olarak (5.3) ve (5.4) aynı anda gerçeklenmez.

(iii) nolu durum var olsun. $\underline{Y}^{\lambda} > \underline{Z}^{\lambda}$ olduğundan $\frac{|\underline{Y}^{\lambda} - \underline{Z}^{\lambda}|}{2}$ sayısından küçük pozitif bir $\widetilde{\varepsilon}$ seçebiliriz. $\underline{Z}^{\lambda} = \sup\limits_{\mu \in \overline{A'}_X} \underline{\mu}^{\lambda}$ olduğundan $Y - \widetilde{\varepsilon}_1 \notin \overline{A'}_X$ yazılabilir. Eğer $Y - \widetilde{\varepsilon}_1 \in \overline{A'}_X$ olsaydı, $\sup\limits_{\mu \in \overline{A'}_X} \underline{\mu}^{\lambda}$ değeri $\underline{Z}^{\lambda}$ dan daha büyük olurdu. $Y - \widetilde{\varepsilon}_1 \notin \overline{A'}_X$ olduğundan

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ Y - \widetilde{\varepsilon}_1\} \in \mathcal{P}_{\Delta}(\mathbb{N})$$

olamaz, yani sonsuz terim için $X_k \succ Y - \widetilde{\varepsilon}_1$ eşitsizliği sağlanmaz. Bu ise Y nin X dizisinin çekirdeğinin sol ucu olmasıyla çelişir.

(iv) nolu durum var olsun. $\overline{Y}^{\lambda} < \overline{Z}^{\lambda}$ olduğundan $\frac{|\overline{Y}^{\lambda} - \overline{Z}^{\lambda}|}{2}$ sayısından küçük pozitif bir $\widetilde{\varepsilon}$ seçebiliriz. Y bulanık sayısı X dizisinin çekirdeğinin sol ucu olduğundan

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X_k}^{\lambda} < \overline{Y}^{\lambda} + \widetilde{\varepsilon}\right\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N}) \tag{5.5}$$

ve $Z := \text{Lim inf}\, X$ olduğundan

$$\left\{k \in \mathbb{N} : \overline{X_k}^{\lambda} < \overline{Z}^{\lambda} - \widetilde{\varepsilon}\right\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \tag{5.6}$$

yazılabilir. Fakat $\widetilde{\varepsilon}$ nın seçilişine göre (5.5) ve (5.6) aynı anda gerçeklenmez.

Önerme 5.2.3: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ olsun. Eğer $\liminf X$ ve $\limsup X$ mevcut ise

$$coreX = [\liminf X, \limsup X]$$

dir.

İspat. İlk olarak

$$[\liminf X, \limsup X] \subseteq coreX \tag{5.7}$$

kapsamasının gerçeklendiğini gösterelim. $\gamma \in [\liminf X, \limsup X]$ olsun. Bu halde $\liminf X \preceq \gamma \preceq \limsup X$ yazabiliriz. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma \in R_n$ olduğunu göstermeliyiz. Tersine, $\gamma \notin R_{n_0}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var olsun. R_n lerin tanımından her $n \geq n_0$ için $\gamma \notin R_n$ yazabiliriz. $R_n := [A_n, B_n]$ olsun. $\gamma \notin R_{n_0} = [A_{n_0}, B_{n_0}]$ olduğundan

$$\underline{\gamma}^{\alpha_0} < \underline{A_{n_0}}^{\alpha_0} \text{ veya } \overline{\gamma}^{\alpha_0} < \overline{A_{n_0}}^{\alpha_0} \text{ veya } \underline{\gamma}^{\alpha_0} > \underline{B_{n_0}}^{\alpha_0} \text{ veya } \overline{\gamma}^{\alpha_0} > \overline{B_{n_0}}^{\alpha_0}$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0,1]$ vardır. Burada sadece

$$\underline{\gamma}^{\alpha_0} < \underline{A_{n_0}}^{\alpha_0}$$

durumu incelenecektir. Diğer durumlar da benzer şekilde ispatlanabilir. $R_{n_0} \supseteq R_{n_0+1} \supseteq R_{n_0+2} \supseteq ...$ olduğundan

$$\underline{\gamma}^{\alpha_0} < \underline{A_{n_0}}^{\alpha_0} \leq \underline{A_{n_0+1}}^{\alpha_0} \leq \underline{A_{n_0+2}}^{\alpha_0} \leq ...$$

yazabiliriz. Bu ise $\liminf X \preceq \gamma$ ile çelişir. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma \in R_n$, yani $\gamma \in coreX$ elde edilir. Böylelikle (5.7) kapsaması sağlanır.

