T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYLARDA DEJENERE EĞRİLER

Özlem ÇADIRCI

Danışman
Doç . Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2005

İÇİNDEKİLER

ÖZET

(SEMİ-ÖKLİDYEN UZAYLARDA DEJENERE EĞRİLER)

Bu tez çalışmasının amacı indeksi üç olan semi-Öklidyen uzaylarda dejenere eğrilerin Frenet çatılarını ve Frenet çatılarının yardımıyla Cartan çatılarını elde etmektir. Daha sonra da keyfi indeksler için bazı sonuçlara varılması hedeflenmektedir. Bunun için, indeksin iki olduğu durumdaki çatılar incelenmiş ve yeni duruma uygun değişiklikler yapılmıştır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; konunun tarihsel gelişimine yer verildi.

İkinci bölümde; simetrik bilineer formlar, semi-Öklidyen uzaylar, dejenere eğriler ve dejenere eğriler için Cartan çatısı ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; indeksi iki olan bir semi-Öklidyen uzayda dejenere eğrilerin tip-aileleri ve bu ailelerin Frenet formülleri elde edildi. Daha sonra, Frenet formülleri yardımıyla Cartan çatısı ve eğrilikleri verilerek varlık ve teklik teoremi ifade edildi.

Dördüncü bölümde; indeksi üç olan bir semi-Öklidyen uzayda dejenere eğrilerin tip-aileleri incelenerek bu aileler için Frenet formülleri elde edildi. Daha sonra, Frenet formülleri yardımıyla Cartan çatısı ve eğrilikleri verilerek varlık ve teklik teoremi ifade edildi. İndeksi üç olan semi-Öklidyen uzayda Cartan çatısı kullanılarak Cartan eğriliklerini hesaplamaya örnekler verildi.

Beşinci ve son bölümde; keyfi indeksli bir semi-Öklidyen uzayda dejenere eğrilerin dejenerelik derecesi, aile sayısı verilerek Cartan eğriliklerinin sayısına bağlı olarak bir sınıflama verildi.

Anahtar Kelimeler: Semi-Öklidyen uzay, Dejenere eğri, Frenet formülleri, Cartan çatısı.

ABSTRACT

(DEGENERATE CURVES IN SEMI-EUCLIDEAN SPACES)

It is aimed to obtain Frenet frames and the Cartan frame of a degenerate curve in a semi-Euclidean space of index three.Then, some results for arbitrary indexes will be given. For this purpose, the frames in the case index is two are studied, and after suitable changes the new frames are obtained.

This thesis consist of five chapters.

In the first chapter; the historical background of the subject was considered.

In the second chapter; some fundamental definitions and theorems about symmetric bilinear forms, semi-Euclidean spaces, degenerate curves and Cartan frame for degenerate curves were given.

In the third chapter; Frenet equations of all possible family-types of degenerate curves in a semi-Euclidean space of index 2 were obtained.After giving the Cartan frame and curvatures, the existence and uniqueness theorems were stated.

In the fourth chapter; Frenet equations of all possible family-types of degenerate curves in a semi-Euclidean space of index 3 were obtained. After giving the Cartan frame and curvatures, the existence and uniqueness theorems were stated. Some examples about calculation of the Cartan curvatures by using the Cartan frame in a semi-Euclidean space of index 3 were given.

In the final chapter; a classification for degenerate curves related to degeneration degree, number of families and the number of the Cartan curvatures were given.

Keywords: Semi-Euclidean space, Degenerate curve, Frenet equations, Cartan frame.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kıymetli tecrübelerinden ve bilgilerinden faydalandığım, çalışmamın her aşamasında beni destekleyen danışman hocam Doç. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'e teşekkür ederim.

SİMGELER DİZİNİ

IR	: Reel sayılar cismi
V	: Reel vektör uzayı
M	: Semi-Riemann manifoldu
< , >	: Skalar çarpma
q	: Semi-Öklidyen uzayın indeksi
$T_P M$	: $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
Rad (W)	: W uzayının radikali
ε_i	: $\left\{\begin{matrix} -1, & 1 \leq i \leq q \\ +1, & q+1 \leq i \leq n \end{matrix}\right\}$
IR_q^n	: n-boyutlu q-indeksli semi-Öklidyen uzayı
$\oplus$	: Direkt toplam
$\perp$	: Ortogonal direkt toplam
$\{r_i\}$	: Nulluk derecesi dizisi
$\{q_i\}$	: İndeks dizisi
r	: Dejenerelik derecesi
L, N, W	: Frenet vektörleri
k_i	: i-yinci eğrilik

1. GİRİŞ

Riemann geometrisi teorik fiziğin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır. Bununla birlikte özel ve genel relativiteyi açıklamakta yetersiz kalmıştır. Bu yüzden indefinit metrikli manifoldlar kullanılmıştır. İndefinit metrikli manifoldlarda vektörlerin dolayısıyla eğrilerin farklı tipleri ortaya çıkmaktadır. Bu eğrilerden null eğrilerin ve dejenere eğrilerin geometrileri klasik eğri teorisindekinden biraz farklıdır.

Null eğrilerle ilgili sistemli ilk çalışma 1969 da fizikçi olan W. B. Bonnor tarafından yapılmıştır. Bu çalışma Bejancu tarafından Lorentz manifoldlara ve semi-Riemann manifoldlara genelleştirilmiştir. Daha sonra null eğrilerden başka dejenere eğrilerin de bulunduğunu 1984 de Bonnor göstermiştir.

Lorentz durumunda sadece dejenere space-like eğriler bulunmasına rağmen indeks arttıkça time-like dejenere eğriler de görülmektedir. Lorentz manifoldlarında dejenere space-like eğrilerin geometrisi Ferrandez, Gimenez, Lucas tarafından 2003 te verilmiştir. Yine aynı grup tarafından indeks 2 de dejenere eğrilerin geometrisi elde edilmiştir.

Dejenere eğrilerin fizikteki önemi Nersessian, Ferrandez, Gimenez, Lucas, Hughston, Shaw, Synge tarafından belirtilmiştir. Bu çalışmanın da yüksek boyutlarda ve indekslerde yapılan incelemeler için faydalı olacağını düşünmekteyiz.

Bu çalışmada dejenere eğrilerin 3-indeksli semi-Öklidyen uzayda Frenet formülleri incelendi. Daha sonra q-indeksli bir semi-Öklidyen uzayda dejenere eğrilerin bir sınıflaması verildi.

2. KAYNAK BİLGİSİ

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$< , > : VxV \rightarrow IR$

dönüşümü $\forall a, b \in IR$ *ve* $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{\omega} \in V$ için,

i) $< \vec{u}, \vec{v} > = < \vec{v}, \vec{u} >$

ii) $< a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{\omega} > = a < \vec{u}, \vec{\omega} > + b < \vec{v}, \vec{\omega} >$
$< \vec{u}, a\vec{v} + b\vec{\omega} > = a < \vec{u}, \vec{v} > + b < \vec{v}, \vec{w} >$

özeliklerine sahip ise < , > dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir (O' Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. V, bir reel vektör uzayı ve $< , > : VxV \rightarrow IR$, bir simetrik bilineer form olsun. Eğer

$$<\xi, v>=0, \quad \forall v \in V$$

olacak şekilde V nin en az bir $\xi \neq 0$ vektörü varsa; < , > simetrik bilineer formuna V de *dejeneredir*, aksi halde *non – dejeneredir* denir (Ferrandez vd., 2001).

Tanım 2.1.3. V, bir reel vektör uzayı ve $< , > : VxV \rightarrow IR$, bir simetrik bilineer form olmak üzere

$$\text{Rad } V=\{\xi \in V \mid <\xi, v>=0, \quad v \in V\}$$

cümlesine V nin < , > simetrik bilineer formuna göre *radikali* denir. Burada Rad V nin boyutuna < , > nin *nulluk derecesi* denir ve *nullV* ile gösterilir (Ferrandez vd., 2001).

Tanım 2.1.4. Bir V vektör uzayı üzerinde bir < , > simetrik bilineer formuna

i) $\forall 0 \neq v \in V$ için $<v, v>>0$ ($<v, v><0$) ise *pozitif (negatif) definit (tanımlı),*

ii) $\forall v \in V$ için $<v, v> \geq 0$ ($<v, v> \leq 0$) ise ve $<v, v>=0$ olacak şekilde en az bir $v \in V$ varsa, $< , >$ simetrik bilineer formuna *pozitif (negatif) semi-definit* (yarı-tanımlı) denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpma* denir. V üzerindeki bir skalar çarpma $< , >$ ise $(V, < , >)$ ikilisine *skalar çarpımlı vektör uzayı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. V, bir reel vektör uzayı ve $< , >$ V de tanımlı bir skalar çarpma olsun. $< , >|_{W\times W}$ nın negatif definit olduğu en geniş $W \subset V$ altuzayının boyutuna $< , >$ skalar çarpmasının V de *indeksi* denir ve q ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. $(V, < , >)$ bir skalar çarpım uzayı olsun

$$\|.\|: V \to IR$$

$$\|v\|=|<v,v>|^{1/2} \quad \forall v \in V$$

şeklinde tanımlı fonksiyona V vektör uzayında bir *norm* denir. Burada $\|v\|$ skaları v *vektörünün uzunluğu* olarak adlandırılır. Uzunluğu 1 olan yani $<v, v>= \pm 1$ olan vektöre *birim vektör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.8. Bir $(V, < , >)$ skalar çarpım uzayı verilsin. Bir $v \in V$ vektörüne,

i) $<v, v> >0$ veya $v=0$ ise *spacelike (uzay benzeri)*,

ii) $<v, v> <0$ ise *timelike* (zaman benzeri),

iii) $<v, v>=0$ ise *null* veya *lightlike (ışık benzeri)*

vektör denir. v nin içinde bulunduğu kategoriye v vektörünün *kozsul karakteri* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. $(V, < , >)$ bir skalar çarpım uzayı olsun. Eğer $u, v \in V$ gibi iki vektör için $<u, v>=0$ ise bu vektörlere ortogonaldirler denir ve $u \perp v$ biçiminde gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.10. $(V, <,>)$ skalar çarpım uzayı olsun. V nin iki alt uzayı U ve W olmak üzere, $\forall u \in U$, $\omega \in W$ için $<u, \omega>=0$ oluyorsa, U ve W ya ortogonal altuzaylar denir ve $U \perp W$ biçiminde gösterilir.

Burada V vektör uzayının bir W altuzayının ortogonal tümleyeni

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, \omega\rangle = 0\}, \qquad \forall \omega \in W$$

cümlesidir (O'Neill, 1983).

Önerme 2.1.11. Bir V skalar çarpım uzayının bir altuzayı W olsun. O zaman;

i) boy W+boy$W^{\perp}$=boyV

ii) ($(W^{\perp})^{\perp}$=W

iii) RadW=Rad$W^{\perp}$=Rad(W$\cap W^{\perp}$)

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Sonuç 2.1.12. Bir V skalar çarpım uzayının bir altuzayı W olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) W bir non-dejenere altuzaydır.

ii) $W^{\perp}$ bir non-dejenere altuzaydır.

iii) W ve $W^{\perp}$ birbirini tümleyen ortogonal altuzaylardır.

iv) V vektör uzayı W ve $W^{\perp}$ altvektör uzaylarının ortogonal direkt toplamıdır, yani W$\perp W^{\perp}$ = V dir.

Ayrıca (iv) den görülür ki, bir non-dejenere W altuzayı için

$$\text{indV} = \text{indW} + \text{ind}W^{\perp}$$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.13. V skalar çarpım uzayının birbirine ortogonal birim vektörlerinin oluşturduğu bir E={e_1,...., e_n} cümlesine bir ortonormal cümle denir ve bu vektörler lineer bağımsızdır. Böylece V nin n tane ortonormal vektörünün oluşturduğu cümleye V nin *ortonormal bazı* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.1.14. B={V_1, ..., V_n} sistemi bir V skalar çarpım uzayının bir bazı olsun. r_i ve q_i, $0 \le i \le n$ sayıları da S_p{V_1,...., V_i} cümlesinin sırasıyla nulluk derecesi ve indeksi olsun. $r_0 = q_0 = 0$ olmak üzere {r_i, $0 \le i \le n$} ve {q_i $0 \le i \le n$} dizilerine B bazının sırasıyla *nulluk derecesi dizisi* ve *indeks dizisi* denir (Ferrandez vd., 2002).

Burada açıkça görülür ki, $|r_i-r_{i-1}|$ ve q_i-q_{i-1} sayıları ya 1 ya da 0 dır ve $r_n=0$, $q_n=q$ dir.

Tanım 2.1.15. Bir V skalar çarpım uzayının sıralı bir bazı $B=\{V_1,..., V_n\}$ ve nulluk derecesi dizisi $\{r_i,\ 0 \leq i \leq n\}$ olsun.

$$r = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |r_i - r_{i-1}|$$

sayısına B bazının *dejenerelik derecesi* denir (Ferrandez vd., 2002).

Önerme 2.1.16. (E, < , >) bir bilineer uzay ve F bu uzayın bir hiperdüzlemi olsun. $F_1=S_p\{L_1,...., L_r\}$ tam lightlike yani nulluk derecesi r olan bir altuzay ve F_2 non-dejenere kabul edilerek, $F=F_1\perp F_2$ olmak üzere,

i) Eğer boy Rad (E) = r+1 $(F_1\subseteq \text{Rad}(E))$ ise,

$$E= F_1\perp F_2 \perp S_P\{L\}$$

olacak şekilde tek olmayan en az bir L null vektörü vardır.

ii) Eğer boy Rad (E) = r $(F_1= \text{Rad}(E))$ ise,

$$E= F_1\perp F_2 \perp S_P\{V\}$$

olacak şekilde en az bir L nulldan farklı V vektörü vardır. Hatta, eğer Rad (E)=$\{0\}$ ise işarete bağlı olarak V tektir.

iii) Eğer boy Rad (E) = r-1 $(\text{Rad}(E) \subseteq F_1)$ ise, $<L_j,N_j>=\eta$, $\eta=\pm1$ ve

$$E=(S_p\{L_j\}\oplus S_p\{N_j\})\perp S_p\{L_1,..., \hat{L}_j ...., L_r\}\perp F_2$$

olacak şekilde en az bir N_j null vektörü vardır. Hatta, eğer Rad (E)=$\{0\}$ ise N_j tektir (Ferrandez vd., 2001).

Tanım 2.1.17. n-boyutlu ve q indeksli bir V skalar çarpım uzayının, $2r\leq 2q\leq n$ ve $m=n-2r$ olmak üzere

$$<L_i,L_j>=<N_i,N_j> = 0, \quad <L_i,N_j> = \eta_i\delta_{ij},$$

$$<L_i,W_\alpha>=<N_i, W_\alpha> = 0, \qquad < W_\alpha,W_\beta> = \varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta},$$

$i.j\in\{1,..., r\}$, $\eta_i=<L_i,N_i>=\pm1$, $\alpha,\beta\in\{1,..., m\}$ ve eğer $1\leq\alpha\leq q-r$ ise $\varepsilon_\alpha=-1$, eğer q-r+1≤α≤m ise $\varepsilon_\alpha=1$, şartlarını taşıyan B={$L_1,N_1,....,L_r,N_r,W_1,...,W_m$} bazına bir semi-*ortonormal* baz denir (Ferrandez vd., 2001).

Önerme 2.1.18. B={$V_1,...,V_n$} bir V skalar çarpım uzayının bir bazı ve r de bu bazın dejenerelik derecesi olsun.O zaman,

i) r iyi tanımlıdır, yani bir tamsayıdır.

ii) V nin indeksi q olmak üzere r≤q dir (Ferrandez vd., 2002).

2.2. Semi – Öklidyen Uzay

Tanım 2.2.1. M bir C^∞ manifold olsun. P∈M noktasındaki tanjant uzayı T_pM olmak üzere

$$<,>|_p : T_pM x T_pM \rightarrow IR$$

$$(X_p.Y_p) \rightarrow <X,Y>|_p = <X_p,Y_p>$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere (0,2) tensör alanına M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. IR^n, n- boyutlu Öklid uzayı olsun. IR^n üzerinde 0≤q≤n olmak üzere q tamsayısı için,

$$<X_p, Y_p> = -\sum_{i=1}^{q} x_i y_i + \sum_{i=q+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınarak elde edilen uzaya *n-boyutlu semi – Öklidyen* uzayı (yarı-Öklidyen uzayı) denir ve IR_q^n ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. Bir V vektör uzayının bir bazı {$e_1,..., e_n$} olsun. Eğer

$$\det(e_1,...,e_n)>0$$

ise bu baza *pozitif yönlendirilmiştir*, eğer

$$\det(e_1,...,e_n)<0$$

ise *negatif yönlendirilmiştir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. Bir V vektör uzayının {$e_1,..., e_n$} ve {$e_1^{'},...,e_n^{'}$} gibi bazı verilsin. Eğer $e_i^{'}=\sum A_{ij}e_j$, (1≤i≤n) iken A=[A_{ij}] olmak üzere, det A>0

ise, bu iki baza *aynı yönlendirmeye sahiptir* denir. Burada aynı yönlendirmeye sahip olma bağıntısı V nin tüm bazlarının cümlesinde bir denklik bağıntısıdır ve V nin *yönlendirmeleri* olarak adlandırılan iki denklik sınıfı belirtir. Ayrıca $\{e_1,..., e_n\}$ bazını içeren yönlendirme $[\{e_1,....., e_n\}]$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

2.3. Dejenere Eğriler

Tanım 2.3.1. IR_q^n, indeksi q ve boyutu n olan semi – Öklidyen uzayı olsun,

γ:I→ IR_q^n diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere, A= $\{\gamma',...,\gamma^{(n)}\}$ sistemi her t∈I için lineer bağımsız ve $\{r_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ ve $\{q_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ dizileri A bazının sırasıyla nulluk derecesi dizisi ve indeks dizisini gösterdiği kabul edilerek her i için $r_i(t)$ ve $q_i(t)$ sabit olsun. Böylece $\{r_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ ve $\{q_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ dizilerine γ nın sırasıyla *nulluk derecesi dizisi* ve *indeks dizisi* denir (Ferrandez vd., 2001).

Tanım 2.3.2. IR_q^n, indeksi q ve boyutu n olan semi – Öklidyen uzayı olsun.

γ:I→ IR_q^n diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere, A= $\{\gamma',...,\gamma^{(n)}\}$ sistemi her t∈I için lineer bağımsız ve $\{r_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ ve $\{q_i(t),\ 0 \le i \le n\}$ dizileri A bazının sırasıyla nulluk derecesi dizisi ve indeks dizisini gösterdiği kabul edilerek her i için $r_i(t)$ ve $q_i(t)$ sabit olsun. Eğer A bazının dejenerelik derecesi r>0 ise γ:I→ IR_q^n eğrisine bir *dejenere eğri* denir. C ve $\overline{C}$ iki dejenere eğri olmak üzere, her i için $r_i=\overline{r}_i$ ve $q_i=\overline{q}_i$ ise bu iki eğriye *aynı tiptendir* denir.Burada aynı tipten olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve her denklik sınıfı bir dejenere eğri tipi belirtir. Ayrıca, indeksi q olan bir semi – Öklidyen uzayının bir dejenere eğrisinin dejenerelik derecesi için $0<r\le q$ dir (Ferrandez vd., 2001).

Önerme 2.3.3. Bir eğrinin nulluk derecesi dizisi, indeks derecesi dizisi ve dejenerelik derecesi parametreden bağımsızdır ve izometriler altında değişmez kalırlar. Ayrıca bir null eğrinin her zaman bir dejenere eğri olmasına karşın, dejenere eğriler sadece null eğrilerden oluşmaz. Spacelike ve timelike eğriler de dejenere eğriler olabilirler (Ferrandez vd., 2001).

2.4. Bir Dejenere Eğri İçin Cartan Çatısı

Bir dejenere eğrinin Ferenet formülleri oldukça karmaşıktır ve çok sayıda eğrilik fonksiyonu içermektedir. Non-dejenere halde keyfi bir parametre için Frenet formüllerini sağlayan bir tek Frenet çatısı olduğu bilinir. Özel olarak yay-uzunluğu parametresi seçilirse, genel eğrilik fonksiyonları elde edilebilir. Fakat dejenere eğriler için bunlar geçerli değildir. Hatta, null eğriler için yay-uzunluğu parametresi kavramından da söz edilemez. Bunun için yay-uzunluğu parametresine benzer bir kavram verilmiştir.

Tanım 2.4.1: IR_q^n n-boyutlu ve q-indeksli semi – Öklidyen uzayı olsun. γ:I$\rightarrow$ IR_q^n diferensiyellenebilir eğrisi; $1 \leq m \leq n$, $<\gamma^{(i)}(t), \gamma^{(i)}(t)> = 0$, i = 1,..., m-1 ve $<\gamma^{(m)}(t), \gamma^{(m)}(t)> =\pm 1$ şartlarını sağlıyorsa, t parametreine *yarı-yay parametresi* denir (Ferrandez vd., 2001).

Önerme 2.4.2. IR_q^n n-boyutlu ve q-indeksli semi – Öklidyen uzayı olmak üzere,

γ:I$\rightarrow$ IR_q^n diferensiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisi için seçilen parametre yarı-yay parametresi olarak alınırsa elde edilen Frenet çatısının tekliği her zaman iddia edilemez. Buna göre aşağıdaki şartlar gerçeklenirse kanonik bir çatı elde edilir.

i) Çatı tek olmalıdır, yani Frenet formüllerini sağlayan B ve $\overline{B}$ gibi iki çatı varsa B=$\overline{B}$ olmalıdır.

ii) Çatı, minimum sayıda eğriliğe sahip olmalıdır.

iii) Çatıya karşılık gelen eğrilikler izometriler altında değişmez kalmalıdır (Ferrandez vd., 2002).

