

**T.C.  
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**PLASTİK DEFORMASYONLARIN  
SÜREKLİ ORTAM TEORİSİ**

**Özdemir DENİZ**

**Danışman**

**Yrd.Doç.Dr. M. Reşit USAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**Isparta 2005**

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER .....	i
ÖZET .....	iii
ABSTRACT .....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
SİMGELER DİZİNİ .....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
TABLolar DİZİNİ .....	xii
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Metallerin Fenomenolojik Makroskopik Doğası .....	2
1.2. Tek Eksenli Çekme Deneyi.....	3
1.3. Gerçek Gerilme-Gerinme Eğrisi .....	5
1.4 Hidrostatik Basıncın Sıkıştırılmazlık Etkisi.....	8
1.5 Bauschinger Etkisi .....	9
1.6. Yükleme Hızının Etkisi.....	10
1.7. Makroskopik Plastik Davranışın İdealleştirilmesi .....	11
1.8. Küçük ve Büyük Deformasyonlar.....	13
1.9. Gerilme Durumu Ve Gerilme Uzayı.....	15
1.10. Akma Yüzeyi .....	27
1.11. Metaller için Akma Kriteri.....	30
1.11.1 Maxwell-Huber-von Mises Kriterleri .....	30
1.11.2. Tresca Kriteri .....	32
1.12. Plastisite Teorisinin Temel Şartları.....	36
1.13.Elastik Deformasyon İçin Gerilme-Gerinme Bağlılıkları.....	50
1.14.Plastik Deformasyon İçin Hacim Değişimi Ve Poisson Oranı .....	54
1.15.Levy-Mises Denklemleri.....	58
1.16.Prandtl-Reuss Denklemleri .....	62
2. KAYNAK BİLGİSİ .....	67
3. MATERYAL ve METOT .....	72
3.1. Materyal .....	72
3.1.1 Termodinamik Hazırlık Çalışmaları .....	73

3.2. Metot .....	80
3.2.1. Elasto-Plastik Malzemelere İlişkin Termodinamik Potansiyeller.....	80
3.2.2 Kayıp (Dissipasyon) ve Akma fonksiyonları.....	86
4. BULGULAR.....	96
4.1. $D(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$ Şeklinin Gerilme-Bağımlı Dissipasyon Fonksiyonları .....	96
4.2. Kritik Hal Modelleri.....	104
4.3. Nonlinear Analiz İçin Örnek Problem .....	109
4.3.1. Problemin Tanımı .....	109
4.3.2. Problemin Özel Şartları.....	110
4.4 Bakır Bir Levhanın Rijid Bir Duvara Çarpma Probleminin Elasto-Plastik Analizi.....	125
5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR.....	132
6. KAYNAKLAR .....	140
ÖZGEÇMİŞ .....	146

## ÖZET

Bu çalışmada mühendislik malzemelerinin plastik davranışı hakkındaki temel bilgiler bir araya getirilmiştir. Hem metal malzemelerin hem de jeoteknik malzemelerin plastik davranışı izah edilmeye çalışılmıştır. Tek eksenli çekme gerilmesi altında çelik bir malzemenin gerilme-gerinme eğrisi üzerinde plastik davranışın doğası detaylı olarak verilmiştir. Hidrostatik basınç, Bauschinger etkisi ve yükleme hızının plastik davranış üzerindeki etkisi belirtilmiştir. İdeal reholojik modeller kısaca tanımlanmıştır. Küçük ve büyük deformasyon durumlarında kullanılacak yaklaşım açıklanmıştır.

Gerilme durumu ve gerilme uzayı, akma yüzeyi, akma kriterleri ile birlikte plastisite teorisinin temel şartları açıkça izah edilmiştir. Elastik deformasyon için gerilme ve gerinme bağıntıları verildikten sonra plastik deformasyon için gerekli ifadeler açıklanmıştır. Özellikle Levy-Mises ve Prandtl-Reus yaklaşımları göz önüne alınmıştır. Jeomalzemelerin plastik davranışı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Çünkü jeomalzemelerin plastisitesi metal plastisitesini de kapsayacak bir formdadır. Elasto-plastik malzemelere ilişkin termodinamik potansiyeller belirlenmiş, disipasyon ve akma fonksiyonları açıklanmış ve kritik hal modelleri belirlenmiştir.

Son olarak ANSYS sonlu eleman programı yardımıyla plastik davranışı açıklayan iki farklı problemin çözümleri verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Elastisite, Plastisite, Elasto-Plastisite, Akma, Sertleşme, Termodinamik Potansiyel

## ABSTRACT

In this study, basic knowledges and fundamental concepts for plastic behaviour of engineering materials have been systematically collected together. Plastic behavior of both metallic materials and geotechnical materials are explained. Nature of plastic behaviour of a steel material on the stress-strain curve under uniaxial loading has been given by details. Rate effect on plastic behaviour, hydrostatic pressure, Bauschinger effect are defined. Ideal rheological models are briefly explained. The approximation which will be used in the infinitesimal and large deformations are determined.

Basic considerations of plasticity theory with stress state and stress space, yield surface and yield criteria are obviously illustrated. After the stress-strain relations of elastic deformation have been given, necessary expressions for plastic deformation have been explained. Especially, approximations of Levy-Mises and Prandtl-Reus are considered. Plastic behaviour of geomaterials are fully studied. Because, the plasticity of geomaterials have a form that confines the metal plasticity. Thermodynamic potentials of elastoplastic materials, dissipation and yield functions, and models of critical state are determined and explained.

Finally, the solution of two problems about plastic behaviour have been given by ANSYS finite element software.

**Keywords:** Elasticity, Plasticity, Elasto-plasticity, Yield, Hardening, Thermodynamic potential.

## TEŐEKKÖR

Yüksek lisans çalışmamın hazırlanmasında yardım ve desteklerini esirgemeyen, çalışmamı titizlikle yöneten, fikir ve eleştirileri ile beni yönlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa Reşit USAL'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmalarımnda karşılaştığım problem ve engellerde, ayrıca bu çalışmayı hazırlarken bana verdiği destekten dolayı sevgili arkadaşım Araş. Gör. Ahmet KABUL'e de teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Özdemir DENİZ

04.02.2005

## SİMGELER DİZİNİ

$A$	Deformasyondan sonraki kesit alanı
$A_0$	İlk kesit alanı
$c$	Kohezyon katsayısı
$C_{ij}$	Elastiklik tansörünün bileşenleri
$D$	Enerjinin kaybolma oranı
$e$	Boşluk oranı
$E$	Elastisite (Young) modülü
$E^T$	Tanjant modülü
$f(x_{ij}, \alpha_{ij})$	Genelleştirilmiş gerilme yüzeyinde akma fonksiyonu
$\bar{f}(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})$	Gerilme yüzeyinde akma fonksiyonu
$F(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \theta)$	Helmutz serbest enerji fonksiyonu
$g(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})$	Plastik potansiyel fonksiyonu
$G$	Elastik kayma modülü
$G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \theta)$	Gibbs serbest enerjisi fonksiyonu
$H$	Sertleşme parametresi
$H(\sigma_{ij}, \chi_{ij}, \theta)$	Tüm Gibbs serbest enerji fonksiyonu
$J_1, J_2, J_3$	Gerilme tansörünün asal invariantları
$J'_1, J'_2, J'_3$	Sapma gerilme tansörünün asal invariantları
$K$	Bulk Modülü
$l$	Deformasyondan sonraki boy

$l_0$	İlk boy
$n$	Malzeme sabiti
$n^{(i)}$	$i$ doğrultusundaki birim vektör
$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sigma_1 - \sigma_3$	İkinci derece deviatorik gerilme invariantı
$q_k$	Isı akısı vektörü
$P$	Kuvvet
$p$	Hidrostatik basınç
$p = \frac{1}{3} \sigma_{kh}$	Ortalama basınç
$R_{ij}$	Transformasyon matrisinin bileşenleri
$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kh} \delta_{ij}$	Deviatorik gerilme tansörü
$S$	Entropi
$S_{ij}$	Sapma gerilme tansörünün bileşenleri
$S_1, S_2, S_3$	Sapma gerilme tansörünün asal değerleri
$U$	Birim hacim başına iç enerji
$U(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, s)$	İç enerji fonksiyonu
$v = \varepsilon_{kk}$	Hacimsel gerinme
$\dot{v} = \dot{\varepsilon}_{kk}$	Hacimsel gerinme oranı
$V$	Hacim
$W^e$	Özgül elastik enerji
$\alpha$	İç değişken
$\alpha_{ij}$	İç değişken tansörü (plastik gerinme)



$\delta_{ij}$	Kronocker-Delta sembolü
$\varepsilon$	Toplam gerinme
$\varepsilon_m$	Ortalama gerinme
$\hat{\varepsilon}$	Nominal gerinme
$\varepsilon^e$	Elastik gerinme
$\varepsilon^p$	Plastik gerinme
$\varepsilon_{ij}$	Gerinme tansörü
$\dot{\varepsilon}$	Gerinme hızı
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Gerinme hızının tansörel formu
$\varepsilon_{ij}^e$	Elastik gerinme tansörü
$\varepsilon_{ij}^p$	Plastik gerinme tansörü
$\gamma$	Poisson oranı
$\gamma_{ij}^p$	Plastik kayma gerinmesinin bileşenleri
$\gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \gamma_{ij} \gamma_{ij}}$	Üç eksenli testte kayma gerinmesinin invariantı
$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$	Deviatorik gerinme tansörü
$\dot{\gamma}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij}$	Deviatorik gerinme tansörü hızı
$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$	Kayma gerinmesi hızının invariantı
$\theta$	Sıcaklık
$\hat{\sigma}$	Nominal gerilme (mühendislik gerilmesi)
$\sigma_y$	Akma gerilmesi

$\sigma_y^0$	İlk akma gerilmesi
$\sigma_{ij}$	Gerilme tansörü bileşenleri
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Asal gerilmeler
$\tau_{oct}$	Oktahedral kayma gerilmesi
$\kappa$	Kritik durum modellerinde elastik doğrunun eğimi
$\lambda$	Bir parametre
$\dot{\lambda}$	Plastik çarpan
$\Lambda$	Lagrange çarpanı
$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \chi_{ij}$	“Geri”, “Kayma” veya “sürükleme” gerilmesi
$\chi_{ij}$	genelleştirilmiş gerilme tansörü

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Tek eksenli yükleme altında gerilme-gerinme eğrisi.....	5
Şekil 1.2. Bauschinger etkisi: (a) deneysel gözlem; (b) kinematik sertleşme modeli.....	9
Şekil 1.3. Gerinme hızının etkisi.....	10
Şekil 1.4. Farklı maddesel davranışların reolojik modelleri .....	12
Şekil 1.5. Ana gerinme uzayı ve $\sigma'$ 'nin ayrışımı .....	21
Şekil 1.6. Deviatorik düzlem üzerinde gerinme uzayının yansıması .....	24
Şekil 1.7. İzotropik malzemeler için akma yüzeyi.....	28
Şekil 1.8. $\pi$ -uzayında akma sınırı.....	29
Şekil 1.9. $\pi$ -uzayında von – Mises ve Tresca akma sınırları .....	31
Şekil 1.10. Uzay gerinme durumu için von Mises ve Tresca kriterleri.....	33
Şekil 1.11. Tek eksenli gerilme-gerinme eğrisi .....	36
Şekil 1.12. Plastik deformasyonun geçmiş yükleme tarihine olan bağımlılığı.....	38
Şekil 3.1. İzotropik sertleşmenin göz önüne alındığı tek boyutlu elasto-plastik model .....	93
Şekil 3.2. Kinematik sertleşmenin göz önüne alındığı tek boyutlu elasto-plastik model .....	93
Şekil 4.1. Sürtülmeli malzemeye ait plastisite yüzeyi ve plastik potansiyel.....	99
Şekil 4.2. Genelleştirilmiş basınç uzayında akma yüzeyleri.....	107
Şekil 4.3. Gerilme uzayındaki akma yüzeyleri .....	107
Şekil 4.4 Kinematik sertleşme için gerilme- gerinme değerlerinin programa tanıtılması .....	112
Şekil 4.5. kinematik sertleşme için gerilme – gerinme eğrisi .....	112
Şekil 4.6. Geometrinin Sonlu Elamanlar Modelinin oluşturulması.....	113
Şekil 4.7. Oluşturulan elamanların $\frac{3}{4}$ oranında genişletilmiş eksenel simetrik görünümü .....	113
Şekil 4.8. Düğüm noktalarına uygulanan kuvvetlerin gösterilimi .....	114
Şekil 4.9. Elemanlar üzerine uygulanan kuvvetlerin gösterilimi .....	114
Şekil 4.10. Sadece basınç yükü altında düğüm noktaların toplam yer değiştirme.....	115

Şekil 4.11. Basınç yükü altında düğüm noktalarındaki toplam yer değiştirmenin $\frac{3}{4}$ oranında genişletilmiş eksenel simetrik görünümü.....	115
Şekil 4.12. Von – Misses (ortalama) gerilmeler .....	116
Şekil 4.13. XY düzlemindeki kayma gerilmeleri.....	116
Şekil 4.14. Hidrostatik basınç .....	117
Şekil 4.15. Tekrarlı yükün uygulanması .....	117
Şekil 4.16. Eşdeğer plastik gerilmeler.....	119
Şekil 4.17. Eşdeğer plastik gerilmeler.....	119
Şekil 4.18 Toplam yer değiştirmeler.....	120
Şekil 4.19 Yükün uygulandığı düğüm noktasındaki elemanda oluşan plastik gerilmeler .....	120
Şekil 4.20. Aynı elemanda ortaya çıkan Elastik Von-Mises gerilmeleri .....	121
Şekil 4.21. Birim hacim başına yapılan plastik işin elemandaki dağılımı .....	121
Şekil 4.22 Plastik gerilmeler .....	122
Şekil 4.23 XY düzleminde plastik kayma gerilmeleri .....	122
Şekil 4.25. Toplam gerilmeye karşılık gerilme eğrilerinin ifadesi.....	123
Şekil 4.24. Elastik Von – Misses (ortalama) gerilmeleri .....	123
Şekil 4.27. Kinematik sertleşme olayında akma düzleminin yer değiştirmesi .....	124
Şekil 4.26. Y düzleminde gerilme – gerilme eğrisi.....	124
Şekil 4.28. izotropik sertleşme durumunda gerilme gerilme eğrisi.....	125
Şekil.4.29 Eksenel simetriye sahip geometrinin mesh edilmiş hali.....	126
Şekil 4. 30 Düğüm noktalarındaki toplam yer degiştirmeler .....	126
Şekil. 4.31 $\frac{3}{4}$ Oranında eksenel simetrik görünüm.....	127
Şekil 4. 32 Düğüm noktalarında sadece y- yönündeki yer degistirmeler .....	127
Şekil 4.33 XY plastik kayma gerilmeleri.....	128
Şekil 4. 34 Plastik kayma gerilmelerinin $\frac{1}{4}$ simetrik kesitteki görünümü .....	128
Şekil 4.35 kayma gerilmelerinin $\frac{1}{2}$ oranında eksenel simetrik görünümü.....	129
Şekil 4.36 Plastik birinci asal gerilmeler.....	129
Şekil 4.37 Değişik gerilme durumlarının bir arada görünümü .....	130
Şekil 4. 38 Farklı gerilme durumlarının bir arada gösterilmesi .....	131
Şekil 5.1. Boyutsal aralıkta I'ın sunumu (n+1).....	126
Şekil 5.2. Dört Legendre transformasyonunun zinciri.....	130

**TABLolar DİZİNİ**

Tablo 1.1. Bazı mühendislik malzemeleri için mukavemet değerleri.....	43
Tablo 3.1. Kuplajlı malzemeler için gerinmelere ilişkin alternatif sentezler.....	87
Tablo 3.2. Tek boyutlu plastisite modellerine ilişkin fonksiyon şekilleri.....	95
Tablo 4.1. $p_0$ normal ön konsolidasyon basıncı .....	106
Tablo 4.2. kinematik sertleşmeyi ifade eden plastisite eğrisine ait deneysel veriler .....	111
Tablo 4.3. Seçilen düğüm noktasındaki düşey yer değiştirme ve FY kuvvetinin her bir yük adımında aldığı değerler .....	118

## 1. GİRİŞ

Malzemelerin mekanik özellikleri, genelde  $10^{-10} - 10^1$  m mertebesinde değişen ölçülerde çeşitli disiplinlerde incelenir. Bu ölçek bandı dört parçaya ayrılır. Her parçada geçen olayları anlamak için bir alt parçada inceleme yapılır. Mühendislerin tasarladıkları makine ve yapı sistemlerinde kullandıkları elemanlar  $10^{-1} - 10^1$  m mertebesindedirler. Bu elemanların davranışlarını belirlemek için yapılan testler  $10^{-2} - 10^{-1}$  m mertebesindedir. Mekanik testlerdeki olayları açıklamak için metalürji biliminin kullandığı mikro yapı (kristal yapı ve bu yapıdaki bozukluklar, polimer zincirleri gibi)  $10^{-9} - 10^{-3}$  m mertebesindedir. Mikro yapıdaki olayları açıklamak isteyen fizikçi ise atomik seviyede çalışarak  $10^{-10} - 10^{-9}$  m mertebesini kullanır. Kısaca cisimlerin mekanik özellikleri; mühendislik, mekanik, metalürjik ve fiziksel olmak üzere dört ayrı disiplin ve dört ölçekte incelenmektedir.

Mühendislikte kullanılan malzemeler;

- a- metaller ve alaşımlar
- b- polimerler
- c- seramik ve camlar
- d- kompozitler olmak üzere dört grupta toplanabilir.

Bu gruplamada kriter olarak malzemelerin mikro yapıları ve kimyasal bağları göz önüne alınmıştır. Metallerin mikro yapıları kristal parçacıklardan oluşmasına karşın polimerlerin mikro yapıları zincir moleküllerden oluşur. Seramik ve camların mikro yapıları kristal parçacıklarla birlikte amorf bir yapı gösterir. Kompozitler ise genelde matris içinde parçacık veya lif bulundurlar.

Malzemelerin kırılma anına kadar yaptığı şekil değiştirme davranışları göz önüne alınarak sünek (düktil), gevrek ve plastik olarak üç grupta toplanırlar. Cisimlerin mekanik özellikleri  $10^{-2} - 10^{-1}$  m mertebesinde incelenirken özelliklerin çoğunu teorik yoldan bulmak mümkün olmaz. Bu nedenle pek çok özellik deneylerle belirlenir. Yapılan deneyler statik ve dinamik olmak üzere iki grupta toplanır. Ayrıca deneyler tek veya çok eksenli olarak da gruplandırılabilir. Tek eksenli yükleme

altında deney tekniği basit olup elde edilen sonuçlar genelleştirilebilir. Çok eksenli yükleme altında ise sonuçların genelleştirilmesinde zorluk vardır. Bu nedenle çok eksenli gerilme halinde birkaç tipik deneme ile yetinilir.

Kuvvet şekil değiştirme bağıntısı incelenirken şekil değiştirmeler elastik ve elastik olmayan şekil değiştirmeler olmak üzere önce ikiye ayrılır. Elastik şekil değiştirmelerde; cismin atomlarını ve moleküllerini bir arada tutan kimyasal bağları kopmaz uzar. Kuvvet kalktığı zaman hemen ilk haline döner ve zamandan bağımsızdır. Elastik olmayan şekil değiştirmelerde ise; kristal düzlemlerin veya zincir moleküllerin birbiri üzerinde kayması sonunda cismin atomları birbirlerine göre bağıl yer değiştirirler. Elastik olmayan şekil değiştirmeler içinde zaman bağlı olmayan şekil değiştirmelere ki bunlar kalıcı şekil değiştirmelerdir, plastik şekil değiştirmeler adı verilir.

Gerilme şekil değiştirme bağıntılarına *bünye denklemleri* adı da verilmektedir. Bu bağıntılar cisimden cisme farklılıklar göstermektedir. Deneyden elde edilen bu bağıntılar uygulamada idealleştirilerek kullanılır. İdealleştirme sonunda ortaya çeşitli adlar altında ideal cisimler çıkar. Sayısal yöntemler ve bilgisayar kullanıldığında gerilme şekil değiştirme diyagramı deneyden elde edildiği şekilde de kullanılabilir. Şekil değiştirmeleri daha iyi anlayıp yorumlayabilmek için yay, amortisör ve buna benzer modelleme aletleri veya bunların kombinezonları kullanılır. Bu aletler veya bunların kombinezonları ile yapılan modellere reolojik model adı verilir.

### **1.1. Metallerin Fenomenolojik Makroskopik Doğası**

Bir başlangıç noktası olarak bu bölüm, plastik olarak deforme olmuş metaller üzerinde bazı temel deneysel gözlemlere değinmektedir. Bu gözlemlerden yola çıkarak, plastik olarak deforme olmuş malzemelerin temel davranışına yönelik kavramlar açıklanmaktadır.

## 1.2. Tek Eksenli Çekme Deneyi

Bu testi açıklamak için,

$$\hat{\sigma} = \frac{P}{A_0} \quad (\text{nominal gerilme veya Mühendislik gerilmesi}) \quad (1.1)$$

$$\hat{\epsilon} = \frac{l-l_0}{l_0} \quad (\text{nominal gerinme veya mühendislik gerinmesi}) \quad (1.2)$$

$$\hat{\epsilon} = \frac{l}{l_0} - 1 \Rightarrow \frac{l}{l_0} = \hat{\epsilon} + 1$$

şeklinde tanımlanan ifadelerden başlayabiliriz. Burada,  $P$  uygulanan eksenel yük,  $A_0$  ve  $l_0$  ise sırasıyla deformasyondan önceki kesit alanı ve numünenin başlangıç uzunluğunu göstermektedir. yumuşak çelik için tipik bir  $\hat{\sigma}-\hat{\epsilon}$  eğrisi şekil 1 de verilmiştir. Gerilme seviyesi  $A''$  ne ulaşıncaya kadar, yani başlangıçtaki ilk aşamada gerilme ve gerinme arasındaki bağıntının lineer olduğu görülmektedir.  $A''$  noktası **oranlı sınırı** olarak adlandırılmaktadır. Diyagram üzerindeki  $OA''$  kısmı Hooke yasası ile temsil edilebilir ve elastisite teorisinin temelini oluşturur. Bu noktadan sonra gerinmedeki artış gerilmedeki artışla lineer bir ilişki içerisinde değildir, ancak deformasyon hala elastik bölgededir yani gerilme kaldırılınca malzeme ilk orijinal şekline geri dönecektir. Bu yaklaşım, malzeme **üst akma noktası** denilen  $A'$  noktasına ulaşıncaya kadar geçerlidir. Daha sonraki deformasyon artan gerinme hızlarında ve gerilme seviyesinin birkaç osilasyonu tarafından takip edilen küçük lokal azalmalarla gerçekleşir. Bu durum  $b$  noktasına kadar bir plato oluşturur. **AB** bölgesi **mükemmel plastik davranış** olarak bilinir. Gerilme osilasyonlarının alt sınırı veya  $A$  noktası ile gösterilen veya en küçük akma noktası olarak adlandırılan nokta genellikle elastik sınır veya akma gerilmesi  $\sigma_Y$  olarak seçilmiştir. Gerilme  $B$  noktasında artmaya devam ederse malzeme sertleşir, ve maksimum gerilme  $U$  noktasına ulaşıncaya kadar gerilme artmaya devam eder. Daha sonra kararsız davranışı temsil eden gerinmedeki artmayla birlikte gerilme azalır. **BU** bölgesi “work hardening”, “material hardening”, “şekil değiştirme sertleşmesi” veya “pekleşme” gibi isimlerle tanımlanmaktadır ve bütün **ABU** bölgesinde malzeme

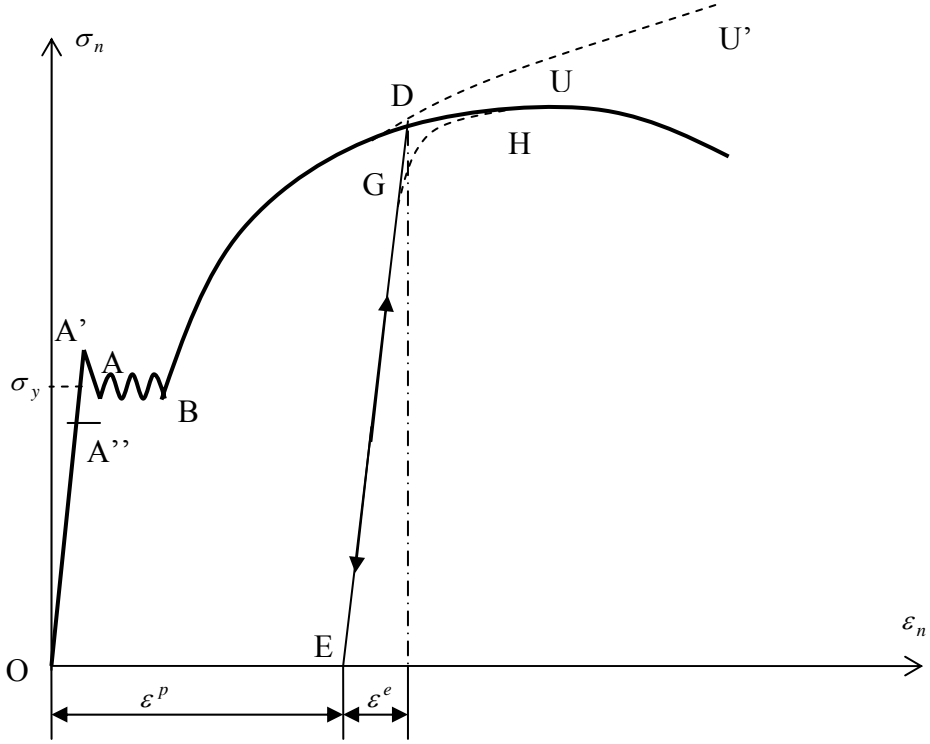


plastik olarak deforme olmuş durumdadır. Eğer bu bölgede, örneğin  $D$  noktasında malzeme üzerindeki yük kaldırılırsa malzeme başlangıçtaki elastik yüklemeye yörüngesi  $OA'$  ne paralel bir yol izleyerek  $DE$  yörüngesi boyunca geri dönecektir. Sonuç olarak, gerinmenin sadece **elastik gerinme**  $\varepsilon^e$  denilen kısmı geri dönmüş olacak, gerinmenin geri kalan kısmı ise **kalıcı gerinme** veya **plastik gerinme**  $\varepsilon^p$  olarak varlığını sürdürecektir. Şekilden, plastik bölgeye geçtikten sonraki toplam gerinmenin iki kısımdan oluştuğu gözlemlenmektedir:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.3)$$

$E$  noktasından itibaren yeniden yükleme yapıldığı zaman malzemenin davranışı Hooke yasası ile tanımlanabilen elastik boşalma çizgisi  $EG$  boyunca olacaktır.  $G$  noktasında malzeme tekrar bir akma noktası gösterecek ve plastik deformasyon yeniden başlayacaktır.  $H$  noktasından sonra herhangi bir yükleme yada boşaltma gerçekleştirilmedikçe deformasyon  $HU$  yörüngesi boyunca devam edecektir.  $A$  noktası akmanın başladığı noktayı gösterirken  $g$  noktası ise ardışık akma noktası olarak adlandırılmaktadır. Gerçek malzemelerde bu ikinci akma noktasının daima  $D$  noktasının altında yer aldığı ve  $G$  den  $H$  noktasına doğru bir geçiş bölgesinin bulunduğu gözlenmektedir.  $H$  noktası boşaltma yapılmaksızın gerçekleştirilen tek eksenli gerilme-gerinme eğrisinin üzerinde yer almaktadır.

Alüminyum, bakır ve paslanmaz çelik gibi bazı metaller şekilde gösterildiği gibi keskin bir akma noktası göstermez. Bu malzemelerin akması lineer elastik davranıştan non lineer plastik davranışa yumuşak ve kademeli bir geçiş şeklinde olur. Bu geçiş bölgesinde akmanın gerçekleştiği yeri belirlemek bazen gerçekten çok zor olur. Böyle durumlarda genellikle boşaltmadan sonra belirli bir plastik gerilmenin kaldığı (örneğin %2 kadar) itibari bir akma sınırı kullanılır. Bu tip malzemelerin akma gerilmesinin dışında kalan plastik bölgedeki diğer yükleme ve boşaltma davranışları şekil 1 de gösterilen yumuşak çelik malzemelerin davranışlarına benzemektedir.



Şekil 1.1. Tek eksenli yükleme altında gerilme-gerinme eğrisi

### 1.3. Gerçek Gerilme-Gerinme Eğrisi

Test çubuğunun orijinal boyutları göz önüne alınarak nominal gerilme  $\hat{\sigma}$  ve nominal gerinme  $\hat{\epsilon}$  daha önce (1) ve (2) ifadeleri ile tanımlanmıştı. Bir alternatif olarak gerçek gerilme  $\sigma$  ve gerçek gerinme (veya logaritmik gerinme)  $\epsilon$  değerleri de aşağıdaki gibi tanımlanarak kullanılmaktadır.

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1.4)$$

$$d\epsilon = \frac{dl}{l} \quad \text{veya} \quad \epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \Rightarrow \frac{l}{l_0} = e^\epsilon \quad (1.5)$$

Burada A numunenin deforme olmuş kesit alanını,  $l$  ise deformasyondan sonraki uzunluğunu göstermektedir. (2) ve (5) denklemlerinden kolayca  $\epsilon$  ve  $\hat{\epsilon}$  arasındaki ilişki aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon = \ln(1 + \hat{\varepsilon}) \quad (1.6)$$

Deneysel gözlemlere dayanarak, plastisite teorisinde malzeme genellikle sıkıştırılmaz kabul edilir. Bu yüzden,

$$A_0 l_0 = A l \quad \Rightarrow \quad A = A_0 \frac{l_0}{l} \quad (1.7)$$

yazılabilir.

Böylece, gerçek gerilme  $\sigma$  ve nominal gerilme  $\hat{\sigma}$  arasındaki ilişki

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{A_0} \frac{l_0}{l} = \hat{\sigma} (1 + \hat{\varepsilon}) \quad (1.8)$$

şeklinde türetilebilir.

(6) ve (8) denklemlerini kullanarak şekil.1.1 de gösterilen nominal gerilme-nominal gerilme eğrisi gerçek gerilme ve gerçek gerilme cinsinden ifade edilebilir. Gerçek gerilme-gerilme eğrisi şekil.1 de kesikli çizgiyle gösterilmiştir. Nominal gerilmenin aksine gerçek gerilme malzeme tamamen kopuncaya kadar artmaya devam eder. Bu artışın doğruluğu analitik olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir: (6) ve (8) denklemlerinden faydalanarak,

$$\hat{\varepsilon} = e^\varepsilon - 1 \quad (1.9)$$

$$\hat{\sigma} = \sigma e^{-\varepsilon} \quad (1.10)$$

ve

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{\varepsilon}} = \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{d\hat{\varepsilon}} = \left[ e^{-\varepsilon} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} - e^{-\varepsilon} \sigma \right] \frac{1}{1 + \hat{\varepsilon}} = \left( \frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sigma \right) e^{-2\varepsilon} \quad (1.11)$$

yazılabilir. Buradan da aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{\varepsilon}}=0 \Leftrightarrow \frac{d\sigma}{d\varepsilon}=\sigma \quad (1.12)$$

Burada  $\sigma$  pozitif olduğundan  $d\sigma/d\varepsilon$  da daima pozitif olacaktır. Bunun anlamı şudur;  $\hat{\sigma}$  nın kendi maksimumuna ulaştığı noktanın ötesinde bile gerçek gerilme-gerçek gerinme eğrisi monoton bir şekilde artmaya devam edecektir.  $\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{\varepsilon}}=0$  olması stabilitenin başlangıcına karşılık gelir ve (1.12) denklemi bu noktadaki gerçek gerilmeyi verir.

Gerçek gerinmenin nominal gerinmeye göre avantajlarından birisi de, gerçek gerinme toplanabilen bir büyüklük iken nominal gerilmenin toplanabilen bir büyüklük olmamasıdır. Başlangıç uzunluğu  $l_0$  olan bir deney parçasını göz önüne alalım. Bu numunenin tek eksenli çekme gerilmesi altında  $l_1$  uzunluğuna kadar gerildiğini düşünelim. Bu durumda  $\varepsilon_1=\ln(l_1/l_0)$  ve  $\hat{\varepsilon}_1=\ln(l_1-l_0)/l_0$  olacaktır. Eğer bu numune şimdi de  $l_2$  uzunluğuna kadar gerilirse, ilave gerçek ve nominal gerinmeler sırasıyla  $\varepsilon_2=\ln(l_2/l_1)$  ve  $\hat{\varepsilon}_2=\ln(l_2-l_0)/l_0$  şeklinde ifade edilir.  $\varepsilon$  cinsinden toplam gerinme aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{l_2}{l_1}\right) = \ln\left(\frac{l_2}{l_0}\right) \quad (1.13)$$

Diğer taraftan nominal gerinme yukarıdakine benzer bir toplama özelliğine sahip değildir ve,

$$\varepsilon = \frac{l_2-l_0}{l_0} \neq \hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 \quad (1.14)$$

şeklinde ifade edilir.

#### 1.4 Hidrostatik Basıncın Sıkıştırılmazlık Etkisi

Bridgman (1947,1952) gerçekleştirdiği pek çok deneyde malzemelerin çok yüksek hidrostatik basınç altındaki davranışlarını incelemiştir. Bridgman 24000 atm lik hidrostatik basınç altında çekme deneyleri gerçekleştirmiştir. Elde ettiği sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- 1- Malzemenin hacmi çok yüksek basınç altında bile kalıcı olarak değişmemektedir; böylece malzeme plastik olarak sıkıştırılmaz kabul edilebilir.
- 2- Küçük gerinme aralıklarında gerilme–gerinme eğrisi hidrostatik basınçtan etkilenmemektedir.
- 3- Hidrostatik basınç altında malzemenin sünekliği artmaktadır.
- 4- Herhangi bir malzemenin akması üzerinde hidrostatik basıncın etkisi ihmal edilebilir düzeydedir.

Yukarıda bahsedilen birinci ve dördüncü sonuç – sıkıştırılmazlık ve akma olayının hidrostatik basınçtan bağımsız olması – plastisite teorisinin temellerini oluşturmaktadır.

Matematiksel olarak sıkıştırılmazlık, gerçek gerinmenin asal değerleri cinsinden,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0 \quad (1.15)$$

veya nominal gerinmeler cinsinden,

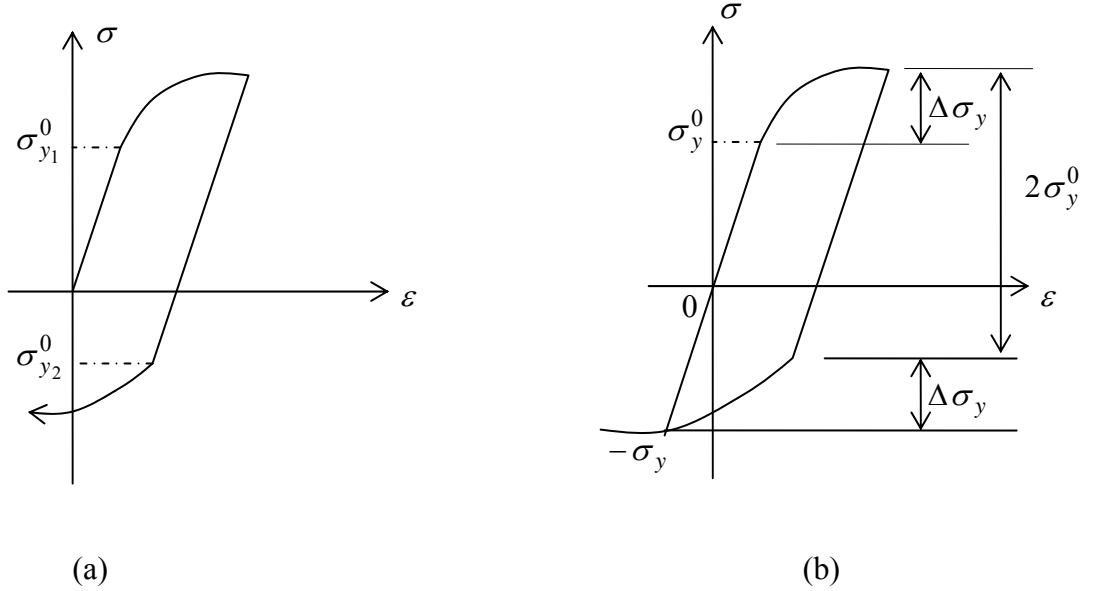
$$(\hat{\varepsilon}_1 + 1)(\hat{\varepsilon}_2 + 1)(\hat{\varepsilon}_3 + 1) = 1 \quad (1.16)$$

şeklinde elde edilir. Sıkıştırılmazlık şartını ifade etmek için nominal gerinme yerine gerçek gerilmeyi kullanmak daha kullanışlı gözükmemektedir. Sonsuz küçük gerinmeler için, yüksek mertebeden terimleri ihmal edersek, sıkıştırılmazlık şartı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 + \hat{\varepsilon}_3 = 0 \quad (1.17)$$

### 1.5 Bauschinger Etkisi

Plastik bölgede çekme veya sıkıştırma şeklinde yüklenmiş bir deney numunesini göz önüne alalım. Yük kaldırıldıktan sonra numune ters yönde akma gerçekleşinceye kadar tekrar yüklenirse; yeniden yüklemeye (ters yönde uygulanan yüklemeye) ortaya çıkan akma gerilmesi orijinal yönde yapılan yüklemeye ortaya çıkan akma gerilmesinden daha düşük olacaktır. Bu olay aşağıdaki şekilde açıklandığı gibi *Bauschinger etkisi* olarak adlandırılmıştır.