Şimdi de

$$coreX \subseteq [\liminf X, \limsup X] \tag{5.8}$$

olduğunu gösterelim. $Y_0 := \liminf X$ ve $Y_n := \inf_{k \geq n} X_k$ olsun. Bu halde $\{Y_n\}$ dizisi monoton artandır, dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Y_n \preceq Y_0 \tag{5.9}$$

yazabiliriz.

$\gamma \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R_n$ olsun, bu halde her $n \in \mathbb{N}$ için $\gamma \in R_n$, yani

$$A_n \preceq \gamma \tag{5.10}$$

yazılabilir. Ayrıca $\{Y_n\}$ dizisinin tanımına göre her $k \geq n$ için $Y_n \preceq X_k$ olduğundan, $[Y_n, B_n]$ aralığının $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ terimlerini örttüğünü söyleyebiliriz. Diğer taraftan R_n ler $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, ...$ terimlerini örten en küçük kapalı konveks aralıklar olduklarından her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n \subseteq [Y_n, B_n]$, yani

$$Y_n \preceq A_n \tag{5.11}$$

olmalıdır. (5.10) ve (5.11) den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Y_n \preceq \gamma \tag{5.12}$$

yazabiliriz.

Eğer $\gamma \succeq Y_0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanacaktır. Tersine, $\gamma \not\succeq Y_0$ olsun. Bu halde

$$\underline{\gamma}^{\alpha_0} < \underline{Y_0}^{\alpha_0} \tag{5.13}$$

veya

$$\overline{\gamma}^{\alpha_0} < \overline{Y_0}^{\alpha_0}$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in [0,1]$ vardır. Burada (5.13) durumunun gerçeklendiğini kabul edelim. Benzer şekilde diğer eşitsizlik için de ispat yapılabilir. $\widetilde{\varepsilon} := \underline{Y_0}^{\alpha_0} - \underline{\gamma}^{\alpha_0}$ olsun. $\lim Y_n = Y_0$ olduğundan her $n \geq N$ için $d(Y_n, Y_0) < \widetilde{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $N := N(\widetilde{\varepsilon})$ sayısı vardır. d metriğinin tanımından $n \geq N$ için

$$\left|\underline{Y_n}^{\alpha_0} - \underline{Y_0}^{\alpha_0}\right| < \widetilde{\varepsilon}$$

yazabiliriz. O halde (5.9) bağıntısından ve $\widetilde{\varepsilon}$ nın tanımından $\underline{Y_0}^{\alpha_0} - \underline{Y_n}^{\alpha_0} < \widetilde{\varepsilon} = \underline{Y_0}^{\alpha_0} - \underline{\gamma}^{\alpha_0}$, yani her $n \geq N$ için

$$\underline{Y_n}^{\alpha_0} > \underline{\gamma}^{\alpha_0}$$

yazabiliriz. Bu ise (5.12) eşitsizliği ile çelişir.
Benzer şekilde $\gamma \preceq \limsup X$ olduğu da gösterilebilir. O halde $\gamma \in [\liminf X, \limsup X]$ elde edilir.

Sonuç 5.2.4: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ için $\liminf X$ ve $\limsup X$ mevcut ise $\liminf X = \text{Lim inf}\, X$ ve $\limsup X = \text{Lim sup}\, X$ dir.
İspat. Önerme 5.2.2 ve 5.2.3 den ispat açıktır.

Teorem 5.2.5: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ için $L_X \subseteq core X$ dir.
İspat. $\gamma \in L_X$ olsun. Burada sadece $\gamma \preceq \text{Lim sup}\, X$ olduğu gösterilecektir. Benzer şekilde $\text{Lim inf}\, X \preceq \gamma$ olduğu da ispatlanabilir.
$\gamma \in L_X$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \gamma) < \varepsilon\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 4.10 dan her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k \prec \gamma + \varepsilon_1\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$$

yazabiliriz.

$$\{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k \prec \gamma + \varepsilon_1\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k\}$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : \gamma - \varepsilon_1 \prec X_k\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ yazabiliriz. B'_X kümesinin tanımından $\gamma - \varepsilon_1 \in B'_X$ ve supremum tanımından da her $\varepsilon > 0$ için $\gamma - \varepsilon_1 \preceq \sup B'_X$ dır. O halde $\gamma \preceq \sup B'_X = \text{Lim sup}\, X$ elde edilir.

Sonuç olarak, Önerme 5.2.2 ye göre $\gamma \in coreX$ yazılabilir.