Tanım 2.4.3. IR_q^n n-boyutlu ve q-indeksli semi – Öklidyen uzayı olmak üzere,

γ:I$\rightarrow$ IR_q^n diferensiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisinin kanonik Frenet çatısına *Cartan çatısı*, Cartan çatısına karşılık gelen eğriliklere *Cartan eğrilikleri* denir. Cartan çatısı için verilen Frenet formüllerini sağlayan dejenere eğriye de bir *dejenere Cartan eğrisi* denir (Ferrandez vd., 2002).

3. MATERYAL VE METOT

3.1. İndeksi 2 Olan Bir Semi-Öklidyen Uzayda Dejenere Eğriler

IR_2^n indeksi 2 olan semi – Öklidyen uzay ve $\gamma : I \rightarrow IR_2^n$, IR_2^n de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$, i = 1,...,n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi, r = 1 veya r = 2 dir. Aşağıda bu iki duruma göre oluşan tip-ailelerinin Frenet formülleri verilecektir.

3.1.1. IR_2^n de Dejenerelik Derecesi 1 Olan Dejenere Eğriler

IR_2^n indeksi 2 olan semi – Öklidyen uzay ve $\gamma : I \rightarrow IR_2^n$, IR_2^n de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$, i = 1,..., n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi r=1 ise bir tek tip–ailesi vardır. Burada γ eğrisinin nulluk derecesi dizisi $\{0,...,0,1,1,0,...,0\}$ dır. Buna karşılık gelen Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

r_0 = r_n = 0 olduğundan;

$$
\begin{aligned}
r_1 - r_0 &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \overline{W}_1 \\
r_2 - r_1 &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \overline{W}_2 \\
&\ldots \\
r_{s-1} - r_{s-2} &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \overline{W}_{s-1} \\
r_s - r_{s-1} &= 1 - 0 = 1 \Rightarrow \overline{L}_s \\
r_{s+1} - r_s &= 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overline{W}_{s+1} \\
r_{s+2} - r_{s+1} &= 0 - 1 = -1 \Rightarrow \overline{N}_s \\
r_{s+3} - r_{s+2} &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \overline{W}_{s+2} \\
&\ldots \\
r_n - r_{n-1} &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow \overline{W}_{n-1}
\end{aligned}
$$

$$\{0,...,0,1,1,0,...,0\} \rightarrow \{\overline{W}_1, \overline{W}_2, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ..., \overline{W}_{n-1}\}$$

semi – ortonormal bazını elde edeceğiz.

$r_1 = sp\{\gamma'\} = 0$, $\quad r_2 = sp\{\gamma', \gamma''\} = sp\{\overline{W_1}, \overline{W_2}\} = 0, ...$

$$\overline{W}_1 = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \frac{\gamma'}{<\gamma',\gamma'>} \Rightarrow \gamma' = \overline{\varepsilon}_1 \overline{k}_1 \overline{W}_1$$

$\overline{W}_1' = a\gamma' + b\gamma'' = a\overline{W}_1 + b\overline{W}_2$ yazılabilir. Buradan a ve b katsayılarını bulmak yeterlidir.

$$<\overline{W_1},\overline{W_1}>=1$$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_1}> + <\overline{W}_1',\overline{W_1}>=0$$

$$2<\overline{W_1'},\overline{W_1}>=0$$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_1}>= a<\overline{W_1},\overline{W_1}> +b<\overline{W_2},\overline{W_1}>$$

$$0=a\overline{\varepsilon}_1+0 \quad \Rightarrow \quad a=0$$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_2}>= a<\overline{W_1},\overline{W_2}> +b<\overline{W_2},\overline{W_2}>$$

$$= 0 + b\overline{\varepsilon_2}$$

b=$\overline{k}_2$ alınırsa; $\overline{W}_1' = \overline{\varepsilon}_2 \overline{k}_2 \overline{W_2}$

$\overline{W}_2' = c\overline{W_1} + d\overline{W_3}$ yazılabilir. Şimdi c ve d katsayılarını bulalım.

$$<\overline{W}_2',\overline{W_1}>= c<\overline{W_1},\overline{W_1}> +d<\overline{W_3},\overline{W_1}>$$
$$<\overline{W}_2',\overline{W_1}>= c\overline{\varepsilon_1}+0$$

Biliyoruz ki; $<\overline{W_1},\overline{W_2}>=0$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_2}> + <\overline{W}_2',\overline{W_1}>=0$$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_2}>=-<\overline{W}_2',\overline{W_1}>$$

$$<\overline{W}_1',\overline{W_2}>= \overline{\varepsilon}_2\overline{k}_2<\overline{W_2},\overline{W_2}>= c\overline{\varepsilon_1}$$

$$=-\overline{\varepsilon_2^2}k_2 = c\overline{\varepsilon_1} \Rightarrow c = -\overline{\varepsilon}_1\overline{k}_2$$

$$<\overline{W}_2',\overline{W_3}>= c<\overline{W_1},\overline{W_3}> +d<\overline{W_3},\overline{W_3}>$$

$$= 0 + d\overline{\varepsilon_3}$$

d=$\overline{k}_3$ alınırsa; $\overline{W}'_2 = -\overline{\varepsilon}_1 \overline{k}_2 \overline{W_1} + \overline{\varepsilon}_3 \overline{k}_3 \overline{W_3}$

$2 \leq$ i $\leq$s-2 için ; $\overline{W}'_i = -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_i \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}$

$$\overline{W}'_{s-2} = -\overline{\varepsilon}_{s-3} \overline{k}_{s-2} \overline{W}_{s-3} + \overline{\varepsilon}_{s-1} \overline{k}_{s-1} \overline{W}_{s-1}$$

$\overline{W}'_{s-1} = e\overline{W}_{s-2} + f\overline{L_s}$ yazılabilir. Şimdi e ve f katsayılarını bulalım.

$$< \overline{W}'_{s-1}, \overline{W}_{s-2} >= - < \overline{W}'_{s-2}, \overline{W}_{s-1} >$$

$$e < \overline{W}_{s-2}, \overline{W}_{s-2} > + f < \overline{L_s}, \overline{W}_{s-2} >= \overline{\varepsilon}_{s-3} \overline{k}_{s-2} < \overline{W}_{s-3}, \overline{W}_{s-1} > - \overline{\varepsilon}_{s-1} \overline{k}_{s-1} < \overline{W}_{s-1}, \overline{W}_{s-1} >$$

$$e\overline{\varepsilon}_{s-2} + 0 = 0 - \overline{\varepsilon}^2_{s-1} \overline{k}_{s-1}$$

$$\Rightarrow e = -\overline{\varepsilon}_{s-2} \overline{k}_{s-1}$$

$$< \overline{W}'_{s-1}, \overline{N_s} >= e < \overline{W}_{s-2}, \overline{N_s} > + f < \overline{L_s}, \overline{N_s} >$$
$$= 0 + f\overline{\eta_s}$$

f=$\overline{k}_s$ alınırsa; $\overline{W}'_{s-1} = -\overline{\varepsilon}_{s-2} \overline{k}_{s-1} \overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_s \overline{L_s}$

$\overline{L}'_s = g\overline{W}_{s-1} + h\overline{L_s} + i\overline{W}_{s+1}$ yazılabilir. Şimdi katsayıları bulalım.

$$< \overline{L}'_s, \overline{W}_{s-1} >= - < \overline{W}'_{s-1}, \overline{L_s} >$$
$$g < \overline{W}_{s-1}, \overline{W}_{s-1} >= 0 \Rightarrow g = 0$$
$$< \overline{L}'_s, \overline{N_s} >= - < \overline{N}'_s, \overline{L_s} >$$

$$h < \overline{L_s}, \overline{N_s} >= h\eta_s$$

$$< \overline{L}'_s, \overline{W}_{s+1} >= - < \overline{W}'_{s+1}, \overline{L_s} >$$

$$i < \overline{W}_{s+1}, \overline{W}_{s+1} >= i\overline{\varepsilon}_{s+1}$$

h=$\overline{k}_{s+1}$ ve i=$\overline{k}_{s+2}$ alınırsa; $\overline{L}_s = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{L_s} + \overline{\varepsilon}_{s+1} \overline{k}_{s+2} \overline{W}_{s+1}$

$\overline{W}'_{s+1} = k\overline{L_s} + l\overline{N_s}$ yazılabilir. Şimdi katsayıları bulalım.

$$< \overline{W}'_{s+1}, \overline{N_s} >= - < \overline{N}'_s, \overline{W_{s+1}} >$$
$$k < \overline{L}_s, \overline{N_s} >= k\overline{\eta}_s$$

$$< \overline{W}'_{s+1}, \overline{L_s} >= - < \overline{L}'_s, \overline{W_{s+1}} >$$
$$l < \overline{N_s}, \overline{L_s} >= -\overline{\varepsilon}_{s+1}\overline{k}_{s+2} < \overline{W}_{s+1}, \overline{W}_{s+1} >$$

$$l\overline{\eta_s} = -\overline{\varepsilon}^2_{s+1}\overline{k}_{s+2} \Rightarrow l = -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+2}$$

k=$\overline{k}_{s+3}$ alınırsa; $\overline{W}'_{s+1} = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s - \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+2}\overline{N}_s$

$\overline{N}'_s = m\overline{W}_{s-1} + p\overline{N}_s + q\overline{W}_{s+1} + r\overline{W}_{s+2}$ yazılabilir. Katsayıları bulalım.

$$< \overline{N}'_s, \overline{W}_{s-1} >= - < \overline{W}'_{s-1}, \overline{N_s} >,$$
$$m < \overline{W}_{s-1}, \overline{W}_{s-1} >= -\overline{\eta}_s\overline{k}_s < \overline{L}_s, \overline{N}_s >$$

$$m\overline{\varepsilon}_{s-1} = -\overline{\eta}^2_s\overline{k_s} \Rightarrow m = -\overline{\varepsilon}_{s-1}\overline{k_s}$$

$$< \overline{N}'_s, \overline{L_s} >= - < \overline{L}'_s, \overline{N_s} >$$
$$p < \overline{N}_s, \overline{L_s} >= -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1} < \overline{L_s}, \overline{N_s} >$$

$$p\overline{\eta_s} = -\overline{\eta}^2_s\overline{k}_{s+1} \Rightarrow p = -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}$$

$$< \overline{N}'_s, \overline{W}_{s+1} >= - < \overline{W}'_{s+1}, \overline{N_s} >$$
$$q < \overline{W}_{s+1}, \overline{W}_{s+1} >= -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3} < \overline{L}_s, \overline{N}_s >$$

$$q\overline{\varepsilon}_{s+1} = -\overline{\eta}^2_s\overline{k}_{s+3} \Rightarrow q = -\overline{\varepsilon}_{s+1}\overline{k}_{s+3}$$

$$< \overline{N}'_s, \overline{W}_{s+2} >= - < \overline{W}'_{s+2}, \overline{N_s} >$$
$$r < \overline{W}_{s+2}, \overline{W}_{s+2} >= r\overline{\varepsilon}_{s+2}$$

r=$\overline{k}_{s+4}$ alınırsa; $\overline{N}'_s = -\overline{\varepsilon}_{s-1}\overline{k}_s\overline{W}_{s-1} - \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{N}_s - \overline{\varepsilon}_{s+1}\overline{k}_{s+3}\overline{W}_{s+1} + \overline{\varepsilon}_{s+2}\overline{k}_{s+4}\overline{W}_{s+2}$

$\overline{W}'_{s+2} = x\overline{L_s} + y\overline{W}_{s+3}$ yazılabilir. Katsayıları bulalım.

$$<\overline{W}'_{s+2}, \overline{N}_s> = -<\overline{N}'_s, \overline{W}_{s+2}>$$

$$x<\overline{L_s}, \overline{N_s}> = -\overline{\varepsilon}_{s+2}\overline{k}_{s+4} <\overline{W}_{s+2}, \overline{W}_{s+2}>$$

$$x\overline{\eta_s} = -\overline{\varepsilon}^2_{s+2}\overline{k}_{s+4} \Rightarrow x = -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+4}$$

$$<\overline{W}'_{s+2}, \overline{W}_{s+3}> = -<\overline{W}'_{s+3}, \overline{W}_{s+2}>$$
$$y<\overline{W}_{s+3}, \overline{W}_{s+3}> = y\overline{\varepsilon}_{s+3}$$

y=$\overline{k}_{s+5}$ alınırsa; $\overline{W}'_{s+2} = -\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+4}\overline{L}_s + \overline{\varepsilon}_{s+3}\overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+3}$

$\overline{W}'_{s+3} = z\overline{W}_{s+2} + t\overline{W}_{s+4}$ yazılabilir. Katsayıları bulalım.

$$<\overline{W}'_{s+3}, \overline{W}_{s+2}> = -<\overline{W}'_{s+2}, \overline{W}_{s+3}>$$

$$z<\overline{W}_{s+2}, \overline{W}_{s+2}> = -\overline{\varepsilon}_{s+3}\overline{k}_{s+5} <\overline{W}_{s+3}, \overline{W}_{s+3}>$$

$$z\overline{\varepsilon}_{s+2} = \overline{\varepsilon}^2_{s+3}\overline{k}_{s+5} \Rightarrow z = -\overline{\varepsilon}_{s+2}\overline{k}_{s+5}$$

$$<\overline{W}'_{s+3}, \overline{W}_{s+4}> = -<\overline{W}'_{s+4}, \overline{W}_{s+3}>$$

t=$\overline{k}_{s+6}$ alınırsa; $\overline{W}'_{s+3} = -\overline{\varepsilon}_{s+2}\overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2} + \overline{\varepsilon}_{s+4}\overline{k}_{s+6}\overline{W}_{s+4}$

$s + 3 \leq i \leq n - 2$ için ; $\overline{W}'_i = -\overline{\varepsilon}_{i-1}\overline{k}_{i+2}\overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1}\overline{k}_{i+3}\overline{W}_{i+1}$

$$\overline{W}'_{n-2} = -\overline{\varepsilon}_{n-3}\overline{k}_n\overline{W}_{n-3} + \overline{\varepsilon}_{n-1}\overline{k}_{n+1}\overline{W}_{n-1}$$

$\overline{W}'_{n-1}$ = u $\overline{W}'_{n-2}$ yazılabilir. Katsayıyı bulalım.

$$<\overline{W}'_{n-1}, \overline{W}_{n-2}> = -<\overline{W}'_{n-2}, \overline{W}_{n-1}>$$

$$u<\overline{W}_{n-2}, \overline{W}_{n-2}> = -\overline{\varepsilon}_{n-1}\overline{k}_{n+1} <\overline{W}_{n-1}, \overline{W}_{n-1}>$$

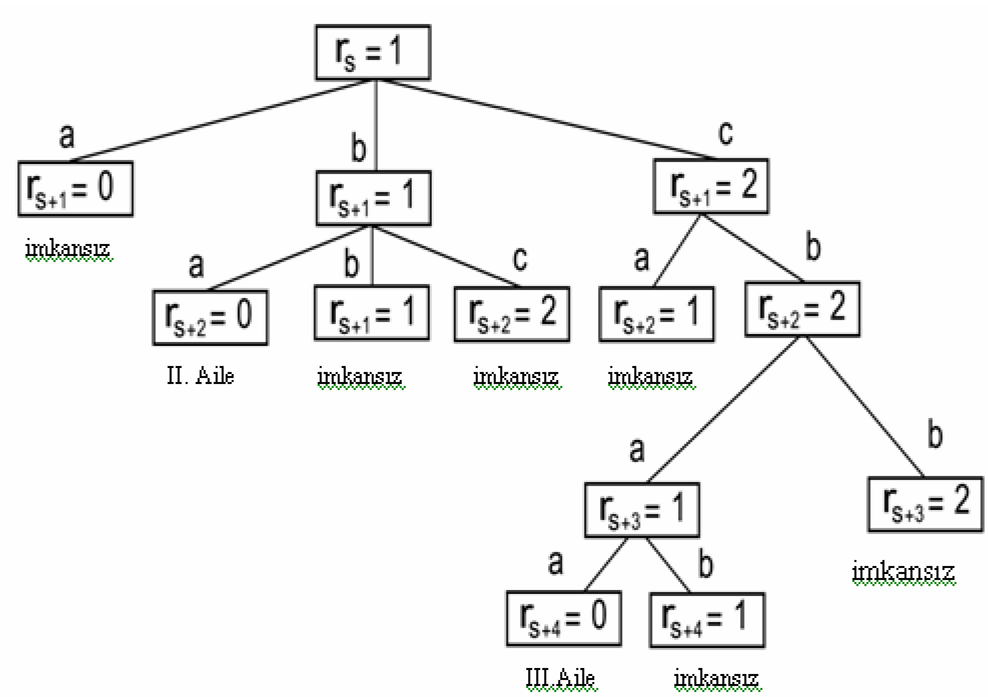
$u\bar{\varepsilon}_{n-2} = -\bar{\varepsilon}^{2}_{n-1}\bar{k}_{n+1} \Rightarrow u = -\bar{\varepsilon}_{n-2}\bar{k}_{n+1}$ den $\overline{W}'_{n-1} = -\bar{\varepsilon}_{n-2}\bar{k}_{n+1}\overline{W}_{n-2}$

Burada $\bar{\eta}_j =< \overline{L}_j, \overline{N}_j >= \pm 1$ ve bir j_0 için $\bar{\varepsilon}_{j_0} = -1$ olmak üzere

$\bar{\varepsilon}_j =< \overline{W}_j, \overline{W}_j >= \pm 1$, $1 \leq j \leq n$'dir. Bu tip – ailesine *I. Tip – Ailesi* denir.

3.1.2. IR_2^n de Dejenerelik Derecesi 2 Olan Dejenere Eğriler

IR_2^n indeksi 2 olan semi – Öklidyen uzay ve $\gamma : I \to IR_2^n$, IR_2^nde diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$, $i = 1,...,n$ olmak üzere, A bazının dejenerelik derecesi r = 2 ise, nulluk derecesi dizileri {0,...,0,1,1,0,...,0,1,1,0,...,0} ve {0,...,0,1,2,2,1,0,...,0} olan iki tip – ailesi bulunur. Burada önce, genel olarak bir dejenere eğri için nulluk derecesi dizisinin terimlerinin sıralanışlarının nasıl olacağı verilecektir. Eğer, r_i; $1 \leq i \leq n$'ler $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ bazının nulluk derecesi dizisinin terimlerini göstermek üzere $r_1 = ... = r_{s-1} = 0$ ise, o zaman γ boyunca $r_s = 1$ olmak üzere ortonormal $\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}\}$ spacelike vektör alanları elde edilir. Buna göre nulluk derecesi dizisinin terimlerinin dizilişleri aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.



Bu tablodaki imkansız olan durumlar aşağıda verilecektir.

Tablodaki a Yolu: $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{N}_s\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{array}{llll}
 & r_1 & =0 & \gamma^{'}=\overline{k}_1\overline{W}_1 \\
 & r_2 & =0 & \overline{W}_1^{'}=\overline{k}_2\overline{W}_2 \\
 & r_{i+1} & =0 & \overline{W}_i^{'}=-\overline{k}_i\overline{W}_{i-1}+\overline{k}_{i+1}\overline{W}_{i+1} \\
 & r_s & =1 & \overline{W}_{s-1}^{'}=-\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2}+\overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s \\
(*) & r_{s+1} & =0 & \overline{L}_s^{'}=\overline{\eta}_S\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s
\end{array}
$$

$\overline{L_s}\in Sp\{\gamma^{'},...,\gamma^{(s)}\}$ olduğundan $\lambda_s\neq 0$ olmak üzere,

$\overline{L_s}=\lambda_1\gamma^{'}+....+\lambda_s\gamma^{s}$ yazılabilir. Burada türev alınırsa,

$\overline{L}_s^{'}=....+\lambda_s\gamma^{(s+1)}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s$ (*)'ı kullanarak yazabiliriz. Buna göre $\gamma^{(s+1)}\in Sp\{\gamma^{'},...,\gamma^{(s)}\}$ olur. Bu da $A=\{\gamma^{'},...,\gamma^{(n)}\}$ bazının lineer bağımsızlığı varsayımı ile çelişir. Yani, a yolu imkansızdır.

Tablodaki bb Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{W}_{s+1},\overline{W}_{s+2}\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{array}{lll}
 & r_s=1 & \overline{W}_{s-1}^{'}=-\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2}+\overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s \\
(**) & r_{s+1}=1 & \overline{L}_s^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s+\overline{k}_{s+2}\overline{W}_{s+1} \\
 & r_{s+2}=1 & \overline{W}_{s+1}^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s+\overline{k}_{s+4}\overline{W}_{s+2}
\end{array}
$$

$r_{s+2}=1$ olduğundan $Rad(E_{s+2})=Sp\{L_s\}$'dir. Buradan

$$<\overline{L}_s,\gamma^{(s+1)}>=<\overline{L}_s,\gamma^{(s+2)}>=0$$

$$<\overline{L}_s^{'},\gamma^{(s+1)}>+<\gamma^{(s+2)},\overline{L}_s>=0$$

$$<\overline{L}_s^{'},\gamma^{(s+1)}>=0$$

(**)'dan, $$<\overline{L}_s^{'},\gamma^{(s+1)}>=\overline{k}_{s+2}<\overline{W}_{s+1},\gamma^{(s+1)}>=0$$

$$<\overline{W}_{s+1},\gamma^{(s+1)}>=0$$

bulunur.Bu da $\overline{W}_{s+1}\in Rad(E_{s+1})$ gibi, varsayım ile çelişen bir sonuç verir. Dolayısıyla bu yol imkansızdır.