Şekil 1.2. Bauschinger etkisi: (a) deneysel gözlem; (b) kinematik sertleşme modeli

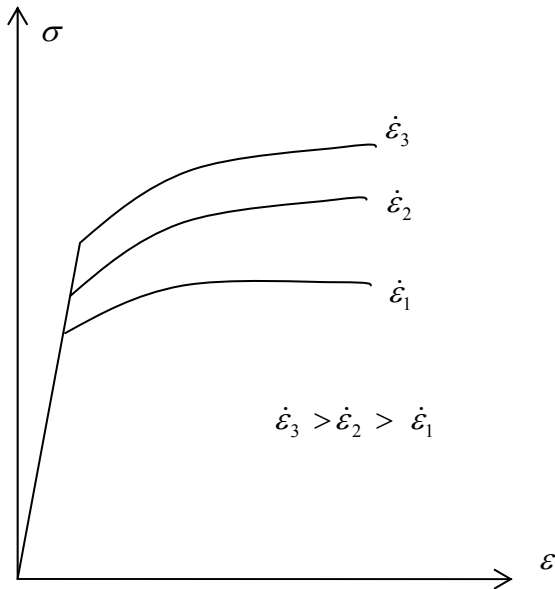
Bauschinger etkisi çok kristalli malzemelerde gözlemlenebildiği gibi tek kristalli malzemeler de gözlenebilen bir etkidir. Bu etki, bir önceki yüklemenin sebep olduğu dislokasyon alanlarının anizotropisi ile açıklanabilmektedir. Bu çalışma, malzemenin mikro yapısını ve modellerini açıklamaya yönelik olmadığından bu konuda fazla detaya girilmeyecektir. Ancak, bu etkinin varlığı plastik deformasyon modelini oldukça karmaşık hale getirdiğinden genellikle daha basitleştirilmiş bir model olan *kinematik sertleşme modeli* kullanılmaktadır. Bu modele göre; ters yönde yapılan yüklemeye esnasında akma gerilmesindeki azalma miktarı, orijinal

yönde akma gerilmesinden itibaren yapılan yükleme esnasındaki gerilme artımına eşittir. Bu modelin detayları klasik plastisite kitaplarında mevcuttur.

### 1.6. Yükleme Hızının Etkisi

Şimdiye kadar oldukça yavaş bir şekilde uygulanan bir-boyutlu yüklemeye karşı malzemenin gösterdiği davranışı incelemeye çalıştık, bu yükleme şekli literatürde yarı-statik yükleme olarak bilinmektedir. Belli bir değer üzerinde genellikle kabul edilen bir değer mevcut olmamakla birlikte, yarı-statik yükleme kavramı; saniyede  $10^{-2}$  -  $10^{-3}$  mertebesinde gerinme hızına sahip bir yükleme olarak düşünülmektedir. Gerinme hızının veya yükleme hızının plastik bölgede malzemenin davranışı üzerinde belirgin bir etkisinin olduğu deneylerle tespit edilmiştir. Artan yükleme hızının etkileri genellikle aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Başlangıçtaki ve daha sonra ardışık olarak ortaya çıkan akma gerilmeleri yükleme hızıyla birlikte artar.
2. Malzemenin sünekliği yükleme hızındaki artma ile birlikte azalır.



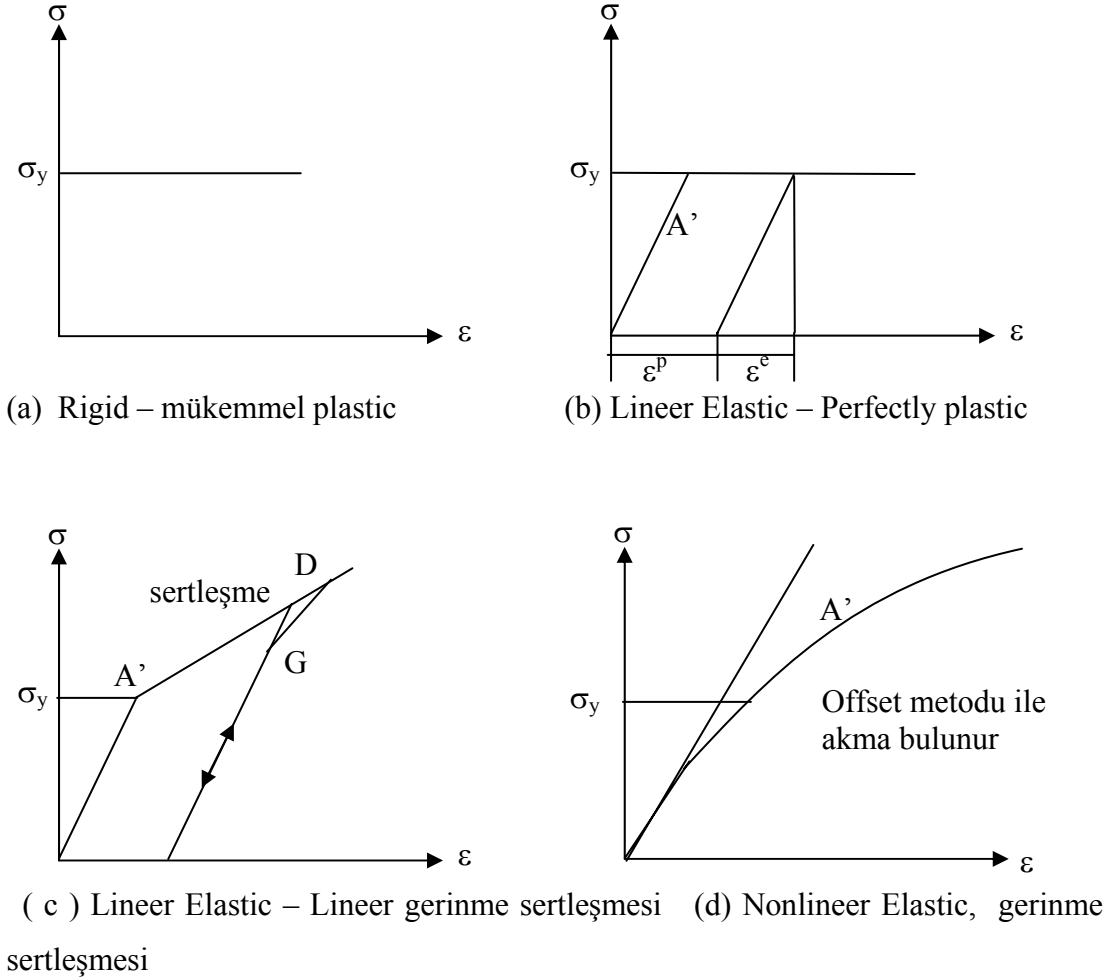
Şekil 1.3. Gerinme hızının etkisi

Sıcaklığında gerinme hızı gibi malzeme özellikleri üzerinde çok büyük bir etkiye sahip olduğu bilinmektedir. Sıcaklık arttıkça metallerin sünekliği gevreklikten sünekliğe doğru değişir. Oda sıcaklığında sünek davranış gösteren bir malzeme çok daha düşük sıcaklıklarda gevrek davranış gösterebilirken, oda sıcaklığında gevrek davranış gösteren malzemeler çok daha yüksek sıcaklıklarda sünek davranış sergileyebilirler. Ayrıca, deneylere göre sıcaklık azaldıkça malzemenin dayanımı artmaktadır.

### 1.7. Makroskopik Plastik Davranışın İdealleştirilmesi

Plastik bölgede gerçek malzemelerin davranışı aslında oldukça karmaşıktır. Bazen bir sınır değer probleminin çözümünü basitleştirmek için plastik davranış ya idealize edilir veya daha önce de ifade edildiği gibi yaklaşık bir formda ele alınır. Yaygın olarak kullanılan idealleştirmeler aşağıdaki şekillerde verilmiştir. Özel bir idealleştirmenin doğruluğu gerçek uygulamaya bağlıdır. Toplam gerinmenin büyük olduğu durumlarda, rijit-plastik bir idealleştirmede elastik gerinmenin ihmal edilmesi sınır değer probleminin çözümünde önemsiz hatalara yol açabilir. Eğer yumuşak çelik malzemenin kullanıldığı bir yapı inceleniyorsa ve maksimum gerinmeler  $B$  noktasından daha alt değerlerde bekleniyorsa mükemmel plastik model kullanmak (gerinme sertleşmesinin olmadığı durum) kabul edilebilen çözümler sağlayabilir. Şekil 1.1 de gösterilen gerilme-gerinme eğrisini, özellikle de  $AU'$  ile gösterilen sertleşme kısmını tanımlamak için bir çok deneysel denklem teklif edilmiştir. Bu denklemler aşağıdaki şekilde gösterilen non-lineer gerinme sertleşmesi davranışını temsil etmek için kullanılabilir.





Şekil 1.4. Farklı maddesel davranışların reolojik modelleri

Aşağıda verilen bütün ifadelerde  $\sigma$  ve  $\varepsilon$  sırasıyla gerçek gerilme ve gerçek gerinmeyi temsil etmektedir:

$$\sigma = \sigma_Y + H \varepsilon^n \quad (\text{Ludwick 1909}) \quad (1.18)$$

$$\sigma = H \varepsilon^n \quad (\text{Holloman 1944}) \quad (1.19)$$

$$\sigma = \sigma_Y + (\sigma_s - \sigma_Y) \{1 - \exp(-n\varepsilon)\} \quad (\text{Voce 1948}) \quad (1.20)$$

$$\sigma = H(\varepsilon_s + \varepsilon)^n \quad (\text{Swift 1947}) \quad (1.21)$$

$$\sigma = \sigma_Y \tanh\left(\frac{E\varepsilon}{\sigma_Y}\right) \quad (\text{Prager 1938}) \quad (1.22)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + H \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (\text{Ramberg ve Osgood 1943}) \quad (1.23)$$

Burada  $E, \sigma_Y, \sigma_s, \varepsilon_s, H$  ve  $n$  malzeme sabitleri olup deneysel olarak belirlenmesi gereken değerlerdir.

### 1.8. Küçük ve Büyük Deformasyonlar

Daha önce de ifade edildiği gibi yalnızca küçük deformasyonlar için sıkıştırılmazlık şartı yazılmıştır ve bu durumda gerçek gerinme ile nominal gerinme arasında fark kalmamaktadır. Genellikle, nominal gerinme bir Taylor serisi yardımıyla gerçek gerinme cinsinden ifade edilebilir:

$$\hat{\varepsilon} = e^\varepsilon - 1 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} + \dots \quad (1.24)$$

Yukarıdaki ifadeden açıkça görüldüğü gibi,  $\hat{\varepsilon} \approx \varepsilon$  olma durumu ancak ve ancak  $\varepsilon$  küçük olması ve bu ifadede yüksek dereceden bütün terimlerin ihmal edilmesi ile mümkün olur.  $\hat{\varepsilon}$  ve  $\varepsilon$  arasındaki fark onların tanımlarında referans seçilen noktalardan kaynaklanmaktadır.  $\hat{\varepsilon}$  için başlangıç durumu veya deformasyondan önceki durum referans seçilmiştir.  $\varepsilon$  için ise mevcut durum veya deformasyondan sonraki konfigürasyon referans alınmaktadır. Eğer gerinme küçük ise başlangıçtaki ve mevcut durumlar arasındaki fark ihmal edilebilir ve genellikle lineer elastisite teorisinde bu alışılmış durum kullanılır. Gerinme büyük olduğu zaman, ilk ve son durumlar arasındaki fark hissedilir şekilde büyür ve ihmal etme olanaksız hale gelir. Bu basit geometrik şart başlangıç ve mevcut konfigürasyonlar kavramlarını kullanmamızın sebebini oluşturur, farklı gerinme ve gerilme ölçüleri bu iki farklı konfigürasyon referans alınarak tanımlanmıştır. Ayrıca, büyük deformasyonların ortaya çıktığı durumlarda önemli ölçüde rijit cisim rotasyonları oluşabileceğinden, objektivite ilkesini garanti altına almak için kullanılan ve aynı zamanda plastik deformasyonu tanımlayan bünye denklemleri üzerinde rijit cisim rotasyonunun etkisini elimine eden *korotasyonel hız* kavramı takdim edilmiştir. Böylece sonlu

gerinme durumları için plastisite teorisi haklı gerekçeler yüzünden oldukça kompleks bir davranış şekli olarak ortaya çıkmaktadır.

Yukarıda tartışılan matematiksel kompleksliklere ilave olarak sonlu plastik gerinme durumunda gerçek maddesel davranışın belirlenmesi de bir problemdir. Sonlu deformasyonları içeren deneyleri gerçekleştirmek küçük deformasyonlar için yapılan deneylerden çok daha fazla zordur. Örneğin, basit burulma testlerinde bir deney tübünün torsiyonel burkulmasından kaçınmak için, önemli kenar etkilerine neden olan kısa boylu numuneler kullanılır, ve böylece deneysel sonuçların yorumunu yapmak oldukça zor hale gelir. Bu tip deneysel güçlüklerden kaçınmak için deneysel araştırmaların çoğu küçük gerinme aralıklarında yoğunlaştırılmıştır ve sonlu gerinme durumlarında yapılan deneylerin sayısı oldukça sınırlıdır. Bu yüzden, birkaç matematiksel sonlu plastisite teorisi önerilmiş olmasına rağmen, sonlu plastisite için yapılan araştırmalar küçük gerinme durumu için yapılan araştırmalardan daha belirsizdir. Aslında son zamanlarda plastisite konusunda yapılan araştırmaların büyük bir kısmı fenomenolojik ve makroskopik deneysel gözlemlerle veya mikroskopik ölçümlerle ve şartlarla sonlu deformasyon esnasında malzemenin davranışını açıklamaya yöneliktir.

Makro ölçekte plastik deformasyonun doğasını açıklamak için sürekli ortamlar mekaniğindeki temel kavramların ve yaklaşımların kullanıldığı pek çok araştırma mevcuttur. Bu konuda yapılan deneysel gözlemler doğal olarak birkaç hipotez ve kabulü de ortaya çıkarmaktadır. Bu kabuller ve plastisite teorisi ile ilgili önemli kavramlar ilerideki bölümlerde ifade edilecektir. Plastik deformasyonun mekanizması ve makroskopik seviyede deneysel olarak gözlenen felsefik yaklaşımlar bu çalışmada tartışılmayacaktır. Bu tür olaylar malzemelerin mikro yapısını inceleyen ve mikroskopik seviyede plastik deformasyon veya akış mekanizmalarını ele alan eserlerde kapsamlı bir şekilde incelenmiştir (Taylor, 1934).

### 1.9. Gerilme Durumu Ve Gerilme Uzayı

Herhangi bir maddesel noktadaki gerilme durumu Cauchy gerilme tansörü  $\sigma$  ile karakterize edilebilir. Deformasyon çok küçük değerlerde olduğu için, Cauchy ve Piola-Kirchoff gerilme tansörleri arasındaki fark ihmal edilebilir hale gelmektedir. Biz bu ifadeyi basitçe gerilme tansörü  $\sigma$  olarak adlandıracamız. Gerilme tansörü, kartezyen koordinat sistemindeki bileşenleri  $\sigma_{ij}$  olan ikinci dereceden bir matris halinde şöyle gösterilebilir.

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Gerilme tansörü simetrik olduğu için sadece altı tane gerilme bileşenleri  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{xz}$  bağımsız olacaklardır. Bu sebepten, bu altı bağımsız gerilme bileşenleri bir tek gerilme durumunu tanımlayacaktır, veya eşitlik (1.25) ile verilen  $[\sigma_{ij}]$  matrisinden aşağıdaki denklemleri kullanarak üç asal gerilmeyi hesaplayabiliriz.

$$|\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}| = 0$$

veya,

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (1.26)$$

şeklinde yazılır. Eşitlik 4.2 aşağıdaki denkleme genişletilebilir.

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0 \quad (1.27)$$

Burada,

$$J_1 = tr(\sigma) = \sigma_{ii} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (1.28)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{kk} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}) = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \quad (1.29)$$

$$J_3 = \left(\frac{1}{6}\right)\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnl}\sigma_{im}\sigma_{jn}\sigma_{kl} = \det[\sigma_{ij}] = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

Bu üç ifade gerilme tansörünün invariantlarıdır. Asal gerilmeler olan  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  cinsinden ise şöyle ifade edilebilirler

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.31)$$

$$J_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (1.32)$$

$$J_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (1.33)$$

Her bir asal gerilme  $\sigma_i$  için, ilgili asal doğrultuları  $\mathbf{n}^{(i)}$  ( $i=1,2,3$ ) şeklinde elde edebiliriz.

$$\sigma \cdot \mathbf{n}^{(i)} = \sigma_i \mathbf{n}^{(i)} \quad (1.34)$$

veya,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1^{(i)} \\ n_2^{(i)} \\ n_3^{(i)} \end{pmatrix} = \sigma_i \begin{pmatrix} n_1^{(i)} \\ n_2^{(i)} \\ n_3^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3) \quad (1.35)$$

Burada  $n^{(i)}$  i'inci asal yöne ait birim vektördür ve aşağıdaki bağıntı bir  $n^{(i)}$  ( $i=1,2,3$ ) çifti için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$n^{(i)} \cdot n^{(j)} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ için} \\ 0 & i \neq j \text{ için} \end{cases} \quad (1.36)$$

Eşitlik (1.35) şu şekilde de ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

veya buradan,

$$[R_{ij}] = [n_j^{(i)}] = \begin{bmatrix} n_1^{(1)} & n_1^{(2)} & n_1^{(3)} \\ n_2^{(1)} & n_2^{(2)} & n_2^{(3)} \\ n_3^{(1)} & n_3^{(2)} & n_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Eşitlik (1.36)'ın yardımıyla ise şu denklemi kolayca ispatlayabiliriz.

$$[R_{ij}]^{-1} = [R_{ij}]^T \quad (1.39)$$

Bu sebepten asal gerilmelerin bileşenlerini ve eşitlik (1.37) ve (1.39) u kullanarak  $[\sigma_{ij}]$ 'yi aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = [R_{ij}] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} [R_{ij}]^T \quad (1.40)$$

Bu denkleme göre, eğer asal gerilmeler ve yönleri belirli ise, gerilme artık tanımlanabilir. Plastisite teorisinde gerilme tansörünü aşağıdaki gibi iki parçaya ayırmak artık alışıl gelmiş bir durumdur.

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (1.41)$$

Burada  $p$  hidrostatik gerilme veya basınçtır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \sigma_{ii} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \quad (1.42)$$

Ayrıca  $p\delta_{ij}$  küresel veya hidrostatik gerilme tansörüdür. (1.41) denkleminin 2. kısmı ise şöyle hesaplanır

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (1.43)$$

Bu değere sapma gerilme tansörü denir. Aşağıdaki durumu eşitlik (1.43)'den kolayca görebiliriz.

$$J'_1 = tr(S) = S_{ii} = S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} J'_2 &= \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2 \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$J'_3 = \det(S_{ij}) = \left(\frac{1}{6}\right) e_{ijk} e_{mnl} S_{im} S_{jn} S_{kl} = S_1 S_2 S_3 \quad (1.46)$$

Burada  $S_i$  ( $i=1,2,3$ ) sapma gerilme tansörü  $S$ 'nin asal değerleridir. Eşitlik (1.34) ve (1.43)'ü beraber kullanarak aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$S \cdot n^{(i)} = (\sigma - pI) \cdot n^{(i)} = (\sigma_i - p)n^{(i)} \quad (i=1,2,3) \quad (1.47)$$

Son eşitliğe göre, sapma gerilme tansörü  $S$ 'nin asal yönleri gerilme tansörü  $\sigma$ 'ya ait olanlarla aynıdır ve asal sapma gerilmeleri  $S_i$  ( $i=1,2,3$ )  $\sigma_i$  ile şöyle ilişkilendirilebilir.

$$S_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad (1.48)$$

$$S_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \quad (1.49)$$

$$S_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad (1.50)$$

veya

$$S_i = \sigma_i - p \quad (i=1,2,3) \quad (1.51)$$

Bununla birlikte  $J'_1 = 0$  kısmını hariç tutarsak, sapma gerilme tansörünün ikinci ve üçüncü invaryantları gerilme tansörü  $\sigma$ 'nın  $J_i$  ( $i=1,2,3$ ) invaryantlarına aşağıdaki eşitlikler yardımıyla ilişkilendirilebilir.

$$J'_2 = \frac{1}{3}(J_1^2 - 3J_2) \quad (1.52)$$

$$J'_3 = \frac{1}{27}(2J_1^3 - 9J_1J_2 + 27J_3) \quad (1.53)$$

İlerideki konuları hesaba katarak burada oktahedral gerilmeleri de hesaplamamız faydalı olacaktır. Fakat ilk önce oktahedral düzlemi tanımlamamız gereklidir. Bir oktahedral düzlem, normal gerilme tansörü  $\sigma$ 'nın herbir asal yönleri ile eşit açılar yapan bir düzlemdir. Bu sebepten burada bulunan herbir düzlem için birim normal olan  $n=(n_1, n_2, n_3)$  tanımlanmalıdır.

$$n_1^2 = n_2^2 = n_3^2 \quad (1.54)$$

ve

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (1.55)$$

ve bu denklemlerin sonucu olarak,



$$n_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad n_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (1.56)$$

yazılır. Bu sebepten oktahedral düzlemlerin aşağıdaki eşitliklere sahip toplam sekiz ailesi bulunmaktadır,

$$\pm \sigma_1 \pm \sigma_2 \pm \sigma_3 = \sqrt{3}C \quad (1.57)$$

burada  $C$  bir sabittir. Oktahedral düzlemlerle beraber oktahedral gerilmeleri de görebiliriz. Oktahedral normal gerilme  $\sigma_{oct}$ , bir oktahedral düzlemin normalinin üzerindeki gerilme olarak tarif edilebilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır

$$\sigma_{oct} = n \cdot \sigma \cdot n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}J_1 \quad (1.58)$$

Bu denklem  $\sigma$ 'nın koordinat sisteminin asal ekseninde diagonal form da bulunmasından dolayı elde edilmiştir.

Oktahedral kayma gerilmesi bir oktahedral düzlem üzerinde kayma gerilmesi olarak tanımlanmış ve şöyle hesaplanmıştır.

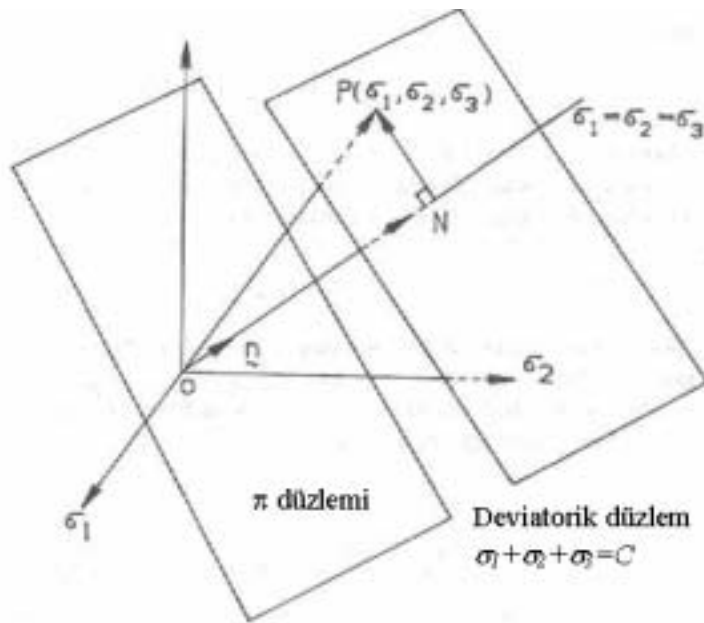
$$\begin{aligned} \tau_{oct}^2 &= |\sigma \cdot n|^2 - \sigma_{oct}^2 \\ &= \frac{1}{9} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3} J_2' \end{aligned} \quad (1.59)$$

Buradan da,

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \sqrt{\frac{2}{3} J_2'} = \frac{1}{3} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{3} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6\sigma_{xy}^2 + 6\sigma_{yz}^2 + 6\sigma_{zx}^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (1.60)$$

ifadeleri yazılır.

Daha önce de tartışıldığı üzere, tanımlanmış bir gerilme durumu için altı tane bağımsız gerilme bileşeni bulunmaktadır. Bu yüzden, bir gerilme durumunu geometrik olarak gösterebilmek için koordinat eksenlerinde, altı tane bağımsız gerilme bileşenine sahip altı boyutlu bir uzaya ihtiyaç duymaktayız. Az sayıda ihmallerle, anizotropik malzemeler için bir akma yüzeyini veya aşınma yüzeyini tanımlamak için altı boyutlu gerilme uzayında çalışmaktan başka bir alternatifimiz yoktur. Anizotropik bir malzeme için asal gerilmelerin yönelimi asal gerilmelerin şiddeti kadar önemlidir. Malzeme izotropik olduğu zaman, durum oldukça basitleşir. Malzeme özellikleri herhangi bir yönde aynı olduğundan sadece asal gerilmelerin yönleri akma ve aşınma davranışlarını tanımlamada önemli bir rol oynar. Bu sebepten biz yalnızca, koordinat eksenleri olarak üç asal gerilmeyi kullanan üç boyutlu bir gerilme uzayına ihtiyaç duyarız. Bu asal gerilme uzayı Haigh-Westergaard gerilme uzayı olarak bilinir. Bu uzayda, koordinatları  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ve  $\sigma_3$  olan herhangi bir nokta bu asal gerilmelerle gerilme durumunu temsil eder. Aynı asal gerilmeler olan  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ve  $\sigma_3$  'e sahip fakat, farklı asal yönlere sahip iki gerilme durumu bu yüzeyde ayırt edilemez hale gelir.



Şekil 1.5. Ana gerilme uzayı ve  $\sigma'$  nın ayrışımı

Daha önce de bahsettiğimiz üzere plastisite teorisinde gerilme tansörü  $\sigma$  'yı hidrostatik gerilme tansör  $pI$  ve bir sapma gerilme tansörü  $S$  olmak üzere ikiye ayırabiliriz. Bu yüzden, asal gerilme uzayında bu ayrıştırmanın geometrik temsilini burada tartışmak faydalı olacaktır.

Şekil 1.5. de gösterildiği gibi orijinden geçen ve koordinat eksenleri ile eşit açılar yapan bir  $\overline{ON}$  köşegenini göz önüne alalım. Bu durumda bu çizgi üzerinde yer alan her noktada aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{1}{3} J_1 \quad (1.61)$$

ve

$$S_1 = S_2 = S_3 = 0 \quad (1.62)$$

Bu uzaysal köşegen üzerindeki noktalar hidrostatik basınç durumunu ifade ederken bu çizgi de hidrostatik eksen olarak adlandırılır. Bu köşegene dik doğrultudaki herhangi bir düzlem oktahedral düzlemdir ve (1.57) denkleminde faydalanarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = C = \sqrt{3} d \quad (1.63)$$

burada  $d$  düzlemin orijine olan uzaklığıdır. Eğer  $d=0$  olursa, düzlem  $\pi$ -düzlemi olarak adlandırılır.

Herhangi bir gerilme durumu  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , asal gerilme uzayında bir pozisyon vektörü  $\overline{OP}$  ile tanımlanabilir ve şekil 1.5.'e göre,

$$\overline{OP} = \overline{ON} + \overline{NP} \quad (1.64)$$

yazılabilir. Burada  $\overrightarrow{NP}$  vektörü  $\overrightarrow{ON}$ 'ye diktir ve oktahedral düzlemin üzerindedir.  $\overrightarrow{ON} = \left| \overrightarrow{ON} \right| n$  olduğundan ve  $n$ , ON vektörü doğrultusunda  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$  değerlerine sahip birim vektör olduğuna göre, ve

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{ON} \right| &= \overrightarrow{OP} \cdot n = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} J_1 = \sqrt{3} p \end{aligned} \quad (1.65)$$

olduğundan dolayı,

$$\overrightarrow{ON} = (p, p, p) \quad (1.66)$$

olacaktır ve bununla beraber,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = (\sigma_1 - p, \sigma_2 - p, \sigma_3 - p) \\ &= (S_1, S_2, S_3) \end{aligned} \quad (1.67)$$

yazılabilecektir. Bu sebepten, rastgele seçilmiş bir gerilme durumu için, hidrostatik basınç kısmı uzay köşegeninde bulunan bir vektörle ve deviatorik kısım oktahedral düzlem üzerinde uzay köşegenine dik bir vektörle tanımlanır. Bu durumdan dolayı bu uzay bazen deviatorik uzay olarak adlandırılır.

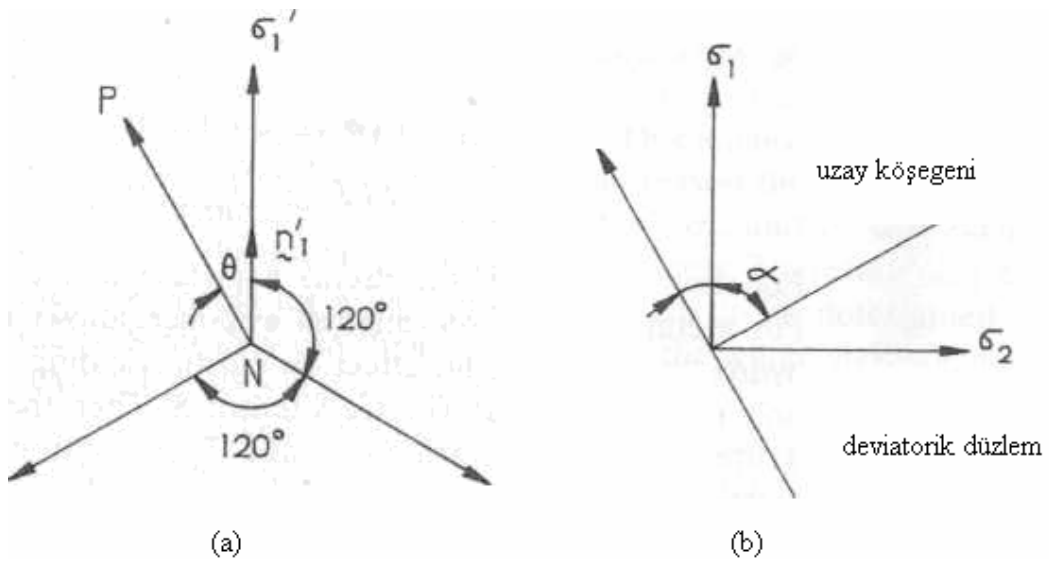
Eşitlikler (1.67), (1.45) ve (1.60) beraber kullanılarak  $\overrightarrow{NP}$  vektörünün boyu şu şekilde hesaplanabilir:

$$r = \left| \overrightarrow{NP} \right| = (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)^{1/2} = \sqrt{2J_2'} = \sqrt{3} \tau_{oct} \quad (1.68)$$

Deviatorik düzlem üzerinde  $\overrightarrow{NP}$  vektörünün yönlendirilmesini tanımlamak için, Şekil 1.6. daki uzay üzerinde  $\overrightarrow{NP}$  vektörünün izdüşümünü ele alalım. Şekil 1.6a.'da,

$\sigma'_1, \sigma'_2, \text{ ve } \sigma'_3$  deviatorik uzay üzerindeki eksenler olan  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$ 'ün izdüşümleri olarak gösterilmiştir.  $n'_1$  deviatorik uzayda  $\sigma'_1$  yönündeki birim vektör olduğunda bunlara bağlı olarak  $\sigma_1, \sigma_2$  ve  $\sigma_3$ 'e ait olanlar  $[\cos(90^\circ - \alpha), m, n]$  şekil 1.6b.'de gösterilmiştir.  $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$ ,  $m=n$  ve negatif olacağından,

$$n'_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1) \quad (1.69)$$



Şekil 1.6. Deviatorik düzlem üzerinde gerinme uzayının yansımaları

Bu yüzden  $\overline{NP}$  vektörünün  $\sigma'_1$  üzerindeki izdüşümünü tanımlarsak,

$$\overline{NP} \cdot n'_1 = r \cos \theta = (S_1, S_2, S_3) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1) \quad (1.70)$$

veya,

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J'_2}} \quad (1.71)$$

burada eşitlik (1.44) ve (1.68)  $r$ ,  $S_2$  ve  $S_3$ 'ü sadeleştirmek için kullanılmıştır.  $\theta$ 'yı deviatorik gerilme tansörü  $S$ 'in invariantsları cinsinden ifade edebilmek için eşitlik (1.71)'de,

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \quad (1.72)$$

trigonometrik bağıntısını kullanırız ve aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J'_2}} \right)^3 - 3 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{J'_2}} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2J_2'^{3/2}} (S_1^3 - S_1 J_2') \end{aligned} \quad (1.73)$$

Burada  $J_2' = -(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1)$ ,  $S_2 + S_3 = -S$ , ve  $J_3' = S_1 S_2 S_3$  olduğunu hatırlayarak son olarak aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3'}{J_2'^{3/2}} \quad (0 \leq \theta \leq 60^\circ) \quad (1.74)$$

Eşitlik (1.71) ve Şekil 1.6a. ortak kullanılırsa aşağıdaki eşitlikler kolayca gösterilebilir.

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2'} \cos \theta \quad (1.75)$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2'} \cos(120^\circ - \theta) \quad (1.76)$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2'} \cos(120^\circ + \theta) \quad (1.77)$$

Asal gerilme uzayında eşitlik (1.41)'e göre,

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{J_1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{J_2'} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \cos(120^\circ - \theta) \\ \cos(120^\circ + \theta) \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Aşağıdaki hususlarda  $\theta$  değerinin üç farklı durum için değişik değerler alabileceğini görebiliriz:

1. Hidrostatik basıncın  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$  durumunda tek eksenli gerilme (eğer  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  ise tek eksenli gerilme) bu gerilme durumu bilhassa geomalzemelerle uğraşırken üç eksenli gerilim olarak da isimlendirilir. Eşitlik (1.71)'i kullanarak,

$$\theta = 0^\circ \quad (1.79)$$

2. Bir hidrostatik basınç etkisi altında, pür kayma gerilmesini ifade eder. Bu durumda,  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  olup  $\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_3$  durumunda (1.71) denklemini

$$\theta = 30^\circ \quad (1.80a)$$

sonucunu verir.

3. Bir hidrostatik basınç etkisi altında tek eksenli sıkıştırma durumu  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$  olup, ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$  için tek eksenli çekme söz konusudur). Bu gerilme durumu jeomalzemelerin uygulamalarında üç eksenli sıkıştırma olarak adlandırılır. (1.71) in yardımıyla aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\theta = 60^\circ \quad (1.80b)$$

Eşitlik (1.78) kullanılarak asal gerilme uzayında koordinat eksenleri olarak  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  ve  $\sigma_3$  yerine  $J_1$ ,  $\sqrt{J_2}$  ve  $\theta$  seçilebilir. Aslında bu seçim plastisite teorisinde akma yüzeyini açıklayabilmek için daha uygun bir seçim olacaktır.

### 1.10. Akma Yüzeyi

Daha önceki kısımlarda da bahsettiğimiz üzere, bir akma kriteri, bir malzeme için plastik deformasyonun başlangıcının tanımlanmasını amaçlayan temel bir kabuldür. Bir noktadaki gerilme durumu, akma şartını sağlıyorsa, bu nokta plastik deformasyona uğrar. Aksi takdirde, elastik deformasyon sözkonusudur. Baş tarafta bahsedildiği gibi, akmaya karşılık gelen olası bütün gerilme durumları altı boyutlu gerilme uzayında kapalı bir hiper yüzey oluşturur. Anlaşılabilirliği sağlamak için bütün akma noktalarından oluşan başlangıç akma yüzeyinin ilk akmaya karşılık geldiğini kabul ediyoruz. Ayrıca malzemenin homojen olduğunu ve herhangi bir termal etkinin olmadığını varsayıyoruz. Bu durumda akma fonksiyonu matematiksel olarak aşağıdaki genel formda ifade edilir.

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.81)$$

bununla beraber,

$$F(\sigma_{ij}) < 0 \quad \text{Elastik deformasyon bölgesi için} \quad (1.82)$$

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{Plastik deformasyon bölgesi için}$$

Eğer malzeme izotropik ise akma, yalnızca asal gerilmelerin şiddetine bağlı olur. Bu tip malzemeler için akma şartı aşağıdaki eşitliklerle verilmiştir.

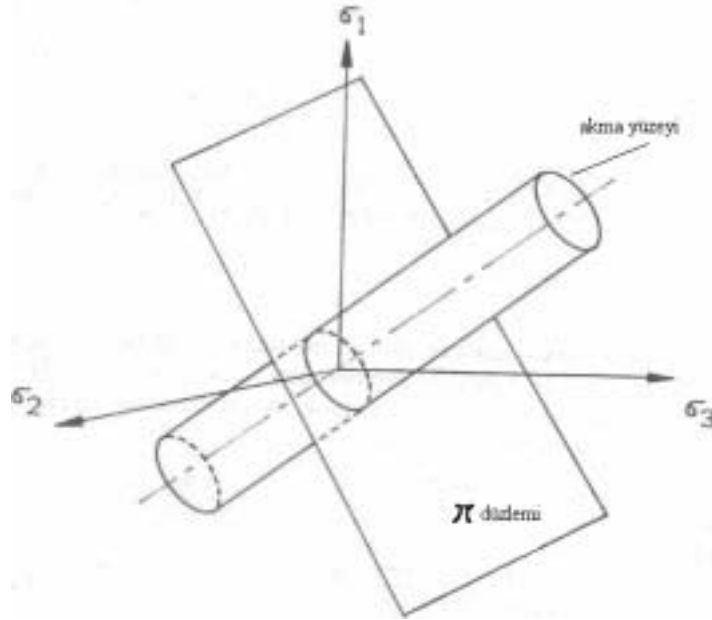
$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.83)$$

$$F(J_1, J_2, J_3) = 0 \quad (1.84)$$



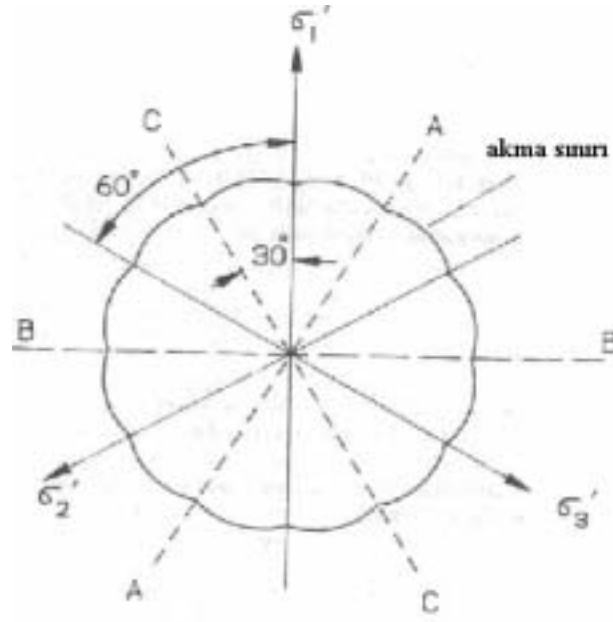
Yukarıdaki denklemler asal gerilme uzayında bir yüzeyi temsil eder. Metalik malzemeler için deneysel veriler hidrostatik basınçın plastik akma üzerinde hiçbir etkiye sahip olmadığını kabul etmemize imkan tanır. Plastik akma yalnızca sapma gerilme tansörü  $S$  ile ilgili bir olaydır. Akma kriteri izotropik ve gözenekli olmayan (yoğun) malzemeler için kendine ait  $J'_1$  ve  $J'_2$  invariantları cinsinden yazılabilir:

$$F(J'_2, J'_3) = 0 \quad (1.85)$$



Şekil 1.7. İzotropik malzemeler için akma yüzeyi

Şekil 1.7. de gösterildiği gibi yukarıdaki ifade hidrostatik basınç eksenine paralel değişkenlerle asal gerilme uzayında bir silindiri temsil eder. Çünkü hidrostatik basınç ( $p=J_1/3$ ) akma fonksiyonunda bir argüman olarak yer almamaktadır. Sapma düzlemlerinden herhangi birisi üzerinde ve özellikle de  $\pi$ -düzlemi üzerinde akma yüzeyinin şeklini göz önüne almak için bu ifade yeterlidir.