Reel sayılar kümesi, bulanık sayılar kümesi içine gömülebildiğinden (bir anlamda altkümesi olduğundan), reel sayı dizileri için sağlanmayan önermeler bulanık sayı dizileri için de sağlanmayacaktır.

Örnek 5.2.6:

(a) $Z = \{Z_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ için $L_Z \not\supseteq coreZ$ dir.

$X = \{X_k\}$ dizisi ve μ sayısı Örnek 5.1.8 de olduğu gibi verilsin. $Z = \{Z_k\}$ dizisini

$$\nu(x) := \begin{cases} x-6 & ,x \in [6,7] \\ -x+8 & ,x \in (7,8] \\ 0 & ,\text{d.h.} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$Z_k := \begin{cases} X_k & ,k \text{ tek ise} \\ \nu & ,\text{d.h.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $L_Z = \{\nu\}$ ve $coreZ = [\mu, \nu]$ biçimindedir.

(b) $X, Y \in B(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere $coreX = coreY$ olmasına rağmen $L_X \neq L_Y$ olabilir.

$\mu \prec \nu \prec \gamma$ olacak şekilde $\mu, \nu, \gamma \in L(\mathbb{R})$ seçelim.

$$\begin{aligned} X &= \{X_k\} = \{\mu, \gamma, \mu, \gamma, \mu, \gamma, ...\}, \\ Y &= \{Y_k\} = \{\mu, \nu, \gamma, \mu, \nu, \gamma, \mu, \nu, \gamma, ...\} \end{aligned}$$

olsun. Burada $coreX = coreY = [\mu, \gamma]$ olduğu halde $L_X = \{\mu, \gamma\}$ ve $L_Y = \{\mu, \nu, \gamma\}$ şeklindedir.

Reel sayı dizileri için geçerli olan bazı önermeler aşağıdaki örnekten görüleceği gibi bulanık sayı dizileri için geçerli olmayabilir.

Örnek 5.2.7:

(a) $X \in B(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere $coreX$ tek nokta kümesi olduğu halde dizi yakınsak olmayabilir.

Örnek 5.1.8 deki X dizisi için $coreX = \{\mu\}$ olduğu halde dizi yakınsak değildir.

(b) $X \in B(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere L_X tek nokta kümesi olduğu halde dizi yakınsak olmayabilir.

Örnek 5.2.6 (a) daki Z dizisi için $L_Z = \{\nu\}$ olduğu halde dizi yakınsak değildir.

(c) $X \in B(L(\mathbb{R}))$ olmak üzere $L_X = coreX$ ve tek nokta kümesi olduğu halde dizi yakınsak olmayabilir.

$X = \{X_k\}$ dizisi Örnek 5.1.8 deki gibi olmak üzere $Z = \{Z_k\}$ dizisini

$$Z_k := \begin{cases} X_k & ,k \text{ tek ise} \\ \mu & ,\text{d.h.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $L_Z = coreZ = \{\mu\}$ olduğu halde dizi yakınsak değildir.

Bir dizinin yakınsaklığında önemli bir kriter olan Örnek 5.2.7 (a) önermesinin bulanık sayı dizileri için de geçerli olabilmesi için dizi üzerine konulan koşulu içeren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.2.8: $coreX = \{\mu\}$ olsun. Eğer her $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ için $K_1(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu - \varepsilon_1\}$ ve $K_2(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \nsim \mu + \varepsilon_1\}$ olmak üzere $K_1(\varepsilon), K_2(\varepsilon) \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ olacak şekilde bir $\varepsilon^0 > 0$ sayısı varsa $\lim X_k = \mu$ dır.

İspat. $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0)$ olsun. Lim inf $X_k = \mu$ olduğundan Not 5.1.7 dikkate alınarak Teorem 4.4 den her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu - \varepsilon_1\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \tag{5.14}$$

yazılabilir. Benzer şekilde Lim sup $X_k = \mu$ olduğundan Not 5.1.7 dikkate alınarak Teorem 4.6 dan her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : X_k \succ \mu + \varepsilon_1\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) \tag{5.15}$$

yazılabilir.

Teoremin hipotezinden ve (5.14), (5.15) den $M_1(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \succeq \mu - \varepsilon_1\}$ ve $M_2(\varepsilon) := \{k \in \mathbb{N} : X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\}$ olmak üzere $M_1(\varepsilon), M_2(\varepsilon) \in \mathcal{P}_\Delta(\mathbb{N})$ yazabiliriz. M_1 ve M_2 kümelerinin tanımından

$$M_1(\varepsilon) \cap M_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : \mu - \varepsilon_1 \preceq X_k \preceq \mu + \varepsilon_1\}$$

dir. Bu halde Yardımcı Teorem 4.10 dan

$$M_1(\varepsilon) \cap M_2(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \leq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. Böylece $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{P}_\triangle(\mathbb{N})$, yani $\{k \in \mathbb{N} : d(X_k, \mu) > \varepsilon\} \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ elde edilir. Sonuç olarak $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan son ifade bize $\lim X_k = \mu$ eşitliğini verir.