Tablodaki bc Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{W}_{s+1},\overline{L}_{s+1}\}$ çatısına karşılık,

$$r_s=1 \qquad \overline{W}_{s-1}^{'}=-\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2}+\overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s$$

$$(***)\quad r_{s+1}=1 \qquad \overline{L}_s^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s+\overline{k}_{s+2}\overline{W}_{s+1}$$

$$r_{s+2}=2 \qquad \overline{W}_{s+1}^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s+\overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1}$$

eşitlikleri elde edilir. $A=\{\gamma' \ ,...,\gamma^{(n)}\}$ bazının lineer bağımsızlığı varsayımı gereği $\overline{k}_{s+2}\neq 0$ 'dır. (***)'dan,

$$\overline{k}_{s+2}=<\overline{L}_s^{'},\overline{W}_{s+1}>=-<\overline{W}_{s+1}^{'},\overline{L}_s>=0$$

bulunur ki, bu bir çelişkidir.

Tablodaki ca Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{L}_{s+1},\overline{N}\}$ çatısına karşılık,

$$r_s=1 \qquad \overline{W}_{s-1}^{'}=-\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2}+\overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s$$

$$r_{s+1}=2 \qquad \overline{L}_s^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s+\overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1}$$

$$r_{s+2}=1 \qquad \overline{L}_{s+1}^{'}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s+\overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1}+\overline{\eta}\overline{k}\overline{N}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\overline{N}=\overline{N}_s$ olsun. $\overline{k}=<\overline{L}_{s+1}^{'},\overline{L}_s>=-<\overline{L}_s^{'},\overline{L}_{s+1}>=0$

$\overline{N}=\overline{N}_{s+1}$ olsun. $\overline{k}=<\overline{L}_{s+1}^{'},\overline{L}_{s+1}>=0$

bulunur ki bu A bazının lineer bağımsızlığı ile çelişir.

Tablodaki cbb Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{L}_{s+1},\overline{W}_{s+2},\overline{W}_{s+3}\}$ çatısına karşılık,

$$r_s = 1 \qquad \overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s$$

$$(*') \qquad r_{s+1} = 2 \qquad \overline{L}'_s = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1}$$

$$r_{s+2} = 2 \qquad \overline{L}'_{s+1} = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2}$$

$$r_{s+3} = 2 \qquad \overline{W}'_{s+2} = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+8}\overline{W}_{s+3}$$

$r_{s+3} = 2$ olduğundan Rad(E_{s+3}) = $Sp\{\overline{L}_s,\overline{L}_{s+1}\}$'dir. Buradan

$$<\overline{L}_{s+1},\gamma^{(s+2)}>=<\overline{L}_{s+1},\gamma^{(s+3)}>=0$$

$$<\overline{L}'_{s+1},\gamma^{(s+2)}> + <\gamma^{(s+3)},\overline{L}_{s+1}>=0$$

$$<\overline{L}'_{s+1},\gamma^{(s+2)}>=0$$

olur.(*')'dan, $<\overline{L}'_{s+1},\gamma^{(s+2)}>=k_{s+5}<\overline{W}_{s+2},\gamma^{(s+2)}>=0$

$$<\overline{W}_{s+2},\gamma^{(s+2)}>=0$$

Bu da $\overline{W}_{s+2} \in Rad(E_{s+2})$ gibi bir çelişki verir. Dolayısıyla bu yol imkansızdır.

Tablodaki cbab Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{L}_{s+1},\overline{W}_{s+2},\overline{N},\overline{W}_{s+3}\}$ çatısına karşılık,

$$r_s = 1 \qquad \overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s\overline{k}_s\overline{L}_s$$

$$r_{s+1} = 2 \qquad \overline{L}'_s = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1}$$

$$r_{s+2} = 2 \qquad \overline{L}'_{s+1} = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2}$$

$$r_{s+3} = 1 \qquad \overline{W}'_{s+2} = \overline{\eta}_s\overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \overline{\mu}\overline{k}\overline{N}$$

$r_{s+4} = 1$ $\qquad \overline{N}' = \overline{\eta}\overline{k}_{s+8}\overline{L} + \overline{l}\overline{W}_{s+2} + \overline{\mu}\overline{y}\overline{N} + \overline{k}_{s+9}\overline{W}_{s+3}$

Burada iki ihtimal vardır.

i.) $\overline{N} = \overline{N_S}$ olsun. Böylece $\overline{L} = \overline{L}_{s+1}$, $\overline{\eta} = \overline{\eta}_{s+1}$ ve $\overline{y} = -\overline{k}_{s+1}$ olur.

O zaman $0 \neq \overline{k}_{s+5} =< \overline{L}'_{s+1}, \overline{W}_{s+2} >= -< \overline{W}'_{s+2}, \overline{L}_{s+1} >= 0$ çelişkisi elde edilir.

ii.) $\overline{N} = \overline{N}_{s+1}$ olsun. $\overline{L} = \overline{L_s}$, $\overline{\eta} = \overline{\eta}_s$ ve $\overline{y} = -\overline{k}_{s+4}$ olur.

O zaman $0 \neq \overline{k}_{s+2} =< \overline{L}'_s, \overline{N}_{s+1} >= -< \overline{N}'_{s+1}, \overline{L}_s >= 0$ çelişkisi elde edilir

Dolayısıyla bu yol imkansızdır.

Sonuç olarak nulluk derecesi dizisinin terimleri {0,...,0,1,1,0,...,0,1,1,0,...,0} veya {0,...,0,1,2,2,1,0,...,0} biçimindedir. Bu dizilere karşılık gelen tip – aileleri sırasıyla *II. Aile* ve *III. Aile* olarak isimlendirilir. Bunlara karşılık gelen Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

{0,...,0,1,1,0,...,0,1,1,0,...0} dizisi için Frenet çatısı,

$\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s_1-1}, \overline{L}_{s_1}, \overline{W}_{s_1+1}, \overline{N}_{s_1}, \overline{W}_{s_1+2}, ..., \overline{W}_{s_2-1}, \overline{L}_{s_2}, \overline{W}_{s_2+1}, \overline{N}_{s_2}, \overline{W}_{s_2+2}, ..., \overline{W}_{n-2}\}$ dır.

Burada, $s_1 = s$, sadece bir $s_2 \geq s_1 + 3$ için $r_{s_2} = 1$ ve $r_i = 0$, $i = s_1 + 2, ..., s_2 - 1$'dir.

Her $i \geq s_2+2$ için, $r_i = 0$ ve $r_{s_2+1} = 1$ 'dir.

{0,...,0,1,2,2,1,0,...,0} dizisi için Frenet çatısı,

$\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{W}_{s+2}, \overline{N}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+3}, ..., \overline{W}_{n-2}\}$'dir.

$$\gamma' = \overline{k}_1 \overline{W}_1$$

$$\overline{W}'_1 = \overline{k}_2 \overline{W}_2$$

$$\overline{W}'_i = -\overline{k}_i \overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \leq i \leq s_1-2$$

$$\overline{W}'_{s_1-1} = -\overline{k}_{s_1-1} \overline{W}_{s_1-2} + \overline{\eta}_{s_1} \overline{k}_{s_1} \overline{L}_{s_1}$$

$$\overline{L}_{s_1} = \overline{\eta}_{s_1} \overline{k}_{s_1+1} \overline{L}_{s_1} + \overline{k}_{s_1+2} \overline{W}_{s_1+1}$$

$$\overline{W}'_{s_1+1} = \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+3}\overline{L}_{s_1} - \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+2}\overline{N}_{s_1}$$

$$\overline{N}'_{s_1} = -\overline{k}_{s_1}\overline{W}_{s_1-1} - \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+1}\overline{N}_{s_1} - \overline{k}_{s_1+3}\overline{W}_{s_1+1} + \overline{k}_{s_1+4}\overline{W}_{s_1+2}, \qquad \textbf{(2)}$$

$$\overline{W}'_{s_1+2} = -\overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+4}\overline{L}_{s_1} + \overline{k}_{s_1+5}\overline{W}_{s_1+3}$$

$$\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+2}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+3}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_1 + 3 \le i \le s_2\text{-}2$$

$$\overline{W}'_{s_2-1} = -\overline{k}_{s_2+1}\overline{W}_{s_2-2} + \overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+2}\overline{L}_{s_2}$$

$$\overline{L}'_{s_2} = \overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+3}\overline{L}_{s_2} + \overline{k}_{s_2+4}\overline{W}_{s_2+1}$$

$$\overline{W}'_{s_2+1} = \overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+5}\overline{L}_{s_2} - \overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+4}\overline{N}_{s_2}$$

$$\overline{N}'_{s_2} = -\overline{k}_{s_2+2}\overline{W}_{s_2-1} - \overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+3}\overline{N}_{s_2} - \overline{k}_{s_2+5}\overline{W}_{s_2+1} + \overline{k}_{s_2+6}\overline{W}_{s_2+2}$$

$$\overline{W}_{s_2+2} = -\overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+6}\overline{L}_{s_2} + \overline{k}_{s_2+7}\overline{W}_{s_2+3}$$

$$\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+4}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+5}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_2 + 3 \le i \le n-3$$

$$\overline{W}'_{n-2} = -\overline{k}_{n+2}\overline{W}_{n-3}$$

....

$$\gamma' = \overline{k}_1\overline{W}_1$$

$$\overline{W}'_1 = \overline{k}_2\overline{W}_2$$

$$\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+1}\overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2$$

$$\overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s}\overline{L}_{s}$$

$$\overline{L}'_{s} = \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+1}\overline{L}_{s} + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1}$$

$$\overline{L}'_{s+1} = \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+3}\overline{L}_{s} + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2} \qquad \textbf{(3)}$$

$$\overline{W'_{s+2}} = \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+6}\overline{L}_{s} + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} - \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+5}\overline{N}_{s+1}$$

$$\overline{N}'_{s+1} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+8} \overline{L}_s - \overline{k}_{s+7} \overline{W}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+4} \overline{N}_{s+1} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+2} \overline{N}_s$$

$$\overline{N}'_s = -\overline{k}_s \overline{W}_{s-1} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+8} \overline{L}_{s+1} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+3} \overline{N}_{s+1} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{N}_s - \overline{k}_{s+6} \overline{W}_{s+2} + \overline{k}_{s+9} \overline{W}_{s+3}$$

$$\overline{W}'_{s+3} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+9} \overline{L}_s + \overline{k}_{s+10} \overline{W}_{s+4}$$

$$\overline{W}'_i = -\overline{k}_{i+6} \overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+7} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+4 \leq i \leq n-3$$

$$\overline{W}'_{n-2} = -\overline{k}_{n+4} \overline{W}_{n-3}$$

Burada $\overline{\eta}_j = < \overline{L}_j, \overline{N}_j >$, $\quad 1 \leq j \leq n$'dir.

3.1.3. Cartan Çatısı

Teorem 3.1.3.1. $\gamma : I \to IR_2^n$ bir dejenere eğri olsun ve eğer her t için $T_{\gamma(t)} IR_2^n$ tanjant uzayı $\{\gamma'(t), .., \gamma^{(n)}(t)\}$ cümlesi tarafından geriliyorsa, o zaman bu eğrinin yönlendirmeye göre tek bir kanonik Frenet çatısı vardır. Bu çatıya karşılık gelen Frenet formülleri de aşağıdaki gibidir.

I. Tip – Ailesi

Null Eğriler İçin

$$\begin{aligned}
&\gamma' = L_1 \\
&L'_1 = \mu_2 \varepsilon_2 W_2 \\
&W'_2 = \eta_1 k_1 L_1 - \mu_2 \eta_1 N_1 \\
&N'_1 = -\varepsilon_2 k_1 W_2 + \varepsilon_3 k_2 W_3 \\
&W'_3 = -\eta_1 k_2 L_1 + \varepsilon_4 k_3 W_4 \\
&W'_i = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1}, \\
&4 \leq i \leq n-2 \\
&W'_{n-1} = -\varepsilon_{n-2} k_{n-2} W_{n-2}
\end{aligned} \qquad \textbf{(4)}$$

Null Olmayan Eğriler İçin

$$\begin{aligned}
&\gamma' = W_1 \\
&W'_1 = \varepsilon_2 k_1 W_2 \\
&W'_i = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq s-2 \\
&W'_{s-1} = -\varepsilon_{s-2} k_{s-2} W_{s-2} + \mu_s \eta_s L_s \\
&L'_s = \varepsilon_{s+1} k_{s-1} W_{s+1} \\
&W'_{s+1} = \eta_s k_s L_s - \eta_s k_{s-1} N_s \\
&N'_s = -\mu_s \varepsilon_{s-1} W_{s-1} - \varepsilon_{s+1} k_s W_{s+1} + \varepsilon_{s+2} k_{s+1} W_{s+2} \\
&W'_{s+2} = -\eta_s k_{s+1} L_s + \varepsilon_{s+3} k_{s+2} W_{s+3}
\end{aligned} \qquad \textbf{(5)}$$

$$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1}, \quad s+3 \le i \le n-2$$

$$W_{n-1}' = -\varepsilon_{n-2} k_{n-2} W_{n-2}$$

II. Tip – Ailesi

Null Eğriler İçin

$$\begin{aligned}
&\gamma' = L_1 \\
&L_1' = W_2 \\
&W_2' = \eta_1 k_1 L_1 - \eta_1 N_1 \qquad \textbf{(6)} \\
&N_1' = -k_1 W_2 + k_2 W_3 \\
&W_3' = -\eta_1 k_2 L_1 + k_3 W_4 \\
&W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \\
&4 \le i \le s-2 \\
&W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + \mu_s \eta_s L_s \\
&L_s' = k_{s-1} W_{s+1} \\
&W_{s+1}' = \eta_s k_s L_s - \eta_s k_{s-1} N_s \\
&N_s' = -\mu_s W_{s-1} - k_s W_{s+1} + k_{s+1} W_{s+2} \\
&W_{s+2}' = \eta_s k_{s+1} L_s + k_{s+2} W_{s+3} \\
&W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \\
&s+3 \le i \le n-3 \\
&W_{n-2}' = -k_{n-3} W_{n-3}
\end{aligned}$$

Spacelike Eğriler İçin

$$\begin{aligned}
&\gamma' = W_1 \\
&W_1' = k_1 W_2 \\
&W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1} \qquad \textbf{(7)} \\
&W_{s_1-1}' = -k_{s_1-2} W_{s_1-2} + \mu_{s_1} \eta_{s_1} L_{s_1} \\
&L_{s_1}' = k_{s_1-1} W_{s_1+1} \\
&W_{s_1+1}' = \eta_{s_1} k_{s_1} L_{s_1} - \eta_{s_1} k_{s_1-1} N_{s_1} \\
&N_{s_1}' = -\mu_{s_1} W_{s_1-1} - k_{s_1} W_{s_1+1} + k_{s_1+1} W_{s_1+2} \\
&W_{s_1+2}' = -\eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3} \\
&W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \qquad s_1+3 \le i \le s_2-2 \\
&W_{s_2-1}' = -k_{s_2-2} W_{s_2-2} + \mu_{s_2} \eta_{s_2} L_{s_2} \\
&L_{s_2}' = k_{s_2-1} W_{s_2+1} \\
&W_{s_2+1}' = \eta_{s_2} k_{s_2} L_{s_2} - \eta_{s_2} k_{s_2-1} N_{s_2} \\
&N_{s_2}' = -\mu_{s_2} W_{s_2-1} - k_{s_2} W_{s_2+1} + k_{s_2+1} W_{s_2+2} \\
&W_{s+2}' = -\eta_{s_2} k_{s_2+1} L_{s_2} + k_{s_2+2} W_{s_2+3} \\
&W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}, \qquad s_2+3 \le i \le n-3 \\
&W_{n-2}' = -k_{n-3} W_{n-3}
\end{aligned}$$

III. Tip – Ailesi

Null Eğriler İçin

$$\gamma' = L_1$$
$$L_1' = \mu_2 \eta_2 L_2$$
$$L_2' = W_3$$
$$W_3' = \eta_2 k_1 L_2 - \eta_2 N_2 \qquad \textbf{(8)}$$
$$N_2' = \eta_1 k_2 L_1 - \mu_2 \eta_1 N_1 - k_1 W_3$$
$$N_1' = -\eta_2 k_2 L_2 + k_3 W_4$$
$$W_4' = -\eta_1 k_3 L_1 + k_4 W_5$$
$$W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$$
$$W_{n-2}' = -k_{n-3} W_{n-3}$$

Spacelike Eğriler İçin

$$\gamma' = W_1$$
$$W_1' = k_1 W_2$$
$$W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$$
$$W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + \mu_s \eta_s L_s \qquad \textbf{(9)}$$
$$L_s' = \mu_{s+1} \eta_{s+1} L_{s+1}$$
$$L_{s+1}' = k_{s-1} W_{s+2}$$
$$W_{s+2}' = \eta_{s+1} k_s L_{s+1} - \eta_{s+1} k_{s-1} N_{s+1}$$
$$N_{s+1}' = \eta_s k_{s+1} L_s - k_s W_{s+2} - \mu_{s+1} \eta_s N_s$$
$$N_s' = -\eta_{s+1} k_{s+1} L_{s+1} - \mu_s W_{s-1} + k_{s+2} W_{s+3}$$
$$W_{s+3}' = -\eta_s k_{s+2} L_s + k_{s+3} W_{s+4}$$
$$W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$$
$$W_{n-2}' = -k_{n-3} W_{n-3}$$

Burada $\varepsilon_j = < W_j, W_j >$ $\eta_j = < L_j, N_j >$ ve $\mu_j = \pm 1$'dir. Hatta; η_j ve μ_j, her $1 \leq i \leq n-1$ için $\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$ ile $\{C_1, ..., C_i\}$ aynı yönlendirmeye sahip olacak ve $\{C_1, ..., C_n\}$ sistemi pozitif yönlendirmeye sahip olacak şekilde seçilebilir. Burada $\{C_1, ..., C_n\}$ yukarıdaki Frenet çatısını sağlar.

İspat: I. Tip – Ailesi

Null Eğriler İçin: IR_2^n indeksi 2 olan yönlendirilebilir bir semi – Öklidyen uzay ve $\gamma : I \to IR_2^n$, IR_2^n de bir null eğrisi olsun. Eğer $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$ i = 1,..., n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi r = 1 ise bir tek tip–ailesi vardır. Burada γ eğrisinin nulluk derecesi dizisi $\{1,1,0,...,0\}$'dır.

Buna karşılık gelen Frenet çatısı da $\{L_1, W_2, N_1, W_3, ..., W_{n-1}\}$'dir. Buna göre Frenet formülleri şu şekildedir.

$$\gamma' = k_1 L_1$$

$$L_1' = \eta_1 k_2 L_1 + \varepsilon_2 k_3 W_2$$

$$W_2' = \eta_1 k_4 L_1 - \eta_1 k_3 N_1$$

$$N_1' = -\eta_1 k_2 N_1 - \varepsilon_2 k_4 W_2 + \varepsilon_3 k_5 W_3$$

$$W_3' = -\eta_1 k_5 L_1 + \varepsilon_4 k_6 W_4$$

$$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i+2} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_{i+3} W_{i+1}, \qquad 4 \leq i \leq n-2$$

$$W_{n-1}' = -\varepsilon_{n-2} k_{n+1} W_{n-2}$$

Burada $\eta_1 = < L_1, N_1 > = \pm 1$ ve bir j_0 için $\varepsilon_{j_0} = -1$ olmak üzere

$\varepsilon_j = < W_j, W_j > = \pm 1$, $1 \leq j \leq n$'dir.

Yukarıdaki denklem sisteminde $< \gamma'', \gamma'' > = \pm 1$ olacak şekilde yarı – yay parametresi seçilirse;

$\gamma' = k_1 L_1 \qquad \Rightarrow$ L_1 null olduğundan $\gamma' = L_1$ alınabilir.

$\qquad \Rightarrow k_1 = 1$

$\gamma' = k_1 L_1 \qquad \Rightarrow \gamma'' = k_1' L_1 + k_1 L_1' = k_1' L_1 + k_1(\eta_1 k_2 L_1 + \varepsilon_2 k_3 W_2)$

$\qquad \Rightarrow \gamma'' = (k_1' + k_1 k_2 \eta_1) L_1 + k_1 k_3 \varepsilon_2 W_2$

$< \gamma'', \gamma'' > = \pm 1 \Rightarrow < \gamma'', \gamma'' > = 0 + k_1 k_3 \varepsilon_2 < W_2, W_2 >$

$$1 = k_1 k_3 \varepsilon_2^2 \Rightarrow k_3 = 1$$

olur. $k_2 = 0$ seçilebilir. Böylece $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 1$ alınarak, yukarıdaki denklem sistemindeki eğrilikleri tekrar numaralandırma ile (4) sistemi elde edilir.

Null Olmayan Eğriler İçin

(1) sisteminde yay parametresi seçilirse, $\gamma' = \overline{W}_1$ ve $\overline{k_1} = 1$ olur. Şimdi $\overline{k_s} = \mu_s$ ve $\mu_s = \pm 1$ olsun, o zaman bir tek $\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s\}$ cümlesi belirtilmiş olur. Dolayısıyla sadece $\overline{W}_{s+1}$, bulmak yeterlidir.