Şekil 1.8.  $\pi$ -uzayında akma sınırı

Şekil 1.8.'de gösterildiği gibi  $\pi$ -düzlemi üzerinde akma yüzeyinin bir parçasını gözönüne alalım. İlk olarak, simetri kabullerine göre eğer nokta  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  akma yüzeyi üzerinde bulunuyorsa nokta  $(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_2)$  da aynı yüzeyde bulunacaktır. Bu demektir ki akma parçası  $\sigma'_1$  eksenine göre simetrik durumda olmalıdır.  $\sigma'_1, \sigma'_2$  ve  $\sigma'_3$  eksenlerinin simetrisi  $\pi$  uzayında bulunan akma yüzeyini altı eşit parçaya bölmektedir. Bu sebepten özel bir malzeme için deneysel olarak bu altı parçadan herhangi birinin tanımlanması gereklidir. İşte bu durumdan sonra simetri özelliği tüm akmayı tanımlamak için kullanılır. Bu poroslu katıların ve kaya gibi malzemelerin bir sonucudur.

İkinci olarak çekme gerilmesi için malzemenin akma dayanımı sıkıştırmaya eşit ise  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  noktası gibi  $(-\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  noktası da akma yüzeyinde bulunacaktır. Bu sebepten akma yüzey parçası  $\sigma'_1$  eksenine dik olan B-B doğrusu etrafında simetrik olacaktır. benzer olarak, sırasıyla  $\sigma'_2$  ve  $\sigma'_3$  eksenlerine dik olan C-C ve A-A doğruları da simetri ekseninde bulunacaklardır. Yukarıda belirtildiği gibi simetri eksenleri bölgeyi eş iki parçaya böleceklerdir. Bu yoğunlukta veya metaller gibi

porozlu olmayan malzemeler için elimizde bulunan yüzeyin eş on iki parçasından herhangi birini tanımlamamız yeterli olacaktır. (Şekil 1.8.)

### 1.11. Metaller için Akma Kriteri

Bu bölümde meal plastisitesi için kullanılan iki önemli kriter olan von Mises ve Tresca kriterlerinden bahsedilecektir. Bridgeman (1952) kanıtlamıştır ki, metallerde 25.000 bar basınca kadar akma olmamaktadır. Bu yüzden son bölümde tartışıldığı gibi metallerin akma kriteri gerilme tansörünün birinci invaryantı olan  $J_1$ 'e bağımlı değildir.

#### 1.11.1 Maxwell-Huber-von Mises Kriterleri

Genel bir kanıya göre bu akma kriteri von Mises tarafından tavsiye edilmiştir (1913). Fakat aslında ilk olarak Huber tarafından yayınlanmış(1904) ve başka bir rivayete göre 1856'da bu kriteri Maxwell Kelvin'e bir mektupla göndermiştir. En son olarak Hencky (1924) bu kriteri deviatorik gerilme enerjisi olarak yorumlamıştır.

Kriter der ki, plastik akma eşitli (1.86) ile verilen malzeme özelliği olan  $k^2$  değeri ile deviatorik gerilme tansörü olan  $S$ 'nin ikinci invaryantı olan  $J_2'$  birbirine eşit olduğu zaman ortaya çıkar.

$$\begin{aligned} J_2' - \kappa^2 &= 0 && \text{akma veya plastik deformasyon için} \\ J_2' < \kappa^2 &&& \text{elastik deformasyon için} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Gerilme bileşenlerinin terimleri cinsinden akma kriteri aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{1}{6} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 = \kappa^2 \quad (1.87)$$

veya

$$\frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \kappa^2 \quad (1.88)$$

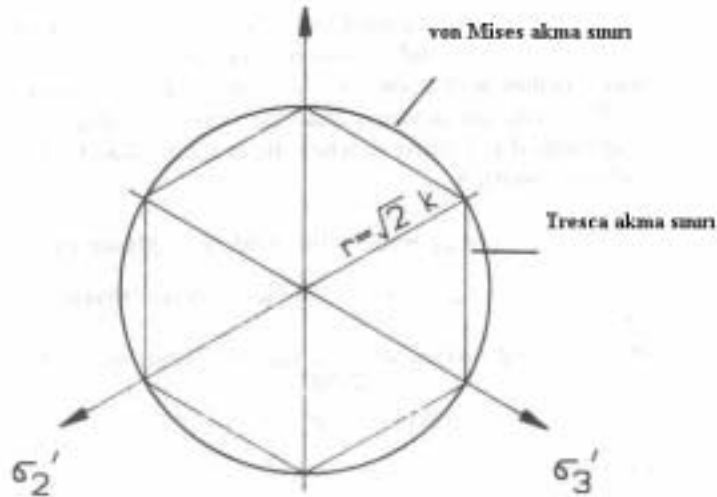
Şu gayet açıktır ki, von Mises akma yüzeyi, hidrostatik gerinme eksenine paralel bir silindirik yüzeydir.  $\pi$  uzayı üzerindeki parçası (1.86) eşitliğine göre bir çemberdir ve  $J_1$  veya  $\theta$  değerine bağımlılığı yoktur. Eşitlik (1.68)'den çemberin yarıçapının  $r = \sqrt{2}\kappa$  olduğunu bulabiliriz (şekil 1.9.).

Uzay gerinmesinden dolayı ( $\sigma_3 = 0$ ) eşitlik (1.88) şu hale indirgenebilir:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = 3\kappa^2 \quad (1.89)$$

Bu denklem  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  uzayında şekil 10.'da gösterildiği üzere bir elipsi tarif etmektedir. Sabit  $\kappa$  değerini tanımlamak için basit bir çekme testi yapılmalıdır:

$$\sigma_1 = \sigma_y \quad \text{ve} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (1.90)$$



Şekil 1.9.  $\pi$ -uzayında von – Mises ve Tresca akma sınırları

Burada  $\sigma_y$  basit çekmedeki akma gerinmesidir. Eşitlik (1.90)'ı (1.88)'de yazarsak,

$$\frac{1}{3}\sigma_Y^2 = \kappa^2 \quad (1.91)$$

bu sebepten,

$$\kappa = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (1.92)$$

Eğer  $\kappa$ 'yı saf kayma testi  $\tau_Y$ 'deki akma gerinmesini kullanarak tanımlarsak  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_Y$  ve  $\sigma_2 = 0$  bağıntılarına ulaşırız. Daha sonra eşitlik (1.88) ile:

$$\tau_Y^2 = \kappa^2 \quad (1.93)$$

ve bundan dolayı,

$$\kappa = \tau_Y \quad (1.94)$$

Eşitlik (1.94) ve (1.92)'yi karşılaştırarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\kappa = \tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \quad (1.95)$$

Bir Maxwell-Huber-von Mises malzemesi için tekeksenli çekmedeki akma dayanımı, saf kaymadaki akma dayanımının  $\sqrt{3}$  katı kadar olacaktır.

### 1.11.2. Tresca Kriteri

Tresca(1864) metal ekstrüzyon üzerindeki kendi deneyleri ve Coulomb'un katı mekaniğindeki bulgularını kullanarak Tresca akma kriteri olarak bilinen, metalik katıların akma kriterini tanımlamıştır.

Bu kriterin kanıtladığı, plastik akmanın, maksimum kayma geriliminin malzemenin kritik değeri olan  $\kappa$ 'ya yetişmesi ile ortaya çıkması gerektiğidir. Matematiksel olarak bu şu şekilde yazılabilir:

$$\tau_{\max} = \kappa \quad \text{akma veya plastik deformasyon için} \quad (1.96)$$

$$\tau_{\max} < \kappa \quad \text{elastik deformasyon için} \quad (1.97)$$

Ana gerinmeler cinsinden eşitlik (1.96) şöyle yazılabilir.

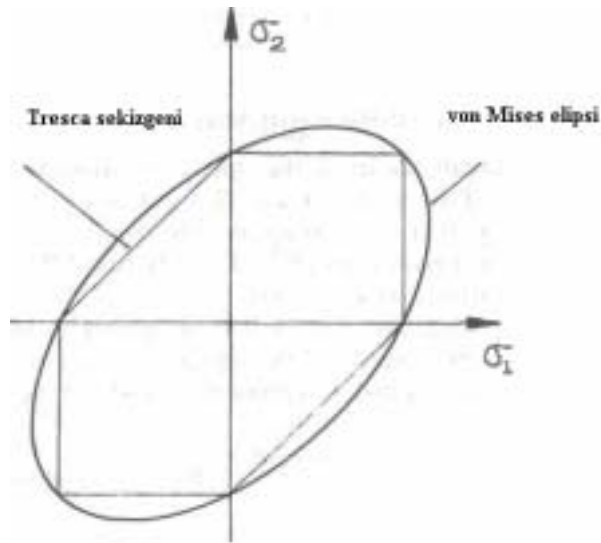
$$\max\left[\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right] = \kappa \quad (1.98)$$

veya

$$\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = \kappa \quad (1.99)$$

Eşitlik (1.78) kullanılarak yukarıdaki eşitliği  $\sqrt{J_2'}$  ve  $\theta$  cinsinden de yazabiliriz.

$$\sqrt{J_2'} \sin(\theta + 60^\circ) = \kappa \quad (0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ) \quad (1.100)$$



Şekil 1.10. Uzun gerinme durumu için von Mises ve Tresca kriterleri

Eşitlik (1.100)'den de görüldüğü gibi Tresca akma yüzeyi  $\theta$  'ya bağımlı olup  $J_1$ 'e bağımlı değildir. kolayca görülüyor ki, ana gerinme uzayında Tresca akma yüzeyi  $J_1$  eksenine paralel hexagonal bir silindiridir.  $\pi$  uzayına izdüşümü ise düzgün bir hexagondur. (şekil 1.9.)

Uzay gerinmesi durumunda ( $\sigma_3 = 0$ ) eşitlik (1.98) şu hale gelir:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \pm 2\kappa \\ \sigma_1 &= \pm 2\kappa \\ \sigma_2 &= \pm 2\kappa\end{aligned}\tag{1.101}$$

Bu, şekil 1.10'da gösterilen  $\sigma_1$ - $\sigma_2$  uzayındaki Tresca hexagonunu temsil eder.

Malzeme sabitleri tek eksenli test ele alınarak tanımlanabilir. Bu duruma eşitlik (1.99) uygulanırsa:

$$\kappa = \frac{\sigma_Y}{2}\tag{1.102}$$

Alternatif olarak saf kayma testini kullanarak malzeme sabitesi  $\kappa$ 'yı tanımlayabiliriz.

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_Y, \sigma_2 = 0\tag{1.103}$$

buradan,

$$\kappa = \tau_Y\tag{1.104}$$

elde edilir. Eşitlik (1.102) ve (1.103)'den ise şu sonuca ulaşırız:

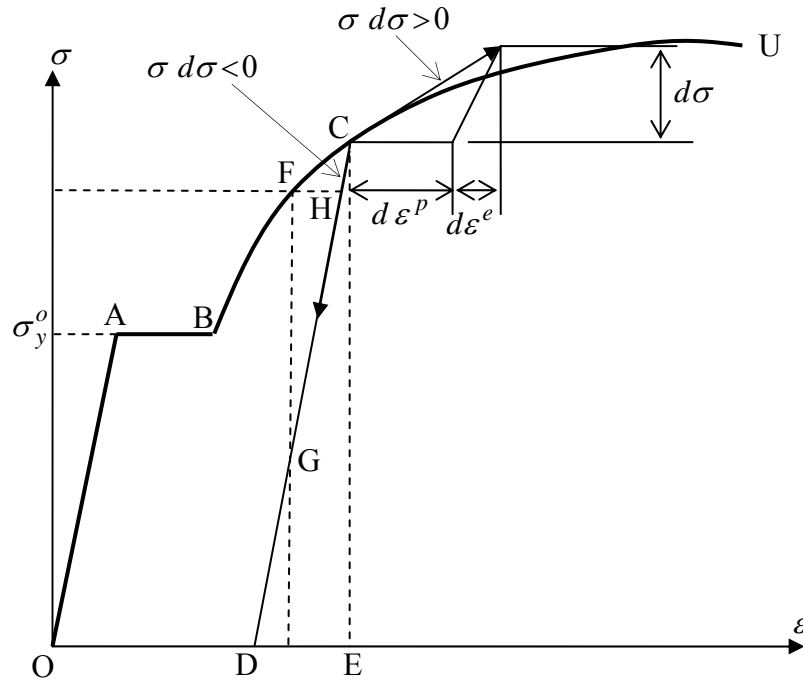
$$\kappa = \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \quad (1.105)$$

Bu sebepten Tresca malzemeleri için kayma dayanımı tek eksenli çekme kuvvetinin yarısı kadar olacaktır diyebiliriz.



### 1.12. Plastisite Teorisinin Temel Şartları

Daha önceki bölümlerde bazı basit ve temel deneysel gözlemler yardımıyla plastik deformasyonun temel karakteristikleri verildi. Bu deneylerden elde edilen sonuçlara göre plastik deformasyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:



Şekil 1.11. Tek eksenli gerilme-gerinme eğrisi

1. Plastik deformasyon enerji kaybı ile ilgilidir bu yüzden de tersinmezdir. Bu durum yukarıda verilen tek eksenli çekme deneyine ait gerilme-gerinme diyagramından görülmektedir. Yük  $C$  noktasında kaldırılırsa, gerinmenin yalnızca bir kısmı ( $DE$ ) geri dönebilir oysa ki diğer kısım ( $OD$ ) yük kaldırıldıktan sonra da olduğu gibi kalır, yani geri dönmez.  $DCE$  üçgeni ile temsil edilen enerji elastik enerji olarak geri kazanılmıştır,  $OABCD$  alanı ise  $OD$  plastik gerinmesini oluşturan proses esnasında kaybolan enerjiyi temsil eder. Bu yüzden de plastik gerinme, boşaltmadan sonraki kalıcı gerinmeyi ifade eder. Plastik bölgede bulunan herhangi bir  $C$  noktasındaki toplam gerinme  $OE$  yi; plastik gerinme  $OD$  ve elastik gerinme  $DE'$  nin toplamı olarak ifade edebileceğimizi şekilden kolayca görmek mümkündür.

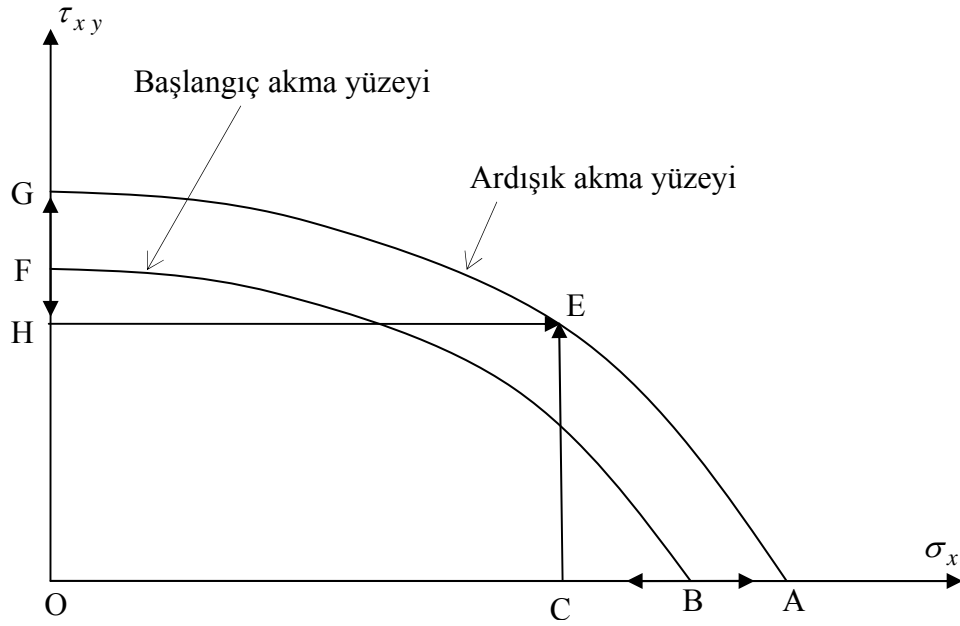
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.106)$$

Bu toplanabilme durumu üç boyutlu uzaya kolayca genelleştirilebilir,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (1.107)$$

Burada  $\varepsilon_{ij}$  sonsuz küçük gerinme tansörüdür, bu ayrıştırma işlemi yalnızca sonsuz küçük gerinme durumları için doğrudur. Sonlu gerinme durumlarında elastik ve plastik gerinme ölçüleri arasında geometrik olarak elasto-plastik bir kapling oluşmakta ve (1.107) denklemi bilinen klasik fiziksel anlamını yitirmektedir.

**2.** Plastik deformasyon sahip olduğu disipasyon özelliğinden dolayı yükleme tarihine veya yörüngeye bağımlı bir prosestir. Bir başka deyişle, plastik deformasyon esnasında gerilme ile gerinme arasında bire-bir lik bir karşılık veya eşleşme olmayacaktır. Örneğin şekil 1.11. de,  $F$  ve  $H$  noktaları aynı gerilme seviyelerinde olmalarına rağmen farklı gerinme değerlerine sahiptirler. Diğer taraftan  $F$  ve  $G$  noktalarındaki gerinmeler aynı değerlere sahip olmalarına rağmen bu noktalardaki gerilme değerleri oldukça farklıdır. Bu farklılıkların farklı deformasyon tarihlerinden veya  $F$  ve  $H$  ile  $F$  ve  $G$  noktaları arasındaki gerilme yörüngelerinden kaynaklandığı bilinmektedir.



Şekil 1.12. Plastik deformasyonun geçmiş yükleme tarihine olan bağımlılığı

Plastik deformasyonun geçmişe veya yörüngeye olan bağımlılığını daha iyi bir şekilde açıklamak için aşağıda verilen örneği göz önüne alıyoruz: bir deney numunesinin  $x$ - yönünde tek eksenli olarak yüklendiğini düşünüyoruz. Şekilde gösterilen başlangıç akma yüzeyi üzerindeki  $B$  noktasına kadar malzeme elastik olarak deforme olacaktır. Eğer gerilme  $A$  noktasına kadar arttırılırsa malzeme elastoplastik olarak deforme olacak ve malzemelerin sertleşme davranışından dolayı akma yüzeyi bir sonraki akma yüzeyine kadar genişleyecektir. Burada, basitliği sağlamak amacıyla, yalnızca izotropik sertleşmenin olduğu kabul edilmiştir. Gerilme tek eksenli olduğundan,  $A$  noktasında aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon^P \quad (1.108)$$

Burada  $\varepsilon^P$ ,  $A$  noktasında  $x$  eksenini boyunca gerçekleşen plastik gerinmeyi ifade etmektedir. Plastik deformasyonun sıkıştırılmazlık kabulünden dolayı

$$\varepsilon_{yy}^p = \varepsilon_{zz}^p = -\frac{1}{2}\varepsilon^p \quad (1.109)$$

$$\gamma_{xy}^p = \gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0 \quad (1.110)$$

İfadeleri yazılabilir, burada  $\gamma_{ij}$  sonsuz küçük gerinme tansörü  $\varepsilon$  nun kayma bileşeninin iki katını temsil etmektedir.

Şimdi,  $A$  noktasından  $C$  noktasına kadar boşaltma yaptıktan sonra, aksenal kuvveti sabit tutarak,  $E$  noktasına kadar kayma gerilmesi  $\tau_{xy}$  uygulanırsa bir sonraki akma yüzeyine ulaşmış oluruz. Böylece, daha fazla bir plastik deformasyon oluşmadan  $A$ - $C$ - $E$  yörüngesini takip ederek numunenin gerilme durumunu  $A$  dan  $E$  ye değiştirmiş oluruz.  $E$  noktasındaki plastik gerilmeler bu durumda, (1.108), (1.109) ve (1.110) denklemleri ile temsil edilebilir.

Şimdi de başka bir yükleme tarihini göz önüne alalım. Numunenin  $\tau_{xy}$  kayma gerilmesinin etkisi altında pür kayma ile yüklendiğini düşünelim. Elastik deformasyon  $F$  noktasındaki ilk kayma durumuna kadar devam eder. Bu durumda plastik deformasyon artan  $\tau_{xy}$  ile sonuçlanacaktır. Aynı zamanda akma yüzeyi de genişleyecektir. Kayma gerilmesi  $\tau_{xy}$  nin ardışık akma yüzeyi üzerindeki  $G$  noktasına kadar arttığını kabul edelim, bu yüzey aynı zamanda bir önceki yükleme tarihinden dolayı  $A$  ve  $E$  noktalarını da içermektedir.  $G$  noktasındaki plastik kayma gerinmesini  $\gamma^p$  ile gösterelim, bu durumda  $G$  noktasındaki plastik kayma gerilmeleri aşağıdaki ifadelerle verilir:

$$\gamma_{xy}^p = \gamma^p \quad (1.111)$$

$$\gamma_{yz}^p = \gamma_{zx}^p = 0 \quad (1.112)$$

$$\varepsilon_{xx}^p = \varepsilon_{yy}^p = \varepsilon_{zz}^p = 0 \quad (1.113)$$

Numune üzerindeki yük  $G$  noktasından  $H$  noktasına kadar boşaltılmış olsun, ve bu noktadan itibaren aksenal yük uygulanırken  $\tau_{x,y}$  kayma gerilmesinin sabit tutulduğunu düşünürüz. Numunenin gerilme durumunu ardışık akma yüzeyi üzerindeki  $E$  noktasına getirinceye kadar aksenal yükün uygulandığını düşünürüz.  $G-H-E$  yörüngesi mevcut akma yüzeyi  $AEG$  nin içinde olduğundan, malzeme elastik olarak deforme olacak ve  $G-H-E$  gerilme yörüngesi boyunca ilave plastik deformasyon oluşmayacaktır.  $E$  noktasındaki plastik gerilmeler aynı zamanda (1.111), (1.112) ve (1.113) denklemleri ile ifade edilmiş olur. Açıkça,  $O-G-H-E$  gerilme yörüngesinin sonuçları olan ve (1.111)-(1.113) denklemleri ile temsil edilen plastik gerilmeler (1.108)-(1.110) denklemleri ile verilenlerden tamamen farklıdır. (1.108)-(1.110) denklemleri ile verilen plastik gerilmeler daha öncede belirtildiği gibi  $O-A-C-E$  gerilme yörüngesi boyunca elde edilmiş değerlerdir. Bu örnek açıkça göstermektedir ki plastik deformasyon geçmişe veya yörüngeye bağımlı bir prosestir. Deformasyonun en son gerçek durumunu elde etmek için deformasyon yörüngesi veya deformasyon tarihi izlenmelidir. Genellikle uzayda bir eğriyi matematiksel olarak belirlemek için; bu eğrinin diferansiyel denklemi ile birlikte başlama ve bitiş noktalarının verilmesi gerekir. Böylece, plastik deformasyonun yörüngeye bağımlı doğası plastik deformasyon için bünye denklemlerinin bir diferansiyel denklem formunda veya artımsal formda verilmesini gerektirir. Deformasyon geçmişi boyunca artımsal plastik gerilmeler hesaplanmak zorundadır ve toplam plastik gerilmeleri hesaplamak için bunları toplamak gerekir. Bu yüzden pek çok plastisite teorisi normal olarak elastik deformasyonların tersine hıza bağımlı veya artımsal tipte ifade edilir. Bu durumda bünye denklemleri en son gerilme ve gerilme durumları arasında bire-bir bir eşleşme sağlayabilir.

**3.** Bu çalışmada, plastik deformasyonun hızdan bağımsız olduğu kabul edilmiştir. Bunun anlamı; plastik deformasyona ait bünye denklemlerinin zamana göre homojen olduğu (zaman ölçeğine göre invaryant olduğu) kabul edilmiş, hıza bağımlı formlarla artımsal formların bir birine eşit olduğu varsayılmıştır. Böylece, plastik deformasyon esnasındaki viskoz etkiler ve viskoz direnç ihmal edilmiştir. Bu durumda gerilme elastik gerilmeyle lineer olarak ilişkili olup aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\sigma = E \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (1.114)$$

Sonsuz küçük gerilme ve lineer elastik davranış göz önüne alınarak, bu denklem üç boyutlu uzayda aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{veya} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (1.115)$$

Burada  $C$  dördüncü dereceden elastik katılık tansörünü ifade etmektedir.

Bu tartışmanın en önemli noktası plastik deformasyonların non-lineer, zamana göre homojen diferansiyel veya hıza bağımlı formda bünye denklemleri ile temsil edilebildiklerini ifade etmektir. Plastik deformasyon için bir bünye teorisi aşağıda verilen özellikleri kapsmalıdır:

**1.** Başlangıç akma noktası  $\sigma_Y^0$  bilinmek zorundadır, çünkü bu değerden daha küçük gerilme değerleri için deformasyon lineer olup  $\sigma$  ve  $\varepsilon$  arasında bire-bir karşılık söz konusudur.  $\sigma_Y^0$  den daha büyük gerilme değerleri için deformasyon nonlineerdir ve deformasyonun tarihine bağımlıdır. Üç boyutlu duruma geliştirildiği zaman; başlangıç akma yüzeyi bilinmelidir ve bu yüzey aşağıdaki formda yazılabilir:

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_Y^0) = 0 \quad (1.116)$$

burada  $\sigma_Y^0$  ilk gerilmesini temsil eder.

**2.** Ardışık akma yüzeylerinin büyümesi bilinmelidir. Genellikle, mükemmel plastik malzemeler hariç tutulduğunda (mükemmel plastik malzemelerde bu değer sabittir) veya yumuşak çeliğin plastik akışına ait küçük bir bölgenin ( bu bölge şekil 1.11 de  $AB$  bölgesidir) dışında akma mukavemeti sabit bir değer değildir. Böylece ardışık akma dayanımı (yani  $BU$  eğrisinin tamamı) bilinme zorundadır. Genellikle,

$$\sigma_Y = \sigma_Y(\alpha_i) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.117)$$

Olup, burada  $\alpha_i$  ( $i=1,2,3,\dots,n$ ) eşdeğer plastik gerinme ve iç değişkenler gibi ihtimal dahilindeki bütün sertleşme parametrelerini göstermektedir. Şüphesiz ki bir boyutlu durumda  $BU$  eğrisini belirlemek için birden fazla sertleşme parametresinin belirlenmesine gerek yoktur. Daha önce ifade edilen (1.18)-(1.23) denklemleri (1.117) denkleminin özel formlarıdır. Örneğin, (1.18) denkleminde yalnızca bir sertleşme parametresi  $\alpha = \varepsilon^p$  monotonik olarak gerçekleştirilen tek eksenli yükleme durumu için kullanılmaktadır. Toplam  $\varepsilon^p$  nin geçmişe bağlı tabiatına göre, aşağıdaki gibi hesaplanması gerekir:

$$\varepsilon^p = \int d\varepsilon^p = \int \dot{\varepsilon} dt \quad (1.118)$$

Şekil 5.1 den faydalanarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$d\alpha = d\varepsilon^p = d\varepsilon - d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E^t} - \frac{d\sigma}{E} = \left( \frac{1}{E^t} - \frac{1}{E} \right) d\sigma \quad (1.119)$$

Bu ifadenin eşdeğerini türev veya değişim formunda,

$$\dot{\alpha} = \left( \frac{1}{E^t} - \frac{1}{E} \right) \dot{\sigma} \quad (1.120)$$

şeklinde de ifade edebiliriz. Burada,  $E$  bildiğimiz Young modülü,  $E^t$  ise verilen gerilme seviyesindeki tanjant modülü veya teğetsel katılık olarak adlandırılmaktadır. Şekil 1.11 den faydalanarak, boşaltma ve tekrar yükleme durumlarında OA ve DC doğrularının aynı eğime sahip olduklarını göz önüne alarak ( $E = d\sigma / d\varepsilon^e$  olduğunu düşünerek) ;

$$d\sigma = E d\varepsilon^e = E^t d\varepsilon = E^t (d\varepsilon^e + d\varepsilon^p) = H d\varepsilon^p$$

yazabiliriz. Burada  $H$  sertleşme parametresi olarak bilinir. Yukarıdaki eşitlikleri dikkate alarak  $d\varepsilon^e = d\sigma/E$  ve  $d\varepsilon^p = d\sigma/H$  yazılabileceği görülür, bu durumda;

$$d\sigma = E^t \left( \underbrace{d\varepsilon^e}_{\equiv \frac{d\sigma}{E}} + \underbrace{d\varepsilon^p}_{\equiv \frac{d\sigma}{H}} \right) \Rightarrow 1 = \frac{E^t}{E} + \frac{E^t}{H} \Rightarrow \frac{1}{E^t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{E^t} - \frac{1}{E}$$

ve buradan da sertleşme modülünü elastisite modülü ve tanjant modülü cinsinden aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$H = \frac{E E^t}{E - E^t} = \frac{E^t}{1 - \frac{E^t}{E}}$$

Aşağıdaki tabloda ANSYS programının malzeme kütüphanesinde bulunan bazı mühendislik malzemeleri için deneylerden elde edilen sabit değerler ve yukarıdaki formüle göre hesaplanmış sertleşme parametresinin değeri görülmektedir.

Tablo 1.1. Bazı mühendislik malzemeleri için mukavemet değerleri

	Elastisite modülü (Pa)	Akma gerilmesi (Pa)	Tanjant modülü (Pa)	Sertleşme parametresi (Pa)
Nikel alaşımlar	180 E9	900 E6	445 E6	4.4610 E8
Titanyum alaşım	100 E9	70 E6	112 E6	1.1213 E8
1018 çelik	200 E9	310 E6	763 E6	7.6592 E8
Aluminyum 5182	76 E9	145 E6	25 E6	2.5008 E7



Lineer sertleşme durumunda  $E^t$  sabittir ancak, şekil 1.11 de gösterilen genel bir nonlineer durum için  $E^t$  gerilmenin ve plastik gerilme  $\varepsilon^p$  nin bir fonksiyonu olarak göz önüne alınmalıdır:

$$E^t = E^t(\sigma, \varepsilon^p) \quad (1.121)$$

Bu durumda, (1.120) in genel formu,

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(\sigma, \dot{\sigma}, \alpha) \quad (1.122)$$

şeklini alır. Yalnızca tek eksenli yükleme durumunda  $\alpha = \varepsilon^p$  yazılabileceğini hatırlamak gerekir. Yukarıda da belirtildiği gibi  $\dot{\alpha} \dot{\sigma}$  'nin hızdan bağımsız davranışı tanımlamak için lineer, homojen fonksiyonu olması gerekir. Bu yüzden (1.122) numaralı denklem,

$$\dot{\alpha} = \alpha_1(\sigma, \alpha) \dot{\sigma}$$

şeklinde tekrar yazılabilir veya eşdeğeri,

$$d\alpha = \alpha_1(\sigma, \alpha) d\sigma \quad (1.123)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\alpha_1$ ,  $\sigma$  ve  $\alpha$  'nın lineer olmayan fonksiyonudur ve deneysel gözlemleri temsil ederler.

(5.18) denklemi üç boyutlu durum için aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$\dot{\alpha}_i = \phi_i(\sigma, \alpha_i) : \dot{\sigma}$$

Aynı eşitlik eşdeğer şekilde,

$$d\alpha_i = \phi_i(\sigma, \alpha^p) : d\sigma \quad (1.124)$$

Şeklinde de ifade edilebilir ki burada  $\phi_i=1,2,3,\dots,n$ ,  $\sigma$ 'nın ve  $\alpha_i$ 'nin ikinci-, üçüncü- veya dördüncü-derece tansör değerli fonksiyonlarıdır. Bu değerler aynı zamanda  $\alpha_i$ 'nin skaler, vektör veya ikinci derece tansör değerli sertleşme parametrelerine bağlıdır. Eşitlik (1.124)  $\alpha_i$  sertleşme parametreleri için bünye denklemdir. Bu sertleşme parametrelerinin mevcut değerleri (1.124) denkleminde gerilme yörüngeleri veya deformasyon tarihi yardımıyla bir kere belirlenirse, mevcut veya ardışık akma yüzeyini elde etmek için akma yüzeyinin ifadesi içerisine yerleştirilebilirler.

$$F(\sigma, \alpha_i) = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.125)$$

Burada akma yüzeyinin genel formu kullanılmıştır.

Burada dikkat edilmesi gereken nokta  $\alpha_i$ 'lerin ( $i=1,2,\dots,n$ ) gerilme uzayında bulunan akma yüzeyinin genişlemesini, ötelemesini ve çarpılmasını temsil eden , sklaer, vektörel veya tansörel herhangi bir parametre olabilir. Hatırlanmalıdır ki akma yüzeyi sadece plastik deformasyon ortaya çıktığında değişiklik gösterir. Bu da (1.123) ve (1.124) denklemlerinin yalnızca elasto-plastik yükleme prosesi esnasında geçerli olduğunu gösterir. Elastik deformasyon veya boşaltma esnasında (plastik deformasyon oluşmayacaktır) ve akma yüzeyi değişmeden kalacaktır. Bu prosesleri temsil eden ifade için

$$\dot{\alpha}_i = 0 \quad (1.126)$$

yazılır.

3. Plastik deformasyon için bünye denklemlerinin formüle edilmesi gerekir. Bu proses plastisite teorisinde merkezi bir rol oynar. Daha önce de bahsedildiği gibi bu denklemler yörüngeye bağımlı ve hızdan bağımsız olduklarından oran veya artımsal formda olmak zorundadır. (1.119) denklemi ile verilen bir boyutlu durum için plastik gerinme hızı kolayca aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{\varepsilon}^p = \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) \dot{\sigma} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon^p = \left( \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) d\sigma \quad (1.127)$$

Eşitlik (1.123) ve (1.120) kullanılarak  $\dot{\varepsilon}^p$  değerinin tek boyutlu durum için genel formunu elde edebiliriz.

$$\dot{\varepsilon}^p = \alpha^p(\sigma, \alpha) \dot{\sigma} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon^p = \alpha^p(\sigma, \alpha) d\sigma \quad (1.128)$$

Bu eşitlikte  $\alpha^p$ ,  $\sigma$  ve  $\varepsilon^p$ 'nin lineer olmayan fonksiyonudur. Üç boyutlu durum için eşitlik şu genel forma dönüşür:

$$\dot{\varepsilon}^p = \alpha^p(\sigma, \alpha_i) : \dot{\sigma} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon^p = \alpha^p(\sigma, \alpha_i) : d\sigma \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.129)$$

Burada  $\alpha^p$ ,  $\sigma$  ve  $\alpha_i$  değerlerinin dördüncü derece tansör değerli fonksiyonudur ve  $\dot{\sigma}$  ve  $d\sigma$  ise sırasıyla gerinme tansörünün hızı ve artımı olacaktır.

Elastik gerinme hızı veya artışı lineer kurala göre aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{\varepsilon}^e = C^{-1} : \dot{\sigma} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon^e = C^{-1} : d\sigma \quad (1.130)$$

Bu denklem C değerini deformasyon süresinde sabit bir tansör kabul ederek eşitlik (1.124)'un diferansiyeli alınarak elde edilmiştir.  $C^{-1}$ , C değerinin tersidir ve elastik uygunluk tansörüne karşılık gelir. Toplam gerinme hızı (1.129) ve (1.130) denklemleri birleştirilerek aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\dot{\varepsilon} = (\alpha^p + C^{-1}) : \dot{\sigma} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon = (\alpha^p + C^{-1}) : d\sigma \quad (1.131)$$

Bu bağıntının tersi alınarak şu eşitlik elde edilir.

$$\dot{\sigma} = [\alpha^p + C^{-1}]^{-1} : \dot{\varepsilon} \quad \text{veya} \quad d\sigma = [\alpha^p + C^{-1}]^{-1} : d\varepsilon \quad (1.132)$$

(1.128) ve (1.129) denklemlerinin ilave plastik deformasyonların oluştuğu elasto-plastik deformasyon prosesleri için geçerli olduğunu vurgulamakta fayda vardır. Aksi takdirde yalnızca elastik deformasyon ortaya çıkacak ve gerilme-gerinme bağıntısı aşağıda verilen elastik deformasyon yasası ile yönetilmiş olacaktır.

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}^e = C : \dot{\varepsilon} \quad \text{veya} \quad d\sigma = C : d\varepsilon \quad (1.133)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (1.134)$$

Bir boyutlu durumda, bu olay,  $OA$  veya  $DC$  doğruları boyunca gerçekleşen deformasyona karşılık gelir.