5.3. İstatistiksel Çekirdek

Bu kısımda, bulanık sayı dizileri için istatistiksel çekirdek kavramı tanıtılacak ve istatistiksel çekirdeğin klasik çekirdeğin altkümesi olduğu gösterilecektir.

Tanım 5.3.1: $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$st - coreX := [st - \liminf X, st - \limsup X]$$

şeklinde tanımlanır.

Not 5.3.2: Bir $X = \{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ dizisinin istatistiksel çekirdeği Fridy ve Orhan (1997)'ın tanımına benzer şekilde de verilebilir: $\mathcal{H}(X)$, hemen her k için X_k terimlerini içeren $L(\mathbb{R})$ nin kapalı konveks aralıklarının ailesi olmak üzere X dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$st - coreX := \bigcap_{H \in \mathcal{H}(X)} H$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu tanım ile Tanım 5.3.1 in denk oldukları Not 5.1.7 dikkate alınarak Önerme 5.2.2 ye benzer şekilde ispatlanabilir.

Teorem 5.3.3: $X = \{X_k\} \in B(L(\mathbb{R}))$ ise

$$st - coreX \subseteq coreX$$

dir.

İspat. $st - \liminf X \succeq \text{Lim inf}\, X$ olduğunu, yani

$$\inf A_X \succeq \inf A'_X$$

dolayısıyla

$$\{\mu \in L(\mathbb{R}) : \delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}) \neq 0\} \subseteq \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})\}$$

olduğunu gösterelim. $\mu \in A_X$ olsun, bu halde $\delta(\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\}) \neq 0$ yazılabilir. Yoğunluk tanımından $\{k \in \mathbb{N} : X_k \prec \mu\} \in \mathcal{P}_I(\mathbb{N})$ elde edilir. Bu halde $\mu \in A'_X$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

$st-\limsup X \preceq \mathrm{Lim}\sup X$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 5.3.4: Bu örnekte Teorem 5.3.3 deki kapsamanın kesin olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned}
\mu(x) &: =\begin{cases} x+2 & ,x\in[-2,-1] \\ -x & ,x\in[-1,0] \\ 0 & ,\text{d.h.}\end{cases}, \\
\nu(x) &: =\begin{cases} x^2 & ,x\in[0,1] \\ (x-2)^2 & ,x\in[1,2] \\ 0 & ,\text{d.h.}\end{cases}, \\
\gamma(x) &: =\begin{cases} x-4 & ,x\in[4,5] \\ -(x-5)^2+1 & ,x\in[5,6] \\ 0 & ,\text{d.h.}\end{cases}, \\
\varphi(x) &: =\overline{8}_1
\end{aligned}$$

olmak üzere $X=\{X_k\}$ dizisi

$$X_k := \begin{cases} \mu & ,\ k \text{ tek ve tam kare ise} \\ \nu & ,\ k \text{ tek fakat tam kare değil ise} \\ \gamma & ,\ k \text{ çift fakat tam kare değil ise} \\ \varphi & ,\text{d.h.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\mu \prec \nu \prec \gamma \prec \varphi$ ve $\mathrm{Lim}\inf X = \mu$, $\mathrm{Lim}\sup X = \varphi$, $st-\liminf X = \nu$ ve $st-\limsup X = \gamma$ şeklindedir.

Sonuç 5.3.5: $X=\{X_k\} \in SB(L(\mathbb{R}))$ ise $\Gamma_X \subseteq st-coreX$ dir.

İspat. Teorem 4.17 ve Tanım 5.3.1 den açıktır.

Örnek 5.1.8 de verilen $X = \{X_k\}$ dizisi için $st - coreX = \{\mu\}$ olduğu halde $\Gamma_X = \varnothing$ olabilir, yani Sonuç 5.3.5 deki kapsama kesindir.

6. KAYNAKLAR

Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., 1972. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans. Systems Man Cybernet, 2, 30-34.

Congxin, W., Cong, W., 1997. The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application. Journal Math. Anal. Appl., 210, 499-511.

Connor, J.S., 1988. The statistical and strong P-Cesáro convergence of sequences. Analysis, 8, 47-63.