$\overline{W}_{s+1}$ ve W^*_{s+1} iki farklı Frenet çatısı üreten iki farklı vektör alanı olsun. Yani;

$$\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ..., \overline{W}_{n-1}\} \rightarrow \{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_s = \mu_s, \overline{k}_{s+1}, ..., \overline{k}_{n+1}\}$$

$$\{\overline{W_1}, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, W^*_{s+1}, N^*_s, W^*_{s+2}, ..., W^*_{n-1}\} \rightarrow \{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_s = \mu_s, k^*_{s+1}, ..., k^*_{n+1}\}$$

olsun. (1) den;

$$\overline{L}'_s = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{L}_s + \overline{\varepsilon}_{s+1} \overline{k}_{s+2} \overline{W}_{s+1} = \overline{\eta}_s k^*_{s+1} \overline{L}_s + \overline{\varepsilon}_{s+1} k^*_{s+2} W^*_{s+1}$$

$$\Rightarrow W^*_{s+1} = \frac{(\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} - \overline{\eta}_s k^*_{s+1})}{k^*_{s+2}} \overline{L}_s + \frac{\overline{k}_{s+2}}{k^*_{s+2}} \overline{W}_{s+1} \qquad \textbf{(10)}$$

$$< W^*_{s+1}, W^*_{s+1} > = 1 \qquad \Rightarrow \overline{k}_{s+2} = \pm k^*_{s+2}$$

$\overline{k}_{s+2} = k^*_{s+2}$ olsun. f: I $\longrightarrow$ IR diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Rightarrow W^*_{s+1} = f\overline{L}_s + \overline{W}_{s+1}$$

bulunur. Her iki tarafın türevinden,

$$\overline{\eta}_s k^*_{s+3} \overline{L}_s - \overline{\eta}_s k^*_{s+2} N^*_s = f' \overline{L}_s + f(\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{L}_s + \overline{\varepsilon}_{s+1} \overline{k}_{s+2} \overline{W}_{s+1}) + \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3} \overline{L}_s - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+2} \overline{N}_s$$

$$\Rightarrow N^*_s = \lambda \overline{L}_s + \overline{N}_s - \overline{\eta}_s f \overline{W}_{s+1}$$

her iki tarafı kendisiyle iç çarparsak

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} f^2$$

bulunur.

$$\Rightarrow N^*_s = -\frac{1}{2} f^2 \overline{L}_s + \overline{N}_s - \overline{\eta}_s f \overline{W}_{s+1}$$

$$f = \frac{\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} - \overline{\eta}_s k^*_{s+1}}{k^*_{s+2}}$$

(10) denkleminden yazılabilir.

$k^*_{s+1} = \overline{k}_{s+1} - \overline{\eta}_s f k^*_{s+2}$ elde edilir. Burada her zaman $f = \overline{\eta}_s \dfrac{\overline{k}_{s+1}}{\overline{k}_{s+2}}$ alınabileceğinden,

$k^*_{s+1} = 0$ olur. (1) sistemindeki eğrilikler yeniden numaralandırılırsa (5) sistemi tek olarak elde edilir.

II. Tip- Ailesi

Null Eğriler İçin: IR^n_2 indeksi 2 olan yönlendirilebilir bir semi-Öklidyen uzay ve $\gamma : I \to IR^n_2$, IR^n_2 de bir null eğrisi olsun. Eğer $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$, i = 1,...,n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi

r = 2 ise, nulluk derecesi dizileri {1,1,0,...,0,1,1,0,...,0} ve {1,2,2,1,0,...,0} olan iki tip - ailesi vardır. Burada γ eğrisinin nulluk derecesi dizisi {1,1,0,...,0,1,1,0,...,0} ise buna karşılık gelen Frenet çatısı

$\{\overline{L}_1, \overline{W}_2, \overline{N}_1, \overline{W}_3, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ..., \overline{W}_{n-2}\}$'dir. Buna göre Frenet formülleri şu şekildedir.

$$\gamma' = \overline{k}_1 \overline{L}_1$$

$$\overline{L}'_1 = \eta_1 \overline{k}_2 \overline{L}_1 + \overline{k}_3 \overline{W}_2$$

$$\overline{W}'_2 = \eta_1 \overline{k}_4 \overline{L}_1 - \eta_1 \overline{k}_3 \overline{N}_1$$

$$\overline{N}'_1 = -\overline{k}_4 \overline{W}_2 - \eta_1 \overline{k}_2 \overline{N}_1 + \overline{k}_5 \overline{W}_3$$

$$\overline{W}'_3 = -\eta_1 \overline{k}_5 \overline{L}_1 + \overline{k}_6 \overline{W}_4$$

$$\overline{W}'_i = -\overline{k}_{i+2} \overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+3} \overline{W}_{i+1}, \qquad 4 \le \mathrm{i} \le \mathrm{s} - 2$$

$$\overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s+1} \overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+2} \overline{L}_s$$

$$\bar{L}_s' = \eta_s \bar{k}_{s+3} \bar{L}_s + \bar{k}_{s+4} \overline{W}_{s+1}$$

$$\overline{W}_{s+1}' = \eta_s \bar{k}_{s+5} \bar{L}_s - \eta_s \bar{k}_{s+4} \overline{N}_s$$

$$\overline{N}_s' = -\bar{k}_{s+2} \overline{W}_{s-1} - \eta_s \bar{k}_{s+3} \overline{N}_s - \bar{k}_{s+5} \overline{W}_{s+1} + \bar{k}_{s+6} \overline{W}_{s+2}$$

$$\overline{W}_{s+2}' = -\eta_s \bar{k}_{s+6} \bar{L}_s + \bar{k}_{s+7} \overline{W}_{s+3}$$

$$\overline{W}_i' = -\bar{k}_{i+4} \overline{W}_{i-1} + \bar{k}_{i+5} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+3 \leq i \leq n-3$$

$$\overline{W}_{n-2}' = -\bar{k}_{n+2} \overline{W}_{n-3}$$

Yukarıdaki denklem sisteminde yarı-yay parametresi seçilsin. Böylece $\bar{k}_1 = 1$, $\overline{k_2} = 0$, $\bar{k}_3 = 1$ olur. Şimdi $\bar{k}_{s+2} = \mu_s$ ve $\mu_s = \pm 1$ olsun.

O zaman bir tek $\{\bar{L}_1, \overline{W}_2, \overline{N}_1, \overline{W}_3, ..., \overline{W}_{s-1}, \bar{L}_s\}$ cümlesi belirtilmiş olur. Dolayısıyla $\overline{W}_{s+1}$'i bulmak yeterlidir. $\overline{W}_{s+1}$ ve W_{s+1}^* ile iki farklı Frenet çatısı üreten iki farklı vektör alanı olsun. Yani;

$$\{\bar{L}_1, \overline{W}_2, \overline{N}_1, \overline{W}_3, ..., \overline{W}_{s-1}, \bar{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ..., \overline{W}_{n-2}\}$$

$$\rightarrow \{\bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = 0, \bar{k}_3 = 1, \bar{k}_4, ..., \bar{k}_{s+2} = \mu_s, \bar{k}_{s+3}, ..., \bar{k}_{n+2}\}$$

$$\{\bar{L}_1, \overline{W}_2, \overline{N}_1, \overline{W}_3, ..., \overline{W}_{s-1}, \bar{L}_s, W_{s+1}^*, N_s^*, W_{s+2}^*, ..., W_{n-2}^*\}$$

$$\rightarrow \{\bar{k}_1 = 1, \bar{k}_2 = 0, \bar{k}_3 = 1, \bar{k}_4, ..., \bar{k}_{s+2} = \mu_s,\ k_{s+2} = \mu_s, k_{s+3}^*, ..., k_{n+2}^*\}$$

olsun. Yukarıdaki denklem sisteminden

$$\bar{L}_s' = \eta_s \bar{k}_{s+3} \bar{L}_s + \bar{k}_{s+4} \overline{W}_{s+1} = \eta_s k_{s+3}^* \bar{L}_s + k_{s+4}^* W_{s+1}^*$$
$$\Rightarrow W_{s+1}^* = \frac{(\eta_s \bar{k}_{s+3} - \eta_s k_{s+3}^*)}{k_{s+4}^*} \bar{L}_s + \frac{\bar{k}_{s+4}}{k_{s+4}^*} \overline{W}_{s+1} \tag{11}$$

$< W_{s+1}^*, W_{s+1}^* >= 1$ $\quad$ *den*, $\quad \bar{k}_{s+4} = \pm k_{s+4}^*$ bulunur

$\bar{k}_{s+4} = k_{s+4}^*$ olsun, (11) denkleminden, $f : I \rightarrow IR$ dif. bilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$W^*_{s+1} = f\overline{L}_s + \overline{W}_{s+1}$$

yazılabilir. Her iki tarafın türevinden,

$$\overline{\eta_s k^*_{s+5}}\,\overline{L}_s - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+4} N^*_s = f'\,\overline{L}_s + f(\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \overline{k}_{s+4}\overline{W}_{s+1}) + \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+5}\overline{L}_s - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+4}\overline{N}_s$$

$$\Rightarrow N^*_s = \lambda\overline{L}_s + \overline{N}_s - \overline{\eta}_s f\overline{W}_{s+1}$$

her iki tarafı kendisi ile iç çarparsak

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}f^2$$

$$\Rightarrow N^*_s = -\frac{1}{2}f^2\overline{L}_s + \overline{N}_s - \overline{\eta}_s f\overline{W}_{s+1}$$

(11)denkleminden;

$$f = \frac{\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3} - \overline{\eta}_s k^*_{s+3}}{\overline{k}_{s+4}} \Rightarrow k^*_{s+3} = \overline{k}_{s+3} - \overline{\eta}_s f\overline{k}_{s+4}$$

Burada $f = \overline{\eta}_s \dfrac{\overline{k}_{s+3}}{\overline{k}_{s+4}}$ olarak alınabileceğinden $k^*_{s+3} = 0$ olur.

Yukarıdaki denklem sisteminde eğrilikler yeniden numaralandırılırsa (6)sistemi tek olarak elde edilir.

Spacelike Eğriler İçin:

I. tip – Ailedeki ispat ile aynıdır. Yani; (2) sisteminde yay parametresi seçilirse,

$\gamma' = \overline{W_1}$ ve $\overline{k_1} = 1$olur. Şimdi $\overline{k}_{s_1} = \mu_{s_1}$, $\overline{k}_{s_2+2} = \mu_{s_2}$, $\mu_{s_1} = \mu_{s_2} = \pm 1$ olsun, o zaman bir tek $\{\overline{W}_1,.....,\overline{W}_{s_1-1},\overline{L}_{s_1}\}$ cümlesi belirtilmiş olur. Dolayısı ile sadece $\overline{W}_{s_1+1}$ ve $\overline{W}_{s_2+1}$ bulmak yeterlidir. $\overline{W}_{s_1+1}$, $W^*_{s_1+1}$ve $\overline{W}_{s_2+1}$, $W^*_{s_2+1}$ iki farklı vektör alanları olsunlar. Yani;

$$\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s_1-1},\overline{L}_{s_1},\overline{W}_{s_1+1},\overline{N}_{s_1},\overline{W}_{s_1+2},...,\overline{W}_{s_2-1},\overline{L}_{s_2},\overline{W}_{s_2+1},\overline{N}_{s_2},\overline{W}_{s_2+2},...,\overline{W}_{n-2}\}$$

$$\rightarrow \{\overline{k}_1 = 1,\overline{k}_2,...,\ \overline{k}_{s_1} = \mu_{s_1},\ \overline{k}_{s_1+1},......,\overline{k}_{s_2+2} = \mu_{s_2},\ \overline{k}_{s_2+3},....,\overline{k}_{n+2}\}$$

$$\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s_1-1},\overline{L}_{s_1},W^*_{s_1+1},N^*_{s_1},W^*_{s_1+2},...,W^*_{s_2-1},L^*_{s_2},W^*_{s_2+1},N^*_{s_2},W^*_{s_2+2},...,W^*_{n-2}\}$$

$$\rightarrow \{\overline{k}_1=1,\overline{k}_2,...,\ \overline{k}_{s_1}=\mu_{s_1},\ k^*_{s_1+1},...,k_{s_2+2}=\mu_{s_2},\ k^*_{s_2+3},...,k^*_{n+2}\}$$

Bundan önceki ispatlarda olduğu gibi $\overline{k}_{s_1+1}=\overline{k}_{s_2+3}=0$ bulunur. (2) sistemindeki eğrilikler yeniden numaralandırılırsa (7) sistemi elde edilir.

III. Tip – Ailesi

Null eğrileri için:

$\gamma : I \rightarrow IR^n_2$, IR^n_2'de bir null eğri olmak üzere, γ eğrisinin nulluk derecesi dizisi $\{1,2,2,1,0,...,0\}$ ise buna karşılık gelen frenet çatısı $\{\overline{L}_1,\overline{L}_2,\overline{W}_3,\overline{N}_2,\overline{N}_1,\overline{W}_4,...,\overline{W}_{n-2}\}$'dir. Buna göre Frenet formülleri şu şekildedir.

$$\gamma' = \overline{k}_1\overline{L}_1$$

$$\overline{L}_1' = \eta_1\overline{k}_2\overline{L}_1 + \eta_2\overline{k}_3\overline{L}_2$$

$$\overline{L}_2' = \eta_1\overline{k}_4\overline{L}_1 + \eta_2\overline{k}_5\overline{L}_2 + \overline{k}_6\overline{W}_3$$

$$\overline{W}_3' = \eta_1\overline{k}_7\overline{L}_1 + \eta_2\overline{k}_8\overline{L}_2 - \eta_2\overline{k}_6\overline{N}_2$$

$$\overline{N}_2' = \eta_1\overline{k}_9\overline{L}_1 - \overline{k}_8\overline{W}_3 - \eta_2\overline{k}_5\overline{N}_2 - \eta_1\overline{k}_3\overline{N}_1$$

$$\overline{N}_1' = -\eta_2\overline{k}_9\overline{L}_2 - \eta_2\overline{k}_4\overline{N}_2 - \overline{k}_7\overline{W}_3 - \eta_1\overline{k}_2\overline{N}_1 + \overline{k}_{10}\overline{W}_4$$

$$\overline{W}_4' = -\eta_1\overline{k}_{10}\overline{L}_1 + \overline{k}_{11}\overline{W}_5$$

$$\overline{W}_i' = -\overline{k}_{i+6}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+7}\overline{W}_{i+1}, \qquad 5 \le \mathrm{i} \le \mathrm{n}-3$$

$$\overline{W}_{n-2}' = -\overline{k}_{n+4}\overline{W}_{n-3}$$

Yukarıdaki denklem sisteminde $<\gamma'',\gamma''>=\pm 1$ olacak şekilde yarı - yay parametresi seçilirse $\overline{k}_1=\overline{k}_3=\overline{k}_6=1,\ \ \overline{k}_2=\overline{k}_4=\overline{k}_5=0$ bulunur.

$\{\overline{L}_1,\overline{L}_2,\overline{W}_3,\overline{N}_2,\overline{N}_1,\overline{W}_4,...\overline{W}_{n-2}\}$ ve $\{\overline{L}_1,\overline{L}_2,\overline{W}_3,\ N^*_2,N^*_1,W^*_4,...,W^*_{n-2}\}$ bu şekilde elde edilmiş iki Frenet çatısı olsun. O zaman yukarıdaki denklem sisteminden,

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}_3^{'} = \overline{\eta}_1 k_7^* \overline{L}_1 + \eta_2 k_8^* \overline{L}_2 - \overline{\eta}_2 \overline{k}_6 N_2^* = \overline{\eta}_1 \overline{k}_7 \overline{L}_1 + \overline{\eta}_2 \overline{k}_8 \overline{L}_2 - \overline{\eta}_2 \overline{k}_6 \overline{N}_2 \\
&\Rightarrow \overline{N}_2^{'} = (\overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 k_7^* - \overline{\eta_1 \eta_2} \overline{k}_7)\overline{L}_1 + (k_8^* - \overline{k}_8)\overline{L}_2 + \overline{N}_2
\end{aligned} \tag{12}
$$

elde edilir. Elde edilen denklemin her iki tarafı kendisiyle iç çarpılarak $k_8^* = \overline{k}_8$ bulunur.

Bu ifade (12) de yerine yazılırsa $f : I \to IR$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$N_2^* = f\overline{L}_1 + \overline{N}_2$$

her iki tarafın türevinden

$$
\begin{aligned}
\overline{\eta}_1 k_9^* \overline{L}_1 - \overline{k}_8 \overline{W}_3 - \overline{\eta}_2 \overline{k}_5 N_2^* - \overline{\eta}_1 \overline{k}_3 N_1^* = f^{'} \overline{L}_1 + f(\overline{\eta}_1 \overline{k}_2 \overline{L}_1 + \overline{\eta}_2 \overline{k}_3 \overline{L}_2) + \overline{\eta}_1 \overline{k}_9 \overline{L}_1 - \overline{k}_8 \overline{W}_3 \\
- \overline{\eta}_2 \overline{k}_5 \overline{N}_2 - \overline{\eta}_1 \overline{k}_3 \overline{N}_1
\end{aligned}
$$

$$N_1^* = \lambda \overline{L}_1 - f \overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 \overline{L}_2 + \overline{N_1}$$

(12) den, $\begin{aligned} &f = \overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 k_7^* - \overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 \overline{k}_7 \\ &\Rightarrow k_7^* = \overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 f + \overline{k}_7 \end{aligned}$ elde edilir.

Burada her zaman $f = -\overline{\eta}_1 \overline{\eta}_2 \overline{k}_7$ olarak seçilebilir, dolayısıyla $k_7^* = 0$ olur. Yukarıdaki denklem sistemi tekrar numaralandırılırsa (8) sistemi elde edilir.

Spacelike Eğriler İçin:

$\overline{k}_s = \mu_s = \pm 1$ olsun. O zaman bir tek $\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s\}$ cümlesi belirtilmiş olur. Dolayısıyla $\overline{L}_{s+1}$'i bulmak yeterlidir. $\overline{L}_{s+1}$ ve L_{s+1}^* iki farklı Frenet çatısı üreten iki farklı vektör alanı olsunlar. Yani;

$$\left\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{W}_{s+2}, \overline{N}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+3}, ..., \overline{W}_{n-2}\right\}$$

$$\to \left\{\overline{k}_1 = 1, ..., \overline{k}_s = \mu_s, \overline{k}_{s+1}, ..., \overline{k_m}\right\}$$

$$\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, L_{s+1}^* W_{s+2}^*, N_{s+1}^*, N_s^*, W_{s+3}^*, ..., W_{n-2}^*\}$$

$$\to \{\overline{k}_1 = 1, ..., \overline{k}_s = \mu_s = 1,\ k_{s+1}^*, ..., k_m^*\}$$

$\{\overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{W}_{s+2}, \overline{N}_{s+1}, \overline{N}_s\}$ ve $\{\overline{L_s}, L^*_{s+1} W^*_{s+2}, N^*_{s+1}, N^*_s\}$ semi-ortonormal ve aynı yönlendirmeye sahip olduklarından

$$\begin{bmatrix} \overline{L}_s \\ L^*_{s+1} \\ W^*_{s+2} \\ N^*_{s+1} \\ N^*_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & 0 \\ P_{51} & P_{52} & P_{53} & P_{54} & P_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{L}_s \\ \overline{L}_{s+1} \\ \overline{W}_{s+2} \\ \overline{N}_{s+1} \\ \overline{N}_s \end{bmatrix}$$

biçiminde en az bir P = (P_{ij}) matrisi vardır.

$$\overline{L}_s = \overline{L}_s$$

$$L^*_{s+1} = P_{21}\overline{L}_s + P_{22}\overline{L}_{s+1}$$

$$W^*_{s+2} = P_{31}\overline{L}_s + P_{32}\overline{L}_{s+1} + P_{33}\overline{W}_{s+2} \Rightarrow < W^*_{s+2}, \overline{W}_{s+2} >= 1$$

den $P_{33} = 1$ bulunur.

$$N^*_{s+1} = P_{41}\overline{L}_s + P_{42}\overline{L}_{s+1} + P_{43}\overline{W}_{s+2} + P_{44}\overline{N}_{s+1}$$

$$N^*_s = P_{51}\overline{L}_s + P_{52}\overline{L}_{s+1} + P_{53}\overline{W}_{s+2} + P_{54}\overline{N}_{s+1} + P_{55}\overline{N}_s \Rightarrow < N^*_s, \overline{L}_s >= 1$$

den $P_{55} = 1$ bulunur.

$$\Rightarrow < L^*_{s+1}, N^*_{s+1} >= P_{44}P_{22} = 1$$

den $P_{44} = \dfrac{1}{P_{22}}$ bulunur.

$$\Rightarrow < L^*_{s+1}, N^*_s >= P_{21} + P_{22}P_{54} = 0$$

dan $P_{54} = \dfrac{P_{21}}{P_{22}}$ bulunur.

$$\Rightarrow < W^*_{s+2}, N^*_{s+1} >= P_{32}P_{44} + P_{43} = 0$$

dan $P_{43} = \dfrac{P_{32}}{P_{22}}$ bulunur.

$$\Rightarrow \langle W_{s+2}^{*}, N_{s}^{*} \rangle = P_{31} + P_{32}P_{54} + P_{53} = 0$$

dan $P_{53} = -P_{31} + \dfrac{P_{32}P_{21}}{P_{22}}$ bulunur.