**4.** Yükleme-boşaltma kriteri belirlenmelidir. daha önce bahsedildiği gibi  $\alpha_i$  ve  $\varepsilon^p$  için bünye denklemleri plastik yükleme ve elastik yükleme veya boşaltma için farklıdır. Aslında bu durum nonlinear elastisite teorisi ve plastisite teorisi arasındaki asıl farktır. Böylece plastisite teorisi ile elasto plastik davranışı tanımlamak için plastik yükleme veya elastik boşaltmaya ait olan prosesini tanımlamak gerekir. Yükleme veya boşaltma için kriter teorisinin bir parçası olmak zorundadır. Yükleme ve boşaltma plastik bir durumdan başlayan bir deformasyon prosesini temsil eder ve plastik olarak gerçekleşen deforasyona kadar devam eder sonra da, elastik bölgeye geri döner. Bir önceki plastik durum daima dikkate alınmış olur. Şekil 1.11'de gösterildiği gibi tek eksenli yükleme altında malzeme sertleşir, şöyle ki,  $BU$  eğrisi üzerindeki bir gerilme noktası, örneğin  $C$  noktası, aşağıda verilen akma şartını sağlar.

$$\sigma_c - \sigma_Y(\varepsilon^p) = 0 \quad (1.135)$$

Burada  $\sigma_c$   $C$  noktasındaki gerilmeyi ifade eder. Aşağıda verilen eşitsizlikler yükleme ve boşaltma kriterlerini temsil eder.

$$\sigma d\sigma \geq 0 \quad \text{yükleme için} \quad (1.136)$$

$$\sigma d\sigma < 0 \quad \text{boşaltma için} \quad (1.137)$$

Şekil 1.11'de tek eksenli çekme durumu için yükleme veya boşaltmayı temsil etmek üzere ya  $d\sigma > 0$  veya  $d\sigma < 0$  alınması yeterlidir. Eğer sıkıştırma işlemindeki geri yükleme durumunda  $\sigma < 0$  seçiliyorsa yükleme ve boşaltma için  $\sigma d\sigma$  bir indis gibi kullanılacaktır. (1.137) denklemindeki eşittir işareti mükemmel plastik deformasyonlar için geçerlidir. Bu bölge şekil 1.11'de  $AB$  olarak gösterilmiştir. üç boyutlu durumda yükleme ve boşaltma kriteri mükemmel plastik malzemeler için ve sertleşen malzemeler için daha önce ifade edilmiştir. Yükleme veya boşaltmayı yöneten indis aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$l = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma \quad (1.138)$$

Sertleşen malzemeler için  $l > 0$  yükleme anlamına gelir,  $l < 0$  boşaltmayı temsil eder ve  $l = 0$  ise nötr bir yüklemeyi gösterir. Bir plastisite teorisi oluşturmak için plastik deformasyonun dört temel elemanı yukarıda ifade edilmiştir.

Plastik deformasyon prosesini  $\dot{\alpha}_i$  ve  $\dot{\epsilon}^p$  parametrelerinin farklı durumlarını gözönüne alarak aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$\dot{\alpha}_i = \begin{cases} 0 & F < 0 & (1.139)a \\ 0 & F = 0, l < 0 & (1.139)b \\ 0 & F = 0, l = 0 & (1.139)c \\ \phi_i : \dot{\sigma} & F = 0, l > 0 & (1.139)d \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} 0 & F < 0 & (1.140)a \\ 0 & F = 0, l < 0 & (1.140)b \\ 0 & F = 0, l = 0 & (1.140)c \\ \alpha^p : \dot{\sigma} & F = 0, l > 0 & (1.140)d \end{cases}$$

Bu denklemler sırasıyla elastik deformasyon, elastik boşaltma, nötr yükleme ve plastik yüklemenin dört durumunu temsil eder. Nötr yükleme esnasında  $\dot{\alpha}_i = 0$ ,  $\dot{\varepsilon}^p = 0$  olmasının nedeni gerilme durumunun boşaltmadan yüklemeye geçtiği zaman plastik deformasyonun süreklilik şartını sağlamak zorunda olmasıdır. Eğer  $d\sigma$  akma yüzeyinden dışarıya doğru yönelmişse plastik gerinme hızı  $\dot{\varepsilon}^p$  sıfırdan farklı, eğer  $d\sigma$  akma yüzeyinin içine doğru yönelmişse  $\dot{\varepsilon}^p$  sıfır olur. gerilme-gerinme bağıntılarında süreksizliklerden kaçınmak için akma yüzeyi üzerinde herhangi bir noktada  $d\sigma$  teğetsel bir yönde olduğu zaman  $\dot{\varepsilon}^p$  sıfır olmak zorundadır. Bu şart plastik sertleşme için süreklilik şartı olarak bilinir.  $l$ 'nin tanımını kullanarak (1.139d) ve (1.140d) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\alpha}_i = \hat{\phi}_i l \quad F = 0, l > 0 \quad (1.141)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \hat{\alpha}^p l \quad F = 0, l > 0 \quad (1.142)$$

Burada  $\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i(\sigma, \alpha_i)$  fonksiyonu  $\sigma$ 'nın ve  $\alpha_i$ 'nin skaler, vektörel veya tansörel değerli bir fonksiyonudur.  $\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i(\sigma, \alpha_i)$  fonksiyonunun skaler, vektörel veya tansörel karakteri  $\alpha_i$ 'nin durumuna bağlıdır.  $\hat{\alpha}^p$  ise  $\sigma$  ve  $\alpha_i$ 'nin ikinci dereceden tansör değerli bir fonksiyonudur. Yükleme durumunda bile mükemmel plastik malzemeler için  $l = 0$  olduğundan  $\dot{\varepsilon}^p$ 'nin bünye denklemi (1.142) ifadesi ile verilemeyebilir.

### 1.13. Elastik Deformasyon İçin Gerilme-Gerinme Bağlılıları

Elastik deformasyon için gerilme-gerinme bağıntıları burada kısaca gözden geçirilmiştir. Elastik deformasyonun en basit bünye modeli Hooke tarafından verilmiştir. Hooke tek eksenli yükleme için gerilme ve gerinme arasında lineer bir bağıntı önermiştir. Bu bağıntı izotropik malzemeler için kartezyen koordinat sisteminde genelleştirilmiş Hooke yasalarını ifade etmek için üç boyutlu duruma aşağıdaki gibi genişletilmiştir.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz}
 \end{aligned} \tag{1.143}$$

Bu eşitliklerde  $E$ ,  $\nu$  ve  $G$  sırasıyla Young modülü, Poisson oranı ve kayma modulüdür.  $G$ 'nin  $E$  ve  $\nu$  ile oran bağıntısı ise şu şekilde olacaktır.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{1.144}$$

(1.143) eşitlikleri tansörel formda yazılmak istenirse

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G} - \frac{\nu}{E} J_1 \delta_{ij} \tag{1.145}$$

Eşitliği ortaya çıkar ki, burada  $\delta_{ij}$  Kronecker delta,  $J_1$  de gerilme tansörü  $\sigma$ 'nın birinci invaryantıdır.

$$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \tag{1.146}$$

Eşitlik (1.145)'dan hacim değişiklikleri için elastik deformasyon ilişkisi aşağıdaki şekilde hesaplanacaktır.

$$\varepsilon_{ii} = \frac{J_1}{2G} - \frac{3\nu}{E} J_1 = J_1 \left( \frac{1+\nu}{E} - \frac{3\nu}{E} \right) = \frac{J_1}{3} \frac{3(1-2\nu)}{E} \quad (1.147)$$

Üstteki eşitlikler kullanılarak,

$$p = \frac{J_1}{3}, \quad I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{kk} \quad (1.148)$$

bulunacaktır ki burada  $p$  ortalama gerilme veya hidrostatik basınca,  $I_1$  ise hacimsel gerilme veya gerilme tansörü  $\sigma$ 'nın birinci invariantını temsil etmektedir. Bulk modülü  $K$  ise

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1.149)$$

Denklemleri ile verilmektedir. Eşitlikler (1.148) ve (1.149) kullanılarak eşitlik (1.147) yeniden düzenlenirse,

$$p = K \varepsilon_{kk} = 3K \varepsilon_m \quad (1.150)$$

Olacaktır. Burada  $\varepsilon_m = I_1/3$  ortalama gerilme olacaktır. Bu eşitlik hacimsel genişleme veya hacim değişikliği için elastik deformasyon yasasına karşılık gelecektir.

$\varepsilon_m \delta_{ij}$  ifadesini eşitlik (1.145)'in her iki tarafından çıkararak ve eşitlik (1.150)'ün sonucunu dikkate alırsak aşağıdaki eşitliğe ulaşırız.

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij} = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} p) \quad (1.151)$$



Eşitlik (1.123)'de verilen sapma gerinme tansörü  $S_{ij}$ 'nin tanımından ve

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - (\varepsilon_m)\delta_{ij} \quad (1.152)$$

Şeklinde ifade edilen sapma gerilme tansörünün benzer tanımlamasını birlikte kullanarak (1.151) eşitliğini

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} S_{ij} \quad (1.153)$$

Şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlik distorsiyon veya şekil değişikliğinin elastik deformasyon yasası olarak bilinir. Eşitlikler (1.150) ve (1.153)'den görülüyor ki, elastik bölgede, ortalama gerinme ve ortalama gerilme elastik sabit  $K$  ile ilişkilendirilmiştir ve Bulk modülü adını almıştır, benzer şekilde sapma gerinme ve gerilme birbirleriyle başka bir elastik sabit olan  $G$  ile ilişkilendirilmiş ve  $G$  de kayma modülü olarak isimlendirilmiştir.

Bazen eşitlik (1.145)'da verilen genel Hooke yasasını ters formda (gerinme  $\varepsilon_{ij}$  yerine gerilme  $\sigma_{ij}$  kullanarak) yazmak daha kullanışlı olacaktır. Eşitlik (1.145)'in ters formunu kolayca aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (1.154)$$

Yukarıdaki eşitlikte  $\lambda$  Lamé elastik sabitidir, ve bu sabiti  $E$  ve  $\nu$  cinsinden ifade etmemiz gerekirse,

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (1.155)$$

eşitliğini yazabiliriz. Aynı sabitin  $\nu$  ve  $K$  cinsinden ifadesi yazılırsa

$$\lambda = \frac{3\nu K}{1+\nu} \quad (1.156)$$

olacaktır. Eşdeğer veya efektif gerilme  $\sigma_e$  ve gerinme  $\varepsilon_e$  aşağıdaki eşitliklerle ifade edilebilirler.

$$\sigma_e = \sqrt{3J'_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{ij} S_{ij} \quad (1.157)$$

$$\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon'_{ij} \varepsilon'_{ij} \quad (1.158)$$

$x$  eksenini boyunca yapılan tek eksenli bir yükleme için, eğer  $\nu=1/2$  alınırsa yukarıdaki tanımdan  $\sigma_e = \sigma_x$  ve  $\varepsilon_e = \varepsilon_x$  yazılabilir. (1.153) denkleminde aşağıdaki ifadeyi kolayca türetebiliriz.

$$\sigma_e = 3G\varepsilon_e \quad (1.159)$$

Böylece (1.153) denklemi aşağıdaki gibi yazılabiliriz.

$$S_{ij} = \frac{2\sigma_e}{3\varepsilon_e} \varepsilon'_{ij} \quad (1.160)$$

Bu denklem plastisitenin deformasyon teorisine genelleştirilebilir ve kullanılabilir. Şimdi elastik deformasyon esnasında birim hacim başına dış kuvvetler tarafından yapılan işe eşit olan özgül elastik enerjiyi aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$\begin{aligned} W^e &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} + p\delta_{ij}) (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon_m \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} p \varepsilon_m + \frac{1}{2} S_{ij} \varepsilon'_{ij} = W_v^e + W_s^e \end{aligned} \quad (1.161)$$

Burada birinci terim  $W_v^e$  hacimsel gerinmenin özgül enerjisini, ikinci terim  $W_s^e$  çarpılma veya şekil değişikliğinin özgül enerjisini ifade eder. (1.157) - (1.159) denklemlerini kullanarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} W_s^e &= \frac{1}{2} S_{ij} \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot \frac{1}{2G} S_{ij} = \frac{1}{2GJ'_2} \\ &= \frac{1}{2} \sigma_e \varepsilon_e \end{aligned} \quad (1.162)$$

Sonuç olarak eğer mazleme anizotropik ise genelleştirilmiş Hooke yasası

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1.163)$$

Şeklinde yazılır. Burada

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \quad (1.164)$$

simetri özellikleri mevcuttur.  $C_{ijkl}$  dördüncü dereceden elastisite tansörü olup yirmibir adet bağımsız bileşene sahiptir. Ayrıca deformasyon esnasında  $C_{ijkl}$ 'nin sabit kalması gerekmez. Onlar plastik deformasyonun fonksiyonları olabilir. Örneğin, plastik deformasyon esnasında elastoplastik kuplaj (birleşik etki) gösteren malzemeler için elastisite modülleri plastik gerinmelerin fonksiyonlarıdır.

#### 1.14. Plastik Deformasyon İçin Hacim Değişimi Ve Poisson Oranı

Plastisite teorisinde malzemelerin şekil değişikliğini ifade eden sapma plastik gerinmesi için bünye denklemi genellikle ortalama plastik gerinmeden ayrı bir şekilde önerilmektedir. Ortalama plastik gerinme hacim değişiminin bir ölçüsüdür. Bunun nedeni yüklemeye karşı oluşan hacim ve şekil değişikliği davranışlarının birbirlerinden tamamen farklı olmasındandır. Bu yüzden onlar tamamen farklı bünye denklemleriyle tanımlanmak zorundadırlar. Daha önce de bahsedildiği gibi plastisite teorisini oluşturmak için yaptığımız temel kabul plastik deformasyonun sabit

hacimde gerçekleşmiş olmasıdır. Bu kabul Bridgman'ın çok yüksek hidrostatik basınç altında gerçekleştirdiği deneysel gözlemlerine dayanmaktadır. Hacim değişikliği tersinir olup yalnızca (1.150) denklemiyle verilen elastik hacim değişikliğinde dikkate alınabilir. Sonsuz küçük gerinme durumunda bu değişikliği aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$\varepsilon_{kk}^p = \varepsilon_{xx}^p + \varepsilon_{yy}^p + \varepsilon_{zz}^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = 0 \quad (1.165)$$

Böylece plastik gerinme tansörü yalnızca bir sapma gerinme tansörüdür.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon}'^p + \varepsilon_m^p \mathbf{I} = \boldsymbol{\varepsilon}'^p \quad (1.166)$$

Bu kabüle dayanarak, bir plastisite teorisi tesis etmek için yalnızca plastik sapma gerinme tansörü (yani plastik distorsiyon için bir kural) için bünye denklemine ihtiyaç vardır.

Bu hacim değişimi kuralının en önemli özelliği tek eksenli yükleme şartları altında transvers deformasyon hakkında bize bilgi sağlamasıdır. Diğer bir deyişle Poisson oranı hiçbir plastik hacim değişikliğinin olmadığını kabul ederek türetilebilir. Elastik olarak izotropik malzemeler için plastik deformasyon aralığında Poisson oranının belirlenmesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\nu^p = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \quad (1.167)$$

Burada tek eksenli yüklemenin x yönünde yapıldığı kabul edilmiştir. Üst indis  $p$  deformasyonun plastik bölgede gerçekleştiğini gösterir. Böylece

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} &= -\nu^p \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{zz} &= -\nu^p \varepsilon_{xx} \end{aligned} \quad (1.168)$$

2. Lineer sertleşen malzemeler için  $\sigma_{xx} = \sigma_Y^0 + E'(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_Y^0)$  olup burada  $\sigma_Y^0$  başlangıç akma gerilmesi ve  $\varepsilon_Y^0$  da buna karşılık gelen gerinmeyi ifade eder.  $E'$  ise lineer sertleşme bölgesinin eğimini gösterir. Bu durumda (1.171) denklemi

$$\nu^p = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \left( \frac{\sigma_Y^0 - E' \varepsilon_Y^0}{E \varepsilon_{xx}} + \frac{E'}{E} \right) \quad (1.172)$$

Şeklinde ifade edilir. Bu durumda  $\nu^p$ 'nin  $\varepsilon_{xx}$ 'e olan bağımlılığı hala hiperboliktir.  $\varepsilon_{xx}$  büyük olduğu zaman  $\nu^p$ 'nin asimptotik değerinin aşağıdaki gibi ifade edileceğini hatırlamak gerekir.

$$\nu^p = \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{E'}{E} \quad (1.173)$$

Bu ifade 1/2'den küçüktür. Mafafi pek çok malzeme için  $E' \ll E$  dir ve  $\nu^p$  ifadesi de 1/2'ye çok yakın değerdedir.

3. Eğer plastik gerinme ile kıyasladığımızda elastik gerinme çok küçük değerlerde ise elastik deformasyon tarafından oluşturulan hacim değişimi ihmal edilebilir ve (1.165) denklemi  $\varepsilon_{ii} = 0$  olacak şekilde azaltılmalıdır. Bu durumda (1.169) denkleminde sıkıştırılmaz malzemeler için Poisson oranı aşağıdaki gibi yazılır.

$$\nu^p = \frac{1}{2} \quad (1.174)$$

Bu üç durumda belirtildiği gibi  $\nu^p$  daima 1/2'den küçüktür ve bu değere alt sınırdan artarak yaklaşır. Yalnızca sıkıştırılmaz malzemeler için  $\nu^p = 1/2$  olur. ancak pek çok malzeme için gerinme sonlu bir değer alır ve sertleşme etkisi Young modülü ile kıyaslandığında ihmal edilebilir düzeydedir. Elastik gerinme daima toplam gerinmenin ihmal edilebilir bir kısmıdır ve böyle durumlar için  $\nu^p = 1/2$  iyi bir yaklaşım sağlar. Üstelik  $\nu^p = 1/2$  ifadesi elastoplastik deformasyon probleminin

çözümünü basitleştirir. Bu yüzden plastisite teorisinde yaygın bir kabul görür. Mamafî, gerilmede bir artma olmaksızın plastik deformasyonun arttığı bölgede veya büyük deformasyon durumunda ( $AB$  bölgesi) yukarıdaki yaklaşımın makul bir doğrulukta olduğu unutulmamalıdır. Eğer elastik gerilmenin şiddeti plastik gerilmeninkine karşılaştırılabilir ise  $\nu^p$ 'nin  $\nu \leq \nu^p \leq 1/2$  aralığında olması gerekir ve  $\nu^p$ , (1.150) denklemi ile ifade edildiği gibi hacim değişikliği sadece elastik olduğu zaman, (1.170) denkleminde hesaplanabilir. Bundan sonraki incelemelerde plastik sıkıştırılmazlık ve (1.150) denklemiyle verilen lineer elastik hacim değişikliği varsayılacaktır. Genellikle elastik hacim değişimi nonlineer bir bağıntıyla ifade ediliyorsa,

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(p) \quad (1.175)$$

fonksiyonu yazılabilir. Burada  $\varepsilon_m(p)$  hidrostatik veya hacimsel gerilmenin nonlineer bir fonksiyonudur. Bu durumda (1.171) denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\nu^p = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_m(\sigma_{xx}/3)}{\varepsilon_{xx}} \quad (1.176)$$

Burada  $x$  yönünde tek eksenli yüklemenin yapıldığını ve  $p = \sigma_{xx}/3$  olduğunu görüyoruz.

### 1.15. Levy-Mises Denklemleri

Plastik deformasyon için gerilme-gerinme bağıntısını formülize etmek için ilk teşebbüs Saint-Venant (1870) tarafından yapılmıştır. O, gerilme sertleşmesini sıfır olarak ve Tresca kriterini kullanarak düzlem plastik gerinme problemi üzerinde çalışmıştır. Başlangıçta gerinme artımının asal eksenlerinin, asal gerilme eksenleri ile çakıştığını önermiştir. Elastik gerinme  $\varepsilon^e$  ihmal edilmiş böylece plastik gerinme ( $\varepsilon^p$ )'nin toplam gerinmeye ( $\varepsilon$ ) eşit olduğu varsayılmıştır. Saint-Venant'ın

düşüncesinin üç boyutlu duruma genelleştirilmesi birbirinden bağımsız olarak Levy (1870) ve Mises (1913) tarafından yapılmıştır. Bu yüzden teori Levy-Mises plastisite teorisi olarak adlandırılmış ve aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

1. Elastik gerinme  $\epsilon^e$  o kadar küçüktür ki ihmal edilebilir.
2. Gerinme artımı  $d\epsilon$  veya buna eşdeğer olarak  $\dot{\epsilon}$  değişimi gerilme ile aynı eksene sahiptir.

(1.47) denkleminin gösterdiği gibi  $\sigma$  gerilmesinin asal eksenleri sapma gerilme  $\mathbf{S}$ 'nin asal eksenleri ile aynı olmaktadır. Bu yüzden  $\dot{\epsilon}$  veya  $d\epsilon$  büyüklükleri  $\mathbf{S}$  ile eş eksenli duruma gelmektedir. Bu durum aşağıda verilen Levy-Mises denkleminde de ifade edilmektedir.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \mathbf{S} \quad \text{veya} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} S_{ij} \quad (1.177)$$

Burada  $\dot{\lambda}$  bir orantı parametresidir ve daha sonra belirlenecektir. Bu denklem kartezyen koordinet sisteminde bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx}}{S_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{S_{yy}} = \frac{\dot{\epsilon}_{zz}}{S_{zz}} = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{S_{xy}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yz}}{S_{yz}} = \frac{\dot{\epsilon}_{zx}}{S_{zx}} = \dot{\lambda} \quad (1.178)$$

$\dot{\lambda}$  parametresi akma kriterinden belirlenmiştir. Başlangıçta Saint-Venant Tresca kriterini kullanmasına rağmen, Mises bu teori için von Mises kriterinin daha kullanışlı olduğunu ifade etmiştir. (1.45), (1.88) ve (1.91) denklemlerini hatırlayarak von Mises kriterini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_Y^2 \quad (1.179)$$

Burada  $\sigma_Y$  akma gerilmesi olup gerinme sertleşmesi etkisini ihmal ettiğimizde sabit bir değer olarak kabul edilebilir. Gerinme sertleşmesi etkisini de içerecek şekilde yapılan bir genelleştirme gelecek bölümde kısaca özetlenecektir.

yazarız.  $\varepsilon_{ii}^p = 0$  olduğundan hacimsel gerinme  $\varepsilon_{ii}^p$  yalnızca (1.150) denklemiyle ifade edilen bir elastik bileşene sahiptir. (1.150) ve (1.168) denklemlerini kullanarak

$$(1 - 2\nu^p)\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{3K} = \frac{1 - 2\nu}{E}\sigma_{xx} \quad (1.169)$$

ifadesini elde ederiz. Yukarıdaki denklemde  $\nu$  terimi  $\nu^p$  ile karıştırılmamalıdır.  $\nu$  terimi elastik bölgede Poisson oranını ifade eder ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. (pekçok durumlarda sabit bir değerdir)

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}^e}{\varepsilon_{xx}^e} = -\frac{\varepsilon_{zz}^e}{\varepsilon_{xx}^e} \quad (1.170)$$

Ancak (1.167) denklemiyle gösterildiği gibi  $\nu^p$  plastik deformasyon bölgesinde toplam gerinme cinsinden tanımlanmıştır ve genellikle gerinme ( $\varepsilon$ ) ile değişir.  $\nu^p$  değeri (1.169) denkleminde belirlenirse, bu durum oldukça açık bir hale gelir.

$$\nu^p = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right) \frac{\sigma_{xx}}{E\varepsilon_{xx}} \quad (1.171)$$

Görülüyor ki Hooke yasasına göre deformasyon elastik ise  $\nu^p = \nu$  olacaktır. Genellikle plastik Poisson oranı  $\nu^p = \nu^p(\varepsilon)$  gerinmenin bir fonksiyonudur ve deformasyon prosesi esnasında değişir. Aşağıda verilen üç özel durumu göz önüne alalım.

1. Mükemmel plastik malzemeler için  $\sigma_{xx} = \sigma_y = \text{sabit}$  olup  $\nu^p$ 'nin  $\varepsilon_{xx}$ 'e bağımlılığı hiperboliktir. (1.171) denklemine göre,  $\varepsilon_{xx}$  arttıkça  $\nu^p$  asimptotik olarak  $\frac{1}{2}$ 'ye yaklaşır.



(1.179) denkleminin karesini alarak aşağıdaki ifadeyi türetebiliriz.

$$\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda}^2 S_{ij}S_{ij} = \dot{\lambda}^2 \frac{2}{3} \sigma_Y^2 \quad (1.180)$$

böylece,

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{3\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}/2}{\sigma_Y}} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_Y} \quad (1.181)$$

yazarız. Burada  $\dot{\epsilon}_e$  eşdeğer veya efektif gerinme artımı olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)^2 + (\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon}_3)^2 + (\dot{\epsilon}_3 - \dot{\epsilon}_1)^2 \right]^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \right)^{1/2} \quad (1.182)$$

x yönünde yapılan tek eksenli yükleme için  $\dot{\epsilon}_e = \dot{\epsilon}_x$  olur. Çünkü elastik deformasyon ihmal edilmiş ve malzeme sıkıştırılmaz kabul edilmiştir. Bu yüzden  $\nu = 1/2$ ' dir . (1.181) denklemi ile elde edilen  $\dot{\lambda}$  ifadesi (1.177) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$\dot{\epsilon} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_Y} S \quad \text{veya} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_e}{\sigma_Y} S_{ij} \quad (1.183)$$

$\dot{\lambda}$  parametresi için alternatif bir form aşağıda türetilmiştir.

(1.179) denkleminin her iki tarafını  $S_{ij}$  ile çarpar ve (1.179) denklemi ile verilen von Mises akma kriterini kullanırsak,

$$S_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} S_{ij}S_{ij} = \frac{2}{3} \dot{\lambda} \sigma_Y^2 \quad (1.184)$$

elde edilecektir. Bundan sonra  $\dot{\lambda}$  belirlenebilir. O, (1.181) denkleminde farklı bir formda aşağıdaki gibi açığa çıkar.

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}{\sigma_Y^2} = \frac{3 \text{tr}(S \cdot \dot{\varepsilon})}{2\sigma_Y^2} \quad (1.185)$$

Bu ifadeyi (1.179) denkleminde yerine koyarsak aşağıdaki ifadeler ulaşırız.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{3 \text{tr}(S \cdot \dot{\varepsilon})}{2\sigma_Y^2} S \quad \text{veya} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3 S_{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}}{2\sigma_Y^2} S_{ij} \quad (1.186)$$

Eşitlikler (1.181) ve (1.185)'den görüyoruz ki  $\dot{\lambda}$  gerinme hızının birinci deceden homojen bir fonksiyonudur, (1.183) ve (1.186) bünye denklemleri zaman göre homojen olup artımsal formlara eşittirler. Bu yaklaşımlar altında aşağıda verilen ifadeler ulaşırız.

$$d\varepsilon = \frac{3d\varepsilon_e}{2\sigma_Y} S \quad \text{veya} \quad d\varepsilon_{ij} = \frac{3d\varepsilon_e}{2\sigma_Y} S_{ij} \quad (1.187)$$

$$d\varepsilon = \frac{3 \text{tr}(S \cdot d\varepsilon)}{2\sigma_Y^2} S \quad \text{veya} \quad d\varepsilon_{ij} = \frac{3 \text{tr}(S_{lm} \cdot d\varepsilon_{lm})}{2\sigma_Y^2} S_{ij} \quad (1.188)$$

burada  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  terimi  $d\varepsilon_{ij}$  ile yerdeğiştirirse (1.182) denklemini yardımıyla  $d\varepsilon_e$  ifade edilebilir.

Sonuç olarak (1.178) denkleminde faydalanarak aşağıdaki denklemin doğruluğu ispatlanabilir.

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\lambda} S_{kk} = 0 \quad (1.189)$$

Bu ifade sonsuz küçük deformasyonlar için daha önce verilen sıkıştırılmazlık şartı yerine kullanılabilir. Sonuçta (1.179) Levy-Mises denkleminin kullanımının mükemmel plastik malzemelerle sınırlandırılmadığını söyleyebiliriz.

### 1.16. Prandtl-Reuss Denklemleri

Önceki bölümde verilen Levy – Mises denklemleri metalik malzemeler için plastik deformasyonun ifade edilmesinde oldukça faydalıdır, burada plastik gerinme  $\varepsilon^p$  elastik gerinme  $\varepsilon^e$  oldukça büyüktür. Elastik gerinme  $\varepsilon^e$  nin şiddeti plastik gerinme ile kıyaslandığı zaman  $\varepsilon^e$  nin ihmal edilebileceğini ve bu ihmalin önemli bir hayata yol açmayacağını ifade edebiliriz. Prandtl (1927) ve Reuss (1930) plastik gerinme hızı için Levy – Mises denklemlerine benzer bağıntılar önermişlerdir. Elastik deformasyon şekil değişikliği ile birlikte hacim değişiminde neden olurken plastik deformasyon izokorik yani sabit hacimde gerçekleşen bir prosesdir. Şekil değişimini temsil eden sapma elastik gerinmesinin hızı  $\dot{\varepsilon}^e$ , (1.153) denkleminin zamana göre diferansiyeli ile elde edilmiştir.

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{1}{2G} \dot{S} \quad \text{veya} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} \quad (1.190)$$

Artımsal form aşağıdaki ifadeler ile verilmektedir.

$$d\varepsilon^e = \frac{1}{2G} dS \quad \text{veya} \quad d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} dS_{ij} \quad (1.191)$$

Plastik gerinme hızı, sapma gerilmesi  $S$  ile eş eksenli olarak kabul edilmektedir. Böylece onu aşağıdaki gibi orantılı bir formda ifade edebiliriz.

$$\dot{\varepsilon}^p \doteq \lambda S \quad \text{veya} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \lambda S_{ij} \quad (1.192)$$

$\lambda$  bir parametredir ve akma kriteri kullanılarak belirlenebilir. Ayrıca, bünye denkleminin zamandan veya hızdan bağımsız olduğunu garanti altına almak için,  $\lambda$

nın gerinme hızının birinci dereceden homojen bir fonksiyonu olması gerekir. Plastik deformasyon izokorik olduğunda (1.192) denklemi ile verilen  $\dot{\epsilon}^p$  doğal olarak sapma durumunu ifade eder, toplam şekil değiştirme hızı (1.190) ve (1.192) denklemlerini toplayarak elde edilebilir. Bu durumda,

$$\dot{\epsilon}' = \frac{1}{2G} \dot{S} + \dot{\lambda} S \quad \text{veya} \quad \epsilon'_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \dot{\lambda} S_{ij} \quad (1.193)$$

ifadelerini yazabiliriz. Diğer taraftan  $\dot{\epsilon}^p_{ii} = 0$  olduğundan toplam hacim değişimi hızı yalnızca elastik deformasyondan kaynaklanmaktadır. Bu durumda yönetici denklem (1.150) ifadesinin türevi alınarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \dot{\epsilon}^e_{ii} = \frac{\dot{P}}{K} \quad (1.194)$$

Burada  $P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  ortalama ya da hidrostatik gerilmeyi ifade eder.

Elasto – plastik bünye denklemleri iki kısımdan oluşur: (1.193) denklemiyle verilen şekil değişikliği ve (1.194) denklemiyle verilen hacim değişikliği şimdi, (1.193) denkleminden görüldüğü gibi toplam gerinme hızı  $\dot{\epsilon}$ , bu denklemin sağ tarafındaki birinci terimden dolayı artık toplam sapma gerinmesinin asal eksenleriyle eş eksenli değildir.  $\dot{\lambda}$  parametresini tespit etmek için akma kriterini aşağıdaki gibi kullanırız: ilk önce (1.193) denklemini  $S_{ij}$  ile çarparak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz,

$$\begin{aligned} S_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} &= \frac{1}{2G} S_{ij} \dot{S}_{ij} + \dot{\lambda} S_{ij} S_{ij} \\ &= \frac{1}{2G} S_{ij} \dot{S}_{ij} + \dot{\lambda} \frac{2}{3} \sigma_Y^2 \end{aligned} \quad (1.195)$$

Bu ifade elde edilirken (1.179) Von – Mises kriteri kullanılmıştır. Daha sonra (1.179) Von – Mises kriterinin türevini alarak ve  $\sigma_y$  yi sabit kabul ederek,

$$S_{ij} \dot{S}_{ij} = 0 \quad (1.196)$$

olduğunu gösterebiliriz. Daha sonra (1.196) denklemini (1.195) denklemine yerine yazarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\dot{\lambda} = \frac{3S_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}}{2\sigma_Y^2} = \frac{3 \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}')}{2\sigma_Y^2} \quad (1.197)$$

Bu ifade (1.185) denklemi ile aynı anlama gelir. Yalnız (1.197) denkleminin gerinme sertleşmesi durumunu içermediğini belirtmeliyiz.  $\dot{\lambda}$  gerçektende  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  nın birinci dereceden homojen bir fonksiyonudur.  $\dot{\lambda}$  yı (1.197) denkleminle ifade edildiği gibi alarak ve (1.193) denklemini,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}' = \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{S}} + \frac{3 \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\epsilon})}{2\sigma_Y^2} \mathbf{S} \quad \text{veya} \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{3S_{lm} \dot{\epsilon}_{lm}}{2\sigma_Y^2} S_{ij} \quad (1.198)$$

şeklinde tekrar düzenleyebiliriz. (1.181) denklemini türetmek için kullanılan prosedürü benimseyerek  $\dot{\lambda}$  nın aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini gösterebilir.

$$\dot{\lambda} = \frac{3\dot{\epsilon}_e^p}{2\sigma_Y} \quad (1.199)$$

Burada  $\dot{\epsilon}_e^p$  eşdeğer veya efektif plastik gerinme hızıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\dot{\epsilon}_e^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p \right)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ (\dot{\epsilon}_1^p - \dot{\epsilon}_2^p)^2 + (\dot{\epsilon}_2^p - \dot{\epsilon}_3^p)^2 + (\dot{\epsilon}_3^p - \dot{\epsilon}_1^p)^2 \right]^{1/2} \quad (1.200)$$

(1.200) denkleminin (1.181) denkleminden farklı olduğunu belirtmemiz gerekir, burada  $\dot{\epsilon}_e$  ile  $\dot{\epsilon}_e^p$  yer değiştirmiştir. Eğer (1.199) ifadesi kullanılırsa (1.193) denklemi,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \frac{1}{2G} \dot{\mathbf{S}} + \frac{3\dot{\varepsilon}_e^p}{2\sigma_Y} \mathbf{S} \quad \text{veya} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}'' = \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \frac{3\dot{\varepsilon}_e^p}{2\sigma_Y} S_{ij} \quad (1.201)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem zamandan bağımsız olduğu için artımsal formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{2G} d\mathbf{S} + \frac{3d\varepsilon_e^p}{2\sigma_Y} \mathbf{S} \quad \text{veya} \quad d\varepsilon_{ij}'' = \frac{1}{2G} dS_{ij} + \frac{3d\varepsilon_e^p}{2\sigma_Y} S_{ij} \quad (1.202)$$

Burada  $d\varepsilon_e^p$  yukarıda yapılan yer değiştirme benzer şekilde (1.200) denkleminde  $d\varepsilon_{ij}^p$  yerine yazılarak tanımlanmıştır. Benzer şekilde (1.198) denklemini artımsal formda yazılabilir. Bu denklem basitçe (1.190) ve (1.191) denklemlerinin toplamıdır.  $\varepsilon$  nun toplam değişimini veya artımını elde etmek için hacim değişimi veya şekil değişimi hızlarını ifade etmek gerekir. Bu durumda aşağıdaki ifadeyi yazarız.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{9K} \delta_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{S}_{ij} + \dot{\lambda} S_{ij} \quad (1.203)$$

Burada  $\dot{\lambda}$  ya (1.197) ya da (1.199) denkleminde verildiği gibidir.

Pek çok mühendislik uygulamalarında kullanılan Prandtl – Reuss denklemleri kartezyen koordinat sisteminde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx}^p &= \frac{d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \left[ \sigma_{xx} - \frac{1}{2}(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right], & d\gamma_{xy} &= \frac{3d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \sigma_{xy} \\ d\varepsilon_{yy}^p &= \frac{d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \left[ \sigma_{yy} - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right], & d\gamma_{yz} &= \frac{3d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (1.204)$$

$$d\varepsilon_{zz}^p = \frac{d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \left[ \sigma_{zz} - \frac{1}{2}(\sigma_{zz} + \sigma_{yy}) \right], \quad d\gamma_{zx} = \frac{3d\varepsilon_e^p}{\sigma_Y} \sigma_{zx}$$

Yukarıdaki denklemlerde kayma gerinmesinin mühendislik bileşenleri  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  tansörel bileşenler  $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$  lerin yerine kullanılmıştır. Burada  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$  olduğunu hatırlamak gerekir. Bu denklemlerin türetilmesinde aynı zamanda plastisite teorisindeki standart bir uygulama olarak  $\nu = 1/2$  alınmıştır.

## 2. KAYNAK BİLGİSİ

Bir bilim olarak Plastisitenin tarihi Tresca' nın delme ve ekstrüzyon deneyleri hakkındaki sonuçları yayınladığı ve meşhur akma kriterini formülleştirdiği 1864 yılına kadar uzanır. Bundan birkaç yıl sonra, Tresca' nın sonuçlarını kullanarak Saint\_Venant ve Levy modern Plastisite teorisinin temellerini oluşturmaya başlamışlardır. Daha sonraki 75 yıl içerisinde von Mises, Hencky, Prandtl ve diğerleri tarafından kaydedilen ilerlemeler önemli katkılar sağlamakla birlikte yavaş ve düzensiz bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Ancak 1945 li yıllarda Plastisitenin birleştirilmiş teorisi şekillenmeye başlamıştır. Bu yıllardan sonra pek çok araştırmacı tarafından yoğunlaştırılmış çalışmalar hızla büyüyerek geniş bir literatür olarak bilim dünyasının hizmetine sunulmaya başlamıştır. Bu çalışmalar hakkında yazılan kısa fakat mükemmel bir senaryo Hill ve Westergaard tarafından kaleme alınmıştır. Plastisite teorileri, genellikle fiziksel teoriler ve matematiksel teoriler olmak üzere iki kategoride değerlendirilmiştir. Fiziksel teoriler metallerin plastik akışını incelemeye çalışır. Plastik akış oluşurken bir malzemenin atomlarına, kristallerine ve tane sınırlarına ne tür olayların etki ettiğini belirlemek için mikroskopik bir bakış açısıyla metalleri incelemeye çalışır. Diğer taraftan matematiksel teoriler makroskopik deneylerin sonuçlarından faydalanarak ve olayların fiziksel temellerine pek fazla derinlemesine inmeyerek doğadaki fenomenolojik yaklaşımlarla formülasyona gitmeye çalışır. Sonuçta şüphesiz bu her iki yaklaşımda birleşik bir Plastisite teorisi oluşturarak malzemelerin davranışını açıklamak için, mühendislere ve bilim adamlarına pratik uygulamalar için gerekli verileri sağlamaya çalışır. Fiziksel teoriler genellikle metal fizikçilerinin ve katı hal fizikçilerinin ilgi alanına girmekte matematiksel Plastisite teorisi ise mühendis ve mekanikçilerin uğraş alanını oluşturmaktadır. Bu konuda kitap haline getirilmiş önemli eserlerden biri Kachanov(1974) diğeri de Mendelson(1968) tarafından yazılmıştır. Bir çok mukavemet ve malzeme kitabında kısa bir şekilde plastisite teorisine değinilmiş, ancak bu konuda çok fazla matematiksel formülasyona girmemekle birlikte Türkçe olarak yazılmış en önemli kaynak “Metallere Plastik Şekil Verme” adı altında Çapan(1999) tarafından ortaya konmuştur. Mekanik metalurji başlığı altında konunun mekanik temellerini, metalürjik esasları, dislokasyonları ve güçlendirme



mekanizmalarını, çatlak mekaniğini, metallerin yorulmasını ve sürünmesini, metallere plastik şekil vermeyi detaylı bir şekilde açıklayan önemli çalışmalar da literatürdeki yerlerini almışlardır (Dieter ve Bacon, 1988; Backofen, 1972; Hosford ve Caddel, 1993; Meguid, 1989; Wagoner ve Chenot, 1997). Sürekli ortamlar mekaniğine ait notasyonu kullanarak jeomalzemelerin plastik davranışına ait kapsamlı bir çalışma da Chen ve Mizuno (1990) tarafından yapılmıştır. Plastisite teorisine matematiksel esaslarla yaklaşarak bünye bağıntılarını ve teorilerini ön planda tutan çalışmalarda mevcuttur (Lubliner, 1990; Maugin, 1992). Metallere şekil verme ve diğer plastisite konularında sonlu elemanlar yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır. Metallerin şekillendirilmesi ile ilgili endüstride gittikçe artan sayıda değişik sektörler metal-deformasyon proseslerinin sonlu eleman teknikleri ile incelenmesinin sağladığı avantajları kavramış ve kullanmaya başlamıştır (Rowe, v.d., 1991).