Connor, J.S., 1989. On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad. Math. Bull., 32, 194-198.

Cooke, R.G., 1955. Infinite Matrices and Sequence Spaces. Dover Publ. Inc., New York.

Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

Dubois, D., Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, New York.

Duman, O., Orhan, C., 2004. $\mu-$statistically convergent function sequences. Czech. Math. J., (2)54, 413-422.

Erdös, P., Tenenbaum, G., 1989. Sur les densities de certaines suites d'entries. Proc. London Math. Soc., 50, 417-438.

Fang, J-x., Huang, H., 2004. On the level convergence of a sequence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 147, 417-435.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. Collog. Math., 2, 241-244.

Freedman, A.R., Sember, I.J., 1981. Densities and summability. Pacific J. Math., 95, 293-305.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points. Proc. Amer. Math. Soc., 4, 1187-1192.

Fridy, J.A., Orhan C., 1997. Statistical limit superior and limit inferior. Proc. Amer. Math. Soc., 125, 3625-3631.

Fridy, J.A., Orhan C., 1997. Statistical core theorems. J. Math. Anal. Appl., 208, 520-527.

Kaleva, O., 1985. On the convergence of fuzzy sets. Fuzy Sets and Systems, 17, 53-65.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1984. Introduction to Fuzzy Arithmetic. Van Nostrand Reinhohld.

Kline, J.L., 1995. Statistical Convergence and Densities Generated by Sequences of Measures. Ph.D.Thesis, Ohio University, USA.

Knopp, K., 1930. Zur theorie der limitierungsverfahren (Erste Mitteilung), Math. Z., 31, 97-127.

Kostyrko, P., Salat, T., Wilczynski, W., 2001. $\mathcal{I}-$convergence. Real Anal.Exch., (2)26, 669-685.

Kwon, J.S., 2000. On statistical and $p-$cesaro convergence of fuzzy numbers. Korean J.C.A.M., (3)9, 95-203.

Kwon, J.S., Shim, H.T., 2001. Remark on lacunary statistical convergence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 123, 85-88.

Mamedov, M.A., Pehlivan, S., 2000. Statistical convergence of optimal pahts. Math. Jap., (1)52, 51-55.

Matloka, M., 1986. Sequences of fuzzy numbers. Busefal, 28, 28-37.

Miller, H.I., Orhan, C., 2001. On almost convergent and statistically convergent subsequences. Acta Math. Hung., (1-2)93, 135-151.

Nanda, S., 1989. On sequence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 33, 123-126.

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An Introduction to the Theory of Numbers. fifth edition, John Wiley, New York.

Nuray, F., Savaş, E., 1995. Statistical convergence of sequences of fuzzy numbers. Math. Slovaca, (3)45, 269-273.

Nuray, F., 1998. Lacunary statistical convergence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 99(3), 353-355.

Pehlivan, S., Mamedov, M.A., 2000. Statistical cluster point and turnpike. Optimization, 48, 93-106.

Pehlivan, S., Karaev, M.T., 2004. Some results related with statistical convergence and Berezin symbols. J. Math. Anal. Appl., (2)299, 333-340.

Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions. J. Math. Anal. Appl., 91, 552-558.

Rockafellar, R., Tyrrell, R., Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1997.

Śalăt, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. Math. Slovaca, 30, 139-150.

Savaş, E., 2000. A note on sequence of fuzzy numbers. Information Sciences, 124, 297-300.

Schoenberg, I.J., 1959. The integrability of certain functions and related summability methods. Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinarie et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2, 73-74.

Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. Information Control, 8, 338-353.

EKLER

Tez Konusunda Yapılan Yayınlar ve Bildiriler

- Aytar,S., 2004. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers. Information Sciences, 165, 129-138.
- Aytar,S., Mamedov,M., Pehlivan,S., Statistical limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems (Sunuldu)
- Aytar,S., Pehlivan,S., 2004. On statistical cluster points of a sequence of fuzzy numbers, International Workshop on Analysis and its Application, September 7-11, Mersin, Türkiye. (Özet olarak basıldı)
- 5. Bölüm henüz yayın haline dönüştürülmemiştir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Salih AYTAR
Doğum yeri	:	Antalya
Doğum Yılı	:	1975
Medeni Hali	:	Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise	:	1990-1994 Antalya Teknik Lisesi
Lisans	:	1994-1998 Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	:	1999-2001 Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

1998-1999 MEB- Karaman Merkez Yeşildere Lisesi Matematik Öğretmenliği

1999- .... SDÜ- Fen Edebiyat Fakültesi Arş. Gör.