Benzer şekilde,

$$P_{51} = -P_{21}P_{41} - \frac{1}{2}P_{31}^{2}, \qquad P_{42} = -\frac{1}{2}\frac{P_{32}^{2}}{P_{22}}$$

$$P_{52} = \frac{1}{2}\frac{P_{21}P_{32}^{2}}{P_{22}} - P_{31}P_{32} - P_{22}P_{41}$$

Burada $P_{22} = \dfrac{\overline{k}_{s+2}}{\mu_{s+1}}$ ve $P_{21} = \dfrac{\overline{k}_{s+1}}{\mu_{s+1}}$ alınarak Frenet formülleri kullanılırsa,

$$L_{s+1}^{*} = P_{21}\overline{L}_{s} + P_{22}\overline{L}_{s+1}$$

$$L_{s+1}^{*} = \frac{k_{s+1}^{*}}{\mu_{s+1}}\overline{L}_{s} + \frac{k_{s+2}^{*}}{\mu_{s+1}}\overline{L}_{s+1}$$

$$\langle L_{s+1}^{*}, N_{s+1}^{*} \rangle = \frac{k_{s+2}^{*}}{\mu_{s+1}} = 1 \Rightarrow k_{s+2}^{*} = \mu_{s+1}$$

$$\langle L_{s+1}^{*}, N_{s}^{*} \rangle = \frac{k_{s+1}^{*}}{\mu_{s+1}} = 0 \Rightarrow k_{s+1}^{*} = 0$$

Böylece tek bir Frenet çatısını bulma problemi

$$\left\{\overline{W}_{1},\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_{s},\overline{L}_{s+1},\overline{W}_{s+2},\overline{N}_{s+1},\overline{N}_{s},\overline{W}_{s+3},\ldots,\overline{W}_{n-2}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\overline{k}_{1} = 1,\ldots,\overline{k}_{s} = 1,\overline{k}_{s+1} = 0,\overline{k}_{s+2} = 1,\overline{k}_{s+3},\ldots,\overline{k_{m}}\right\}$$

$$\left\{\overline{W}_{1},\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_{s},\overline{L}_{s+1},W_{s+2}^{*},N_{s+1}^{*},N_{s}^{*},W_{s+3}^{*},\ldots,W_{n-2}^{*}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\overline{k}_{1} = 1,\ldots,\overline{k}_{s} = 1,\overline{k}_{s+1} = 0,\overline{k}_{s+2} = 1,k_{s+3}^{*},\ldots,k_{m}^{*}\right\}$$

haline dönüşür. Burada $P_{31} = \dfrac{\overline{k}_{s+3}}{\overline{k}_{s+5}}$ ve $P_{32} = \dfrac{\overline{k}_{s+4}}{\overline{k}_{s+5}}$ alınarak Frenet formülleri kullanılırsa,

$$W_{s+2}^{*} = P_{31}\overline{L}_{s} + P_{32}\overline{L}_{s+1} + \overline{W}_{s+2}$$

$$W^*_{s+2} = \frac{k^*_{s+3}}{k^*_{s+5}} \overline{L}_s + \frac{k^*_{s+4}}{k^*_{s+5}} \overline{L}_{s+1} + \overline{W}_{s+2}$$

$$< W^*_{s+2}, N^*_s >= \frac{k^*_{s+3}}{k^*_{s+5}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^*_{s+3} = 0$$

$$< W^*_{s+2}, N^*_{s+1} >= \frac{k^*_{s+4}}{k^*_{s+5}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad k^*_{s+4} = 0$$

bulunur.Böylece $W^*_{s+2} = \overline{W}_{s+2}$ olduğu kabul edilebilir. Yine benzer şekilde $P_{41} = \frac{\overline{k}_{s+6}}{\overline{k}_{s+5}}$ olarak seçilirse $k^*_{s+6} = 0$ elde edilir. (3) sisteminde eğriliklerin indisleri yeniden numaralandırılarak (9) sistemi elde edilir.

Teorem3.1.3.2. $k_1, k_2, ..., k_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathrm{IR}$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olsun. IR^n_2 nin bir noktası P olmak üzere $T_P(IR^n_2)$ nin, m=n-2 veya m=n-3 olmasına göre dejenerelik derecesi sırasıyla 1 veya 2 olan bir $C_0 = \{V_1(0), ..., V_n(0)\}$ semi-ortonormal bazı verilsin. O zaman IR^2_n de, $\gamma(0)$ =P olacak şekilde nulluk derecesi dizisi ve indeks dizisi C_0 inkilerle aynı olan, P noktasındaki Cartan çatısı C_0 olan bir tek C dejenere eğrisi vardır (Ferrandez vd., 2002).

Teorem3.1.3.3. IR^n_2 de iki Cartan eğrisi C ve $\overline{C}$ olsun. Eğer $k_1, k_2, ..., k_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathrm{IR}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için C ve $\overline{C}$ aynı $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ eğriliklerine sahip ise IR^n_2 nin C yi $\overline{C}$ ye taşıyan en az bir semi-Öklid transformasyonu vardır (Ferrandez vd., 2002).

4. BULGULAR

4.1. İndeksi 3 Olan Bir Semi-Öklidyen Uzayda Dejenere Eğriler

IR_3^n indeksi 3 olan semi-Öklidyen uzay ve $\gamma : I \to IR_3^n$ de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. A$=\left\{\gamma',...,\gamma^{(i)}\right\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\left\{\gamma',...,\gamma^{(i)}\right\}$, i = 1,..., n olsun. O zaman A bazının dejenerelik derecesi r = 1, r = 2 veya r = 3 dür. Aşağıda bu üç durum için oluşan tip ailelerinin Frenet formülleri verilecektir.

4.1.1. IR_3^n de Dejenerelik Derecesi 1 Olan Dejenere Eğriler

IR_3^n indeksi 3 olan semi-Öklidyen uzay ve $\gamma : I \to IR_3^n$, IR_3^n de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. A$=\left\{\gamma',...,\gamma^{(n)}\right\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\left\{\gamma',...,\gamma^{(i)}\right\}$, i= 1,..., n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi r = 1 ise, nulluk derecesi dizisi sadece $\{0,..,0,1,1,0,...,0\}$ olan bir tek tip-ailesi elde edilir. Bu tip ailesinin Frenet formülleri şu şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \bar{\varepsilon}_1 \bar{k}_1 \overline{W}_1 \\
&\overline{W}_1' = \bar{\varepsilon}_2 \bar{k}_2 \overline{W}_2 \\
&\overline{W}_i' = -\bar{\varepsilon}_{i-1} \bar{k}_i \overline{W}_{i-1} + \bar{\varepsilon}_{i+1} \bar{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2 \\
&\overline{W}_{s-1}' = -\bar{\varepsilon}_{s-2} \bar{k}_{s-1} \overline{W}_{s-2} + \bar{\eta}_s \bar{k}_s \overline{L}_s \\
&\overline{L}_s' = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+1} \overline{L}_s + \bar{\varepsilon}_{s+1} \bar{k}_{s+2} \overline{W}_{s+1} \\
&\overline{W}_{s+1}' = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+3} \overline{L}_s - \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+2} \overline{N}_s \\
&\overline{N}_s' = -\bar{\varepsilon}_{s-1} \bar{k}_s \overline{W}_{s-1} - \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+1} \overline{N}_s - \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+3} \overline{W}_{s+1} + \bar{\varepsilon}_{s+2} \bar{k}_{s+4} \overline{W}_{s+2} \\
&\overline{W}_{s+2}' = -\bar{\eta}_s \bar{k}_{s+4} \overline{L}_s + \bar{\varepsilon}_{s+3} \bar{k}_{s+5} \overline{W}_{s+3} \\
&\overline{W}_i' = -\bar{\varepsilon}_{i-1} \bar{k}_{i+2} \overline{W}_{i-1} + \bar{\varepsilon}_{i+1} \bar{k}_{i+3} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+3 \le i \le n-2 \\
&\overline{W}_{n-1}' = -\bar{\varepsilon}_{n-2} \bar{k}_{n+1} \overline{W}_{n-2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Burada $\bar{\eta}_1 = <\overline{L}_1, \overline{N}_1> = \underline{+}1$ ve iki j_0 ve j_1 için $\bar{\varepsilon}_{j_0} = \bar{\varepsilon}_{j_1}$=-1 olmak üzere

$\bar{\varepsilon}_j = <\overline{W}_j, \overline{W}_j> = \pm 1, \qquad 1 \le j \le n$ dir. Bu tip ailesine *I. Tip-Ailesi* denir.

4.1.2. IR_3^n de Dejenerelik Derecesi 2 Olan Dejenere Eğriler

IR_3^n indeksi 3 olan semi-Öklidyen uzayı ve $\gamma : I \to IR_3^n$, IR_3^n de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. $A = \{\gamma', ..., \gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma', ..., \gamma^{(i)}\}$, i = 1,...,n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi r = 2 ise, nulluk derecesi dizileri

{0,...,0,1,1,0,...,0,1,1,0,...0} ve {0,...,0,1,2,2,1,0,..., 0} olan iki tek tip-ailesi elde edilir. Bu tip ailelerine karşılık gelen dejenere eğrilerin Frenet formülleri aşağıdaki şekildedir:

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \overline{\varepsilon}_1 \overline{k}_1 \overline{W}_1 \\
&\overline{W}_1' = \overline{\varepsilon}_2 \overline{k}_2 \overline{W}_2 \\
&\overline{W}_i' = -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_i \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2 \\
&\overline{W}_{s_1-1}' = -\overline{\varepsilon}_{s_1-2} \overline{k}_{s_1-1} \overline{W}_{s_1-2} + \eta_{s_1} \overline{k}_{s_1} \overline{L}_{s_1} \\
&\overline{L}_{s_1}' = \eta_{s_1} \overline{k}_{s_1+1} \overline{L}_{s_1} + \overline{\varepsilon}_{s_1+1} \overline{k}_{s_1+2} \overline{W}_{s_1+1} \\
&\overline{W}_{s_1+1}' = \eta_{s_1} \overline{k}_{s_1+3} \overline{L}_{s_1} - \eta_{s_1} \overline{k}_{s_1+2} \overline{N}_{s_1} \\
&\overline{N}_{s_1}' = -\overline{\varepsilon}_{s_1-1} \overline{k}_{s_1} \overline{W}_{s_1-1} - \eta_{s_1} \overline{k}_{s_1+1} \overline{N}_{s_1} - \overline{\varepsilon}_{s_1+1} \overline{k}_{s_1+3} \overline{W}_{s_1+1} + \overline{\varepsilon}_{s_1+2} \overline{k}_{s_1+4} \overline{W}_{s_1+2} \\
&\overline{W}_{s_1+2}' = -\eta_{s_1} \overline{k}_{s_1+4} \overline{L}_{s_1} + \overline{\varepsilon}_{s_1+3} \overline{k}_{s_1+5} \overline{W}_{s_1+3} \\
&\overline{W}_i' = -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_{i+2} \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+3} \overline{W}_{i+1}, \qquad s_1 + 3 \le i \le s_2 - 2 \\
&\overline{W}_{s_2-1}' = -\overline{\varepsilon}_{s_2-2} \overline{k}_{s_2+1} \overline{W}_{s_2-2} + \eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+2} \overline{L}_{s_2} \\
&\overline{L}_{s_2}' = \eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+3} \overline{L}_{s_2} + \overline{\varepsilon}_{s_2+1} \overline{k}_{s_2+4} \overline{W}_{s_2+1} \\
&\overline{W}_{s_2+1}' = \eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+5} \overline{L}_{s_2} - \eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+4} \overline{N}_{s_2} \\
&\overline{N}_{s_2}' = -\overline{\varepsilon}_{s_2-1} \overline{k}_{s_2+2} \overline{W}_{s_2-1} - \eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+3} \overline{N}_{s_2} - \overline{\varepsilon}_{s_2+1} \overline{k}_{s_2+5} \overline{W}_{s_2+1} + \overline{\varepsilon}_{s_2+2} \overline{k}_{s_2+6} \overline{W}_{s_2+2} \\
&\overline{W}_{s_2+2}' = -\eta_{s_2} \overline{k}_{s_2+6} \overline{L}_{s_2} + \overline{\varepsilon}_{s_2+3} \overline{k}_{s_2+7} \overline{W}_{s_2+3} \\
&\overline{W}_i' = -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_{i+4} \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+5} \overline{W}_{i+1}, \qquad s_2 + 3 \le i \le n-3 \\
&\overline{W}_{n-2}' = -\overline{\varepsilon}_{n-3} \overline{k}_{n+2} \overline{W}_{n-3}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma' &= \overline{\varepsilon}_1 \overline{k}_1 \overline{W}_1 \\
\overline{W}_1' &= \overline{\varepsilon}_2 \overline{k}_2 \overline{W}_2 \\
\overline{W}_i' &= -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_i \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2 \\
\overline{W}_{s-1}' &= -\overline{\varepsilon}_{s-2} \overline{k}_{s-1} \overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
\overline{L}_s' &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+2} \overline{L}_{s+1} \\
\overline{L}_{s+1}' &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+4} \overline{L}_{s+1} + \overline{\varepsilon}_{s+2} \overline{k}_{s+5} \overline{W}_{s+2} \\
\overline{W}_{s+2}' &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+6} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+7} \overline{L}_{s+1} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5} \overline{N}_{s+1} \\
\overline{N}_{s+1}' &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+8} \overline{L}_s - \overline{\varepsilon}_{s+2} \overline{k}_{s+7} \overline{W}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+4} \overline{N}_{s+1} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+2} \overline{N}_s \\
\overline{N}_s' &= -\overline{\varepsilon}_{s-1} \overline{k}_s \overline{W}_{s-1} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+8} \overline{L}_{s+1} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+3} \overline{N}_{s+1} \\
&\quad - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{N}_s - \overline{\varepsilon}_{s+2} \overline{k}_{s+6} \overline{W}_{s+2} + \overline{\varepsilon}_{s+3} \overline{k}_{s+9} \overline{W}_{s+3} \\
\overline{W}_{s+3}' &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+9} \overline{L}_s + \overline{\varepsilon}_{s+4} \overline{k}_{s+10} \overline{W}_{s+4} \\
\overline{W}_i' &= -\overline{\varepsilon}_{i-1} \overline{k}_{i+6} \overline{W}_{i-1} + \overline{\varepsilon}_{i+1} \overline{k}_{i+7} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+4 \le i \le n-3 \\
\overline{W}_{n-2}' &= -\overline{\varepsilon}_{n-3} \overline{k}_{n+4} \overline{W}_{n-3}
\end{aligned}
\qquad \textbf{(3)}
$$

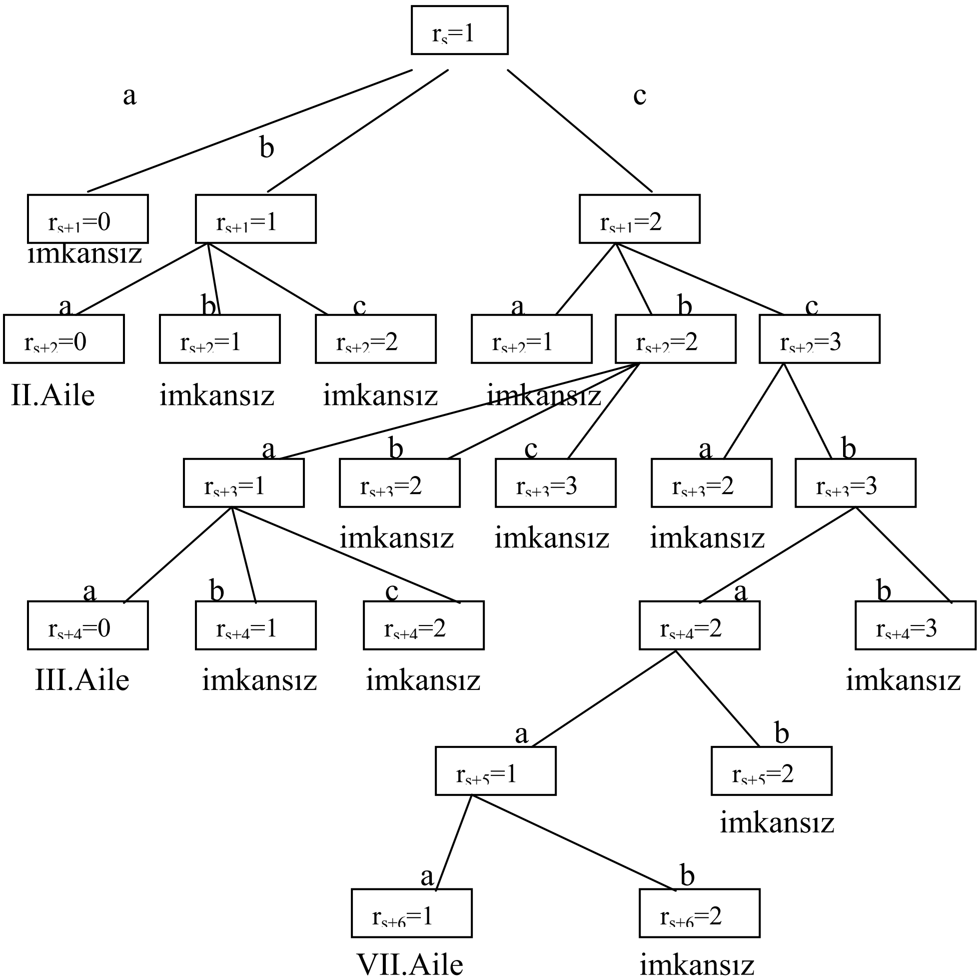
Burada her iki tip-ailesinde de, bir j_0 için $\overline{\varepsilon}_{j_0}$ =-1 dir. Bu tip-ailelerine *II. Tip-Ailesi* ve *III. Tip-Ailesi* denir.

4.1.3. IR_3^n de Dejenerelik Derecesi 3 Olan Dejenere Eğriler

IR_3^n indeksi 3 olan semi-Öklidyen uzayı ve $\gamma : I \to IR_3^n$ de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer A=$\{\gamma',...,\gamma^{(n)}\}$ ailesi lineer bağımsız ve $E_i = Sp\{\gamma',...,\gamma^{(i)}\}$, i = 1,..., n olmak üzere A bazının dejenerelik derecesi r = 3 ise, nulluk derecesi dizileri

{0, ..., 0, 1, 1, 0, ..., 0,1,1,0, ...0,1,1,0, ...,0}, {0, ..., 0,1,1,0,...,0,1,2,2,1,0, ..., 0} {0,...,0,1,2,2,1,0,...,0,1,1,0,...0}, {0,....,0,1,2,3,3,2,1,0,...,0} olan tip-aileleri bulunacaktır. Burada önce, genel olarak bir dejenere eğri için nulluk derecesi dizisinin terimlerinin sıralanışları ile ilgili durumlar incelenecektir. Eğer r_i, $1 \le i \le n$ ler A=$\{\gamma',...,\gamma^{(n)}\}$ bazının nulluk derecesi dizisinin terimlerini göstermek üzere

$r_1 = ... = r_{s-1} = 0$ ise, o zaman γ boyunca ortonormal $\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}\}$ spacelike vektör alanları elde edilir. Buna göre $r_s=1$ olmak üzere nulluk derecesi dizisinin terimlerinin dizilişleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.



Şimdi imkansız olan durumları tek tek ele alalım.

Tablodaki cbc Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{W}_{s+2}, \overline{L}_{s+3}\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{aligned}
r_s &= 1 & \overline{W}'_{s-1} &= -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \eta_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} &= 2 & \overline{L}'_s &= \eta_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} &= 2 & \overline{L}'_{s+1} &= \eta_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2} \\
r_{s+3} &= 3 & \overline{W}'_{s+2} &= \eta_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+3}\overline{k}_{s+8}\overline{L}_{s+3}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$0 \neq \overline{k}_{s+5} = < \overline{L}_{s+1}^{'}, \overline{W}_{s+2} > = - < \overline{W}_{s+2}^{'}, \overline{L}_{s+1}^{'} > = 0$$

çelişkisi bulunur. Dolayısıyla bu yol imkânsızdır.

Tablodaki cbac Yolu: Bu durumda $\left\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{W}_{s+2}, \overline{N}_{s+1}, \overline{L}_{s+3}\right\}$ çatısına karşılık,

$$\begin{array}{ll}
r_s = 1 & \overline{W}_{s-1}^{'} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \eta_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} = 2 & \overline{L}_s^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} = 2 & \overline{L}_{s+1}^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+2} \\
r_{s+3} = 1 & \overline{W}_{s+2}^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} - \eta_{s+1}\overline{k}_{s+5}\overline{N}_{s+1} \\
r_{s+4} = 2 & \overline{N}_{s+1}^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+8}\overline{L}_s - \overline{k}_{s+7}\overline{W}_{s+2} - \eta_{s+1}\overline{k}_{s+3}\overline{N}_{s+1} + \eta_{s+3}\overline{k}_{s+9}\overline{L}_{s+3}
\end{array}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$0 \neq \overline{k}_{s+2} = < \overline{L}_s^{'}, \overline{N}_{s+1} > = - < \overline{N}_{s+1}^{'}, \overline{L}_s > = 0$$

çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla bu yol da imkânsızdır.

Tablodaki cca Yolu: Bu durumda $\left\{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}, \overline{N}\right\}$ çatısına karşılık,

$$\begin{array}{ll}
r_s = 1 & \overline{W}_{s-1}^{'} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \eta_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} = 2 & \overline{L}_s^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} = 3 & \overline{L}_{s+1}^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+2}\overline{k}_{s+5}\overline{L}_{s+2} \\
r_{s+3} = 2 & \overline{L}_{s+2}^{'} = \eta_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{L}_{s+2} + \overline{\eta k N}
\end{array}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\overline{N} = \overline{N}_s, \overline{N} = \overline{N}_{s+1}$ veya $\overline{N} = \overline{N}_{s+2}$ biçimindedir. Buna göre,

$$\overline{N} = \overline{N}_s \Rightarrow 0 \neq \overline{k} = < \overline{L}_{s+2}^{'}, \overline{L}_s > = - < \overline{L}_s^{'}, \overline{L}_{s+2} > = 0$$

$$\overline{N} = \overline{N}_{s+1} \Rightarrow 0 \neq \overline{k} = < \overline{L}_{s+2}^{'}, \overline{L}_{s+1} > = - < \overline{L}_{s+1}^{'}, \overline{L}_{s+2} > = 0$$

$$\overline{N} = \overline{N}_{s+2} \Rightarrow 0 \neq k = < \overline{L}_{s+2}^{'}, \overline{L}_{s+2} > = 0 \qquad (L_{s+2} \text{ null olduğundan})$$

çelişkileri bulunur. Böylece bu yolun da imkânsız olduğu görülür.