Son zamanlarda kayma bantlarının genişliği, metal matrisli kompozitlerde dayanım ve nano ölçekteki çentikler gibi küçük ölçekli olayların modellenmesine olan ilgi gittikçe artmaktadır. Asıl konu, uzunluk ölçeklerini içermeyen klasik sürekli ortamlar mekaniği modellerinin bu tip olayları belirlemede yetersiz kalmasıdır. Metallerde, hücre boyutu gibi dislokasyon yapılarıyla ilgili uzunluk ölçekleri elastoplastik deformasyonlar için bünye denklemlerine kesin bir şekilde girmez. Normal olarak, iç değişkenli fenomenolojik bir çerçeve içerisinde, teorinin gelişmesi esnasında asıl makroskopik değişkenler iç gerilmeler, dislokasyon yapısı ile ilgili uzunluk ölçekleri ve dislokasyon hareketinden kaynaklanan plastik spinle ilgili korotasyonel gerilme hızlarıdır. Bu değişkenler dislokasyon hareketinde ortak bir orijine sahip olmasına rağmen bir birlerinden bağımsız olarak ele alınıp değerlendirilebilirler. Örneğin, elastoplastik büyük deformasyonlarla ilgilenildiği zaman korotasyonel bünye denklemleri önemli olmaktadır. Bu durumda, genellikle bünye denklemi birkaç spin tensörü cinsinden verilen korotasyonel gerilme hızları cinsinden ifade edilmektedir. Bu tür çalışmaların örnekleri için; Nagtegaal ve Jong, 1982; Dienes, 1979; Sowerby ve Chu, 1984; Dafalias, 1985; Zbib ve Aifantis, 1988a; Szabo ve Balla, 1989; Yang ve Hwang, 1992; Kuroda, 1995 gibi kaynaklar incelenebilir. Spin tensörünün seçimi için birkaç farklı olasılık olmasına rağmen, plastic spin yukarıda bahsedilen pek çok

problemin çözümü için en uygun spin olarak oldukça dikkat çekici gözükmektedir. Ayrıca, uzunluk ölçeği konusu aşağıda belirtildiği gibi plastik spin ve iç gerilmeden bağımsız olarak göz önüne alınmalıdır.

Dafalias (1985, 1998) tarafından önerilen plastik spine ait bünye denklemi mekanik şartlar altında geliştirilmiştir çünkü, plastik spin için eşlenik bir termodinamik kuvvet yoktur ve plastik spin bu durumda herhangi bir iş yapmaz. Üstelik, plastik spinle yakından ilgili olan arka (back) gerilme aynı zamanda kinematik sertleşme modeli için de oldukça önemlidir. Arka (back) gerilme için bünye denklemi Ziegler (1959) tarafından verilmiştir ve genellikle arka gerilme hızı efektif gerilmeyle orantılı olduğu zaman kullanılmaktadır. Arka gerilme efektif gerilmenin içine gömüldüğünden ve onun termodinamiksel hız eşleniği olmadığından arka gerilme için bünye denklemi tamamen mekanik şartlardan elde edilebilir (Termodinamik şartlardan değil). Plastik spin ve arka gerilmenin esas itibariyle dislokasyon hareketi ile ilgili olduğunu hatırlayarak bir termodinamiksel teoriden onlar için bünye denklemlerini geliştirmek de mümkündür. Plastik spinin, kafes yapının rotasyonu veya torsiyonundan kaynaklanan dislokasyonlarla ilgili olma ihtimali varken, arka gerilme iç gerilmelere karşı dislokasyon hareketinden kaynaklanan bir iç sürtünme ile ilgili olabilir.

Sürekli dislokasyonlarla ilgili bazı sürekli ortam teorileri (Kondo, 1952; Kröner, 1958; Bilby, 1960; Sedov ve Berdichevsky, 1967; Le ve Stumpf, 1996) 1950 li yıllardan beri önerilmektedir. Bu teorilerde pek çok kabul yer almaktadır. Örneğin Le ve Stumpf (1996) tarafından verilen teoride korotasyonel bünye denklemleri mevcut konfigürasyonda elde edilemeyebilir çünkü bu amaç için uygun bir ara konfigürasyon referans konfigürasyonu olarak kullanılmamıştır. Ayrıca, kayma tensörüne eşlenik olan iç gerilme simetrik değildir. Bu durumda alışılmadık bir sonuç ortaya çıkar ve plastik spin kendisine ait eşlenik gerilme (yani iç gerilmenin antisimetrik kısmı) ile iş üretir. Plastik deformasyondan kaynaklanan disipasyon prosesi maksimum entropi üretim hızı ilkesiyle ilişkili değildir (Ziegler, 1983). Hem elastik hem de plastik bünye denklemleri disipasyon fonksiyonunu tartışmaksızın yalnızca serbest enerjiyi kullanarak verilmiştir. Ayrıca, termodinamik oranlar değil

de termodinamik kuvvet konservatif ve disipatif kısımlara ayrılmadan bazı elastoplastik bünye denklemlerini geliştirmek oldukça zordur.

Termodinamiğın iki temel ilkesi olan; entropinin artması ilkesi ve maksimum entropi üretim hızı ilkesi ne dayanarak dislokasyon yoğunluk tensörü kavramını takdim ederek sonlu gerinme durumu için termodinamiksel bir elastoplastisite teorisi Shizawa ve Zbib (1999) tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmada iki tane ara konfigürasyon takdim edilerek elastoplastik deformasyonun kinematiğı tartışılmıştır. Termodinamik değışkenlere karşılık gelen eşlenik termodinamik kuvvetlerin tanımı verilmiştir. Serbest enerji ifadesinin içine i değışkenler olarak plastik gerinme tansörü ve dislokasyon yoğunluk tansörü yerleştirilmiş ve bu i değışkenlerin eşleniğı olarak efektif gerilme ve mikro gerilmenin tanımı verilmiştir. Arka (back) gerilme ise efektif gerilme ve uygulanan gerilme arasındaki fark olarak tanımlanmıştır. konvensiyonel denge denklemleri sistemine ilave olarak mikro gerilme ve arka gerilme arasındaki dengeyi ifade eden denge denklemi geliştirilmiştir. Bu denklem klasik bünye denkleminin yerine arka gerilmenin belirlenmesine katkıda bulunmaktadır. Son olarak da, belirli yaklaşımlar doğrultusunda elastoplastik bünye denklemleri türetilmiştir. Elastik gerinme için bünye denklemi bir elastik potansiyel olarak Gibbs fonksiyonu takdim edilerek türetilmiştir. Plastik deformasyon hızı ve dislokasyon sürüklenme hızına ait bünye denklemleri akış kuralları olarak elde edilmiştir. Burada, disipasyon fonksiyonu maksimum entropi üretim hızı ilkesini kullanarak plastik potansiyelin rolünü üstlenilmiştir. Plastik bünye denklemlerindeki katsayılar bazı uygun sertleşme oranları ve eş değeri büyüklükleri ile verilmiştir. Konvensiyonel bünye denklemi olmaksızın plastik spinin değeri dislokasyon sürüklenmesine ait bünye denkleminde hesaplanabileceğini gösterilmiştir. Burada geliştirilen teori iyi bilinen klasik teoriler ve son zamanlarda ki plastisitenin gradient teorileri ile karşılaştırılmıştır.

Plastik deformasyonların atomik ölçekte ve çok sayıda dislokasyonun birikmesi sonucunda ortaya çıktığın bilinmektedir. Dislokasyon hareketlerinin incelenmesi sonucunda, cismin bir noktadaki durumunun diğeri komşu noktalarda meydana gelen distorsiyonlardan önemli bir şekilde etkilendiğini açıkça görülmektedir. Sürekli

ortamlar mekaniği kapsamında bunun anlamı; bir maddesel noktadaki gerilme cismin bütün noktalarındaki gerilmelerin ve / veya gerilme hızlarının bir fonksiyonelidir. Böylece, klasik alan teorilerinin temel kabulü olan lokalitenin (çevredeki maddesel noktalara gelen kuvvetlerin ihmal edilmesi) bozulması söz konusudur

Nonlokal etkiler özellikle çatlak başlangıcı, keskin geometrik süreksizliklerde ortaya çıkan çatlak etkisi, yoğunlaşmış kuvvetler gibi mikroskopik eşeldeki olaylarla ilgilenildiği zaman önem arz etmektedir. Nonlokal teori değişik matematiksel modellerin uygulanabildiği bölgede ölçek etkisinin önemini açığa çıkarır. Bu durum daha ziyade malzemenin fiziği ile ilgili bir durumdur. Klasik lokal teoriler böyle bir ölçekten mahrumdur. Sonuç olarak, bir çok kritik olay klasik alan teorileri ile açıklanamaz ve önceden tahmin edilemez. Bir çatlak ucundaki gerilme tekillikleri, dislokasyon çekirdeği problemi ve elastik katılarda saçılma etkisi göstermeyen düzlem dalgalar klasik elastisite teorisinin yetersizliğini gösteren birkaç önemli örnektir. Bu problemlerin nonlokal elastik çözümleri fiziksel olarak kabul edilemeyen bu gibi tahminleri elimine etmekle kalmaz aynı zamanda atomik teoriler ve deneylerle tahmin edilen sonuçlarla mükemmel bir uyum içerisinde olan sonuçlar üretir. Daha önceki bir makalede gerilme uzayını esas alan nonlokal bir plastisite teorisi geliştirilmiştir. Bu teori değişik problemlerin incelenmesi açısından mükemmel bir mantığa sahip olmasına rağmen klasik plastisiteciler genellikle von Mises akma kriterini kullanan gerilme-uzay yaklaşımını tercih ederler. Üstelik neredeyse bütün deneysel çalışanlar da gerilme-uzay yaklaşımını kullanırlar. Burada pratik uygulamalara uygun bir bakış açısı ile Levy-von Mises, Prandl-Reuss ve deformasyon paralelinde nonlokal bir plastisite teorisi geliştirilmiştir (Eringen, 1983).

### 3. MATERYAL ve METOT

#### 3.1. Materyal

İki farklı disiplin olan Plastisite teorisi ve Termodinamik belli bir gelişim süreci içerisinde olgunlaşmış ve kendini ispatlamış önemli bilim dallarıdır. Termodinamik kavramların plastisite teorisi üzerindeki etkilerine dair bir çok çalışma yürütülmüştür. Plastisite teorisi ilk olarak metal malzemeler üzerinde uygulanmıştı ancak, şu anda aynı değere sahip bir diğer uygulama alanı ise zaman zaman “jeomalzemeler” olarak bilinen toprak, kaya ve betondur. Metallerle karşılaştırıldığında bu malzemeler iç sürtünme özellikleri göstermeleri nedeniyle diğerlerinden farklıdırlar, bunlar hacimsel olarak plastik davranış gösterirler. Bu malzemelerde, plastik potansiyel, akma yüzeyinden daha farklı bir işleve sahiptir bu yüzden plastisite teorisiyle modellenmelidirler.

Termodinamiğin plastisite teorisi üzerindeki etkisine dair yapılan çalışmada büyük oranda metallerle uyumlu olan modeller üzerinde durulmaktadır ve bu nedenle yukarıda adı geçen komplikasyonları ihtiva etmemektedir. Bu çalışmada, termodinamik bağlamda jeomalzemelerle uyumlu plastisite kuramlarının geliştirilmesi hedeflenmektedir.

Jeomalzemelerin termomekaniğine ilişkin bir yaklaşım da akma yüzeyinin, plastik potansiyelin ve sertleşme fonksiyonunun geleneksel kavramlarını uygulayarak plastisite kuramları geliştirmeyi hedeflemektedir ve aynı zamanda öncekileri de kapsayan bir şekilde termodinamiğin kanunlarını uygulamaya geçirmeyi amaçlamaktadır. Bu yaklaşım, fonksiyonların formları üzerine bir takım kısıtlamalar getiriyor olmakla birlikte birçok araştırmacı bu yaklaşımı sıkıcı ve değersiz bulmaktadır.

Bu çalışmada yer alan alternatif yaklaşım termodinamik varsayımlardan yola çıkarak plastisite kuramları geliştirmeyi hedeflemektedir. Bu işlem süresince karşılaşılan fonksiyon şekilleri üzerindeki kısıtlamalar olabildiğince azaltılmıştır. Bu alternatif

sadece daha geniş kapsamlı genellemelere ulaşmak değil aynı zamanda değerli kuramsal öngörüler sunmak üzere geliştirilmiştir. Houlsby (1981, 1982) bu yaklaşımı toprak için plastisite modelleri geliştirmek amacıyla kullanmıştır fakat kendisi özel modelleri geleneksel plastisite fonksiyonları cinsinden açıklayabilmiş olmasına rağmen, ortaya çıkan formülasyon, ağırlıklı olarak kinematik değişkenleri esas almakta ve bu nedenle de kullanılan fonksiyonların bir çoğu jeoteknik mühendisleri tarafından bilinmemekteydi.

Bu çalışmada, daha genel bir bağlamda plastisite teorisinin bu yaklaşımdan yola çıkarak nasıl geliştirilebileceğini ve jeomekanik uzmanları için daha ulaşılabilir bir şekilde orijinal formülasyonun yeniden şekillendirilmesi gösterilmektedir. Önem arz eden bir sonuç da sürtünme kavramının ayrılmaz bir suretle plastik akışın oluşumuna bağlı olduğu gerçeğidir. Sadece birleştirilmiş akış durumlarında uygulanan bir çok plastisite teorisinin ortadan kaybolması nedeniyle söz konusu gerçek, önemli bir takım sonuçlar doğurmaktadır. Burada genel amaç jeomekanik alanında uğraşanların kullanabileceği kuramsal bir çerçeve sağlamaktır.

Formülasyon geliştirme işleminin büyük bir bölümünün potansiyellere bağlı olması nedeniyle plastik akış durumlarında uygulanan yeni plastisite teoremlerinin geliştirilmesi muhtemeldir. Bu alanda iyimser düşünmeye iten bir neden de potansiyellerinin kullanımının plastisite teoreminin önemli parçaları konumunda olan konveksite ve maksimum ilkeler konuları ile yakından ilişkili olmasıdır. Bu alanda uygulanmayı bekleyen bir çok çalışma bulunmaktadır.

### **3.1.1 Termodinamik Hazırlık Çalışmaları**

Elasto-plastik malzemelerin termomekaniğine ilişkin genel açıklamalar Ziegler (1983), Lubliner (1990) ve Maugin (1992) tarafından yazılan kitaplarda ve Germain ve arkadaşları (1983), Ziegler & Wehrli (1987) ve Reddy & Martin (1994) tarafından hazırlanan inceleme makalelerinde konu edilmektedir. Ziegler'in benimsediği yaklaşım burada kabul edilene en yakın olanıdır.

Küçük deformasyonlar kuramının geçerli olduğunu farz ediyoruz ve böylelikle gerilmeler küçük gerinme tensörleri ile  $\varepsilon_{ij}$ , ve deformasyon hızları tansörü de gerinme tansörünün değişim hızına eşit  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  olarak tanımlanmaktadır. Gerilmeler tanımlandığında birim hacim başına birim zamanda yapılan deformasyon işi  $\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}$  olarak bulunur. Bir maddesel elemanın durumu  $\varepsilon_{ij}$ , bir iç değişken  $\alpha_{ij}$ , sıcaklık  $\theta$  veya entropi  $s$  ile tanımlanır. İç değişken kinematik türden bir değişkendir. Mevcut amacımız için bir simetrik ikinci dereceden tansörel kinematik iç değişken (gerinme benzeri bir büyüklük) belirlemek yeterlidir; bu genellikle “plastik” gerinme ile temsil edilebilir. İç kinematik değişkene ait diğer formlara ilişkin genellemeler yapmak mümkündür ancak burada bunlara değinilmeyecektir.

Termodinamiğin ilk kuralı yerel oran halinde şu şekilde yazılır:

$$\dot{U} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - q_{k,k} \quad (3.1)$$

Burada  $U$ , birim hacim başına iç enerjiyi,  $q_i$  ısı akısı vektörünü ve (2.1)’deki en son terim de maddeye çevresinden gelen ısı akısı oranını temsil etmektedir. Yerel ısı kaynağı sıfır olarak kabul edilmiştir. Uzayda belli bir  $V$  hacmi içerisinde enerjinin korunumu öngören standart işlemlerle (3.1) denklemini kurulmuştur. Son terim diverjans teoreminin  $V$  sınırı boyunca net ısı dağılımına uygulanmasıyla ortaya çıkar. Aynı şekilde termodinamiğin ikinci kuralının yerel şekli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\theta \dot{s} \geq \theta \dot{s}^r \equiv -\theta \left( \frac{q_k}{\theta} \right)_{,k} = -q_{k,k} + \frac{q_k \theta_{,k}}{\theta} \quad (3.2)$$

Burada;  $s$  birim hacim başına entropi,  $s^r$  entropi değişim oranının tersinir kısmını temsil etmektedir ve bu da maddeye çevresinden sağlanan entropi oranına eşittir. Benzer şekilde bu oran diverjans teoreminin temsili bir  $V$  sınırı boyunca net entropi dağılımına uygulanması ile elde edilir. Madde içerisinde entropi üretim hızı  $\dot{S}^i$  tersinmez kısımdır, ve (3.2) ifadesi yardımıyla,

$$D \equiv \theta \dot{s}^i = \theta (\dot{s} - \dot{s}^r) \geq 0 \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte  $D$  kayıp fonksiyonudur ve (3.3) denklemi ile tanımlanır. Yukarıda verilen bu temel termodinamik eşitsizlik Planck eşitsizliği olarak adlandırılmıştır (Truesdell 1969). Bir tür durum fonksiyonu olan iç enerji gerinme, iç kinematik değişken ve entropiye bağlıdır, böylece,  $U = U(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, s)$  yazılabilir. Sadece ısı olaylar göz önüne alındığında  $\varepsilon_{ij}$  ve  $\alpha_{ij}$  sabittir, böylece  $\dot{U} = (\partial U / \partial S) \dot{S}$  olur, (3.1) ve (3.2)'den ve aynı zamanda  $\dot{U} = \theta \dot{S}$  olduğundan sonuç olarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial s} \quad (3.4)$$

$\theta$ 'nin sabit ve üniform olduğu izotermal deformasyonlar üzerinde durduğumuz için enerji fonksiyonu ifadesinde  $s$ 'nin yerine  $\theta$  kullanılması daha yararlı olacaktır. (2.4)'e bakıldığında  $\theta$ ,  $s$ 'e göre  $U$ 'nun gradyenti olarak görülmektedir ve bu,  $\theta$  ve  $s$ 'nin rollerini değiştirmek için Legendre dönüşümü kullanılarak elde edilebilir.

Legendre dönüşüm kuramı bu yazınının esasını teşkil etmekte ve bu kurama ilişkin ilgili bölümler ekte sunulmuştur. Legendre dönüşümünün temel amacı  $Z = X(x_i) (i=1, 2, \dots, n)$  fonksiyonunu orijinal fonksiyonun gradyenleri  $y_i = (\partial X / \partial x_i)$  olan "dual" bir  $Z = Y(y_i)$  fonksiyonunun yerine kullanılmasını sağlamaktır. Her iki fonksiyon da aynı yüzeyi tanımlar;  $\Sigma$  yüzeyi  $(n+1)$  boyutlu alanda kullanılır. Orijinal tanımında  $\Sigma$ , bir dizi noktayla  $(X; x_i)$  belirlenirken, dual tanımında teğet aşırı düzlemleri (tanjant hiper-düzlemleri ile),  $(Y; y_i)$  ile tanımlanmaktadır. Dual fonksiyon,  $Y = \pm(X - x_i y_i)$  ile verilir, işaret seçimi özel fiziksel uyulamaya göre yapılır. Belirli özel tekil durumların dışında, dönüşüm kendiliğinden dual özellik taşımakta yani,  $X$  de  $Y$ 'nin düali olmakta ve orijinal bağımsız değişkenler  $x_i = \pm(\partial Y / \partial y_i)$   $Y$ 'nin gradyenleri durumuna gelmektedir. Transformasyonla



değiştirilemeyen bağımsız değişkenler pasif değişkenler olarak nitelendirilmişlerdir. İç enerjinin dual fonksiyonu Helmholtz serbest enerjisidir  $F(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \theta_{ij})$ , burada,

$$F = U - \theta s \quad (3.5)$$

ve

$$s = -\frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (3.6)$$

(3.4) ile dual bir bağlantısı vardır. (3.1), (3.2)'yi kullanarak ve bir izotermal işlemde  $\dot{\theta}$  ve  $\theta_{,k}$ 'nin her ikisinin de sıfır olduğu gerçeğinden hareketle, (2.5)'in zamana göre türevini aldığımız zaman şunu elde ederiz.

$$\dot{F} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \theta \dot{s}^i \quad (3.7)$$

yani,

$$\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{F} + D. \quad (3.7')$$

Bu temel sonuç, izotermal bir işlemde, birim zamanda yapılan deformasyon işinin serbest enerji değişim hızı ile kayıp miktarının toplamına eşit olduğunu göstermektedir. Bir önceki denklem, geri kazanılabilen değişim hızını temsil eder, bu enerjinin elastik enerji olması gerekmez, söz konusu denklemde  $D$ , enerjinin kaybolma oranıdır. Plastik bir malzemedeki enerji dağılımı iç değişkenlerde meydana gelen değişimlerden kaynaklanmaktadır, bu nedenle  $D$ , durum değişkenlerinin ve  $\alpha_{ij}$  nin bir fonksiyonu olarak ele alınır,  $D = D(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$ .

Kuramı,  $D$ 'nin aynı zamanda gerinme hızı  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 'nin bir fonksiyonu olarak kullanılabilirdiği daha genel durumlara genişletmek mümkündür. Bu ihtimalin göz ardı edilmesinin sonuçları henüz ortaya çıkarılmamıştır fakat kapsama dahil edilen

başlıca konular iki temel konuyla ilişkilendirilmiştir. Öncelikle, (iç değişkenleri olmayan) rijit-plastik malzemeler,  $D$  yi deformasyon hızları tansörü  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  nin bir fonksiyonu olarak ifade etmediğimiz durumlarda tanımlanamaz. Fakat, bunlar, elasto-plastik malzemelere ilişkin bir sınırlayıcı durum olarak mevcut formülyon içerisinde yer alabilirler. İkinci olarak,  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  ' in işleme dahil edilmesi belirli viskoz etkilerin tanımlanması için gerekli olabilir. Aşağıdaki gelişim hızdan bağımsız elasto-plastik davranışın tartışma altına alınması için yeterli görülmekte öte yandan Ziegler'in genel kuramı da aynı zamanda viskoz etkilerin dahil edilmesini mümkün kılmakta, ve neticede doğrusal ve doğrusal olmayan viskoz ve viskoplastik modellerin yansıra viskoelastik modellerin de konuya dahil edilmesi sonucunu ortaya çıkarmıştır. Bu viskoz etkileri tanımlamak için, gerilmeyi serbest enerji potansiyelleri ile belirlenen “yarı-korunumlu” bir kısım ile dissipasyon fonksiyonu ile belirlenen bir dissipatif gerilmenin toplamı olarak göz önüne almak gerekmektedir. Bu durumda gerilme toplam gerinmenin değişim hızına bağlı olmakla birlikte iç değişkenin de değişim hızına bağlı olacaktır. Ayrıca bkz. Maugin (1992, böl. 2).

İzotermal bir işlemde  $\dot{F}$  için diğer bir alternatif ifade, doğrudan doğruya türev olarak da elde edilebilir:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.8)$$

ve bu (3.7) ile karşılaştırıldığında,

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.9)$$

sonucunu verir, çünkü gerilme ve iç değişken tensörlerinin değişim hızları birbirinden bağımsızdır. Buna karşılık gelen gerilme benzeri değişkeni iç değişkene göre  $F$ 'nin türevini alarak (bir işaret değişimi ile) aşağıdaki gibi elde edebiliriz,

$$\chi_{ij} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_{ij}} \quad (3.10)$$

$x_{ij}$ 'in gerilme benzeri bir değişken olması  $\alpha_{ij}$ 'inin kinematik bir (gerilme benzeri) değişken olmasından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle dissipasyon fonksiyonu şu şekilde ifade edilebilir.

$$D \equiv \theta \dot{s}^i = \chi_{ij} \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.11)$$

Dissipasyon ifadesindeki  $\dot{\alpha}_{ij}$  ile iç çarpım şeklinde ortaya çıkan  $\chi_{ij}$  genelleştirilmiş gerilmedir, yani gerçek gerilme  $\sigma_{ij}$  değildir. Bu iki gerilme tansörü arasındaki fark

$\rho_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \chi_{ij}$  ile gösterilecektir.

Konumuzu izotermal işlemlerle sınırlı tuttuğumuz için, enerji fonksiyonlarının  $\theta$  ya olan belirgin bağımlılığı şimdi bu denklemden düşülebilir. Gibbs'in serbest enerji fonksiyonunun  $G(\alpha_{ij}; \alpha_{ij})$  kullanılması da daha ileri gelişmelerin kaydedilmesi açısından kolaylık sağlar. (3.9) dikkate alındığında bu, ayrıca gerilme ve gerilme değişkenleri arasında değişimi sağlayan kısmi bir Legendre dönüşümü yardımıyla Helmholtz serbest enerji fonksiyonundan  $F(\epsilon_j; \alpha_{ij})$  da elde edilebilir.

$$F(\epsilon_{ij}, \alpha_{ij}) + G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (3.12)$$

Burada,

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{ve} \quad \chi_{ij} = \frac{\partial G}{\partial \alpha_{ij}} \quad (3.13)$$

Son olarak verilen eşitlik, (3.10) ve Legendre dönüşümündeki pasif değişkenlerin dönüşüm özelliği neticesinde oluşmaktadır.

Malzemelerin bünye denklemlerine Ziegler yaklaşımında etkili olan en büyük unsur; eşitliklerin tamamen iki fonksiyon bilgisiyle şekillenmesidir – birincisi termodinamik potansiyel; ör. Helmholtz serbest enerji fonksiyonu veya Legendre dönüşümlerinin kullanılması ile oluşan ilgili her hangi bir potansiyel; ikincisi ise dissipasyon fonksiyonudur. (3.11) den  $D$ ;  $\alpha_{ij}$  ve  $\epsilon_{ij}$  nin olduğu kadar  $\dot{\alpha}_{ij}$  nin de bir fonksiyonu olarak görülmektedir. Hızdan bağımsız elasto-plastik bir deformasyon için  $D$ ,  $\dot{\alpha}_{ij}$  ye göre birinci dereceden homojen bir fonksiyon olmalıdır çünkü malzeme karakteristik bir zamana sahip değildir. Sonuç olarak, homojen fonksiyonlar için Euler teoreminden hareketle

$$D = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.14)$$

yazılabilir. (3.11) ve (3.14) göz önünde bulundurulduğunda  $X_{ij}$  ve  $(\partial D / \partial \dot{\alpha}_{ij})$  arasındaki fark  $\dot{\alpha}_{ij}$ 'ye ortogonal olmalıdır. Ziegler'e göre bu fark aslında sıfırdır, bu nedenle

$$\chi_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} \quad (3.15)$$

yazılır ve  $X_{ij}$ ,  $D$ 'nin seviye yüzeylerine dik doğrultudadır. Bu varsayım bir postülat halini alma durumundadır ve genellikle “ortogonalite prensibi” olarak adlandırılmaktadır; (bu prensibin daha genel dissipasyon fonksiyonlarına ilişkin formunu da içeren tam tartışma metni için bkz. Ziegler (1983, böl. 15)). Bu varsayım bir çok açıdan eleştirildi ve bu eleştirilerin çoğuna Ziegler 1981 yılında kaleme aldığı makalesinde cevap verdi. Mevcut görüşümüze göre bu çok zayıf bir varsayımdır ve bir çok plastisite teorisinin temel aldığı Drucker'in varsayımından çok daha geniş bir bünye denklemleri sınıfını tanımlamaktadır. İlerleyen zamanlarda da görüleceği üzere varsayım, sürtünmeli malzemelere yönelik malzemenin tamamı ile ilgili olmayan akış kurallarını da kabul etmekte ancak bütün malzemenin akış durumuna ilişkin bir takım önyargılar sunmaktadır. Ziegler'in de vurguladığı üzere (1983),  $D$  fonksiyonuna ait bilginin buna karşılık gelen  $X_{ij}$  genelleştirilmiş gerilmelerinin

belirlenmesi için yeterli olduğu düşünülürse, bu durumda (3.15) bağıntısı mümkün olan tek formdur çünkü, seviye yüzeylerine dik doğrultuda ki tek vektörel alan, skaler değerli  $D$  fonksiyonu tarafından belirlenen vektörel alandır.

### 3.2. Metot

#### 3.2.1. Elasto-Plastik Malzemelere İlişkin Termodinamik Potansiyeller

##### (a) Birleşik (kapıl) Etki Taşımayan Malzemeler

Elasto-plastik malzemeler teorisi geliştirilirken (küçük) gerinme tensörü, başlangıçta “elastik” ve “plastik” parçaların toplamı olarak göz önüne alınabilir. Fakat, Lubliner’in da gösterdiği üzere (1972) (ayrıca bkz. Lubliner 1990; Reddy ve Martin 1994) anlık elastisite modülü iç değişkenlerden bağımsız olan “birleşik etki taşımayan (dekapıl) malzeme” olarak bilinen malzeme için de formal olarak benzer analizin yapılması mümkündür.

İlk eşitliğin (3.13) zamana göre diferansiyelinin alınması durumunda gerinme hızının iki terimin toplamı olarak alındığı görülür:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \alpha_{kl}} \dot{\alpha}_{kl} \quad (3.16)$$

$\dot{\sigma}_{kl}$  teriminin katsayısı anlık elastik uygunluk tansörünü göstermektedir. Söz konusu anlık elastik uyum birleşik etki taşımayan bir malzeme için  $\alpha_{ij}$  iç değişkeninden bağımsızdır bu nedenle  $(\partial^3 G / \partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl} \partial \alpha_{mn}) = 0$  olur.  $\dot{\alpha}_{kl}$  teriminin katsayısının  $\sigma_{ij}$  den bağımsız olması gerekir. Sonuç olarak, her iki terim de aşağıdaki elastik gerinmeyi vermek üzere zamana göre ayrı ayrı integre edilebilir.

$$\varepsilon_{ij}^e = \int_{\sigma^0}^{\sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (3.17)$$

Bu denklemde  $\sigma_{ij}^0$  başlangıç(referans) durumundaki gerilmedir ve plastik gerinme de şu şekilde ifade edilir:

$$\varepsilon_{ij}^p = \int_{\sigma^0}^{\sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\alpha_{kl} \quad (3.18)$$

(3.16)'da yer alan ikinci türevlerin entegrasyonu üzerine, birleşik etkilerin bulunmadığı varsayımından hareketle, Gibbs serbest enerji fonksiyonu

$$G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = G_1(\sigma_{ij}) + A_{ij}(\alpha_{ij})\sigma_{ij} + G_2(\alpha_{ij}) \quad (3.19)$$

şeklinde olmalıdır. Böylece çarpım şeklinde yer alan ortadaki terim gerilmeye göre lineerdir. Bu durumda, iç değişkenin herhangi bir spesifik fiziksel önemi yoktur. Formal sonuçları değiştirmeksizin,  $\alpha_{ij}$  tansörü uygun bir fonksiyonla  $\alpha_{ij}$  den türetilen herhangi bir simetrik ve ikinci dereceden bir tansörle yer değiştirebilir. Böylece genellikle kaybetmeksizin, (3.19) ifadesinde yer alan  $A_{ij}(\alpha_{ij})$  fonksiyonunu  $\alpha_{ij}$  ile yer değiştirebiliriz, böylece,

$$G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = G_1(\sigma_{ij}) + \sigma_{ij}\alpha_{ij} + G_2(\alpha_{ij}) \quad (3.20)$$

yazılabilir ve (3.13)'ten hareketle gerinme,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}) + \alpha_{ij} \quad (3.21)$$

olacaktır ve diğer bir ifadeyle,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e(\sigma_{ij}) + \varepsilon_{ij}^p \quad (3.22)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada elastik gerinme  $\epsilon_{ij}^e$ , tam olarak gerilmenin fonksiyonudur ve  $\alpha_{ij}$ , bu durumda plastik veya daimi gerinme olarak tanımlanabilir. Bunun anlamı, malzemenin bir bölümünde mevcut olan gerilme başlangıç değeri  $\sigma_{ij}^0$  'ye geri döndüğünde gerinme aynı kalır.  $\alpha_{ij}$  nin bu şekilde seçilmesi ile, karma ikinci türev  $(\partial^2 G / \partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}) = \delta_{ij} \delta_{kl}$  olur, bu nedenle, (3.21)'nin zamana göre diferansiyelinin alınması ile (3.1) oluşturulabilir.

Helmholtz serbest enerji fonksiyonuna geri dönerek yapılan transformasyondan sonra yukarıdaki model aşağıda verilen ayrıştırılmış formda ifade edilebilir:

$$F = F_1(\epsilon_{ij} - \alpha_{ij}) + F_2(\alpha_{ij}) = F_1(\epsilon_{ij}^e) + F_2(\alpha_{ij})$$

Şu da ayrıca önem taşımaktadır ki (3.20) 'te yer alan  $G_2(\sigma_{ij})$  elastik davranışı hiçbir suretle etkilemez. (3.13) eşitliğinden hareketle birleşik etki taşımayan malzeme için genelleştirilmiş gerilme şu şekilde olmalıdır:

$$\chi_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\partial G_2(\alpha_{ij})}{\partial \alpha_{ij}} = \sigma_{ij} - \rho_{ij}(\alpha_{ij}) \quad (3.23)$$

Netice olarak  $G_2$  fonksiyonu, gerçek ve genelleştirilmiş gerilme değişkenleri arasındaki fark olarak tanımlanan gerilmeye dair açıklamalar getirmektedir ve söz konusu değişkenler plastik gerinmenin bir fonksiyonudur. İlerleyen zamanlarda görüleceği üzere söz konusu gerilme kinematik sertleşme modellerinde ye alan 'geri veya ikincil (back), kayma (shift) değiştir ve sürüklenme (drag) gerilmelerinin yaptığı görevi yapmaktadır. Bu gerilme ayrıca bir takım belirli izotropik modeller içerisinde de oluşabilmektedir; bu, kritik durum teorilerinin tartışma altına alındığı bölümde de işlenecektir.

Legendre dönüşümü uygulandığında, birleşik etki taşımayan bir malzeme için Helmholtz serbest enerjisine karşılık gelen form şu şekilde bulunur:

$$F(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}) = F_1(\varepsilon_{ij} - \alpha_{ij}) - G_2(\alpha_{ij}) \quad (3.24)$$

Bu denklemde  $F_1, G_1(\sigma_{IJ})$ ' in Legendre düalini teşkil etmektedir. Bir bağlamda,  $G$  fonksiyonu yalnızca kısmi gerilme potansiyeli konumundadır, çünkü,  $\sigma_{IJ}$ 'ye bağımlı olduğu kadar plastik gerilme  $\alpha_{ij}$  'ye de bağımlıdır. Komple bir Gibbs fonksiyonu  $G$  üzerindeki daha ileri Legendre dönüşümlerini etkilerini dikkate alarak,  $\alpha_{ij}$  ve  $x_{ij}$  'nin rolleri değiştirilerek bulunabilir. Ekte de verildiği üzere şu şekildedir:

$$G^*(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = -G_1(\sigma_{ij}) + F_2(\chi_{ij} - \sigma_{ij}) \quad (3.25)$$

Bu denklemde  $F_2, G_2(\alpha_{IJ})$ ' inin Legendre dualini teşkil etmektedir. Malzeme, gerilmesiz referans konumunda lineer elastik durumda ise,

$$G_1(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (3.26)$$

ve

$$F_1(\varepsilon_{ij}^e) = \frac{1}{2} D_{ijkl} \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{kl}^e \quad (3.27)$$

yazılır. Burada  $C_{ijkl}$  ve  $D_{ijkl}$ , sırasıyla sabit uygunluk ve modül matrisleridir. Buna ek olarak malzeme izotropik ise bu durumda

$$G_1(\sigma) = \frac{1}{18K} (tr(\sigma))^2 + \frac{1}{4G} (tr(s^2)) \quad (3.28)$$

ve

$$F_1(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} K (tr(\varepsilon^e))^2 + G (tr(\gamma^{e2})) \quad (3.29)$$

olur. Burada  $K$  hacimsel modül ve  $G$  ise kayma modülüdür.  $s$  ile  $\gamma$  sırasıyla sapma-gerilme tansörü ve biçim bozulma (distorsiyonal) gerilme tensörleridir. (Referans



konum sıfırdan farklı fakat  $\sigma_{ij}^0$  ise yukarıda verilen  $\sigma_{ij}$  toplam gerilme yerine  $\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0$  yazılmalıdır).

### **(b) Birleşik (Kapıl) Malzemeler**

Jeomalzemeler açısından tersinmez (geri dönüşümsüz) plastik deformasyon elasto-plastik kuplajdan (elastisite modülünün plastik deformasyona bağlı oluşu) daha önemli olduğu halde, burada öncelikli olarak kuplaj konusunu ele alacağız çünkü bunlar Gibbs serbest enerji fonksiyonunu temel almaktadır ve dissipasyon fonksiyonunu oluşturmaksızın burada bahsedilebilecek özelliktedirler.

Kuplajlı malzemeye verilebilecek en genel örnek elastisite modülünün iç parametreye göre değişmesidir. Bu durumda, deformasyonun elastik ve plastik parçalara ayrışması atrık geçerliliğini yitirmektedir. Bu gibi modeller genel olarak kaya ve betonun elasto-plastik davranışlarını tanımlamak üzere kullanılmaktadır. Öte yandan, bir çok önemli kritik durumda toprak modelleri özgül hacme bağlı olarak plastik hacim deformasyonuna dayanan katılık olgusu üzerinde yoğunlaşmaktadır (Wood 1990). Maier & Hueckel (1977), yumuşatma ve plastik akış kuralları da dahil olmak üzere bu tarz malzemelerin elasto-plastik davranışlarına yönelik kapsamlı bir görüşü tartışmaya sunmuştur. Ancak bu görüş elasto-plastik bünye denklemlerinin klasik formülasyonu çerçevesinde ele alınmıştır. Houlsby (1982), izotropik modellere ilişkin özel durumları da göz önünde bulundurarak kuplajın termomekanik formülasyonu değiştirebilecek bir yöntemi açıklamıştır. Söz konusu edilen ve yukarıda dikkate alınan özel durumlarda kayma modülü plastik deformasyona bağlıdır.

Toplam gerilme oranı (3,16)'da sunulmuştur fakat her iki terimi de “elastik” ve “plastik” deformasyon oranları olarak aynı kapsamda tanımlayamamaktayız. Bunun yerine, Maier & Hueckel (1977) bu terimleri “tersinir” ve “tersinmez” bileşenler olarak adlandırmaktadır,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^i = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \alpha_{kl}} \dot{\alpha}_{kl} \quad \text{ve} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^r = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.30)$$

Teoriyi geliştirmenin m¼mk¼n olan bir diğer yolu da plastik gerinmeyi, gerilme gerçek değerini tekrar kazandığında geriye kalan gerinmenin bir parçası olarak tanımlamaktır. Bunun anlamı;

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial G(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \Big|_{\sigma_{ij}^0} = G_{ij}^p(\alpha_{ij}) \quad (3.31)$$

Bu tanım, birleşik etki (kuplaj) taşımayan malzeme tanımıyla tutarlılık göstermektedir ve plastik gerinmenin mevcut gerilmeden bağımsız olduğunu göstermektedir; bu nedenle, yukarıda da belirtildiği üzere i değişken  $\alpha_{ij}$  plastik gerinme olarak seçilebilir. Elastik gerinme hızı, bu durumda,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \alpha_{kl}} \dot{\alpha}_{kl} - \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.32)$$

veya,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \dot{\varepsilon}_{ij}^r + \varepsilon_{ij}^c, \quad (3.33)$$

ve burada,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \left( \frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{ij} \partial \alpha_{kl}} - \delta_{ik} \delta_{jl} \right) \dot{\alpha}_{kl} \quad (3.34)$$

Maier ve Hueckel (1977) tarafından tanımlanan ‘‘kuplajlı’’ gerinme hızını göstermektedir. Netice olarak elastik gerinme hızı tersinir ve kuplajlı gerinme hızlarının toplamıdır, öte yandan tersinmez (geri dönüştürülemez) gerinme hızı plastik ve kuplajlı bileşenlerin toplamıdır.

Gibbs fonksiyonunu, hala (3.20)'te verildiği gibi kabul eder ve  $\sigma_{ij}$  nın yanı sıra  $\alpha_{ij}$ 'ya da bağlı olan 'elastik kısım' da dikkate alınır, (3.26)-(3.29) elastisite modülünün de  $\alpha_{ij}$ 'ye bağlı olduğu gibi, bu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial G_1(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} + \alpha_{ij} \quad (3.35)$$

$G = G_1(\sigma_{IJ}) + \sigma_{IJ}\alpha_{kl} + G_2(\alpha_{IJ})$  denkleminde hareketle kuplajlı gerinme hızı (3.34) eşitliğinde verildiği gibidir,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\alpha}_{kl} \quad (3.36)$$

Birleşik (kapıl) gerinme hızı yukarıdaki formülden türetilmiştir ve ek bir var sayım olarak sunulmamaktadır. Eşitlik (3.36), gerilmeler açısından lineer elastik olan bir malzeme için aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial \alpha_{pq}} \sigma_{kl} \dot{\alpha}_{pq} \quad (3.37)$$

Toplam gerinmenin elastik veya plastik yahut geri tersinir ve tersinmez bileşenlerine parçalanabilmesine ilişkin farklı yollar tablo 1'de gösterilmiştir.

### 3.2.2 Kayıp (Dissipasyon) ve Akma fonksiyonları

Dissipasyon fonksiyonunun belirlenmesi ile bünye denkleminin formülasyonu artık tamamıyla oluşturulabilir. Başlangıçta, biz sadece  $\alpha_{ij}$  ve  $\dot{\alpha}_{ij}$  'ye bağlı olan dissipasyon fonksiyonları üzerinde duracağız. Muhtemel diğer fonksiyonel bağımlılıklar daha sonra ele alınacaktır:

Tablo 3.1. Kuplajlı malzemeler için gerinmelere ilişkin alternatif sentezler

Toplam gerinme	$\varepsilon_{ij}$		
Elastik + Plastik	$\varepsilon_{ij}^e$	$\varepsilon_{ij}^p$	
Tersinir + kuplaj + plastik	$\varepsilon_{ij}^r$	$\varepsilon_{ij}^c$	$\varepsilon_{ij}^p$
Tersinir + tersinmez	$\varepsilon_{ij}^r$	$\varepsilon_{ij}^i$	

Ortogonalite (3.15) formülünden hareketle genelleştirilmiş gerilmeler şu şekildedir.

$$\chi_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}(\alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}) \quad (3.38)$$

Böylelikle, genel olarak,  $D(\alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$ 'nin Legendre dönüşümü yeni bir fonksiyon  $\Omega(\alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$  oluşturmaktadır ve bu fonksiyon şu özelliklere sahiptir.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \chi_{ij}}(\alpha_{ij}, \chi_{ij}) \quad (3.39)$$

ve,

$$D(\alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}) + \Omega(\alpha_{ij}, \chi_{ij}) = \chi_{ij} \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.40)$$

(3.39) denklemi iç değişkenler açısından evrimsel bir eşitliktir ve viskoplastisiteye ilişkin bir çok termomekanik teoremin çıkış noktasını teşkil etmektedir (ör, Rice 1971; Lubliner 1972).

Ancak, hızdan bağımsız malzemeler olması durumunda da  $D$  fonksiyonu  $\dot{\alpha}_{ij}$  'ye göre birinci dereceden homojen bir yapıda olmalıdır çünkü belirli bir karakteristik zaman söz konusu değildir. Ek' te de ele alındığı üzere bu gibi fonksiyonlar için, Legendre

transformasyonu tekildir, bu tarz bir fonksiyonun Legendre düalinin değeri özdeş olarak sıfırdır:

$$f(\alpha_{ij}, \chi_{ij}) = 0 \quad (3.41)$$

Bununla birlikte dönüşüm de bire-bir olmadığı için, (3.38)'deki düal bağıntı benzersiz değildir, bu nedenle, (3.39)'da olduğu üzere iç parametrelerin zamana göre türevlerine yönelik tek bir ifade yerine, bazı  $\dot{\lambda}$  çarpanları için aşağıdaki ifadeler verilmiştir.

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \quad (3.42)$$

(3.41) eşitliği ve (3.42)'nin ilk terimi elbette ki akma şartını ve ilgili yahut normal akış kuralını vermektedir fakat, her ikisi de gerçek gerilme aralığında değil de genelleştirilmiş gerilme aralığında ifade edilmektedir. Akma fonksiyonunun mevcudiyeti, hızdan bağımsız dissipasyon fonksiyonunun oluşumunun doğal bir sonucu olarak görülmektedir. Bu gerçek uzunca bir süredir Fransız literatüründe biliniyor olmasına rağmen (ör. bkz., Moreau (1970), Halphen & Nguyen (1975) ve Maugin'in yazdığı kitapta adı geçen diğer referanslar), son zamanlarda görüldüğü üzere Martin, Reddy ve diğer eş yazarların çalışmaları sayesinde İngiliz literatüründe de büyük oranda biliniyor hale gelmiştir, halbuki bu, bağımsız olarak Houlsby (1981, 1982) tarafından geliştirilmiştir. Daha önceki zamanlarda, bir kısım ispatlar, sınırlı olarak Thomas (1954) ve Sawczuk & Stutz (1968) tarafından sunulmuştur.

Hemen bunun akabinde ortaya çıkan soru şudur: “normalite ayrıca gerçek gerilme uzayında da geçerlimidir?” Bu soruyu yanıtlayabilmek için (3.41)'de  $\chi_{ij}$  değişkenin yerine  $\sigma_{ij}$  'yi kullanmamız gerekmektedir. Bu birleşik etki taşımayan malzemeler için (3.23) kullanılarak gerçekleştirilebilir ve gerçek gerilme uzayındaki her hangi bir akma fonksiyonu

$$\bar{f}(\alpha_{ij}, \sigma_{ij}) = f(\alpha_{ij}, \sigma_{ij} - \rho_{ij}(\alpha_{ij})) = 0 \quad (3.43)$$

denklemleri ile tanımlanabilir. Sonuç olarak, birinci eşitlik (3.42) normal bir akış kuralı standart formunda yazılabilir:

$$\dot{\alpha}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.44)$$

(3.43) dan, Termodinamik potansiyellerin plastik deformasyona bağlı olmasından dolayı ortaya çıkan gerilme değişkeni  $\rho_{ij}$  nin , Melan-Prager türünde kinematik sertleşme modellerinde “geri - (back)”, “ kaydırma – (shift) ” veya “sürüklenme – (drag)” gerilmelerinin rollerini üstlendiği görülmektedir.

Elasto-plastik bağlantı özelliği sergileyen daha genel malzemelere yönelik olarak Gibbs fonksiyonunu ve ikinci eşitlik (3.13) ü kullanarak (3.41)’teki genelleştirilmiş gerilmeyi değiştirebilir ve gerçek gerilme uzayındaki akma yüzeyini şu şekilde tanımlayabiliriz;

$$\bar{f}(\alpha_{ij}, \sigma_{ij}) = f\left(\alpha_{ij}, \frac{\partial G}{\partial \alpha_{ij}}(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})\right) \quad (3.45)$$

ve normal türevi de,

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \chi_{kl}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_{kl} \partial \sigma_{ij}} \quad (3.46)$$

formunda yazar ve bu nedenle, (3.42) ve (3.30)’ten hareketle akış kuralı aşağıdaki gibi ifade ederiz,

$$\dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_{kl} \partial \sigma_{ij}} \dot{\alpha}_{kl} = \dot{\epsilon}_{ij}^i \quad (3.47)$$

Sonuç olarak, genel birleşik (kapıl) malzemeler için bu, gerçek gerilme uzayında belirlenen normal akış kuralının ortay koyduğu plastik gerinme hızından çok gerinme hızının tersinmez kısmını ifade etmektedir. Maier ve Hueckel (1977) tarafından geliştirilenler gibi geleneksel formülasyondaki bu tarz malzemelerin modellenmesi için akış kuralının uygulanmasının sebebini açıklamaktadır. Akış kuralı doğal olarak mevcut formülasyon içerisinde bulunmaktadır, ancak, iki temel bünye denklemi ile tamamen tanımlanmış olan- Gibbs fonksiyonu ve dissipasyon (kayıp) fonksiyonu - tam anlamıyla açıklanabilmektedir; plastik potansiyel gibi yeni bir fonksiyon geliştirmeye gerek yoktur.

### (a) Örnek

Burada belirtilen genel termomekanik formülasyona bağlı olarak, metallere yönelik bünye yasalarının türetilmesine ait örnekler Ziegler (1981, 1983), Houlsby (1982), Ziegler ve Wehrli (1987), Martin ve Reddy (1993) ve Reddy ve Martin (1994) tarafından verilmiştir. Bir çok önemli noktaya işaret eden- özellikle izotropik ve kinematik sertleşmenin model içerisine girdiği ve iç kinematik sınırlamaların genel formülasyona nasıl dahil edileceğine dair- basit bir örnek üzerinde duracağız.

Klasik izotropik sertleşme gösteren Mises malzemesi, lineer elastik davranış sergileyerek (3.28)'te verilen formda olduğu gibi Gibbs fonksiyonu kullanılarak oluşturulabilir. Söz konusu Gibbs fonksiyonunda her hangi bir plastik terim mevcut değildir bu nedenle arka (back) gerilme sıfırdır ve  $\chi_{ij} = \sigma_{ij}$  yazılır. Dissipasyon fonksiyonu şu şekilde hesaplanır

$$D = k(\gamma^p) \sqrt{2\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p} \quad (3.48)$$

burada,

$$\dot{\gamma}_{ij}^p = \dot{\alpha}_{ij} - \frac{1}{3} \dot{\alpha}_{kk} \delta_{ij} \quad (3.49)$$

olup, Plastik gerinme hızları tansörünün şekil bozukluğunu (distorsiyon) ifade eden kısmını gösterir ve  $\dot{\gamma}^p$  ise distorsiyonel plastik gerinme tansörü ( $\dot{\gamma}_{ij}^p$ ) nün ikinci invariantını gösterir, ve  $k$  basit kayma esnasındaki mukavemeti temsil eder. Plastik sıkıştırılmama şartı bir yan sınırlandırma olarak aşağıdaki gibi ele alınabilir.

$$\dot{v}^p = \dot{\alpha}_{kk} = 0 \quad (3.50)$$

Bu denklemde  $\dot{v}^p$  hacimsel plastik gerinme hızıdır. Lagrange çarpanı  $\Lambda$ 'nın işleme sokulması ve genişletilmiş dissipasyon fonksiyonunun göz önüne alınması ile oluşturulan standart bir işlem kullanarak (ör. Lippman 1972) bu kısıtlama formülasyona dahil edilebilir.

$$D^* = k(\dot{\gamma}^p) \sqrt{2\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p} + \Lambda \dot{v}^p \quad (3.51)$$

Plastik gerinme hızına göre  $D^*$ 'nin diferansiyeli gerçek gerilme bileşenlerini verir (çünkü  $X_{ij} = \sigma_{ij}$ ):

$$p = \frac{\partial D^*}{\partial \dot{v}^p} = \Lambda \quad \text{ve} \quad s_{ij} = \frac{\partial D^*}{\partial \dot{\gamma}_{ij}^p} = \sqrt{2}k(\dot{\gamma}^p) \frac{\dot{\gamma}_{ij}^p}{\sqrt{\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p}} \quad (3.52)$$

Tahmin edildiği üzere ortalama basınç bünye denklemi ile belirlenemeyen pasif bir değişken konumundadır. (3.52) deki ikinci eşitliğin karesi alınarak gerinme hızı elimine edilirse, izotropik olarak sertleşen bir malzeme için Mises akma şartı ortaya çıkar.

$$s_{ij}s_{ij} = 2k^2(\dot{\gamma}^p) \quad (3.53)$$

Aynı şekilde genişletilen dissipasyon fonksiyonuna standart işlem uygulayarak Tresca kriterinin de oluşturulması mümkündür.



$$D^* = k(\gamma^p)(|\dot{\gamma}_1^p| + |\dot{\gamma}_2^p| + |\dot{\gamma}_{31}^p|) + \Lambda \dot{\nu}^p \quad (3.54)$$

Burada  $\dot{\gamma}_i^p$  plastik distorsiyon hızları tansörünün asal bileşenleridir. Sapma gerilme tansörünün asal bileşenleri şunlardır:

$$s_i = \frac{\partial D}{\partial \dot{\gamma}_i^p} = k(\gamma^p) \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_i^p) \quad (3.55)$$

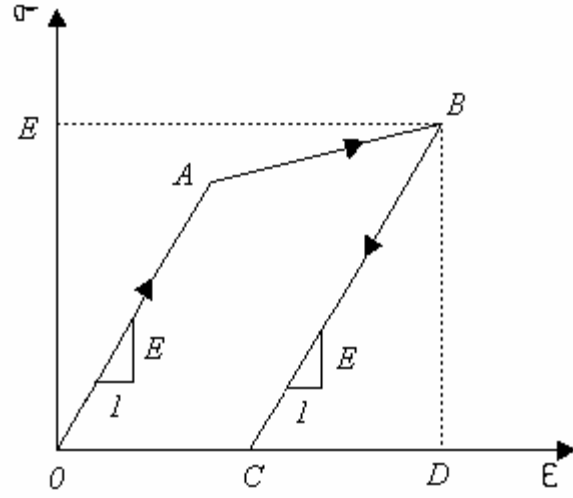
böylelikle,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = s_1 - s_2 = k(\operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_1^p) - \operatorname{sgn}(\dot{\gamma}_2^p)) \quad (3.56)$$

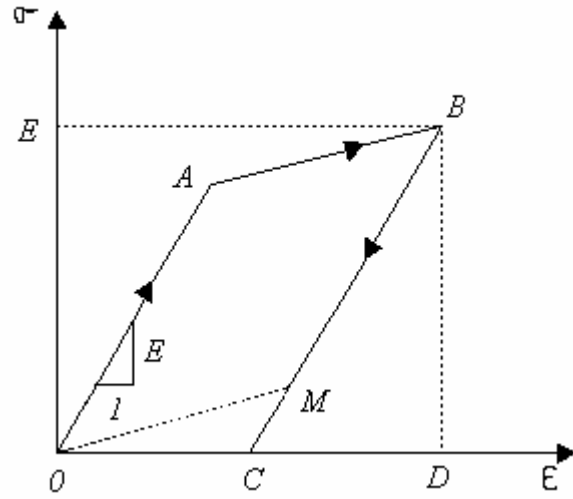
eğer  $\dot{\gamma}_1^p$  pozitif ve  $\dot{\gamma}_2^p$  negatif ise denklemin sonucu  $2k$ 'ya eşittir; ve  $\dot{\gamma}_1^p$  negatif ve  $\dot{\gamma}_2^p$  pozitif ise sonuç  $-2k$ 'dır. Bu iki temel distorsiyon hızlarından her hangi biri sıfır ise  $\sigma_1 - \sigma_2$  belirsizdir. Sonuç olarak,  $\dot{\gamma}_1^p$  ve  $\dot{\gamma}_2^p$  nin işaretleri aynı ise  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ 'dır. Bu, ancak  $\dot{\gamma}_3^p$  sıfırdan farklı ve  $\dot{\gamma}_1^p$  ve  $\dot{\gamma}_2^p$  ile aynı işarete sahip değil ise mümkündür. Bu değerler Tresca akma şartıyla uyumlu olan çeşitli yüzeylere karşılık gelmektedir. Akma fonksiyonunun kurulması bu iki klasik konumda da özellikle gerekmektedir fakat bu işlem, cebirsel olarak düşünüldüğünde daha kompleks dissipasyon fonksiyonları için çok daha karmaşık hale gelebilmektedir.

Kinematik sertleşmenin belirli tipleri, (3.20)'te olduğu gibi Gibbs fonksiyonu içerisindeki  $G_2(\alpha_{ij})$  terimi dahil edilerek model içerisine eklenebilir. Netice olarak da sıfırdan farklı ters (back) gerilme  $\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \chi_{ij}$  ifadesi ortaya çıkar. Şimdi, Mises modelinde akma şartı aşağıdaki gibi yazılır:

$$(s_{ij} - \rho'_{ij})(s_{ij} - \rho'_{ij}) - 2k^2(\gamma^p) = 0 \quad (3.57)$$



Şekil 3.1. İzotropik sertleşmenin göz önüne alındığı tek boyutlu elasto-plastik model



Şekil 3.2. Kinematik sertleşmenin göz önüne alındığı tek boyutlu elasto-plastik model

Burada  $\rho'_{ij}$  ters(back) gerilme tensörünün sapma kısmını teşkil etmektedir. Bu, Melan ve Prager (Lubliner 1990) tarafından ortaya atılan kinematik sertleşme türüdür. Bu nedenle, dissipasyon fonksiyonunda izotropik sertleşme davranışı oluşturulmuştur; diğer taraftan, termodinamik potansiyel fonksiyonu içerisinde kinematik sertleşme ortaya çıkmaktadır. Bu fark, üç terim halinde ayrıştırılabilen birim zamandaki deformasyonun işi sentezlenirken yansıtılmıştır. Bu terimler:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \rho_{ij} \dot{\alpha}_{ij} + \chi_{ij} \dot{\alpha}_{ij} \quad (3.58)$$

İlk iki terim serbest enerjinin değişim oranı  $\dot{F}$  yi oluşturmak için birleşir (serbest enerjinin değişim hızı), son iki terim de ‘plastik işin değişim hızını’ verir ancak son terime ilişkin enerji kayıp enerjisiyi gösterir. Sonuç olarak, arka‘back’ gerilme  $\rho'_{ij}$  ile ilişkili olan iş geri kazanılabilir (tersinir) özelliindedir ve kapalı bir çevrimde sıfır değerini alacaktır. Bunun tam tersi olarak da izotropik sertleşme bileşeni ile ilgili iş tamamıyla kaybolmuş ve geri kazanılması mümkün olmayan bir değerdir. Lubliner (1990) ve Maugin (1992) bu konuyu daha detaylı olarak inceleyip ve bu incelemeye kinematik sertleşme modellerinin daha kompleks şekillerini de dahil etmişlerdir.

Bu iki sertleşme tipi arasındaki fark lineer izotropik olarak sertleşen malzemenin tek eksenli davranışı ile  $\sigma = Y + h\alpha$  ‘lik bir akma gerilmesinin karşılaştırılması yapılarak basit bir şekilde gözler önüne serilebilir. Söz konusu denklemde  $Y$  başlangıç akma gerilmesi ve  $h$  sertleşme modülüdür ve aynen sabit akma gerilmesine sahip ( $X = Y$  olan) lineer sertleşen malzemelerde olduğu gibidir, ancak ters(back) gerilme  $\rho = h\alpha$  ile birlikte dikkate alındığında, ve bu nedenle bir kez daha  $\sigma = Y + h\alpha$  olacaktır. Her iki durumda da teğet modülü  $hE / (h + E)$ ’dir; burada  $E$  sabit Young modülüdür. Bu davranışlar şekil 1 ve 2’de verilmiştir ve kayda değer değişkenler tablo 2’de özet şekilde sunulmuştur. İzotropik sertleşme örneğinde de görüldüğü üzere kaybolan toplam enerji  $\int \chi da$  dır ve  $OABCO$  alanına eşittir, fakat kinematik sertleşmeye ilişkin aynı diyagramda sonuç sadece  $OABMO$  alanına karşılık gelir.

$OMC = \int \rho da = \frac{1}{2} h \alpha^2$  farkı, serbest enerjinin bir parçasıdır.

Tablo 3.2. Tek boyutlu plastisite modellerine ilişkin fonksiyon şekilleri

	İzotropik sertleşme	Kinematik sertleşme
Helmholtz serbest enerji $F$	$\frac{1}{2}E(\varepsilon - \alpha)^2$	$\frac{1}{2}E(\varepsilon - \alpha)^2 + \frac{1}{2}h\alpha^2$
Gibbs serbest enerji $G$	$\frac{1}{2}(\sigma^2/E) + \sigma\alpha$	$\frac{1}{2}(\sigma^2/E) + \sigma\alpha - \frac{1}{2}h\alpha^2$
Dissipasyon fonksiyonu $D$	$(Y + h\alpha) \dot{\alpha} $	$Y \dot{\alpha} $
Genelleştirilmiş gerilme $x$	$(Y + h\alpha)\text{sgn}(\dot{\alpha})$	$Y\text{sgn}(\dot{\alpha})$
Gerçek gerilme $\sigma$	$E(\varepsilon - \alpha)$	$E(\varepsilon - \alpha)$
Ters(back) gerilme $p$	0 (bu yüzden $\sigma = x$ )	$h\alpha$ (bu yüzden $\sigma = x + h\alpha$ )
Teğet modül	$hE/(h + E)$	$hE/(h + E)$
Şekil 1 ve 2'deki alanlar: $F$	BDC	OMBDO
Şekil 1 ve 2'deki alanlar: $G$	OEBCO	OEBMO
Şekil 1 ve 2'deki alanlar: $D$	OABCO	OABMO

## 4. BULGULAR

### 4.1. $D(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$ Şeklinin Gerilme-Bağımlı Dissipasyon Fonksiyonları

Toprağın ve kumun davranışlarının modellenmesine ilişkin bölümlerde gözenek basınçları göz önüne alınmaz ve bünye denklemlerindeki gerilmeler efektif (etkin) gerilmeler olarak görülür. Dissipasyon fonksiyonu normal olarak kinematik değişkenlerin bir fonksiyonu olarak düşünülmekte ve bu nedenle elasto-plastik malzemeler için en genel form  $D(\epsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$  olarak değerlendirilmektedir.  $\epsilon_{ij}$ , genel anlamda Gibbs serbest enerji fonksiyonu yardımıyla  $\sigma_{ij}$  ve  $\alpha_{ij}$  cinsinden ifade edildiği için dissipasyon fonksiyonunu  $D(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij})$  formu olarak düşünmekteyiz. Bu form, toprak mekaniğinde özel bir öneme sahiptir. Kohezyonsuz malzemelerin plastik davranışlarını temsil eden modellerin gerilme boyutlarına ilişkin tanımlayıcı parametreleri bulunmamaktadır ve bu nedenle dissipasyon fonksiyonunun boyutu (gerilme)(zaman)<sup>-1</sup> olmalıdır. Bu nedenle, dissipasyon fonksiyonu belirgin bir şekilde bir veya daha fazla gerilme bileşeni - ki bu durum genelde sürtünmeli malzemeler için geçerlidir- yahut sadece işleme dahil edilen özel model olarak fiziksel yorumu yapılabilen gerilme boyutlarına sahip bir fonksiyon ihtiva eder. Söz konusu ikinci durum, normal ön-konsolidasyon basıncına bağlı olan ilgili fonksiyondaki kritik hal modellerinde ortaya çıkar. Teorilere ilişkin ikinci sınıf örnekler bir sonraki bölümde ele alınmaktadır. Burada, gerilmeye bağlı dissipasyon fonksiyonları olan modellerin bazı genel özelliklerini inceleyeceğiz.

Ortogonalite prensibi uygulandığında genelleştirilmiş gerilmeye ilişkin standart ifadeler ortaya çıkar:

$$\chi_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_{ij}}(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}) \quad (4.1)$$

fakat dissipasyon fonksiyonundaki  $\sigma_{ij}$  terimleri, diferansiyeller alınırken, bağımsız sabit parametreler olarak ele alınırlar.

Dejenere Legendre transformasyonu düal akma fonksiyonunu vermektedir.

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \chi_{ij}) = 0 \quad (4.2)$$

Genelleştirilmiş normal akış kuralı ile birlikte,

$$\dot{\alpha}_{ij} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \chi_{ij}} \quad (4.3)$$

ve buna ilave olarak,

$$\frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \quad (4.4b)$$

Eşitlikleri göz önüne alınır, çünkü  $\sigma_{ij}$  ve  $\alpha_{ij}$  dönüşümdeki pasif değişkenlerdir (ekte yer alan tekil transformasyon tartışması; özel eşitlikler (A18)).

Bir önceki bölümde de belirtildiği üzere, akma fonksiyonu (4.2)'yi genelleştirilmiş gerilme uzayından gerçek gerilme uzayına dönüştürebiliriz ve aşağıdaki denklemi kullanarak bu uzayda bir akma fonksiyonu tanımlayabiliriz:

$$\bar{f}(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}) = f\left(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \frac{\partial G}{\partial \alpha_{ij}}(\sigma_{ij}, \alpha_{ij})\right) \quad (4.5)$$

Bu denklemin de normal türevi şu şekildedir:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ijl}} + \frac{\partial f}{\partial \chi_{kl}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_{ij} \partial \sigma_{kl}} \quad (4.6)$$

Bu ifadenin  $\dot{\lambda}$  ile çarpılması ve (3.30)'in kullanılması durumunda gerçek gerilme uzayındaki akış kuralı şu şekli alır:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^i = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.7)$$

Bu denklem de (3.46)'u gerilmeye bağlı dissipasyon fonksiyonlarının durumuna genellemektedir. Geri dönüştürülemez (tersinmez) gerilme hızı plastik gerilme hızına indirgenmektedir. Bu durum, malzeme birleşik etki taşımadığı zaman geçerlidir. Bu sonuç, genel anlamda,  $D$ 'nin açık bir şekilde gerilmeye bağlı olduğu gerçeğini ortaya koymaktadır, normalite (veya ortogonalite) kuralının gerçek gerilme aralığında geçerli olması beklenemez. Kuplajlı malzemeler için ise bu davranış genel termomekanik çerçevenin doğal bir sonucu olarak ortaya çıkar ve bünye denklemlerini tanımlamak için yeni bir fonksiyonunu oluşturulmasına gerek yoktur.

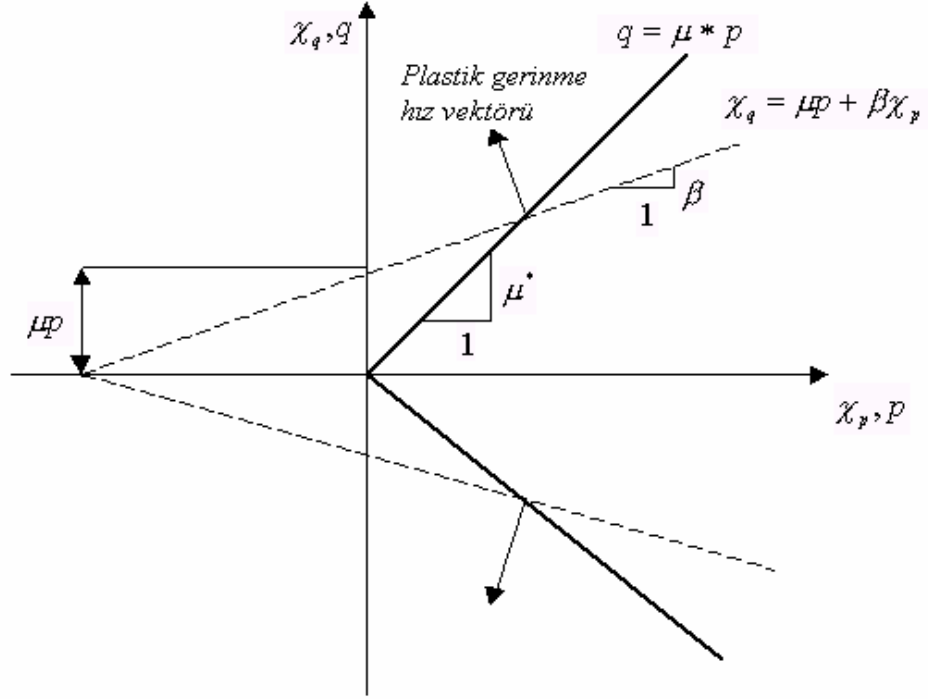
Koheziyonsuz topraklar için Drucker-Prager sürtünmeli model bir örnek olarak gösterilebilir (Drucker & Prager 1952). Aşağıdaki denklem, basit dissipasyon fonksiyonundan türetilir:

$$D = \frac{\mu}{\sqrt{3}} p \sqrt{2\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p} \quad (4.8)$$

Burada  $\mu$ , sabittir ve sürtünme açısıyla ilişkilidir ve  $\sqrt{3}$  faktörü toprak mekaniğinde genel olarak kullanılan notasyon ile uyumu sağlamak için denkleme sokulmuştur. Ekstra bir koşul olarak volumetrik ve kayma gerilmesi hızları arasında lineer bir bağıntı uygulayacağız.

$$\dot{v}^p + \frac{\beta}{\sqrt{3}} \sqrt{2\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p} = 0 \quad (4.9)$$

Burada  $\beta$  sabittir ve genişleme açısıyla bağlantılıdır (bu, genişleme açısının sürtünme açısı ile aynı olması gerektiği Drucker-Prager modelini genişletmektedir).



Şekil 4.1. Sürtünlü malzemeye ilişkin plastisite yüzeyi ve plastik potansiyel.

Modelde dilatasyonu takdim etmek için en uygun araç bir kısıtlamanın oluşturulması ve bunun kullanılmasıdır. (Chandler 1985; Houlsby 1981, 1993). Standart işlem değiştirilmiş dissipasyon fonksiyonuna artık uygulanabilmektedir

$$D^* = \frac{\mu p + \Lambda \beta}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p} + \Lambda \dot{v}^p \quad (4.10)$$

Burada  $\Lambda$  Lagrange çarpanı olarak değerlendirilmektedir. Plastik gerinme hızlarına göre diferansiyelleri alındığında, genelleştirilmiş gerilme tansörünün bileşenlerini vermektedir.

$$\chi_p = \Lambda \quad \text{ve} \quad \chi'_{ij} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\mu p + \Lambda \beta) \frac{\dot{\gamma}_{ij}^p}{\sqrt{\dot{\gamma}_{ij}^p \dot{\gamma}_{ij}^p}} \quad (4.11)$$



Burada  $\chi_p = \frac{1}{3} \chi_{ij}$  ve  $\chi'_{ij}$ ,  $\chi_{ij}$  in sapmaya ilişkin kısmını teşkil etmektedir. (4.11)

eşitlikleri arasında plastik gerinme oranları elimine edilirse  $(x_p, x_q)$  aralığında yer alan akma uzayı oluşmaktadır:

$$|\chi_q| = \mu p + \beta \chi_p \quad (4.12)$$

Burada,

$$\chi_q = \sqrt{\frac{3}{2} \chi'_{ij} \chi'_{ij}} \quad (4.13)$$

Genelleştirilmiş gerilme uzayında bulunan söz konusu akma fonksiyonu belirgin bir şekilde  $\mu p$  uyumuna sahip olmakla birlikte Kolomb tipidir; şekil 3'te gösterilen eğimin iki düz çizgisi bu fonksiyonu yansıtmaktadır. Gerinme hızları vektörü, (4.9) ve (4.12)'den görüldüğü gibi bu akma yüzeyine ortogonal bir vaziyettedir bu nedenle normalite kuralı (4.3)'te önceden belirtildiği üzere bu uzayda geçerlidir.

Şimdi, bu akma şartını gerçek gerilme uzayına transform edersek ve  $x_p = p$ ,  $x_q = q$  eşitliğini koyarak ve bu eşitlik de Gibbs potansiyelinin her hangi bir ters (back) gerilmenin bulunmadığı varsayılan bir eşitliktir- bu durumda (4.12) ifadesi aşağıdaki gibi yazılır:

$$q = \mu^* p \text{ ki burada } \mu^* = \mu + \beta \quad (4.14)$$

Bu eşitlik de kohezyonsuz toprağa ilişkin klasik Coulomb akma şartının (plastisite koşulunun) Drucker-Parger genellemesini teşkil etmektedir. Eğer  $\mu = 0$  ve  $\mu^* = \beta$  alınırsa dissipasyon fonksiyonu sıfır olur ve ancak o zaman normalite kuralı geçerli olur.

$\beta = 0$  olduğunda, malzeme sıkıştırılmazdır. Ters gerilmelerin eklenmesi,  $q - p$  uzayındaki akma çizgilerini ötelere ve normalite üzerinde etkisi yoktur.

Dissipasyon fonksiyonunun gerilmeye bağlı olmasını sağlayarak elde edilen ilave kompleksiteleri daha iyi anlayabilmek için Legendre dönüşümünün geometrik yorumlarından birini göz önünde bulundurmaya yararlı olur. Bunlar ekte daha ayrıntılı bir şekilde anlatılmıştır.  $\phi$  fonksiyonu şu şekilde tanımlanmaktadır:

$$\phi(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}) \equiv \sigma_{ij} \dot{\alpha}_{ij} - D(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \dot{\alpha}_{ij}) = 0 \quad (4.15)$$

Sadelik için, malzemenin sıfır ters(back) gerilme ile akupile olmadığı (ayrıştırıldığı) ve böylelikle  $\phi$ 'nin aynı şekilde sıfır olduğu kabul edilir. Plastik şekil değiştirmeyi sabit tutarak, buna  $\mathcal{S}$  diyelim, bu durumda (5.15) ifadesi plastik gerilme hızı  $\dot{\alpha}_{ij}$ 'nin her bir yönü için gerçek gerilme uzayında bir yüzeyi tanımlar.  $\dot{\alpha}_{ij}$ ,  $\Sigma$  ile gösterdiğimiz bir yüzeyi çevreleyen  $\mathcal{S}$  yüzeyler ailesinin tüm olası değerleri için değişiklik gösterdiğinden, akma yüzeyi gibi herhangi bir plastik deformasyonla elde edilemeyecek olan gerilme uzayındaki bölgeyi kapsar. Dissipasyon fonksiyonu ve akma yüzeyi ile ilgili bu geometrik bakış açısı Chandler tarafından (1985), gerilmeye bağlı dissipasyon fonksiyonları konusundaki tartışmasında kullanılmıştır. Tam bir termodinamik modeli göz önüne almamış olmasına ve Legendre dönüşümlerini kullanmamasına rağmen, Chandler'in iddiaları burada bahsedilenlere benzemektedir. Akma yüzeyi zarfı denklemi (4.15) ve,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} = \sigma_{ij} - \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}_{ij}} = 0 \quad (4.16)$$

arasındaki  $\dot{\alpha}_{ij}$  değerlerinin ortadan kaldırılmasıyla ve (5.15)'in plastik şekil değiştirme hızına göre türevinin alınması ile elde edilir. Ters (back) gerilme sıfır olduğunda, denklem (4.16), ortogonalite prensibi (3.15)'in yeniden ifade edilmesidir.

Ayrıca, akma yüzeyi  $\Sigma$  ve bir  $\mathcal{S}$  yüzeyine ait normal doğrultular ortak değme noktalarında aynı doğrultuda olmalıdırlar, böylece

$$\dot{\lambda} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\alpha}_{ij} - \frac{\partial D}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4.17)$$

Ayrıştırılmış (dekapıl) bir malzeme için akış kuralını temsil eder. Dissipasyon fonksiyonu  $D$  kesin bir şekilde gerilmeye bağlı olmadığı zaman, (4.15) ile tanımlanan  $S$  yüzeyleri hiper (aşırı) düzlemler haline gelir, bu düzlemlerin normaleri  $\dot{\alpha}_{ij}$  ile aynı yöndedir ve bunlar orijinden  $D / \alpha_m$  kadar bir mesafede bulunurlar. Burada  $\alpha_m$  uygun bir şekilde tanımlanmış tansör normunda bir parametredir. Çevrelenmiş akma yüzeyi  $\Sigma$  nın aynı zamanda  $\dot{\alpha}_{ij}$  s'nin doğrultusunda olması gerekir ancak bu durumda akış kuralı ile ilişkilendirilebilmesi sağlanır.