Tablodaki ccbb Yolu: Bu durumda $\left\{\overline{W}_1 ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}, \overline{W}_{s+3}, \overline{W}_{s+4}\right\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{array}{ll}
r_s = 1 & \overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} = 2 & \overline{L}'_s = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} = 3 & \overline{L}'_{s+1} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+5}\overline{L}_{s+2} \\
r_{s+3} = 3 & \overline{L}'_{s+2} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{L}_{s+2} + \overline{k}_{s+9}\overline{W}_{s+3} \\
r_{s+4} = 3 & \overline{W}'_{s+3} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+10}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+11}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+12}\overline{L}_{s+2} + \overline{k}_{s+13}\overline{W}_{s+4}
\end{array}
$$

eşitlikleri elde edilir. $\mathrm{Rad}(E_{s+4}) = Sp\{\overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}\}$ olduğundan,

$$< \overline{L}_s, \gamma^{(s+3)} > = < \overline{L}_{s+1}, \gamma^{(s+3)} > = 0$$

$$< \overline{L}_{s+2}, \gamma^{(s+3)} > = < \overline{L}_{s+2}, \gamma^{(s+4)} > = 0$$

$$
\begin{aligned}
< \overline{L}'_{s+2}, \gamma^{(s+3)} > &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+6} < \overline{L}_s, \gamma^{(s+3)} > + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7} < \overline{L}_{s+1}, \gamma^{(s+3)} > \\
&+ \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+8} < \overline{L}_{s+2}, \gamma^{(s+3)} > + \overline{k}_{s+9} < \overline{W}_{s+3}, \gamma^{(s+3)} > = 0
\end{aligned}
$$

Buradan $< \overline{L}'_{s+2}, \gamma^{(s+3)} > = 0 \Rightarrow < \overline{W}_{s+3}, \gamma^{(s+3)} > = 0$

sonucuna varılır. Böylece $\overline{W}_{s+3} \in Rad(E_{s+3})$ gibi bir çelişkinin var olduğu görülür.

Tablodaki ccbab Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1 ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}, \overline{W}_{s+3}, \overline{N}_{s+2}, \overline{W}_{s+4}\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{array}{ll}
r_s = 1 & \overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} = 2 & \overline{L}'_s = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} = 3 & \overline{L}'_{s+1} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+5}\overline{L}_{s+2} \\
r_{s+3} = 3 & \overline{L}'_{s+2} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{L}_{s+2} + \overline{k}_{s+9}\overline{W}_{s+3} \\
r_{s+4} = 2 & \overline{W}'_{s+3} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+10}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+11}\overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+12}\overline{L}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+9}\overline{N}_{s+2} \\
r_{s+5} = 2 & \overline{N}'_{s+2} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+13}\overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+14}\overline{L}_{s+1} - \overline{k}_{s+12}\overline{W}_{s+3} - \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{N}_{s+2} + \overline{k}_{s+15}\overline{W}_{s+4}
\end{array}
$$

eşitlikleri bulunur. Buradan

$$0 \neq \overline{k}_{s+5} = < \overline{L}'_{s+1}, \overline{N}_{s+2} > = - < \overline{N}'_{s+2}, \overline{L}_{s+1} > = 0$$

çelişkisinden dolayı bu yol imkansızdır.

Tablodaki ccbaab Yolu: Bu durumda $\{\overline{W}_1 ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}, \overline{W}_{s+3}, \overline{N}_{s+2}, \overline{N}_{s+1}\overline{W}_{s+4}\}$ çatısına karşılık,

$$
\begin{array}{ll}
r_s = 1 & \overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \eta_s \overline{k}_s \overline{L}_s \\
r_{s+1} = 2 & \overline{L}'_s = \eta_s \overline{k}_{s+1}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+2}\overline{L}_{s+1} \\
r_{s+2} = 3 & \overline{L}'_{s+1} = \eta_s \overline{k}_{s+3}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+2}\overline{k}_{s+5}\overline{L}_{s+2} \\
r_{s+3} = 3 & \overline{L}'_{s+2} = \eta_s \overline{k}_{s+6}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+7}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{L}_{s+2} + \overline{k}_{s+9}\overline{W}_{s+3} \\
r_{s+4} = 2 & \overline{W}'_{s+3} = \eta_s \overline{k}_{s+10}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+11}\overline{L}_{s+1} + \eta_{s+2}\overline{k}_{s+12}\overline{L}_{s+2} - \eta_{s+2}\overline{k}_{s+9}\overline{N}_{s+2} \\
r_{s+5} = 1 & \overline{N}'_{s+2} = \eta_s \overline{k}_{s+13}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+14}\overline{L}_{s+1} - \overline{k}_{s+12}\overline{W}_{s+3} - \eta_{s+2}\overline{k}_{s+8}\overline{N}_{s+2} - \eta_{s+1}\overline{k}_{s+5}\overline{N}_{s+1} \\
r_{s+6} = 1 & \overline{N}'_{s+1} = \eta_s \overline{k}_{s+15}\overline{L}_s + \eta_{s+1}\overline{k}_{s+16}\overline{L}_{s+1} - \overline{k}_{s+11}\overline{W}_{s+3} - \eta_{s+2}\overline{k}_{s+7}\overline{N}_{s+2} \\
 & \qquad - \eta_{s+1}\overline{k}_{s+4}\overline{N}_{s+1} + \overline{k}_{s+17}\overline{W}_{s+4}
\end{array}
$$

denklemleri bulunur. buna göre,

$$0 \neq \overline{k}_{s+2} = \langle \overline{L}'_s, \overline{N}_{s+1} \rangle = -\langle \overline{N}'_{s+1}, \overline{L}_s \rangle = 0$$

çelişkisinden dolayı bu yol da imkânsızdır.

Sonuç olarak IR_3^n de dejenerelik derecesi 3 olan bir dejenere eğrinin nulluk derecesi dizisi, $\{0,....,0,1,1,0,...,0,1,1,0,....,0,1,1,0,.....,0\}$, $\{0,...,0,1,1,0,...,0,1,2,2,1,0,...,0\}$ $\{0,...,0,1,2,2,1,0,...,0,1,1,0,...,0\}$, $\{0,...,0,1,2,3,3,2,1,0,...,0\}$ dizilerinden birisi olacağından dört farklı tip-ailesi elde edilir. Bunlara karşılık gelen Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \overline{k}_1\overline{W}_1 \\
&\overline{W}'_1 = \overline{k}_2\overline{W}_2 \\
&\overline{W}'_i = -\overline{k}_i\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+1}\overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s_1 - 2 \\
&\overline{W}'_{s_1-1} = -\overline{k}_{s_1-1}\overline{W}'_{s_1-2} + \eta_{s_1}\overline{k}_{s_1}\overline{L}_{s_1} \\
&\overline{L}'_{s_1} = \eta_{s_1}\overline{k}_{s_1+1}\overline{L}_{s_1} + \overline{k}_{s_1+2}\overline{W}_{s_1+1} \\
&\overline{W}'_{s_1+1} = \eta_{s_1}\overline{k}_{s_1+3}\overline{L}_{s_1} - \eta_{s_1}\overline{k}_{s_1+2}\overline{N}_{s_1} \\
&\overline{N}'_{s_1} = -\overline{k}_{s_1}\overline{W}_{s_1-1} - \eta_{s_1}\overline{k}_{s_1+1}\overline{N}_{s_1} - \overline{k}_{s_1+3}\overline{W}_{s_1+1} + \overline{k}_{s_1+4}\overline{W}_{s_1+2} \\
&\overline{W}'_{s_1+2} = -\eta_{s_1}\overline{k}_{s_1+4}\overline{L}_{s_1} + \overline{k}_{s_1+5}\overline{W}_{s_1+3} \\
&\overline{W}'_i = -\overline{k}_{i+2}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+3}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_1 + 3 \le i \le s_2 - 2 \\
&\overline{W}'_{s_2-1} = -\overline{k}_{s_2+1}\overline{W}_{s_2-2} + \eta_{s_2}\overline{k}_{s_2+2}\overline{L}_{s_2} \qquad\qquad \textbf{(4)} \\
&\overline{L}'_{s_2} = \eta_{s_2}\overline{k}_{s_2+3}\overline{L}_{s_2} + \overline{k}_{s_2+4}\overline{W}_{s_2+1} \\
&\overline{W}'_{s_2+1} = \eta_{s_2}\overline{k}_{s_2+5}\overline{L}_{s_2} - \eta_{s_2}\overline{k}_{s_2+4}\overline{N}_{s_2} \\
&\overline{N}'_{s_2} = -\overline{k}_{s_2+2}\overline{W}_{s_2-1} - \eta_{s_2}\overline{k}_{s_2+3}\overline{N}_{s_2} - \overline{k}_{s_2+5}\overline{W}_{s_2+1} + \overline{k}_{s_2+6}\overline{W}_{s_2+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}'_{s_2+2} = -\overline{\eta}_{s_2}\overline{k}_{s_2+6}\overline{L}_{s_2} + \overline{k}_{s_2+7}\overline{W}_{s_2+3}\\
&\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+4}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+5}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_2+3 \le i \le s_3-2\\
&\overline{W}'_{s_3-1} = -\overline{k}_{s_3+3}\overline{W}_{s_3-2} + \overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+4}\overline{L}_{s_3}\\
&\overline{L}'_{s_3} = \overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+5}\overline{L}_{s_3} + \overline{k}_{s_3+6}\overline{W}_{s_3+1}\\
&\overline{W}'_{s_3+1} = \overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+7}\overline{L}_{s_3} - \overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+6}\overline{N}_{s_3}\\
&\overline{N}'_{s_3} = -\overline{k}_{s_3+4}\overline{W}_{s_3-1} - \overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+5}\overline{N}_{s_3} - \overline{k}_{s_3+7}\overline{W}_{s_3+1} + \overline{k}_{s_3+8}\overline{W}_{s_3+2}\\
&\overline{W}'_{s_3+2} = -\overline{\eta}_{s_3}\overline{k}_{s_3+8}\overline{L}_{s_3} + \overline{k}_{s_3+9}\overline{W}_{s_3+3}\\
&\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+6}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+7}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_3+3 \le i \le n-4\\
&\overline{W}'_{n-3} = -\overline{k}_{n+3}\overline{W}_{n-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \overline{k}_1\overline{W}_1\\
&\overline{W}'_1 = \overline{k}_2\overline{W}_2\\
&\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+1}\overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2\\
&\overline{W}'_{s-1} = -\overline{k}_{s-1}\overline{W}_{s-2} + \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s}\overline{L}_{s}\\
&\overline{L}'_{s} = \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+1}\overline{L}_{s} + \overline{k}_{s+2}\overline{W}_{s+1}\\
&\overline{W}'_{s+1} = \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+3}\overline{L}_{s} - \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+2}\overline{N}_{s}\\
&\overline{N}'_{s} = -\overline{k}_{s}\overline{W}_{s-1} - \overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+1}\overline{N}_{s} - \overline{k}_{s+3}\overline{W}_{s+1} + \overline{k}_{s+4}\overline{W}_{s+2}\\
&\overline{W}'_{s+2} = -\overline{\eta}_{s}\overline{k}_{s+4}\overline{L}_{s} + \overline{k}_{s+5}\overline{W}_{s+3}\\
&\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+2}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+3}\overline{W}_{i+1}, \qquad s+3 \le i \le s_1-2\\
&\overline{W}_{s_1-1} = -\overline{k}_{s_1+1}\overline{W}_{s_1-2} + \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+2}\overline{L}_{s_1}\\
&\overline{L}'_{s_1} = \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+3}\overline{L}_{s_1} + \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+4}\overline{L}_{s_1\ +1}\\
&\overline{L}'_{s_1+1} = \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+5}\overline{L}_{s_1} + \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+6}\overline{L}_{s_1+1} + \overline{k}_{s_1+7}\overline{W}_{s_1+2}\\
&\overline{W}'_{s_1+2} = \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+8}\overline{L}_{s_1} + \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+9}\overline{L}_{s_1+1} - \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+7}\overline{N}_{s_1+1}\\
&\overline{N}'_{s_1+1} = \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+10}\overline{L}_{s_1} - \overline{k}_{s_1+9}\overline{W}_{s_1+2} - \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+6}\overline{N}_{s_1+1} - \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+4}\overline{N}_{s_1}\\
&\overline{N}'_{s_1} = -\overline{k}_{s_1+2}\overline{W}_{s_1-1} - \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+10}\overline{L}_{s_1+1} - \overline{\eta}_{s_1+1}\overline{k}_{s_1+5}\overline{N}_{s_1+1}\\
&\qquad\qquad - \overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+3}\overline{N}_{s} - \overline{k}_{s_1+8}\overline{W}_{s_1+2} + \overline{k}_{s_1+11}\overline{W}_{s_1+3}\\
&\overline{W}'_{s_1+3} = -\overline{\eta}_{s_1}\overline{k}_{s_1+11}\overline{L}_{s_1} + \overline{k}_{s_1+12}\overline{W}_{s_1+4}\\
&\overline{W}'_{i} = -\overline{k}_{i+8}\overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+9}\overline{W}_{i+1}, \qquad s_1+4 \le i \le n-4\\
&\overline{W}'_{n-3} = -\overline{k}_{n+5}\overline{W}_{n-4}
\end{aligned} \qquad \textbf{(5)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \bar{k}_1 \overline{W}_1 \\
&\overline{W}'_1 = \bar{k}_2 \overline{W}_2 \\
&\overline{W}'_i = -\bar{k}_i \overline{W}_{i-1} + \bar{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2 \\
&\overline{W}'_{s-1} = -\bar{k}_{s-1} \overline{W}_{s-2} + \bar{\eta}_s \bar{k}_s \overline{L}_s \\
&\overline{L}'_s = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+1} \overline{L}_s + \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+2} \overline{L}_{s+1} \\
&\overline{L}'_{s+1} = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+3} \overline{L}_s + \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+4} \overline{L}_{s+1} + \bar{k}_{s+5} \overline{W}_{s+2} \qquad \textbf{(6)} \\
&\overline{W}'_{s+2} = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+6} \overline{L}_s + \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+7} \overline{L}_{s+1} - \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+5} \overline{N}_{s+1} \\
&\overline{N}'_{s+1} = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+8} \overline{L}_s - \bar{k}_{s+7} \overline{W}_{s+2} - \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+4} \overline{N}_{s+1} - \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+2} \overline{N}_s \\
&\overline{N}'_s = -\bar{k}_s \overline{W}_{s-1} - \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+8} \overline{L}_{s+1} - \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+3} \overline{N}_{s+1} \\
&\qquad\quad - \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+1} \overline{N}_s - \bar{k}_{s+6} \overline{W}_{s+2} + \bar{k}_{s+9} \overline{W}_{s+3} \\
&\overline{W}'_{s+3} = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+9} \overline{L}_s + \bar{k}_{s+10} \overline{W}_{s+4} \\
&\overline{W}'_i = -\bar{k}_{i+6} \overline{W}_{i-1} + \bar{k}_{i+7} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+4 \le i \le s_1 - 2 \\
&\overline{W}'_{s_1-1} = -\bar{k}_{s_1+5} \overline{W}_{s_1-2} + \bar{\eta}_{s_1} \bar{k}_{s_1+6} \overline{L}_{s_1} \\
&\overline{L}'_{s_1} = \bar{\eta}_{s_1} \bar{k}_{s_1+7} \overline{L}_{s_1} + \bar{k}_{s_1+8} \overline{W}_{s_1+1} \\
&\overline{W}'_{s_1+1} = \bar{\eta}_{s_1} \bar{k}_{s_1+9} \overline{L}_{s_1} - \bar{\eta}_{s_1} \bar{k}_{s_1+8} \overline{N}_{s_1} \\
&\overline{N}'_{s_1} = -\bar{k}_{s_1+6} \overline{W}_{s_1-1} - \bar{\eta}_{s_1} \bar{k}_{s_1+7} \overline{N}_{s_1} - \bar{k}_{s_1+9} \overline{W}_{s_1+1} + \bar{k}_{s_1+10} \overline{W}_{s_1+2} \\
&\overline{W}'_{s_1+2} = -\bar{n}_{s_1} \bar{k}_{s_1+10} \overline{L}_{s_1} + \bar{k}_{s_1+11} \overline{W}_{s_1+3} \\
&\overline{W}'_i = -\bar{k}_{i+8} \overline{W}_{i-1} + \bar{k}_{i+9} \overline{W}_{i+1}, \qquad s_1 + 3 \le i \le n-4 \\
&\overline{W}'_{n-3} = -\bar{k}_{n+5} \overline{W}_{n-4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma' = \bar{k}_1 \overline{W}_1 \\
&\overline{W}'_1 = \bar{k}_2 \overline{W}_2 \\
&\overline{W}'_i = -\bar{k}_i \overline{W}_{i-1} + \bar{k}_{i+1} \overline{W}_{i+1}, \qquad 2 \le i \le s-2 \\
&\overline{W}'_{s-1} = -\bar{k}_{s-1} \overline{W}_{s-2} + \bar{\eta}_s \bar{k}_s \overline{L}_s \\
&\overline{L}'_s = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+1} \overline{L}_s + \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+2} \overline{L}_{s+1} \qquad \textbf{(7)} \\
&\overline{L}'_{s+1} = \bar{\eta}_s \bar{k}_{s+3} \overline{L}_s + \bar{\eta}_{s+1} \bar{k}_{s+4} \overline{L}_{s+1} + \bar{\eta}_{s+2} \bar{k}_{s+5} \overline{L}_{s+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{L}'_{s+2} &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+6} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+7} \overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+8} \overline{L}_{s+2} + \overline{k}_{s+9} \overline{W}_{s+3} \\
\overline{W}'_{s+3} &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+10} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+11} \overline{L}_{s+1} + \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+12} \overline{L}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+9} \overline{N}_{s+2} \\
\overline{N}'_{s+2} &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+13} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+14} \overline{L}_{s+1} - \overline{k}_{s+12} \overline{W}_{s+3} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+8} \overline{N}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5} \overline{N}_{s+1} \\
\overline{N}'_{s+1} &= \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+15} \overline{L}_s - \overline{k}_{s+11} \overline{W}_{s-3} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+14} \overline{L}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+7} \overline{N}_{s+2} \\
&\quad - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+4} \overline{N}_{s+1} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+2} \overline{N}_s \\
\overline{N}'_{s} &= -\overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+15} \overline{L}_{s+1} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+13} \overline{L}_{s+2} - \overline{k}_{s+10} \overline{W}_{s+3} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+6} \overline{N}_{s+2} \\
&\quad - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+3} \overline{N}_{s+1} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+1} \overline{N}_s + \overline{k}_{s+16} \overline{W}_{s+4} \\
\overline{W}'_{s+4} &= -\overline{\eta}_s \overline{k}_{s+16} \overline{L}_s + \overline{k}_{s+17} \overline{W}_{s+5} \\
\overline{W}'_{i} &= -\overline{k}_{i+12} \overline{W}_{i-1} + \overline{k}_{i+13} \overline{W}_{i+1}, \qquad s+5 \le i \le n-4 \\
\overline{W}'_{n-3} &= -\overline{k}_{n+9} \overline{W}_{n-4}
\end{aligned}
$$

Bu tip-ailelerine sırasıyla *IV. Tip-Ailesi*, *V. Tip-Ailesi*, *VI. Tip-Ailesi* ve *VII. Tip-Ailesi* denir.