İzotropik bir malzeme için  $\phi$  fonksiyonu, gerilmeye ve gerilme hızlarına onların invaryantları ve birleşik invaryantları vasıtasıyla bağlıdır. Bu invaryantlar kullanışlı bir şekilde şöyle yazılabilir:  $tr(\sigma^m)$ ,  $tr(\dot{\alpha}^m)$ , ( $m=1, 2, 3$ ) ve  $tr(\sigma^p \dot{\alpha}^q)$ , ( $p, q=1, 2$ ) (Baker & Desai 1984; Prevost 1987). Bunun yanı sıra bu fonksiyon, gerilme boyutları ile birlikte tanımlayıcı maddesel parametresi bulunmayan 'tamamen sürtünmeli' malzemeler durumunda  $\dot{\alpha}_{ij}$  ve  $\sigma_{ij}$ 'ye göre birinci dereceden bir fonksiyon olmalıdır. Drucker-Prager modeli böyle bir örnek oluşturur. Diğer bir alternatif örnek ise dissipasyon fonksiyonu ile verilmiştir,

$$D = \mu \sqrt{\frac{8}{9} (tr(\sigma) tr(\sigma \dot{\alpha}^2) - (tr(\sigma \dot{\alpha}))^2)} \quad (4.18)$$

ve bu da Matsuoka-Nakai (1974) akma (plastisite) koşulunu oluşturmaktadır:

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} \equiv tr(\sigma) tr(\sigma^{-1}) = \mu^2 \quad (4.19)$$

burada  $I_i = 1, 2, 3$  üç standart gerilme invaryantıdır. Böyle bir model için,  $\phi = 0$  denklemleri, gerilme uzayında düzlemsel olmayan yüzeylerin bir ailesini oluşturur.

Bu, yukarıda da bahsedildiği üzere, sürekli olarak aşırı (hiper) düzlem aileleri oluşturan klasik teorinin gerilmeden bağımsız dissipasyon fonksiyonları ile belirgin bir zıtlık içerisindedir. Sürtünmeli bir malzeme, gerilme boyutunda her hangi bir parametreye sahip olmadığı için akma fonksiyonu her zaman gerilme bileşenlerine göre sıfırdan bir homojen fonksiyon olarak yazılabilir ve buna karşılık gelen akma yüzeyi köşesi orijinde olan genelleştirilmiş bir koni olmalıdır.

Verilen bir akma yüzeyi  $\Sigma$ , sonsuz tane zarf yüzeyi ( $S$ ) ailelerinden üretilebilir ve bu (4.17)'den elde edilebilen çok fazla sayıda akış yollarının bulunmasına karşılık gelir. Fakat, önceden tanımlanan bir akma yüzeyi yalnızca teğet hiper-düzlemlerin bir ailesinden üretilebilmektedir. Bir izotropik malzeme için hiper-düzlemlerin bu ailesine ilişkin eşitlikler şu şekilde olmalıdır

$$\phi(\sigma, \dot{\alpha}) = tr(\sigma \dot{\alpha}) - tr(\sigma) \psi_1(\dot{\alpha}) - \sigma_0 \psi_2(\dot{\alpha}) \quad (4.20)$$

Burada  $\psi_1$  ve  $\psi_2$ ,  $\dot{\alpha}_{ij}$  nin üç invariantsının birinci dereceden fonksiyonlarıdır ve  $\sigma_0$  sürtünmeli malzeme için sıfırdır ve diğer yönden bir takım malzemeleri belirleyen gerilme parametresidir. (4.20) 'nin diferansiyelini alır ve (4.17)' de yerine koyacak olursak, plastik gerilme hızı ile plastisite yüzeyi normalliği arasındaki fark  $\psi_1(\dot{\alpha}) \delta_{ij}$  formunda bir izotrop tansör olarak ortaya çıkar. Bileşenleri gerilmeden bağımsız olan bu tansör dilatasyonel gerilme hızını temsil etmektedir. Bu nedenle, izotropik malzemeler için dissipasyon fonksiyonu her zaman  $\Pi$  düzlemi (bunun anlamı; plastik gerilme hızının deviatorik kısmı bir  $\Pi$ - düzleminde bulunan akma yüzeyinin kesit alanına diktir.) ile ilişkili akış kuralını ortaya çıkarmaktadır ve normallik ancak gerilme hızının dilatasyonel kısmında bulunmamaktadır. Bu sonuç, daha önceleri daha sınırlı bir bağlamda Sawczuk & Stutz (1968) tarafından ortaya atılmıştır fakat toprak mekaniği literatüründe pek fazla bilinmemektedir. Deney yapan bilim adamlarının çoğu, pek çok davranışın büyük çoğunlukla bu türden olduğunu (ör. Lade & Kim 1988) ve  $\Pi$ -düzlemindeki normalitenin bir çok matematiksel kalıpta (ör. Prevost 1987) yaygın olan bir varsayım olduğunu görüşünü savunmaktadırlar. İkinci dereceden fonksiyonlar dışındaki diğer bütün durumlarda Legendre dönüşümünün uygulanması cebir açısından karmaşık olması nedeniyle,

(4.20)'deki fonksiyonların gerçek şekilleri normal olarak çok karışık bir yapıda olacaktır; akma fonksiyonu gerilme invaryantlarına göre cebirsel açıdan basit bir formda ifade edilse bile bu karmaşık yapı devam edecektir.

Neticede, şu çıkarımda bulunabiliriz: bir izotropik malzemenin lineer bir dissipasyon fonksiyonu ile ilişkilendirilmesi her zaman mümkündür; bu da, verilen her hangi bir akma yüzeyi ile gerektiği şekilde sapma düzleminde normalitesi olan bir akış kuralı üretmektedir; ancak bu teori, bazı genel davranışlara ilişkin genel formları olan lineer olmayan dissipasyon fonksiyonlarının oluşturulması ihtimalini de ihtiva etmektedir.

#### 4.2. Kritik Hal Modelleri

Kritik hal formülasyonları kullanan elasto-plastik modeller katıların özellikle de normal olarak konsolide olan killerin mekanik davranışını değişik ve önemli açılardan başarılı bir şekilde tanımlamaktadır. Teoriler, normal olarak işle ilgili olan değişkenler açısından geliştirilebilir ve teoremin değeri üç eksenli testlerle belirlenebilir; bunlar isimle belirtilmesi gerekirse hacimsel ve efektif kayma gerinmeleri  $\nu$  ve  $\gamma$ , ortalama efektif basınç  $p$ , ve asal gerilme farkı  $q$ .

Bu tarz bir malzemeye dair dissipasyon fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$$D = \Pi(\nu^p)T(\dot{\nu}^p, \dot{\gamma}^p) \quad (4.21)$$

Burada  $\nu^p$  plastik hacimsel gerilme,  $\dot{\nu}^p$  hacimsel gerilme hızının plastik bileşeni,  $\dot{\gamma}^p$  kayma gerinmesi hızının plastik bileşeni anlamında kullanılmıştır.  $\Pi$  fonksiyonu gerilme boyutunda olup hacimsel sertleşme davranışını tanımlar. (zaman)<sup>-1</sup> boyutuna sahip olan  $T$ , enerji dissipasyon hızını yönlendirir ve bu yüzden akma yüzeylerinin şeklini belirler. Orijinal ve Modifiye Cam-kili için bu iki fonksiyonun şekli Modaressi ve çalışma arkadaşları (1994) ile Houlsby (1981) tarafından bulunmuş ve sırasıyla aşağıda Tablo 2'de verilmektedir. Ayırıştırılmış bir model varsayılarak Gibbs fonksiyonu (3.5)'den şu şekilde ifade edilebilir:

$$G(p, q, v^p) = G_1(p, q) + p v^p + q \gamma^p + G_2(v^p, \gamma^p) \quad (4.22)$$

Elastik davranışı yöneten  $G_I$  fonksiyonu için (3.28) formu sabit elastisite modülünü verir. Ancak toprak için anlık yığın (bulk) modülü sabit değildir ve kayma modülünün hala sabit olması için,  $G_I$  de gerek duyan ortalama efektif basınçla orantılıdır:

$$G_1(p, q) = \kappa^* p (\ln p - 1) + \frac{q^2}{6G} \quad (4.23)$$

Gerilme gerinme ilişkileri ise şöyledir:

$$v^e = \kappa^* \ln p \quad \text{ve} \quad \gamma^e = \frac{q}{3G} \quad (4.24)$$

$$\dot{v}^e = \kappa^* \frac{\dot{p}}{p} \quad \text{ve} \quad \dot{\gamma}^e = \frac{\dot{q}}{3G} \quad (4.25)$$

Kritik durum teorileri ile ilgili çoğu formülasyonda anlık yığın (bulk) modülü aynı zamanda mevcut spesifik hacim  $V$ 'ye veya  $e$  oranına bağlıdır (Wood 1990), ve ilk denklem şu şekilde değiştirilir:

$$\dot{v}^e = \frac{\kappa^* \dot{p}}{1 + e p} \quad (4.26)$$

$e$  plastik deformasyona bağlı olduğu için, böyle bir model kapıl (birleşik) etkiler bulundurulur ve 4.23'de tartışılan tüm kompleksiteleri bünyesinde bulundurulur. Ancak bu kapıl etkileşim çok zayıftır ve küçük gerinme teorisinde ancak ikinci dereceden bir etki olarak gözükür. Ayrıca Butterfield (1979), çoğu durumda deneysel verilerin  $\ln V$  ve  $\ln p$  arasındaki doğrusal bağıntıları tahmin eden (4.24) ve (4.25) ilişkileri tarafından çok iyi temsil edildiğini belirtmektedir. (4.26) ile ifade edildiği gibi, bu durumda  $V$  ile  $\ln p$  arasında da lineer bir ilişki vardır.

$T(\dot{v}^p, \dot{\gamma}^p)$  gerilme hızlarına göre birinci dereceden homojen olduğundan dolayı onun dejenere Legendre dualinin  $f(x,y)=0$  olduğunu söyleyebiliriz, burada  $x = \partial T / \partial \dot{v}^p$  ve  $y = \partial T / \partial \dot{\gamma}^p$  dir. (3.15) ve (4.21)'den  $x: X_p/II$  ve  $y: X_q/II$  iken  $X_p$  ve  $X_q$  genelleştirilmiş gerilme tansörünün ilk iki invariantsıdır. Bu yüzden akma şartının aşağıdaki gibi ifade edilmesi gerekir:

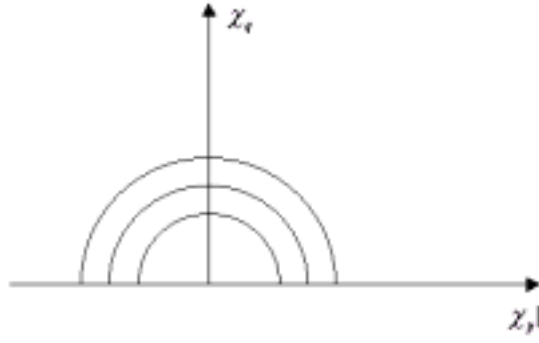
$$f\left(\frac{\chi_p}{\Pi(v^p)}, \frac{\chi_q}{\Pi(v^p)}\right) = 0 \quad (4.27)$$

Sabit bir plastik hacim deformasyonundaki akma yüzeyleri genelleştirilmiş gerilme uzayında bu yüzden geometrik olarak kendilerine benzer eğrilerdir. Gerçek gerilme uzayında akma fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

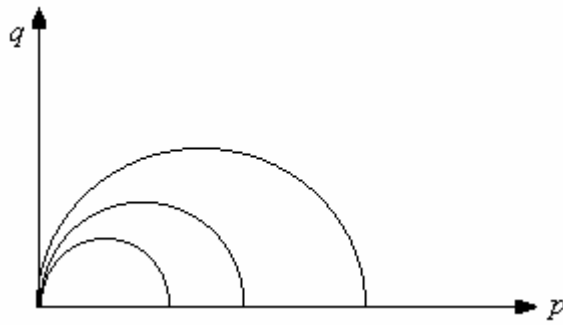
$$f\left(\frac{p - \rho_p}{\Pi(v^p)}, \frac{q - \rho_q}{\Pi(v^p)}\right) = 0 \quad (4.28)$$

Tablo 4.1.  $p_0$  normal ön konsolidasyon basıncı

	Orijinal Cam-kili	Modifiye edilmiş cam-kili
$\Pi(v^p)$	$p_0(v^p)$	$\frac{1}{2} p_0(v^p)$
$T(\dot{v}^p, \dot{\gamma}^p)$	$M\dot{\gamma}^p \exp((\dot{v}^p / M\dot{\gamma}^p) - 1)$	$\sqrt{\dot{v}^{p2} + M^2 \dot{\gamma}^{p2}}$
$\rho_p$	0	$\frac{1}{2} p_0(v^p)$
$p$	$p_0 T / M\dot{\gamma}^p$	$\frac{1}{2} p_0 (1 + \dot{v}^p / T)$
$q$	$p_0 T (1 - \dot{v}^p / M\dot{\gamma}^p) / \dot{\gamma}^p$	$\frac{1}{2} p_0 M^2 \dot{\gamma}^p / T$
Akma şartı	$q = Mp \ln(p_0 / p)$	$q^2 = M^2 p (p_0 / p)$
Akış kuralı	$\dot{v}^p / \dot{\gamma}^p = M - (q / p)$	$\dot{v}^p / \dot{\gamma}^p = M^2 (p^2 - q^2) / 2pq$



Şekil 4.2. Genelleştirilmiş basınç uzayında akma yüzeyleri



Şekil 4.3. Gerilme uzayındaki akma yüzeyleri

Burada,  $\rho_p$  ve  $\rho_q$  (6.2)'deki  $G_2$ 'nin diferansiye edilmesi ile verilen, geri (back) gerilme tansörünün ilk iki invariantsıdır.

Tablo 3'de de gösterildiği gibi orijinal Cam-Kili modeli geri (back) stresin kullanımına gerek olmadan üretilebilir ve böylece tüm plastik iş kaybedilmiş olur. Ancak modifiye bir Cam-kiline ait bünye denklemini üretmek için Houlsby (1981) genelleştirilmiş gerilme uzayında benzer akma noktalarını kaydırma etkisine sahip olan  $\rho_p = \frac{1}{2} p_0(v^p) = \Pi(v^p)$  formunda geri (back) gerilmesini bulmuştur, böylece bunların hepsi de gerçek gerilme alanında (şekil 4.2 ve 4.3) orijinden geçmek durumundadırlar. Ancak, dissipasyon fonksiyonuna  $\frac{1}{2} p_0(v^p) \dot{v}^p$  terimini ekleyerek aynı akma yüzeyi ve akış kuralının formal olarak üretilebileceğini de belirtmek gerekir, böylece



$$D = \frac{1}{2} \rho_o (v^p) (\sqrt{\dot{v}^{p^2} + M^2 \dot{\gamma}^{p^2}} + \dot{v}^p) \quad (4.29)$$

ve  $G_2$  uygun şekilde elde edilirken ve  $\rho_p$  ise sıfır olur. Bu modifiye edilmiş dissipasyon fonksiyonu kesinlikle  $G \geq 0$  temel gereksinimini karşılar, ancak (4.29)'a eklenen terim entegre edilebilirdir ve bu yüzden kapalı bir döngüde iş terimine hiç bir katkısı olmaz.

Dissipasyon gücünü; serbest enerjinin değişim hızı  $(\dot{F})$  ve (3.7)'de verilen  $D$ 'nin dissipasyonu şeklinde ayrıştırmak bir çok farklı şekilde gerçekleştirilebilir, ancak  $D$ 'nin entegre edilebilir bileşenleri olmadığı şeklinde bir yargıda ısrar edilmemelidir. Formalizmin kullanıldığı herhangi bir olayda Modifiye Cam-Kili modelinde sadece yapılan işin yarısı izotropik plastik sıkıştırmada kaybedilmiş olur. Orijinal Cam-Kili oluşumu tüm plastik işin kaybedildiğini varsayarken modelin bu yönü tatmin edici değildir, çünkü ilgili akım kuralı aslında izotropik sıkıştırma sırasında ( $q=0$ ) plastik kayma gerinmelerini tahmin eder ve sınır yüzeyinin bu uçlarında bir süreksizlik empoze etmek gerekir. Elbette bu özellik modifiye modellerin geliştirilmesine rehberlik edecektir.

### 4.3. Nonlinear Analiz İçin Örnek Problem

Bu problemde hem bir ölü yükün hem de çevrimsel(tekrarlanan) bir noktasal yükün etkisi altında kalan elasto-plastik dairesel bir plak için non-linear analiz yapılmıştır. Dışarıdan uygulanan yükleri tanımlamak için değişik yük adımları, bir yük adımı için alt adımların maksimum ve minimum sayısı, yük adımına ait opsiyonlar ve aynı zamanda kinematik sertleşmeyi dikkate alarak plastisite eğrisi tanımlanmaktadır. Bu örnekte, aynı zamanda non-linear bir analiz için ANSYS programının oluşturduğu monitör dosyasının da nasıl yorumlanacağını açıkça ifade etmiş olacağız.

ANSYS sonlu elemanlar paket programı non-linear bir analizde bir çözüm üretmek için artımsal çözüm prosedürünü kullanır. Bu örnekte, bir yük adımı içerisindeki toplam dış yük belli sayıdaki alt adımlar üzerinde artımlar şeklinde uygulanmıştır. Non-linear problemlerin çözümlenmesinde kullanılan pek çok sayısal analiz teknikleri her bir alt adımı çözmek için Newton-Raphson iteratif prosedürünü kullanır. ANSYS programının çözüm modülünde de tercihe bağlı olarak bu prosedür ve benzeri iteratif teknikler yer almakta ve uygulanabilmektedir. Öncelikle her bir yük adımı için alt adımların sayısı belirlenmelidir çünkü bu sayı her bir yük adımının birinci alt adımında uygulanan başlangıç yük artımının ölçüsünü kontrol eder. ANSYS programı bir yük adımındaki her bir ardışık alt alt adım için yük artımının ölçüsünü otomatik olarak belirler. Bu ardışık alt adımlar için yük artımının ölçüsü, alt adımların maksimum ve minimum sayısını belirleyerek kontrol edilebilir. Eğer alt adımların sayısı tanımlanırsa; maksimum ve minimum alt adım sayısı aynı olmak zorundadır ve ANSYS yük adımı içerisinde bütün alt adımlar için sabit bir yük artımını kullanır.

#### 4.3.1. Problemin Tanımı

Bu örnek problemde, modeli mesh etmek için aksel simetri opsiyonuna sahip dört düğüm noktalı PLANE42 elemanı seçilmiş ve incelenen plak için aksel simetrik bir model kullanılmıştır. Geometrik olarak non-linear bir analiz gerçekleştirilmiştir. Kinematik kısıtlamalar aşağıdaki gibi belirlenmiştir: plağın merkezine yerleştirilen

düğüm noktaları radyal yer değiştirme göstermeyecek şekilde kısıtlanmıştır. Dış kenarlara yerleştirilen düğüm noktaları ise hem radyal hem de eksenel yer değiştirme yapamayacak şekilde sınırlandırılmıştır. Ölü yük birinci yük adımı esnasında uygulanacak, tekrarlı noktasal yük ise arka arkaya gelen ardışık altı yük adımı içerisinde uygulanacaktır.

0.125 N/m<sup>2</sup>'lik toplam yükün 1/10 unu teşkil eden birinci alt adım üzerinden uygulanan ölü yük artımını garanti altına almak için, ilk yükün uygulanması esnasında 10 tane alt adım belirlenmiştir. Malzemenin non-lineer bünyesel davranışı hakkında henüz kesin bir bilgiye sahip olmadığımızdan, alt adımların sayısı maksimum 50, minimum 5 olacak şekilde belirlenmiştir. Çözüm esnasında, plak yüksek mertebeden non-lineer bir davranış gösterirse yük artımları toplam yükün 1/50 si kadar olan artımlarda kesilebilir. Eğer plak yumuşak bir non-lineer davranış gösterirse yük artımları toplam yük ölçüsünün 1/5 ine kadar arttırılabilir.

Tekrarlı noktasal yükün uygulanması için ardışık altı yük adımı belirlenmiştir, bu prosedür esnasında, maksimum 25 ve minimum 2 alt adımlara sahip olan 4 adet alt adım uygulaması da belirlenecektir. Bu örnekte, noktasal tekrarlı yükün uygulandığı yerdeki düğüm noktalarının düşey yer değiştirmelerinin bütün çözüm üzerindeki geçişini takip edebileceğimizi göstereceğiz, bu işlemi aynı zamanda sabitlenmiş kenarların altına yerleştirilmiş düğüm noktalarındaki reaksiyon kuvvetleri için de yapabiliriz.

#### 4.3.2. Problemin Özel Şartları

Dairesel plak 1.0 m çapında ve 0.1 m kalınlığındadır. Bu problem için aşağıdaki malzeme özellikleri kullanılmıştır:

$E = 16911.23 \text{ Pa}$  ( malzemenin elastisite modülü).

$\nu = 0.3$  (Poisson oranı)

Malzeme için kinematik sertleşmeyi ifade eden plastisite eğrisine ait deneysel veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.2. kinematik sertleşmeyi ifade eden plastisite eğrisine ait deneysel veriler

Logaritmik gerinme	Gerçek gerilme (Pa)
0.001123514	19.00
0.001865643	22.80
0.002562402	25.08
0.004471788	29.07
0.006422389	31.73

Plak üzerine etkiyen ölü yük,  $0.125 \text{ N/m}^2$ 'lik üniform basınç etkisi şeklinde değerlendirilmektedir. Tekrarlı noktasal yükün geçmişi problemin akışı ve çözümü esnasında ifade edilecektir.

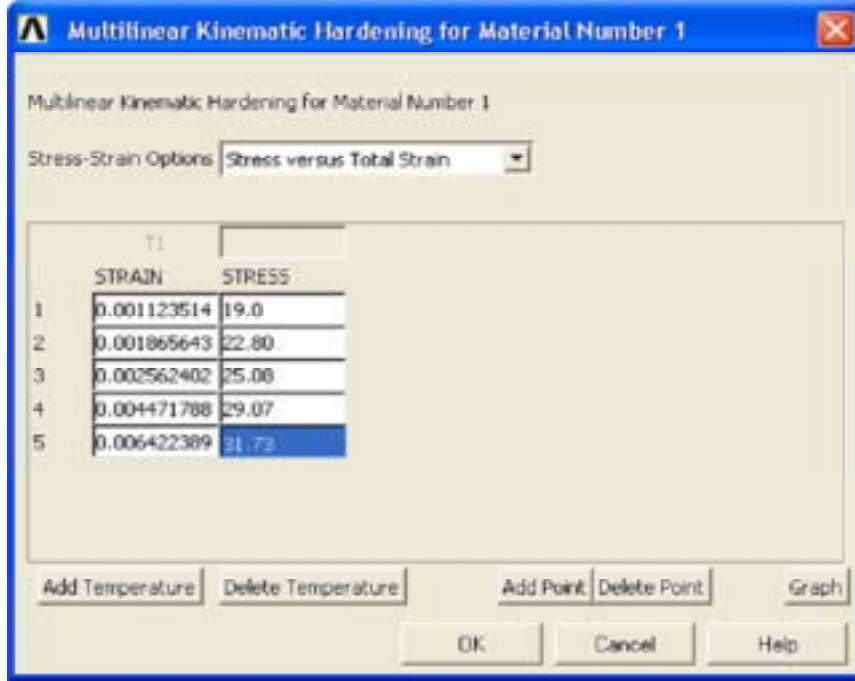
Bütün sayısal analizlerde olduğu gibi bu problemin çözümü de üç aşamada gerçekleştirilecektir.

Birinci aşama da yani ön işlem aşamasında; kullanılacak eleman tipi ve opsiyonları belirlenecek, malzeme özellikleri girilecek ve problemin geometrisi tanıtılacak ve mesh (elemanlara bölme) işlemi gerçekleştirilecektir.

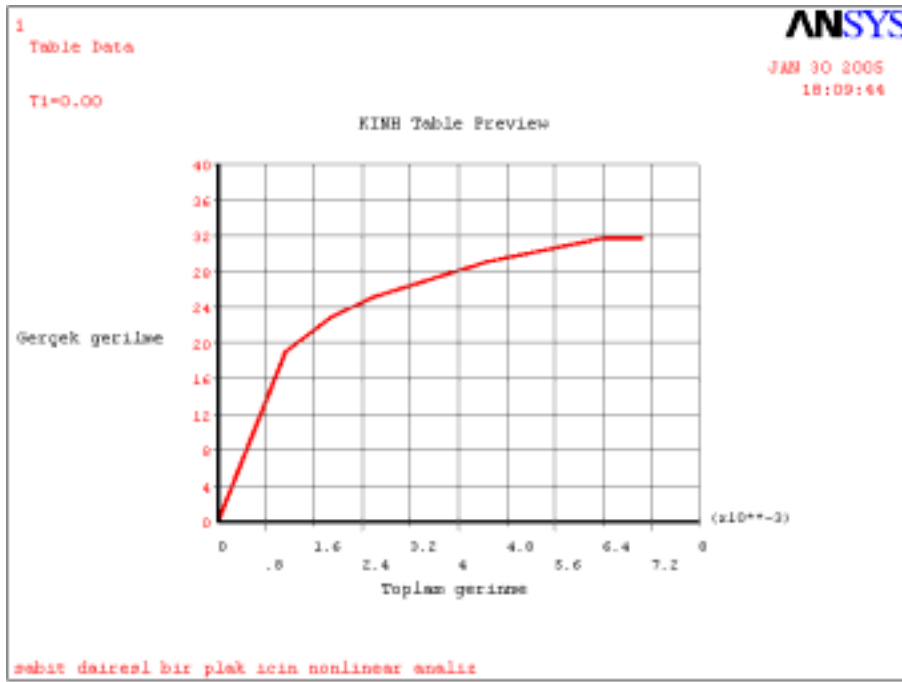
İkinci aşama çözüm aşaması olup yük adımları ve opsiyonları belirlenecek, gerekli kısıtlamalar konduktan sonra uygun bir çözüm prosedürü kullanılarak problem çözdürülecektir.

Üçüncü aşamada ise elde edilen sonuçlar incelenecek ve gerekli yorumlar yapılacaktır.

Aşağıda özellikle kinematik sertleşme özelliklerinin programa tanıtıldığı ve grafiğinin çizildiği ifade edilmektedir.



Şekil 4.4 Kinematik sertleşme için gerilme- gerinme değerlerinin programa tanıtılması

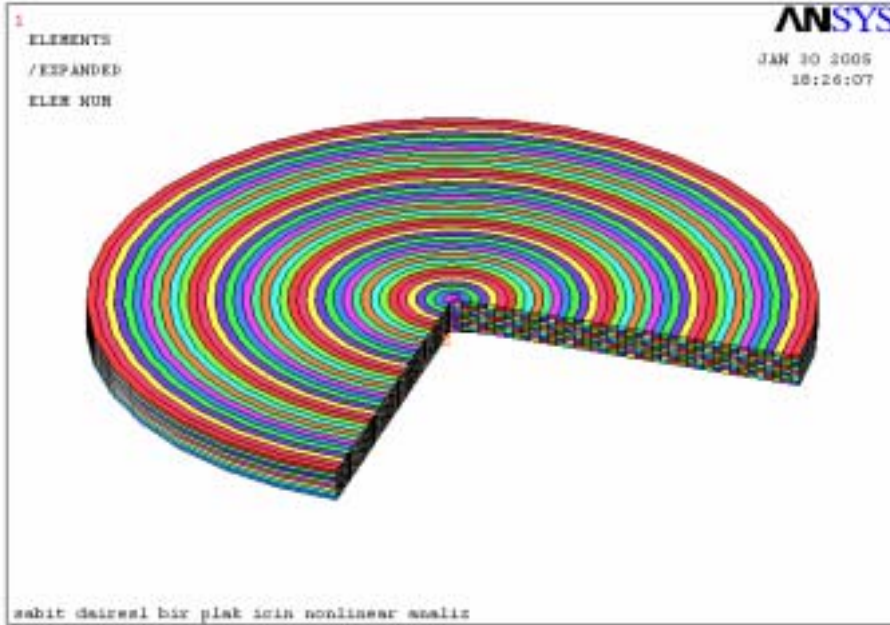


Şekil 4.5. kinematik sertleşme için gerilme – gerinme eğrisi

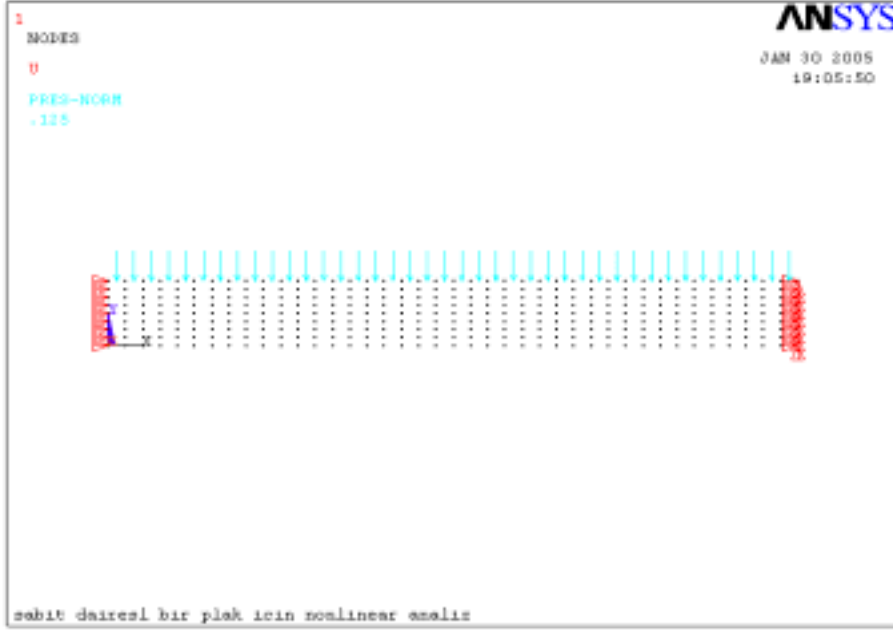


Şekil 4.6. Geometrinin Sonlu Elamanlar Modelinin oluşturulması

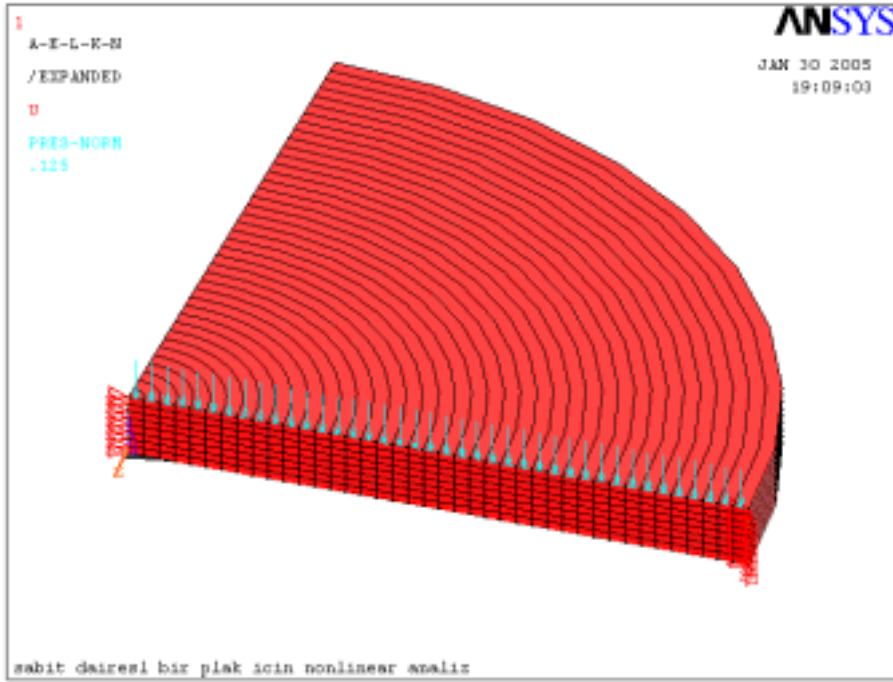
Burada 320 tane eleman düzgün mesh jenerasyonu ile oluşturulmuştur. Problem aksenal simetriye sahip olduğu için yukarıda verilen kesitin  $\frac{3}{4}$  lük genişlemesi aşağıda gösterilmektedir.