4.1.4. Cartan Çatısı

Teorem 4.1.4.1: $\gamma : I \to IR_3^n$ bir dejenere eğri olsun. Eğer her t için $T_{\gamma(t)}(IR_3^n)$ tanjant uzayı $\{\gamma'(t),...,\gamma^{(n)}(t)\}$ cümlesi tarafından geriliyorsa, o zaman bu eğrinin yönlendirmeye göre bir tek kanonik Frenet çatısı vardır. Bu çatıya karşılık gelen Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

I. Tip - Ailesi

Null Eğriler İçin	Null Olmayan Eğriler İçin
$\gamma' = L_1$	$\gamma' = W_1$
$L_1' = \varepsilon_2 W_2$	$W_1' = \varepsilon_2 k_1 W_2$
$W_2' = \eta_1 k_1 L_1 - \eta_1 N_1$	$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1} \qquad 2 \le i \le s-2$
$N_1' = -\varepsilon_2 k_1 W_2 + \varepsilon_3 k_2 W_3$	$W_{s-1}' = -\varepsilon_{s-2} k_{s-2} W_{s-2} + \eta_s L_s$
$W_3' = -\eta_1 k_2 L_1 + \varepsilon_4 k_3 W_4$	$L_s' = \varepsilon_{s+1} k_{s-1} W_{s+1}$
$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1},$	$W_{s+1}' = \eta_s k_s L_s - \eta_s k_{s-1} N_s$
$4 \le i \le n-2$	$N_s' = -\varepsilon_{s-1} W_{s-1} - \varepsilon_{s+1} k_s W_{s+1} + \varepsilon_{s+2} k_{s+1} W_{s+2}$
$W_{n-1}' = -\varepsilon_{n-2} k_{n-2} W_{n-2}$	$W_{s+2}' = -\eta_s k_{s+1} L_s + \varepsilon_{s+3} k_{s+2} W_{s+3}$
	$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1}$
	$W_{n-1}' = -\varepsilon_{n-2} k_{n-2} W_{n-2}$

II. Tip-Ailesi

Null Eğriler İçin	Spacelike Eğriler İçin
$\gamma' = L_1$	$\gamma' = W_1$
$L_1' = \varepsilon_2 W_2$	$W_1' = k_1 W_2$
$W_2' = \eta_1 k_1 L_1 - \eta_1 N_1$	$W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$
$N_1' = -\varepsilon_2 k_1 W_2 + \varepsilon_3 k_3 W_3$	$W_{s_1-1}' = -k_{s_1-2} W_{s_1-2} + \eta_{s_1} L_{s_1}$
$W_3' = -\eta_1 k_2 L_1 + \varepsilon_4 k_3 W_4$	$L_{s_1}' = k_{s_1-1} W_{s_1+1}$
$W_i' = -\varepsilon_{i-1} k_{i-1} W_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_i W_{i+1}$	$W_{s_{1+1}}' = \eta_{s_1} k_{s_1} L_{s_1} - \eta_{s_1} k_{s_1-1} N_{s_1}$
$W_{s-1}' = -\varepsilon_{s-2} k_{s-2} W_{s-2} + \eta_s L_s$	$N_{s_1}' = W_{s_1-1} - k_{s_1} W_{s_1+1} + k_{s_1+1} W_{s_1+2}$
$L_s' = \varepsilon_{s+1} k_{s-1} W_{s+1}$	$W_{s_1+2}' = -\eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3}$

$N_s^{'} = -\varepsilon_{s-1}W_{s-1} - \varepsilon_{s+1}k_sW_{s+1} + \varepsilon_{s+2}k_{s+1}W_{s+2}$ $W_{s+2}^{'} = -\eta_s k_{s+1}L_s + \varepsilon_{s+3}k_{s+2}W_{s+3}$ $W_i^{'} = -\varepsilon_{i-1}k_{i-1}W_{i-1} + \varepsilon_{i+1}k_iW_{i+1}$ $W_{n-2}^{'} = -\varepsilon_{n-3}k_{n-3}W_{n-3}$	$W_i^{'} = -k_{i-1}W_{i-1} + k_iW_{i+1}$ $W_{s_2-1}^{'} = -k_{s_2-2}W_{s_2-2} + \eta_{s_2}L_{s_2}$ $L_{s_2}^{'} = k_{s_2-1}W_{s_2+1}$ $W_{s_2+1}^{'} = \eta_{s_2}k_{s_2}L_{s_2} - \eta_{s_2}k_{s_2-1}N_{s_2}$ $N_{s_2}^{'} = -W_{s_2-1} - k_{s_2}W_{s_2+1} + k_{s_2+1}W_{s_2+2}$ $W_{s_2+2}^{'} = -\eta_{s_2}k_{s_2+1}L_{s_2} + k_{s_2+2}W_{s_2+3}$ $W_i^{'} = -k_{i-1}W_{i-1} + k_iW_{i+1}$ $W_{n-2}^{'} = -k_{n-3}W_{n-3}$

Null Eğriler İçin	**Spacelike Eğriler İçin**
$\gamma^{'} = L_1$ $L_1^{'} = \eta_2L_2$ $L_2^{'} = \varepsilon_3W_3$ $W_3^{'} = -\eta_2k_1L_2 - \eta_2N_2$ $N_2^{'} = \eta_1k_2L_1 - \eta_1N_1 - \varepsilon_3k_1W_3$ $N_1^{'} = -\eta_2k_2L_2 + \varepsilon_4k_3W_4$ $W_4^{'} = -\eta_1k_3L_1 + \varepsilon_5k_4W_5$ $W_i^{'} = -\varepsilon_{i-1}k_{i-1}W_{i-1} + \varepsilon_{i+1}k_iW_{i+1}$ $W_{n-2}^{'} = -\varepsilon_{n-3}k_{n-3}W_{n-3}$	$\gamma^{'} = W_1$ $W_1^{'} = k_1W_2$ $W_i^{'} = -k_{i-1}W_{i-1} + k_iW_{i+1}$ $W_{s-1}^{'} = -k_{s-2}W_{s-2} + \eta_sL_s$ $L_s^{'} = \eta_{s+1}L_{s+1}$ $L_{s+1}^{'} = k_{s-1}W_{s+2}$ $W_{s+2}^{'} = \eta_{s+1}k_sL_{s+1} - \eta_{s+1}k_{s-1}N_{s+1}$ $N_{s+1}^{'} = \eta_sk_{s+1}L_s - k_sW_{s+2} - \eta_sN_s$ $N_s^{'} = -\eta_{s+1}k_{s+1}L_{s+1} - W_{s-1} + k_{s+2}W_{s+3}$ $W_{s+3}^{'} = -\eta_sk_{s+2}L_s + k_{s+3}W_{s+4}$ $W_i^{'} = -k_{i-1}W_{i-1} + k_iW_{i+1}$ $W_{n-2}^{'} = -k_{n-3}W_{n-3}$

IV. Tip-Ailesi

Null Eğriler İçin	Spacelike Eğriler İçin
$\gamma' = L_1$ $L_1' = W_2$ $W_2' = \eta_1 k_1 L_1 - \eta_1 N_1$ $N_1' = -k_1 W_2 + k_2 W_3$ $W_3' = -\eta_1 k_2 L_1 + k_3 W_4$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_{1-1}} = -k_{s_{1-2}} W_{s_{1-2}} + \eta_{s_1} L_{s_1}$ $L'_{s_1} = k_{s_1-1} W_{s_1+1}$ $W'_{s_{1+1}} = \eta_{s_1} k_{s_1} L_{s_1} - \eta_{s_1} k_{s_1-1} N_{s_1}$ $N'_{s_1} = -W_{s_1-1} - k_{s_1} W_{s_1+1} + k_{s_1+1} W_{s_1+2}$ $W'_{s_1+2} = -\eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_2-1} = -k_{s_2-2} W_{s_2-2} + \eta_{s_2} L_{s_2}$ $L'_{s_2} = k_{s_2-1} W_{s_2+1}$ $W'_{s_2+1} = \eta_{s_2} k_{s_2} L_{s_2} - \eta_{s_2} k_{s_2-1} N_{s_2}$ $N'_{s_2} = -W_{s_2-1} - k_{s_2} W_{s_2+1} + k_{s_2+1} W_{s_2+2}$ $W'_{s_2+2} = -\eta_{s_2} k_{s_2+1} L_{s_2} + k_{s_2+2} W_{s_2+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4} W_{n-4}$	$\gamma' = W_1$ $W_1' = k_1 W_2$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_1-1} = -k_{s_1-2} W_{s_1-2} + \eta_{s_1} L_{s_1}$ $L'_{s_1} = k_{s_1-1} W_{s_1+1}$ $W'_{s_1+1} = \eta_{s_1} k_{s_1} L_{s_1} - \eta_{s_1} k_{s_1-1} N_{s_1}$ $N'_{s_1} = -W_{s_1-1} - k_{s_1} W_{s_1+1} + k_{s_1+1} W_{s_1+2}$ $W'_{s_1+2} = -\eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_2-1} = -k_{s_2-2} W_{s_2-2} + \eta_{s_2} L_{s_2}$ $L'_{s_2} = k_{s_2-1} W_{s_2+1}$ $W'_{s_2+1} = \eta_{s_2} k_{s_2} L_{s_2} - \eta_{s_2} k_{s_2-1} N_{s_2}$ $N'_{s_2} = -W_{s_2-1} - k_{s_2} W_{s_2+1} + k_{s_2+1} W_{s_2+2}$ $W'_{s_{2+2}} = -\eta_{s_2} k_{s_2+1} L_{s_2} + k_{s_2+2} W_{s_2+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_3-1} = -k_{s_3-2} W_{s_3-2} + \eta_{s_3} L_{s_3}$ $L'_{s_3} = k_{s_3-1} W_{s_3+1}$ $W'_{s_{3+1}} = \eta_{s_3} k_{s_3} L_{s_3} - \eta_{s_3} k_{s_3-1} N_{s_3}$ $N'_{s_3} = -W_{s_3-1} - k_{s_3} W_{s_3+1} + k_{s_3+1} W_{s_3+2}$ $W'_{s_3+2} = -\eta_{s_3} k_{s_3+1} L_{s_3} + k_{s_3+2} W_{s_3+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4} W_{n-4}$

V. Tip-Ailesi

Null Eğriler İçin	Spacelike Eğriler İçin
$\gamma' = L_1$ $L_1' = W_2$ $W_2' = \eta_1 k_1 L_1 - \eta_1 N_1$ $N_1' = -k_1 W_2 + k_2 W_3$ $W_3' = -\eta_1 k_2 L_1 + k_3 W_4$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + \eta_s L_s$ $L_s' = \eta_{s+1} L_{s+1}$ $L_{s+1}' = k_{s-1} W_{s+2}$ $W_{s+2}' = \eta_{s+1} k_s L_{s+1} - \eta_{s+1} k_{s-1} N_{s+1}$ $N_{s+1}' = \eta_s k_{s+1} L_s - k_s W_{s+2} - \eta_s N_s$ $N_s' = -W_{s-1} - \eta_{s+1} k_{s+1} L_{s+1} + k_{s+2} W_{s+3}$ $W_{s+3}' = -\eta_s k_{s+2} L_s + k_{s+3} W_{s+4}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{n-3}' = -k_{n-4} W_{n-4}$	$\gamma' = W_1$ $W_1' = k_1 W_2$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + \eta_s L_s$ $L_s' = k_{s-1} W_{s+1}$ $W_{s+1}' = \eta_s k_s L_s - \eta_s k_{s-1} N_s$ $N_s' = -W_{s-1} - k_s W_{s+1} + k_{s+1} W_{s+2}$ $W_{s+2}' = -\eta_s k_{s+1} L_s + k_{s+2} W_{s+3}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{s_1-1}' = -k_{s_1-2} W_{s_1-2} + \eta_{s_1} L_{s_1}$ $L_{s_1}' = \eta_{s_1+1} L_{s_1+1}$ $L_{s_1+1}' = k_{s_1-1} W_{s_1+2}$ $W_{s_1+2}' = \eta_{s_1+1} k_{s_1} L_{s_1+1} - \eta_{s_1+1} k_{s_1-1} N_{s_1+1}$ $N_{s_1+1}' = \eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} - k_{s_1} W_{s_1+2} - \eta_{s_1} N_{s_1}$ $N_{s_1}' = -W_{s_1-1} - \eta_{s_1+1} k_{s_1+1} L_{s_1+1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3}$ $W_{s_1+3}' = -\eta_{s_1} k_{s_1+2} L_{s_1} + k_{s_1+3} W_{s_1+4}$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{n-3}' = -k_{n-4} W_{n-4}$

VI. Tip-Ailesi

Null Eğriler İçin	Spacelike Eğriler İçin
$\gamma' = L_1$ $L_1' = \eta_2 L_2$ $L_2' = W_3$ $W_3' = \eta_2 k_1 L_2 - \eta_2 N_2$ $N_2' = \eta_1 k_2 L_1 - k_1 W_3 - \eta_1 N_1$ $N_1' = -\eta_2 k_2 L_2 + k_3 W_4$ $W_4' = -\eta_1 k_3 L_1 + k_4 W_5$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$	$\gamma' = W_1$ $W_1' = k_1 W_2$ $W_i' = -k_{i-1} W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W_{s-1}' = -k_{s-2} W_{s-2} + \eta_s L_s$ $L_s' = \eta_{s+1} L_{s+1}$ $L_{s+1}' = k_{s-1} W_{s+2}$ $W_{s+2}' = \eta_{s+1} k_s L_{s+1} - \eta_{s+1} k_{s-1} N_{s+1}$ $N_{s+1}' = \eta_s k_{s+1} L_s - k_s W_{s+2} - \eta_s N_s$

$W'_{s-1} = -k_{s-2}W_{s-2} + \eta_s L_s$ $L'_s = k_{s-1}W_{s+1}$ $W'_{s+1} = \eta_s k_s L_s - \eta_s k_{s-1} N_s$ $N'_s = -W_{s-1} - k_s W_{s+1} + k_{s+1} W_{s+2}$ $W'_{s+2} = -\eta_s k_{s+1} L_s + k_{s+2} W_{s+3}$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4}W_{n-4}$	$N'_s = -\eta_{s+1}k_{s+1}L_{s+1} + k_{s+2}W_{s+3}$ $W'_{s+3} = -\eta_s k_{s+2} L_s + k_{s+3} W_{s+4}$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s_1-1} = -k_{s_1-2}W_{s_1-2} + \eta_{s_1} L_{s_1}$ $L'_{s_1} = k_{s_1-1}W_{s_1+1}$ $W'_{s_{1+1}} = \eta_{s_1} k_{s_1} L_{s_1} - \eta_{s_1} k_{s_1-1} N_{s_1}$ $N'_{s_1} = -W_{s_1-1} - k_{s_1} W_{s_1+1} + k_{s_1+1} W_{s_1+2}$ $W'_{s_1+2} = -\eta_{s_1} k_{s_1+1} L_{s_1} + k_{s_1+2} W_{s_1+3}$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4}W_{n-4}$

VII. Tip-Ailesi

Null Eğriler İçin	**Spacelike Eğriler İçin**
$\gamma' = L_1$ $L'_1 = \eta_2 L_2$ $L'_2 = \eta_3 L_3$ $L'_3 = W_4$ $W'_4 = \eta_3 k_1 L_3 - \eta_3 N_3$ $N'_3 = \eta_2 k_2 L_2 - k_1 W_4 - \eta_2 N_2$ $N'_2 = \eta_1 k_3 L_1 - \eta_3 k_2 L_3 - \eta_1 N_1$ $N'_1 = -\eta_2 k_3 L_2 + k_4 W_5$ $W'_5 = -\eta_1 k_4 L_1 + k_5 W_6$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4}W_{n-4}$	$\gamma' = W_1$ $W'_1 = k_1 W_2$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{s-1} = -k_{s-2}W_{s-2} + \eta_s L_s$ $L'_s = \eta_{s+1} L_{s+1}$ $L'_{s+1} = \eta_{s+2} L_{s+2}$ $L'_{s+2} = k_{s-1} W_{s+3}$ $W'_{s+3} = \eta_{s+2} k_s L_{s+2} - \eta_{s+2} N_{s+2}$ $N'_{s+2} = \eta_{s+1} k_{s+1} L_{s+1} - k_s W_{s+3} - \eta_{s+1} N_{s+1}$ $N'_{s+1} = \eta_s k_{s+2} L_s - \eta_{s+2} k_{s+1} L_{s+2} - \eta_s N_s$ $N'_s = -\eta_{s+1} k_{s+2} L_{s+1} + k_{s+3} W_{s+4}$ $W'_{s+4} = -\eta_s k_{s+3} L_s + k_{s+4} W_{s+5}$ $W'_i = -k_{i-1}W_{i-1} + k_i W_{i+1}$ $W'_{n-3} = -k_{n-4}W_{n-4}$

İspat: Sadece V. ve VII. Tip-Aileleri için ispat verilecektir, çünkü diğerleri bir önceki bölümle benzerdir.

V. Tip-Ailesi İçin: (5) sisteminde $k_{s_1+2} = k^*_{s_1+2} = 1$ olacak şekilde B ve B* gibi iki Frenet çatısı verilsin. O zaman

$$B = \{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ...\overline{W}_{s_1-1}, \overline{L}_{s_1}, \overline{L}_{s_1+1}, \overline{W}_{s_1+2}, \overline{N}_{s_1+1}, \overline{N}_{s_1}, \overline{W}_{s_1+3}....\overline{W}_{n-3}\}$$
$$\rightarrow \{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2, ..., \overline{k}_{s_1+2} = 1, \overline{k}_{s_1+3}, ..., \overline{k}_{n+2}\}$$
$$B^* = \{\overline{W}_1, ..., \overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{W}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+2}, ..., \overline{W}_{s_1-1}, \overline{L}_{s_1}, L^*_{s_1+1}, W^*_{s_1+2}, N^*_{s_1+1}, N^*_{s_1}, W^*_{s_1+3}, ..., W^*_{n-3}\}$$
$$\rightarrow \{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2, .., k^*_{s_1+2} = 1, k^*_{s_1+3}, ..., k^*_{n+2}\}$$

çatıları ve eğrileri elde edilir. burada sadece W_{s_1+2} yi bulmak yeterlidir. $\{\overline{L}_{s_1}, \overline{L}_{s_1+1}, \overline{W}_{s_1+2}\overline{N}_{s_1+1}, \overline{N}_{s_1}\}$ ve $\{\overline{L}_{s_1}, L^*_{s_1+1}, W^*_{s_1+2}, N^*_{s_1+1}, N^*_{s_1}\}$ semi-ortonormal olduklarından ve aynı yönlendirmeye sahip olduklarından,

$$\begin{bmatrix} \overline{L}_{s_1} \\ L^*_{s_1+1} \\ W^*_{s_1+2} \\ N^*_{s_1+1} \\ N^*_{s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & 1 & 0 & 0 \\ P_{41} & -\dfrac{P_{32}^2}{2P_{22}} & \dfrac{-P_{32}}{P_{22}} & \dfrac{1}{P_{22}} & 0 \\ -P_{21}P_{41} - \dfrac{1}{2}P_{31}^2 & \dfrac{P_{21}P_{32}^2}{2P_{22}} - P_{31}P_{32} - P_{22}P_{41} & \dfrac{P_{21}P_{32}}{P_{22}} - P_{31} & \dfrac{-P_{21}}{P_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{L}_{s_1} \\ \overline{L}_{s_{1+1}} \\ \overline{W}_{s_{1+2}} \\ \overline{N}_{s_{1+1}} \\ \overline{N}_{s_1} \end{bmatrix}$$

biçiminde en az bir P = (p_{ij}) matrisi vardır.

$P_{22} = k_{s_1+4}$ ve $P_{21} = k_{s_1+3}$ seçilirse,

yukarıdaki matristen,

$$L^*_{s_1+1} = P_{21}\overline{L}_{s_1} + P_{22}\overline{L}_{s_1+1} = k^*_{s_1+3}\overline{L}_{s_1} + k^*_{s_1+4}L^*_{s_1+1}$$

$$< L^*_{s_1+1}, N^*_{s_1+1} >= k^*_{s_1+3} < \overline{L}_{s_1}, N^*_{s_1+1} > + k^*_{s_1+4} < L^*_{s_1+1}, N^*_{s_1+1} >$$

$$\boxed{1 = k^*_{s_1+4}}$$

$$< L^*_{s_1+1}, N^*_{s_1} >= k^*_{s_1+3} < \overline{L}_{s_1}, N^*_{s_1} > + k^*_{s_1+4} < L^*_{s_1+1}, N^*_{s_1} >$$

$$\boxed{0 = k^*_{s_1+3}}$$

Böylece tek bir Frenet çatısını bulma problemi

$$B=\{\overline{W}_1,\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{W}_{s+1},\overline{N}_s,\overline{W}_{s+2},\ldots,\overline{W}_{s_1-1},\overline{L}_{s_1},\overline{L}_{s_1+1},\overline{W}_{s_1+2},\overline{N}_{s_1+1},\overline{N}_{s_1},\overline{W}_{s_1+3},\ldots,\overline{W}_{n-3}\}$$
$$\rightarrow\{\overline{k}_1=1,\overline{k}_2,\ldots,\overline{k}_{s_1+2}=1,\overline{k}_{s_1+3}=0,\overline{k}_{s_1+4}=1,\overline{k}_{s_1+5},\ldots,\overline{k}_{n+2}\}$$
$$B''=\{\overline{W}_1,\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{W}_{s+1},\overline{N}_s,\overline{W}_{s+2},\ldots\overline{W}_{s_1-1},\overline{L}_{s_1},\overline{L}_{s_1+1},W^*_{s_1+2},N^*_{s_1+1},N^*_{s_1},W^*_{s_++3},\ldots,W^*_{n-3}\}$$
$$\rightarrow\{\overline{k}_1=1,\overline{k}_2,\ldots,\overline{k}_{s_1+2}=1,\overline{k}_{s_1+3}=0,\overline{k}_{s_1+4}=1,k^*_{s_1+5},\ldots,k^*_{n+2}\}$$

haline dönüşür.

Burada $P_{31}=\dfrac{k_{s_1+5}}{k_{s_1+7}}$ ve $P_{32}=\dfrac{k_{s_1+6}}{k_{s_1+7}}$ alınırsa

$$W^*_{s_1+2}=P_{31}\overline{L}_{s_1}+P_{32}\overline{L}_{s_1+1}+\overline{W}_{s_1+2}=\frac{k^*_{s_1+5}}{k^*_{s_1+7}}\overline{L}_{s_1}+\frac{k^*_{s_1+6}}{k^*_{s_1+7}}\overline{L}_{s_1+1}+W^*_{s_1+2}$$

$$<W^*_{s_1+2},\overline{L}_{s_1}>=0\Rightarrow \quad \boxed{k^*_{s_1+5}=0}$$

$$<W^*_{s_1+2},\overline{L}_{s_1+1}>=0\Rightarrow \quad \boxed{k^*_{s_1+6}=0}$$

Böylece $W^*_{s_1+2}=\overline{W}_{s_1+2}$ olduğu kabul edilebilir.

(5) sisteminde eğrilikler yeniden numaralandırılarak V. Tip-Ailesi bulunur.

VII. Tip-Ailesi için: (7) sisteminde k_{s+9}=1 olacak şekilde

B ve B^* gibi iki Frenet çatısı verilsin.

$$B=\{\overline{W}_1,\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s\,\overline{L}_{s+1}\,\overline{L}_{s+2},\overline{W}_{s+3},\overline{N}_{s+2}\,\overline{N}_{s+1},\overline{N}_s,\overline{W}_{s+4},\ldots,\overline{W}_{n-3}\}$$
$$\rightarrow\{\overline{k}_1=1,\overline{k}_2,\ldots,\overline{k}_{s+9}=1,\overline{k}_{s+10},\ldots,\overline{k}_{n+9}\}$$

$$B^*=\{\overline{W}_1,\ldots,\overline{W}_{s-1},\overline{L}_s,\overline{L}_{s+1},\overline{L}_{s+2},\overline{W}_{s+3},N^*_{s+2},N^*_{s+1}N^*_s,W^*_{s+4},\ldots,W^*_{n-3}\}$$
$$\rightarrow\{\overline{k}_1=1,\overline{k}_2,\ldots,k^*_{s+9}=1,k^*_{s+10},\ldots,k^*_{n+9}\}$$

(7) sisteminden f_1, f_2: I $\rightarrow$ IR diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\overline{W'_{s+3}}=\overline{\eta}_s\overline{k}_{s+10}\overline{L}_s+\overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+11}\overline{L}_{s+1}+\overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+12}\overline{L}_{s+2}-\overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+9}\overline{N}_{s+2}$$
$$=\overline{\eta}_s k^*_{s+10}\overline{L}_s+\overline{\eta}_{s+1}k^*_{s+11}\overline{L}_{s+1}+\overline{\eta}_{s+2}k^*_{s+12}\overline{L}_{s+2}-\overline{\eta}_{s+2}N^*_{s+2}$$

$$\Rightarrow N^*_{s+2} = -\frac{\left(\overline{\eta}_s \overline{k_{s+10}}\right)}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}}\overline{L}_s + \frac{\left(\overline{\eta}_{s+1} k^*_{s+11} - \overline{\eta}_{s+1}\overline{k}_{s+11}\right)}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}}\overline{L}_{s+1} + \frac{\left(\overline{\eta}_{s+2} k^*_{s+12} - \overline{\eta}_{s+2}\overline{k_{s+12}}\right)}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}}\overline{L}_{s+2} + \overline{N}_{s+2}$$

$$< N^*_{s+2}, \overline{N}_{s+2} >= \frac{\overline{\eta}_{s+2} k^*_{s+12} - \overline{\eta}_{s+2}\overline{k}_{s+12}}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}} < \overline{L}_{s+2}, +\overline{N}_{s+2} >$$

$$0 = \overline{k}_{s+12} - \overline{k}_{s+12}$$

$k^*_{s+12} = \overline{k}_{s+12}$ ve $N^*_{s+2} = f_1 \overline{L}_s + f_2 \overline{L}_{s+1} + \overline{N}_{s+2}$ elde edilir.

$$\frac{\overline{\eta}_s k^*_{s+10} - \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+10}}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}} = f_1 \Rightarrow k^*_{s+10} = \frac{f_1 \overline{\eta}_{s+2} + \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+10}}{\overline{\overline{\eta}}_s}$$

$$\frac{\overline{\eta}_{s+1} k^*_{s+11} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+11}}{\overline{\overline{\eta}}_{s+2}} = f_2 \Rightarrow k^*_{s+11} = \frac{f_2 \overline{\eta}_{s+2} + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+11}}{\overline{\overline{\eta}}_{s+1}}$$

Son eşitliklerde $f_1 = - \eta_s\ \eta_{s+2}\ k_{s+10}$ ve $f_2 = -\eta_{s+1}\ \eta_{s+2}\ k_{s+11}$ olarak seçilirse

$k^*_{s+10} = k^*_{s+11} = 0$ olur.Böylece tek bir Frenet çatısını bulma problemi

$$B = \left\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s\, \overline{L}_{s+1}\, \overline{L}_{s+2}, \overline{W}_{s+3}, \overline{N}_{s+2}\, \overline{N}_{s+1}, \overline{N}_s, \overline{W}_{s+4},...,\overline{W}_{n-3}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2,...,\overline{k}_{s+9} = 1, \overline{k}_{s+10} = 0, \overline{k}_{s+11} = 0, \overline{k}_{s+12}, \overline{k}_{s+13},...,\overline{k}_{n+9}\right\}$$

$$B^* = \left\{\overline{W}_1,...,\overline{W}_{s-1}, \overline{L}_s, \overline{L}_{s+1}, \overline{L}_{s+2}, \overline{W}_{s+3}, \overline{N_{s+2}}, N^*_{s+1}, N^*_s, W^*_{s+4},...,W^*_{n-3}\right\}$$

$$\rightarrow \left\{\overline{k}_1 = 1, \overline{k}_2,...,\overline{k}_{s+9} = 1, \overline{k}_{s+10} = 0, \overline{k}_{s+11} = 0, \overline{k}_{s+12}, \overline{k}^*_{s+13},...,\overline{k}^*_{n+9}\right\}$$

Haline dönüşür. (7) sisteminden ve f_3, f_4: I $\rightarrow$ IR diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$N^*_{s+2} = \overline{\eta}_s \overline{k}_{s+13} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+14} \overline{L}_{s+1} - \overline{k}_{s+12} \overline{W}_{s+3} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+8} \overline{N}_{s+2} - \eta_{s-1} k_{s+5} N_{s+1}$$

$$= \overline{\eta}_s k^*_{s+13} \overline{L}_s + \overline{\eta}_{s+1} k^*_{s+14} \overline{L}_{s+1} - \overline{k_{s+12}}\, \overline{W}_{s+3} - \overline{\eta}_{s+2} \overline{k}_{s+8} \overline{N}_{s+2} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5} N^*_{s+1}$$

$$\Rightarrow N^*_{s+1} = \frac{\left(\eta_{s+1} k^*_{s+13} - \eta_s k_{s+13}\right)}{\overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5}}\overline{L}_s + \frac{\left(\eta_{s+1} k^*_{s+14} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+14}\right)}{\overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5}}\overline{L}_{s+1} + \overline{N}_{s+1}$$

$$< N^*_{s+1}, N^*_{s+1} >= \frac{\overline{\eta}_{s+1} k^*_{s+14} - \overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+14}}{\overline{\eta}_{s+1} \overline{k}_{s+5}} < \overline{L}_{s+1}, N^*_{s+1} >$$

$$0 = k^*_{s+14} - k_{s+14} \qquad (k_{s+5}=1 \text{ seçilerek})$$

$k^*_{s+14} = \overline{k}_{s+14}$ ve $N^*_{s+1} = f_3 \overline{L}_s + \overline{N}_{s+1}$ elde edilir.

$$f_3 = \frac{\overline{\eta}_s k^*_{s+13} - \eta_s \overline{k}_{s+13}}{\overline{\eta}_{s+1}} \Rightarrow k^*_{s+13} = \frac{f_3 \overline{\eta}_{s+1} + \eta_s \overline{k}_{s+13}}{\overline{\eta}_s}$$

Son eşitliklerde $f_3 = - \eta_s \eta_{s+1} k_{s+13}$ seçilirse olur.

(7) sisteminde eğrilikler tekrar numaralandırılarak VII. Tip-Ailesi elde edilir.

Teorem 4.1.4.2. $k_1, k_2, ..., k_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow IR$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olsun. IR_3^n ün bir noktası P olmak üzere $T_P(IR_3^n)$ ün, m=n-2, m=n-3 veya m=n-4 olmasına göre dejenerelik derecesi sırasıyla 1, 2 veya 3 olan bir $C_0 = \{V_1(0), ..., V_n(0)\}$ pseudo-ortonormal bazı verilsin. O zaman IR_3^n de, $\gamma(0) = P$ olacak şekilde nulluk derecesi dizisi ve indeks dizisi C_0 ile aynı olan, P noktasındaki Cartan çatısı C_0 olan bir tek C dejenere eğrisi vardır (Ferrandez vd., 2002).

Teorem 4.1.4.3. IR_3^n de iki Cartan eğrisi C ve $\overline{C}$ olsun. Eğer $k_1, k_2, ..., k_m : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow IR$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için C ve $\overline{C}$ aynı $\{k_1, k_2, ..., k_m\}$ eğriliklerine sahip ise, IR_3^n ün C yi $\overline{C}$ ye taşıyan en az bir pseudo-Öklid transformasyonu vardır (Ferrandez vd., 2002).

4.1.5. ÖRNEKLER

Örnek 4.1.5.1. : IR_3^5 de dejenerelik derecesi 1, nulluk derecesi dizisi {0, 1, 1, 0, 0} ve $k_1 = \sigma, k_2 = 0,\ k_3 = 1$ olan spacelike dejenere eğrinin,

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sigma t^3}{6}, \frac{\sigma t^2 \left(t^2 - 1\right)}{4\sqrt{6}}, t\left(\frac{\sigma^2 t^4}{120} + 1 \right), \frac{\sigma^2 t^5}{120}, \frac{\sigma t^2 \left(t^2 + 1\right)}{4\sqrt{6}} \right)$$

$\gamma(t)$ eğrisinin Cartan çatısı;

$$\gamma' = W_1$$

$$W_1' = \eta_2 L_2$$

$$L_2' = \varepsilon_3 k_1 W_3$$

$$W_3' = \eta_2 k_2 L_2 - \eta_2 k_1 N_2$$

$$N_2' = -\varepsilon_1 W_1 - \varepsilon_3 k_2 W_3 + \varepsilon_4 k_3 W_4$$

olur.

$$\gamma' = W_1 \Rightarrow \gamma'' = W_1' = \eta_2 L_2 \Rightarrow \gamma''' = L_2' = \varepsilon_3 k_1 W_3$$

den;

$$< \gamma''', \gamma''' >= \varepsilon_3 k_1^2 = -\sigma^2 \Rightarrow k_1 = \sigma$$

bulunur.

$$\gamma^{IV} = W_3' = \eta_2 k_2 L_2 - \eta_2 k_1 N_2$$

den,

$$< \gamma^{IV}, \gamma^{IV} >= -2\eta_2 k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0$$

bulunur.

$$\gamma^{V} = N_2' = -\varepsilon_1 W_1 - \varepsilon_3 k_2 W_3 + \varepsilon_4 k_3 W_4$$

den;

$$<\gamma^{v},\gamma^{v}>=\varepsilon_1+\varepsilon_4 k_3^2=0\Rightarrow k_3^2=1$$

bulunur.

Örnek 4.1.5. 2. : IR_3^5 de dejenerelik derecesi 2, nulluk derecesi dizisi {1, 2, 2, 1, 0} ve

$k_1 = k_2 = 0$ olan bir null eğrinin:

$$\gamma(t)=\left(\frac{t(1-t^4)}{4\sqrt{15}},\frac{t^2(1+t^2)}{4\sqrt{6}},\frac{t^3}{6},\frac{t^2(1-t^2)}{4\sqrt{6}},\frac{t(1+t^4)}{4\sqrt{15}}\right)$$

$\gamma(t)$ eğrisinin Cartan çatısı;

$$\gamma^{'}=L_1$$

$$L_1^{'}=\eta_2 L_2$$

$$L_2^{'}=\varepsilon_3 W_3$$

$$W_3^{'}=\eta_2 k_1 L_2-\eta_2 N_2$$

$$N_2^{'}=\eta_1 k_2 L_1-\eta_1 N_1-\varepsilon_3 k_1 W_3$$

$$\gamma^{'}=L_1\Rightarrow\gamma^{''}=L_1^{'}=\eta_2 L_2\Rightarrow\gamma^{'''}=L_2^{'}=\varepsilon_3 W_3$$

$$\gamma^{IV}=W_3^{'}=\eta_2 k_1 L_2-\eta_2 N_2$$

den,

$$<\gamma^{IV},\gamma^{IV}>=-2\eta_2 k_1=0\Rightarrow k_1=0$$

bulunur.

$$\gamma^{V}=N_2^{'}=\eta_1 k_2 L_1-\eta_1 N_1-\varepsilon_3 k_1 W_3$$

den;

$$<\gamma^{v},\gamma^{v}>=-2\eta_1 k_2=0\Rightarrow k_2=0$$

bulunur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1. Bir Semi-Öklidyen Uzayda Dejenere Eğriler

Bir IR_q^n, $0 < 2q \leq n$ semi – Öklidyen uzayda bir dejenere eğrinin dejenerelik derecesi için $r \leq q$ olur. Burada her bir dejenerelik derecesine karşılık farklı tip – aileleri vardır. Buna göre aşağıda bu ailelerin nulluk derecesi dizileri, Frenet çatıları ve eğrilikleri verilecektir.

r = 1 için;

{0, ..., 0, 1, 1, 0, ..., 0}

$\{W_1, ..., W_{s-1}, L_s, W_{s+1}, N_s, W_{s+2}, ..., W_{n-1}\}$

$\{k_1, ..., k_{n+1}\}$

r = 2 için;

{0, ..., 0,1, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0, ..., 0}

$\{W_1,...,W_{s_1-1}, L_{s_1,} W_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+2},..., W_{s_2-1}, L_{s_2}, W_{s_2+1}, N_{s_2}, W_{s_2+2},..., W_{n-2}\}$.

$\{k_1, ..., k_{n+2}\}$

{0, ..., 0, 1, 2, 2, 1, 0, ..., 0}

$\{W_1,..., W_{s_1-1}, L_{s,} L_{s+1}, L_{s+1}, W_{s+2}, N_{s+1}, N_s, W_{s+3},..., W_{n-2}\}$.

$\{k_1, ..., k_{n+4}\}$

r = 3 için;

{0, ..., 0, 1, 1, 0,. .., 0, 1, 1, 0, ..., 0, 1, 1, 0,..., 0}

$\{ W_1,...., W_{s_1-1}, L_{s_1,} W_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+2},...., W_{s_2-1}, L_{s_2}, W_{s_2+1}, N_{s_2}, W_{s_2+2},...,$
$W_{s_3-1}, L_{s_3}, W_{s_3+1}, N_{s_3}, W_{s_3+2,}..., W_{n-3} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+3}\}$

{0, ..., 0, 1, 1, 0, ... 0, 1, 2, 2, 1, 0, ..., 0}

$\{ W_1,...., W_{s-1}, L_{s,} W_{s+1}, N_s, W_{s+2},......, W_{s_1-1}, L_{s_1}, L_{s_1+1},...,$
$W_{s_1+2}, N_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+3},..., W_{n-3} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+5}\}$

$\{0, ..., 0, 1,2, 2, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0, ..., 0\}$

$\{ W_1,...,W_{s-1}, L_{s,}, L_{s+1}, W_{s+2}, N_{s+1}, N_s, W_{s+3},..., W_{s_1-1}, L_{s_1}, W_{s_1+1},...,$
$N_{s_1}, W_{s_1+2},..., W_{n-3} \}$.

$\{k_1, ..., k_{n+5}\}$

$\{0, ..., 0, 1,2, 3 ,3, 2, 1, 0, ...,. 0\}$

$\{W_1,...., W_{s-1}, L_{s,}, L_{s+1}, L_{s+2}, W_{s+3}, N_{s+2}, N_{s+1}, N_s, W_{s+4},..., W_{n-3}\}$.

$\{k_1, ..., k_{n+9}\}$

r = 4 için;

$\{0, ..., 0, 1, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0,... 0, 1, 1, 0,..., 0\}$

$\{ W_1,....., W_{s_1-1}, L_{s_1,} W_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+2},......, W_{s_2-1}, L_{s_2}, W_{s_2+1}, N_{s_2}, W_{s_2+2},$
$...., W_{s_3-1}, L_{s_3}, W_{s_3+1}, N_{s_3}, W_{s_3+2},..., W_{s_4-1}, L_{s_4}, W_{s_4+1}, N_{s_4}, W_{s_4+2},..., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+4}\}$

$\{0, ..., 0, 1, 1, 0, ... 0, 1,2, 2, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0, ..., 0\}$

$\{ W_1,..., W_{s-1}, L_{s,}, W_{s+1}, N_s, W_{s+2},..., W_{s_1-1}, L_{s_1}, L_{s_1+1}, W_{s_1+2},$
$N_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+3},..., W_{s_2-1}, L_{s_2}, W_{s_2+1}, N_{s_2}, W_{s_2+2},..., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+6}\}$

$\{0, ..., 0, 1, 1, 0, ... 0, 1, 1, 0, ...0, 1,2, 2, 1, 0, ..., 0\}$

$\{ W_1,....., W_{s_1-1}, L_{s_1,}, W_{s_1+1}, N_{s_1,} W_{s_1+2},....., W_{s_2-1}, L_{s_2}, W_{s_2+1}, N_{s_2}, W_{s_2+2},....,$
$W_{s_3-1}, L_{s_3}, L_{s_3+1}, W_{s_3+2}, N_{s_3+1}, N_{s_3}, W_{s_3+3},....., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+6}\}$

$\{0, ..., 0, 1, 2, 2, 1, 0, ... 0, 1,2, 2, 1, 0, ..., 0\}$

$\{ W_1,......, W_{s-1}, L_{s,}, L_{s+1}, W_{s+2}, N_{s+1,} N_s, W_{s+3},...., W_{s_1-1}, L_{s_1}, L_{s_1+1}, W_{s_1+2,} N_{s_1+1},...,$
$N_{s_1}, W_{s_1+3},....., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+8}\}$

{0, ..., 0, 1, 1, 0, ... 0, 1,2, 3, 3, 2, 1, 0, ..., 0}

$\{ W_1, ..., W_{s-1}, L_{s,}, W_{s+1}, N_{s,} W_{s+2}, ..., W_{s_1-1}, L_{s_1}, L_{s_1+1}, L_{s_2+2,} W_{s_1+3},$
$N_{s_1+2}, N_{s_1+1}, N_{s_1,} W_{s_1+4}, ..., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+10}\}$

{0, ..., 0, 1, 2, 3, 3, 2, 1, 0, ... 0, 1,1 , 0, ..., 0}

$\{ W_1, ..., W_{s-1}, L_s, L_{s+1}, L_{s+2}, W_{s+3}, N_{s+2}, N_{s+1,} N_s, W_{s+4}, ...,$
$W_{s_1-1}, L_{s_1}, W_{s_1+1}, N_{s_1}, W_{s_1+2}, ..., W_{n-4} \}$

$\{k_1, ..., k_{n+10}\}$

{0, ..., 0, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 0, ...,0}

$\{W_1, ..., W_{s-1}, L_{s,}, L_{s+1}, L_{s+2}, L_{s+3,} W_{s+4}, N_{s+3}, N_{s+2}, N_{s+1}, N_s, W_{s+5}, ..., W_{n-4}\}.$

$\{k_1, ..., k_{n+16}\}$

elde edilir. Böylece bu sonuçlar bir araya toplanırsa, $1 \leq r \leq q$ durumunda dejenere eğrilerin bir sınıflaması olarak aşağıdaki tablo oluşur.

Dejenerelik Derecesi	**Aile Sayısı**	**Cartan Eğriliklerinin Sayısı**
1	1	n –2
2	2	n –3
3	4	n –4
. . .	. . .	. . .
r	2^{r-1}	n – r - 1
. . .	. . .	. . .
q	2^{q-1}	n – q - 1

Buna göre, IR_q^n semi – Öklidyen uzayında (2^{q-1}) adet farklı dejenere eğri tip –ailesi vardır.

6. KAYNAKLAR

Bejancu, A., 1994. Lightlike Curves in Lorentz Manifolds, Publ. Math. Debrecen, 44, 145-155.

Bonnor, W. B., 1969. Null Curves in a Minkowski Space-Time, Tensor, N. S., 20, 229-242.

Duggal, L. K., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds Of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

Duggal, L. K., Jin, D. H., 1999. Geometry of Null Curves, Math. J. Toyoma Univ., 22, 95-120.

Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2001. Null Helices in Lorentzian Space Forms, Int. J. Mod. Phys. A., 16, 4845-4863.

Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2002. Degenerate Curves in Pseudo-Euclidean Spaces of Index 2, Proc. Of Int. Conference on Geometry, Integrability and Qantaziation.

Ferrandez, A., Gimenez, A., Lucas, P., 2003. s-Degenerate Curves in Lorentzian Space Forms, Journal of Geometry and Physics, 40, 116-129.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometi, Ankara Üniversitesi.

Nersessian, A.,Ramos, E., 1998. Massive Spinning Particles and the Geometry of Null Curves, Physics Letters B., 445, 1-2, 123-128.

O’Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, Inc., New York.

Çiftçi, Ü., 2004. Semi-Riemann Manifoldlarında Null eğrilerin Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi.

Hugston, L. P. and Shaw, W. T., 1987. Classical strings in ten dimensions, Proc. R. Soc. Lond., Ser. A 414, 423-431.

Synge, J. L., 1972. Geometry of dynamical null lines, Tensor, N. S. 24, 69-74.

Bejancu, A., Ferrandez, A., Lucas,P., 1998. A New Viewpoint on Geometry of a Lightlike Hypersurface in Semi-Euclidean Space, Saitama Mathematical Journal, 16, 31-38.

Bejancu, A., Ferrandez, A., Lucas,P., 2002. Geometrical particle models on 3D null curves, Phys. Lett. B 543 (3-4), 311-317.

Barros, M., Ferrandez, A., Lucas,P. and Merono, M. A.,2001. General helices in the 3-dimensional Lorentzian space forms, Rocky Mountain J. Math. 31, 373-388.