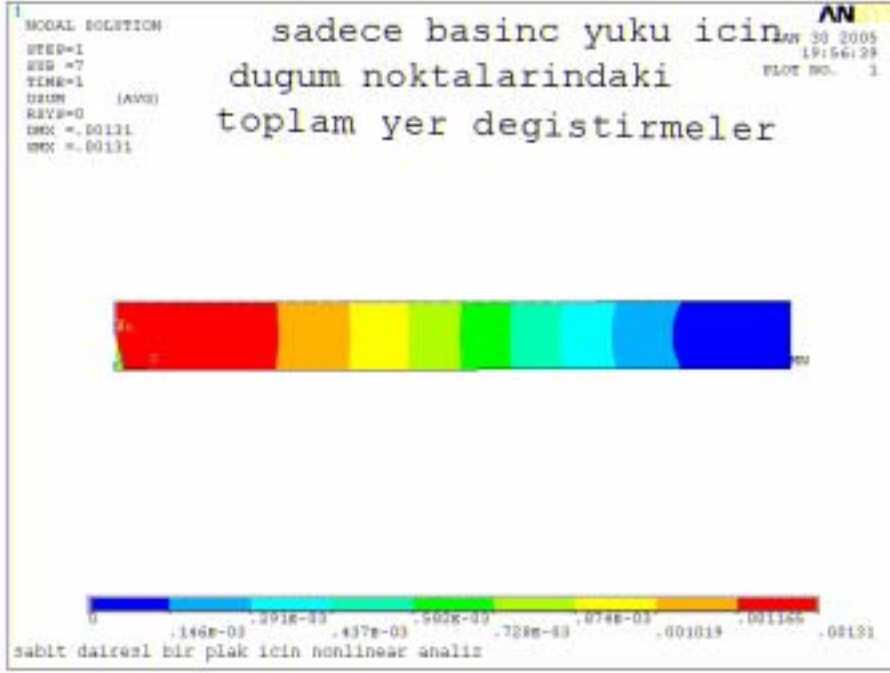
Şekil 4.7. Oluşturulan elamanların  $\frac{3}{4}$  oranında genişletilmiş aksenal simetrik görünümü



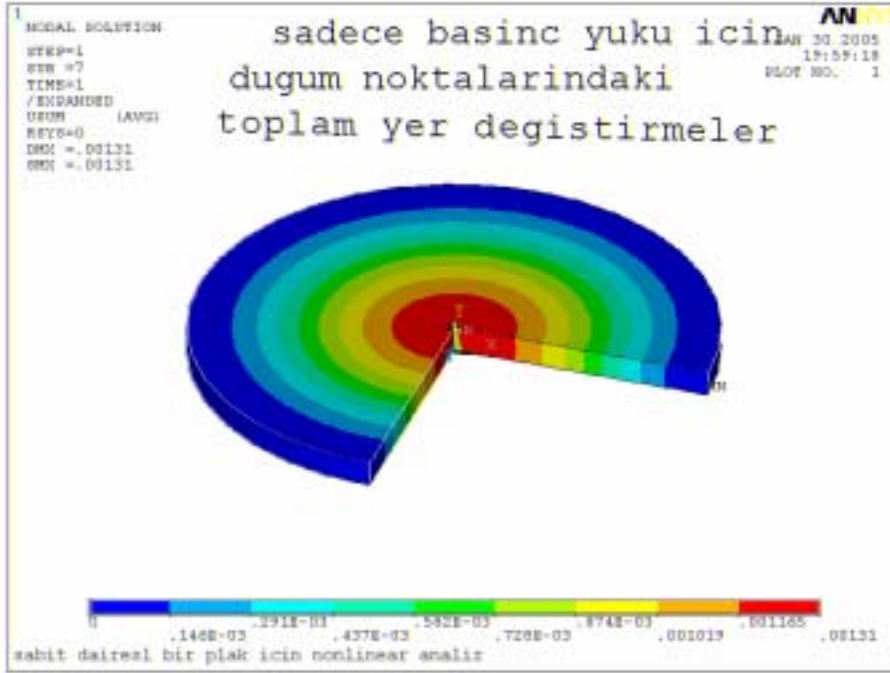
Şekil 4.8. Dügüm noktalarına uygulanan kuvvetlerin gösterilimi



Şekil 4.9. Elemanlar üzerine uygulanan kuvvetlerin gösterilimi

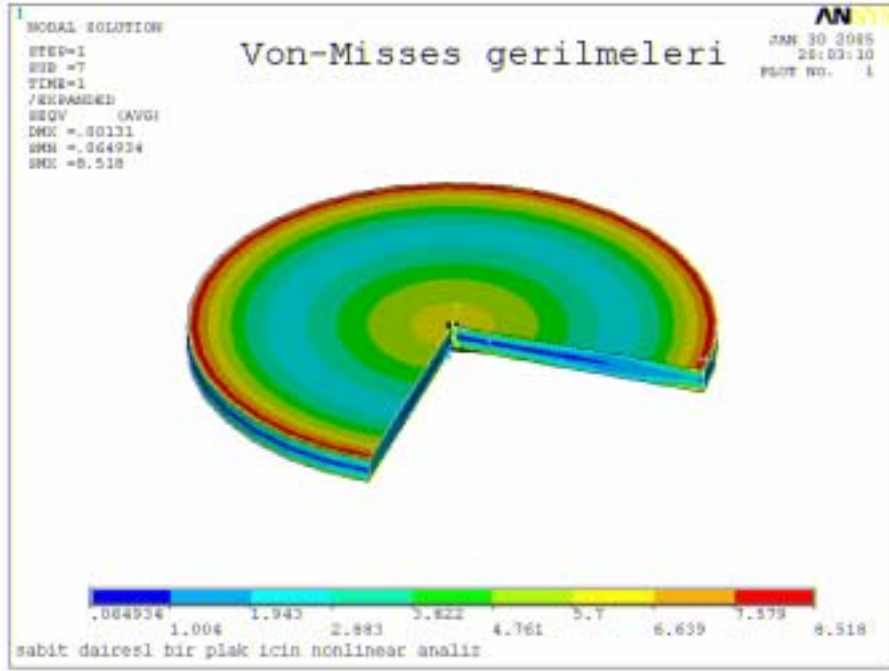


Şekil 4.10. Sadece basınç yükü altında düğüm noktalarının toplam yer değıştirme

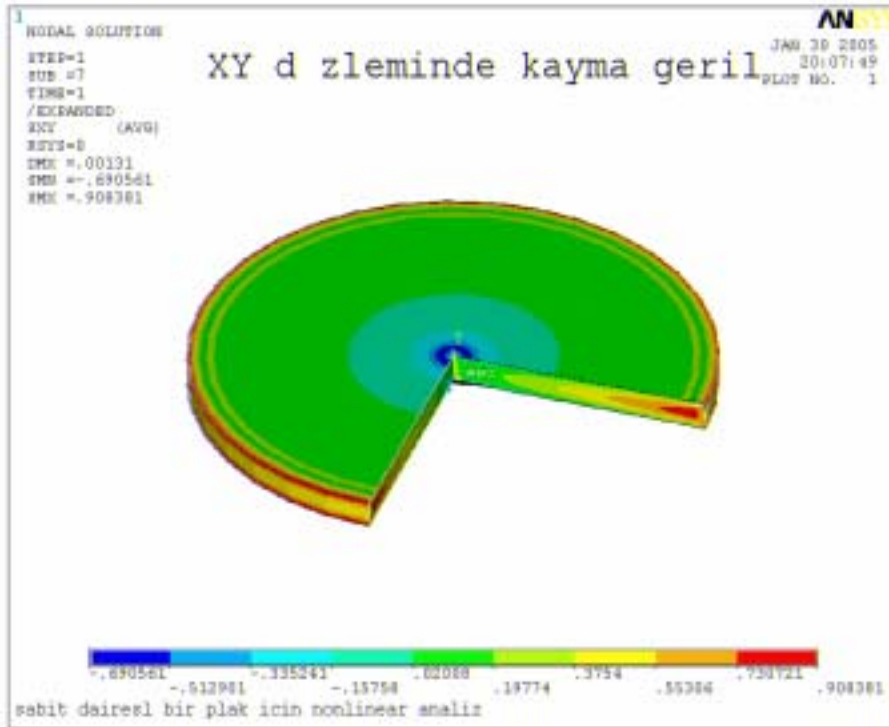


Şekil 4.11. Basınç yükü altında düğüm noktalarındaki toplam yer değıştirmenin  $\frac{3}{4}$  oranında genişletilmiş aksenal simetrik görünümü

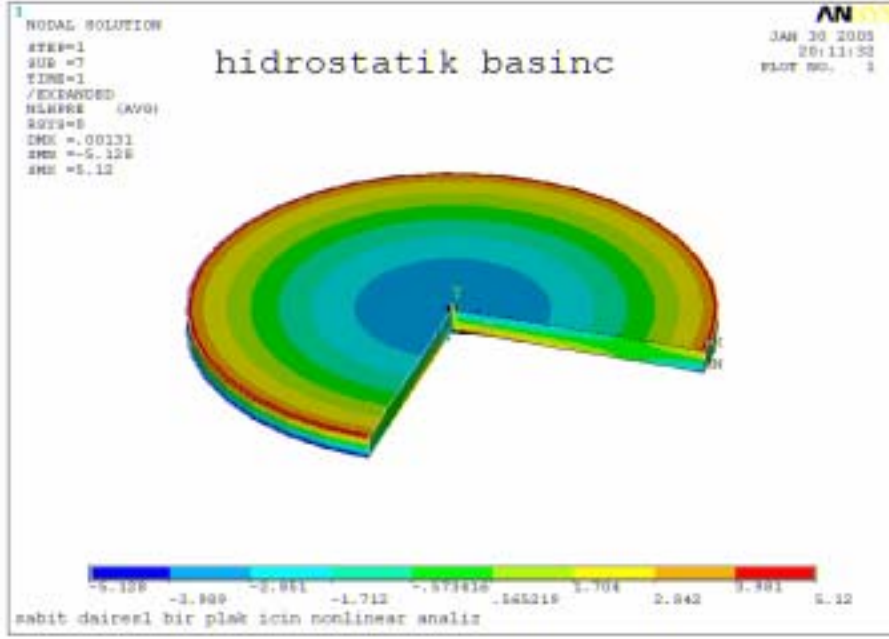




Şekil 4.12. Von – Misses (ortalama) gerilmeler

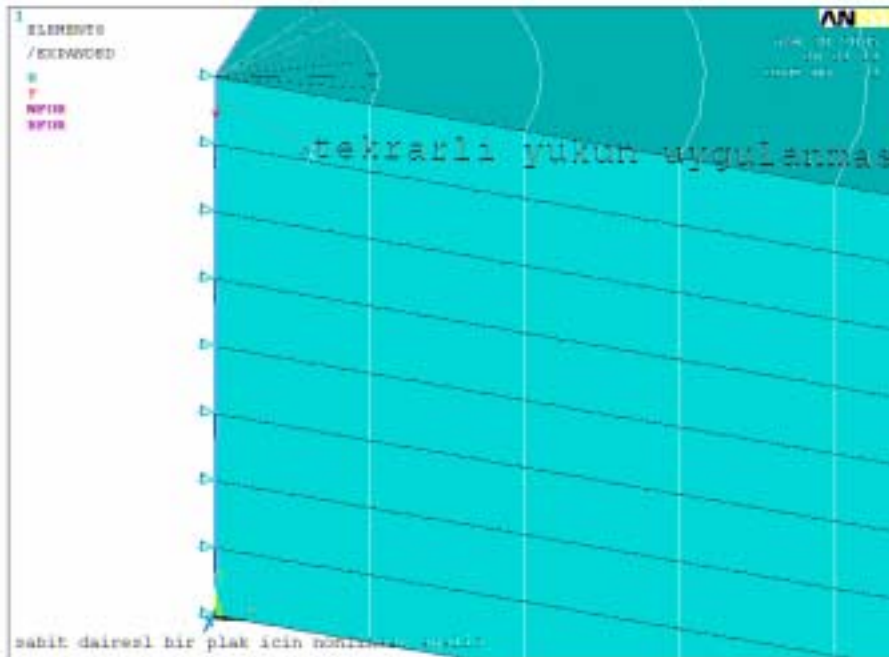


Şekil 4.13. XY düzlemindeki kayma gerilmeleri



Şekil 4.14. Hidrostatik basınç

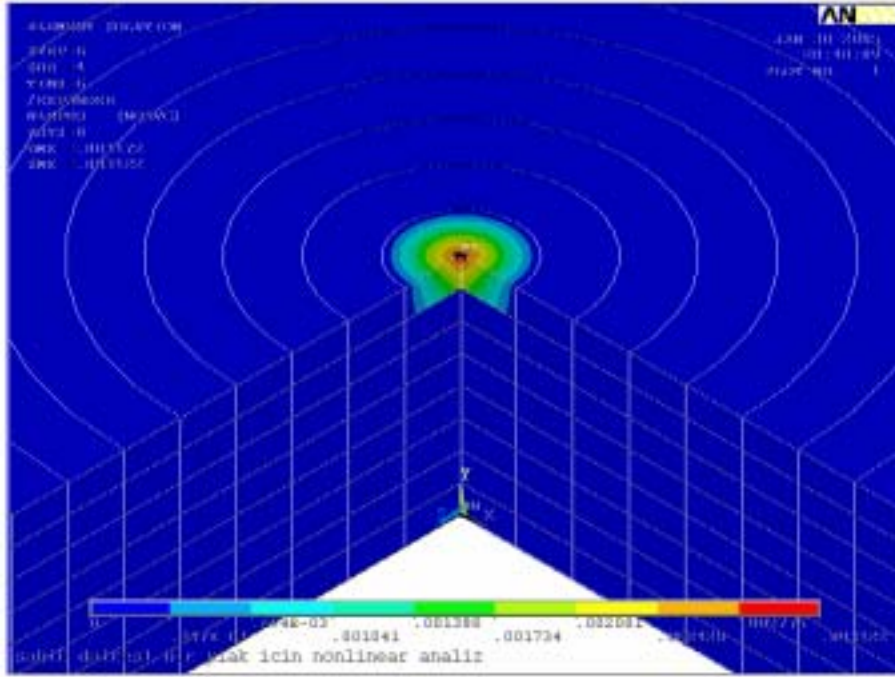
Buraya kadar herhangi bir plastik gerilme ve deformasyon gözlenmemektedir. Problemin bu aşamasından sonra tekrarlı yükler uygulanacak ve elde edilen sonuçlarda plastik gerilme ve deformasyonların da etkisi de görülmeye başlayacaktır.



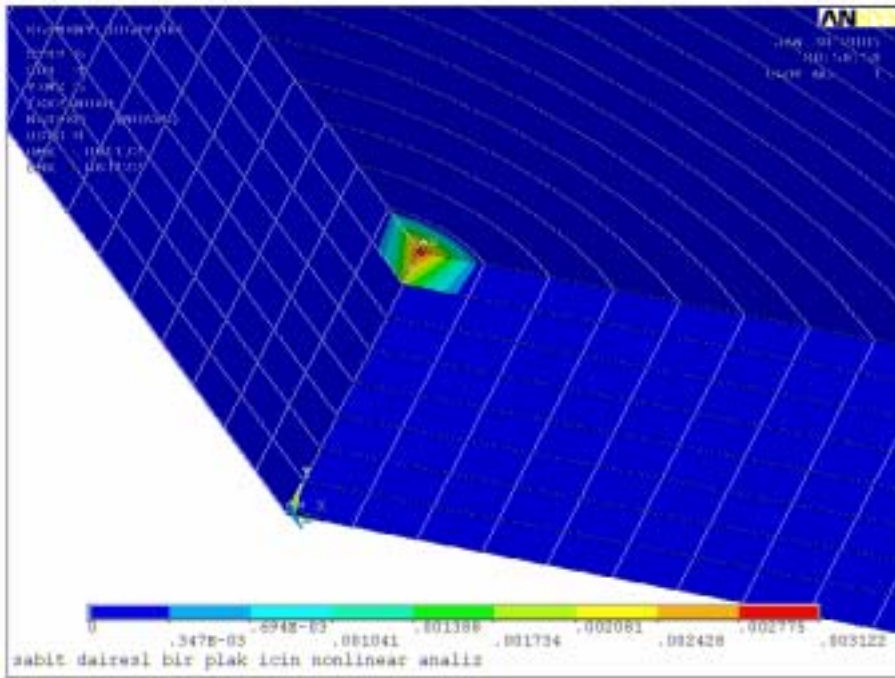
Şekil 4.15. Tekrarlı yükün uygulanması

Tablo 4.3. Seçilen düğüm noktasındaki düşey yer değiştirme ve FY kuvvetinin her bir yük adımında aldığı değerler

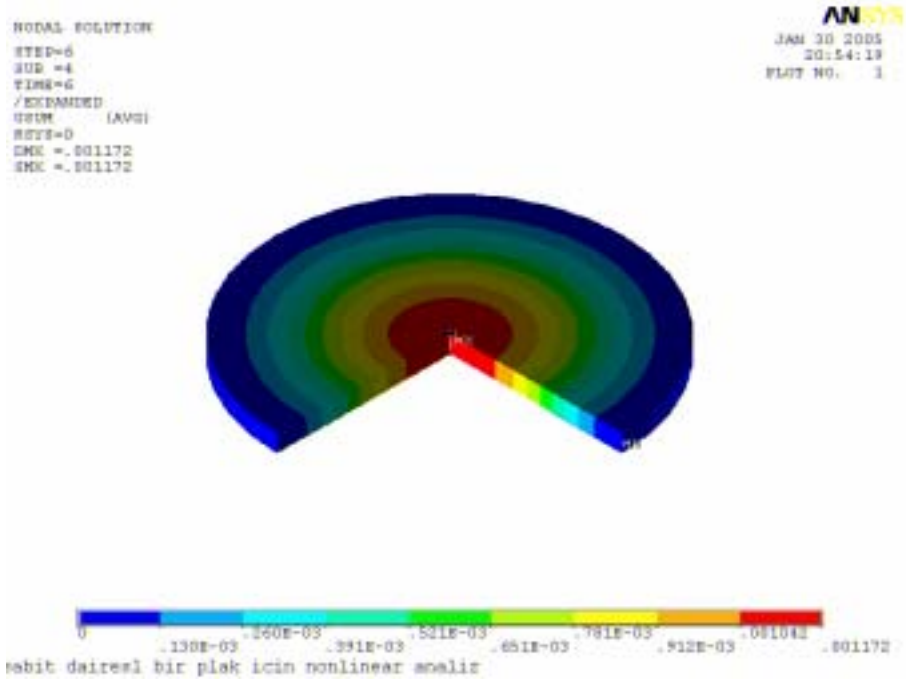
LOAD STEP	SUB-STEP	NO. ATTMP	NO. ITER	TOTL ITER	INCREMENT TIME/LFACT	TOTAL TIME/LFACT	VARIAB 1 MONITOR UY	VARIAB 2 MONITOR FY	VARIAB 3 MONITOR MxPI
1	1	1	2	2	0.25000	0.25000	-.36920E-03	0.53596E-01	0.78886E-30
1	2	1	1	3	0.25000	0.50000	-.73837E-03	0.10712	0.78886E-30
1	3	1	1	4	0.37500	0.87500	-.12920E-02	0.18726	0.78886E-30
1	4	1	1	5	0.12500	1.0000	-.14770E-02	0.21394	0.82031E-04
2	1	1	2	7	0.12500	1.1250	-.14341E-02	0.21144	0.78886E-30
2	2	1	1	8	0.12500	1.2500	-.13912E-02	0.20895	0.78886E-30
2	3	1	1	9	0.18750	1.4375	-.13269E-02	0.20520	0.78886E-30
2	4	1	1	10	0.28125	1.7188	-.12304E-02	0.19958	0.78886E-30
2	5	1	1	11	0.28125	2.0000	-.11275E-02	0.19396	0.68245E-03
3	1	1	2	13	0.28125	2.2812	-.12240E-02	0.19959	0.78886E-30
3	2	1	1	14	0.28125	2.5625	-.13205E-02	0.20520	0.78886E-30
3	3	1	1	15	0.21875	2.7812	-.13956E-02	0.20957	0.78886E-30
3	4	1	1	16	0.21875	3.0000	-.14761E-02	0.21394	0.59662E-03
4	1	1	2	18	0.21875	3.2188	-.14010E-02	0.20957	0.78886E-30
4	2	1	1	19	0.21875	3.4375	-.13259E-02	0.20520	0.78886E-30
4	3	1	1	20	0.32812	3.7656	-.12133E-02	0.19864	0.78886E-30
4	4	1	1	21	0.23438	4.0000	-.11274E-02	0.19396	0.59370E-03
5	1	1	2	23	0.23438	4.2344	-.12079E-02	0.19865	0.78886E-30
5	2	1	1	24	0.23438	4.4688	-.12883E-02	0.20333	0.78886E-30
5	3	1	1	25	0.35156	4.8203	-.14090E-02	0.21035	0.17017E-05
5	4	1	1	26	0.17969	5.0000	-.14760E-02	0.21394	0.58225E-03
6	1	1	2	28	0.17969	5.1797	-.14143E-02	0.21035	0.78886E-30
6	2	1	1	29	0.17969	5.3594	-.13527E-02	0.20676	0.78886E-30
6	3	1	1	30	0.26953	5.6289	-.12602E-02	0.20138	0.78886E-30
6	4	1	1	31	0.37109	6.0000	-.11275E-02	0.19396	0.58325E-03



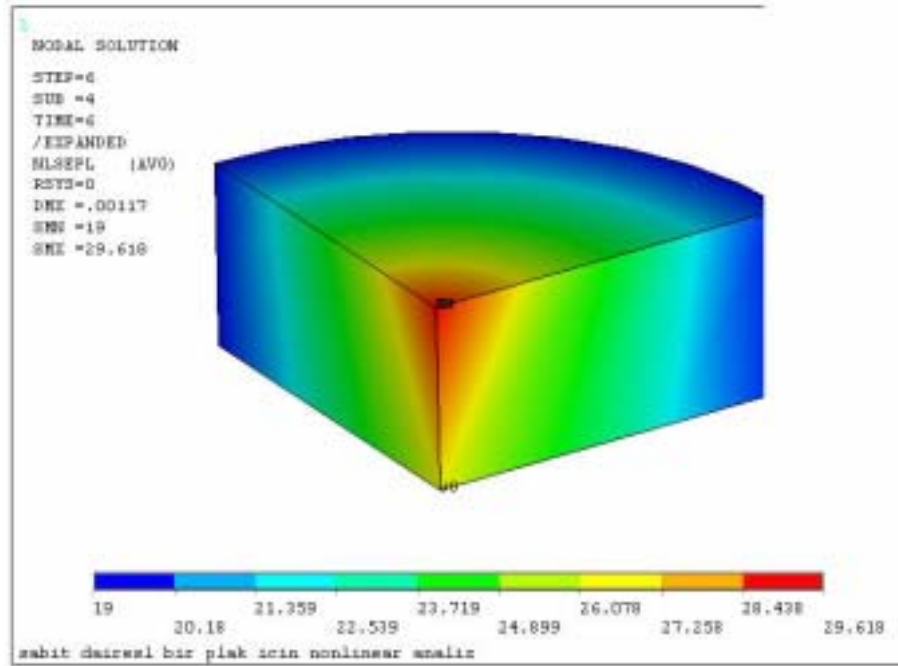
Şekil 4.16. Eşdeğer plastik gerinmeler



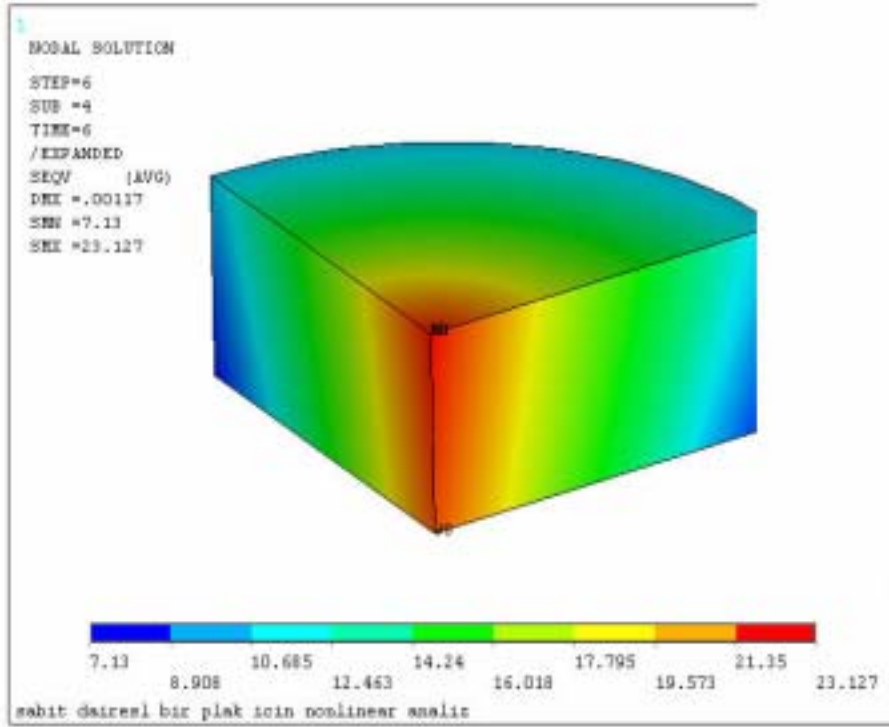
Şekil 4.17. Eşdeğer plastik gerinmeler



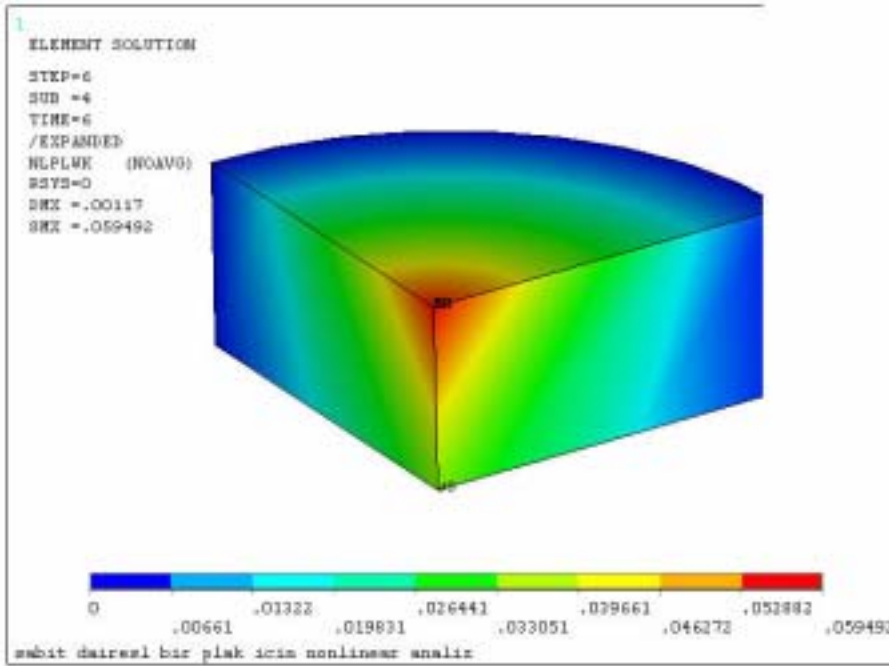
Şekil 4.18 Toplam yer değiştirmeler



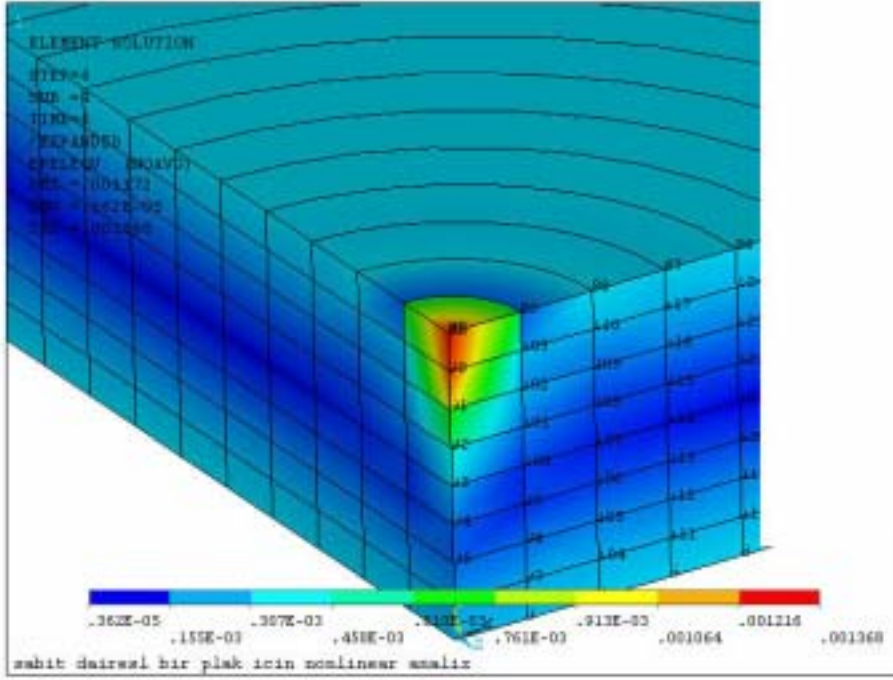
Şekil 4.19 Yükün uygulandığı düğüm noktasındaki elemanda oluşan plastik gerilmeler



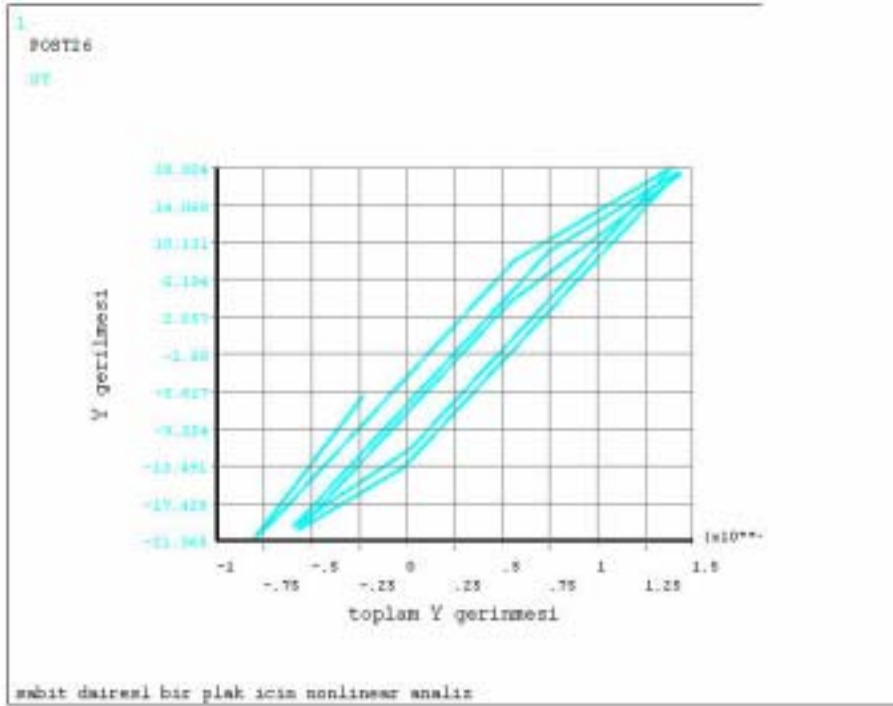
Şekil 4.20. Aynı elemanda ortaya çıkan Elastik Von-Mises gerilmeleri



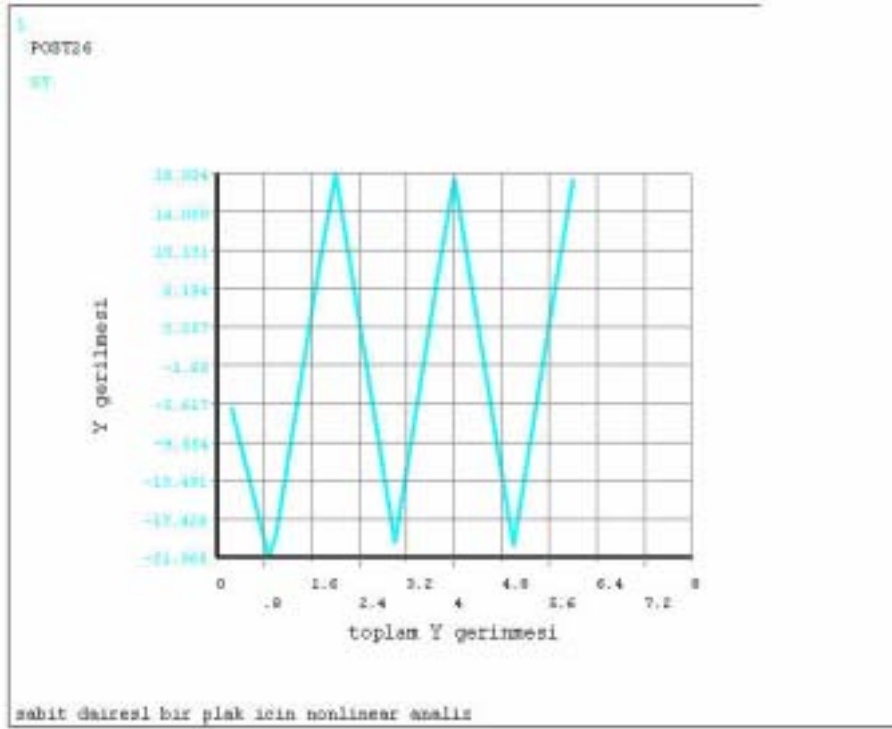
Şekil 4.21. Birim hacim başına yapılan plastik işin elemandaki dağılımı



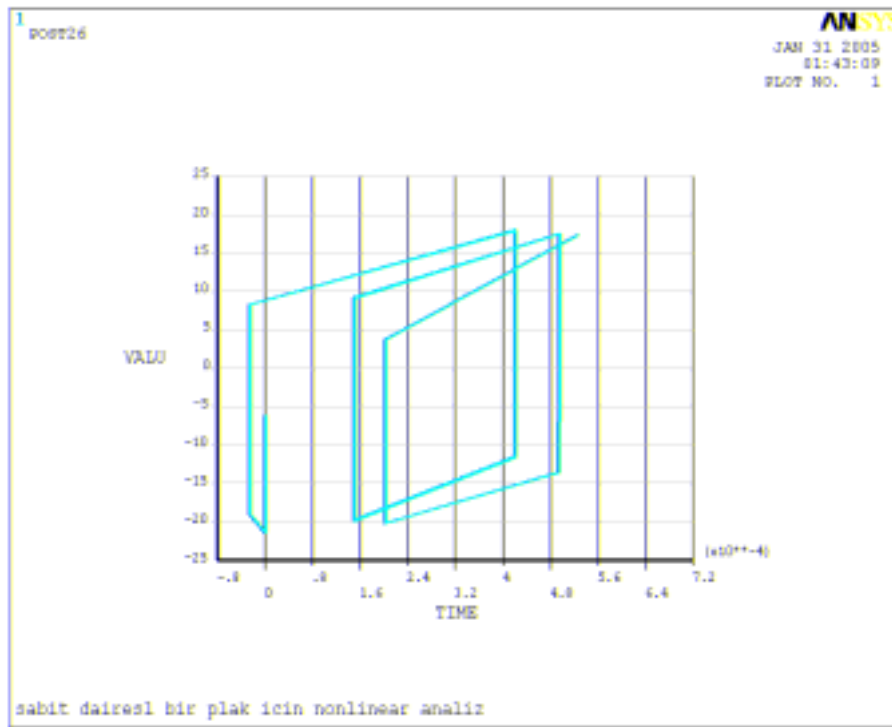
Şekil 4.24. Elastik Von – Misses (ortalama) gerinmeleri



Şekil 4.25. Toplam gerinmeye karşılık gerilme eğrilerinin ifadesi



Şekil 4.26. Y düzleminde gerilme – gerinme eğrisi



Şekil 4.27. Kinematik sertleşme olayında akma düzleminin yer değiştirmesi



#### 4.4 Bakır Bir Levhanın Rijid Bir Duvara Çarpma Probleminin Elasto-Plastik Analizi

Bu problem de bakır bir levhanın rijit bir duvara çarpma olayı nonlinear analiz kapsamında simüle edilmektedir. Bakır levhanın 227 m/s lik bir hızla rijit bir duvara çarptığı düşünülmekte ve çarpma olayından 80  $\mu$ s sonraki plastik davranış modellenmeye çalışılmaktadır. Problem deki tüm veriler SI birim sistemindedir. Bakır levha aksel simetrik elemanlarla modellenmiştir. Tek yükleme adımı kullanılarak çözüm elde edilmektedir. Yükleme adımıdaki ilk hız ve gerekli bütün kısıtlamalar başlangıçta yapılacaktır. Bakır levhanın sol tarafında yer alan düğüm noktalarına yüklenen kısıtlamalar, levhanın sol tarafında da rijit bir duvarın bulunduğunu dikkate alarak yapılmıştır.

Bu problem için gerekli özellikler;

$E = 117.0 \text{ E}9 \text{ N/m}^2$  ( elastisite modülü)

$\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$  (yoğunluk)

$\nu = 0.35$  (poisson oranı)

$\sigma_y = 400.0 \text{ E}6 \text{ N/m}^2$  (akma gerilmesi)

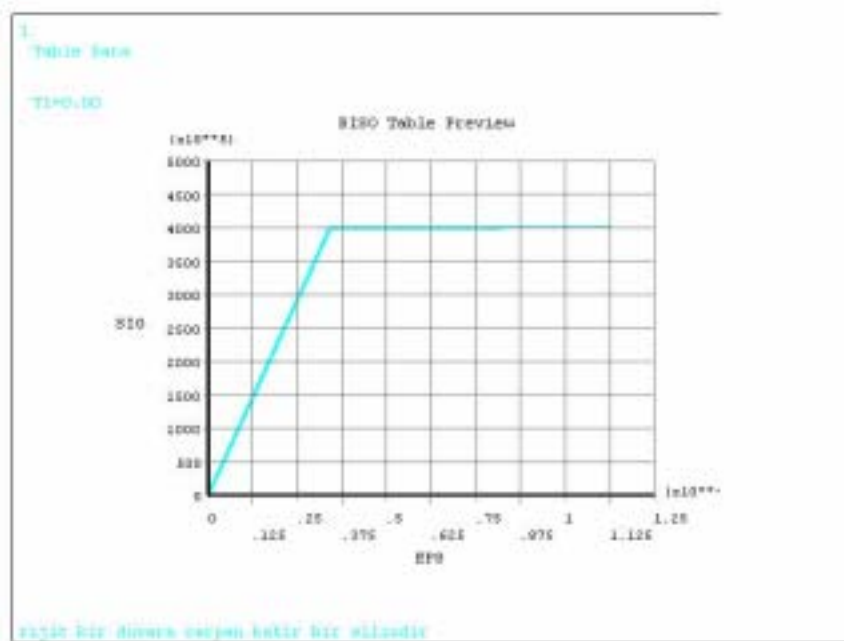
$E_t = 100.0 \text{ E}6 \text{ N/m}^2$  (Tanjant modülü)

$V = 227.0 \text{ m/s}$  (ilk hız)

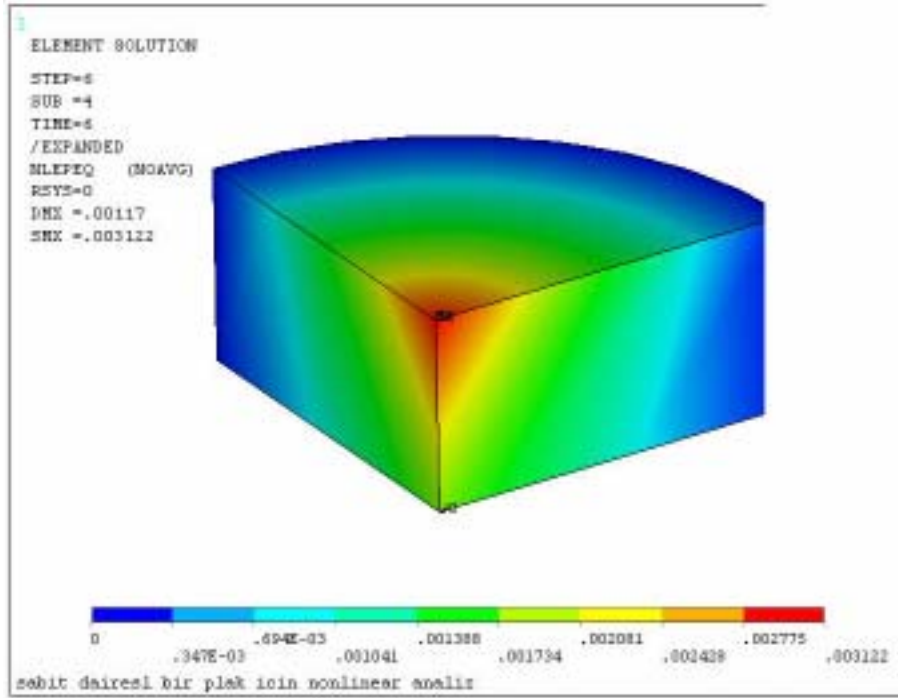
Uzunluk = 32.4 E-3 m

Çap = 6.4 E-3 m

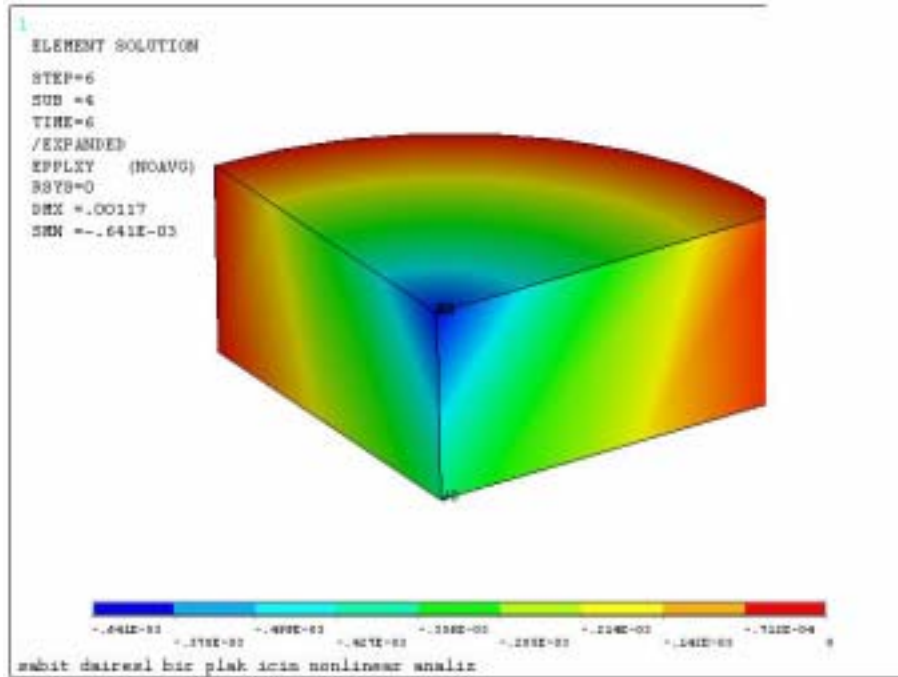
Visco 106 tipinde bir eleman mesh jenerasyonu için kullanılmıştır.



Şekil 4.28. izotropik sertleşme durumunda gerilme gerinme eğrisi



Şekil 4.22 Plastik gerilmeler



Şekil 4.23 XY düzleminde plastik kayma gerilmeleri

ELEMENTS  
ELEM NUM

ANSYS  
FEB 6 2005  
11:34:10  
PLOT NO. 1



rijit bir duvara carpan bakiir bir silindir

Şekil.4.29 Eksenel simetriye sahip geometrinin mesh edilmiş hali

GLOBAL SOLUTION  
STEP=1  
DDE =182  
TIME=.001E-04  
USUM (AVG)  
RSTX=0  
SMX =.011111  
SMY =.011111

ANSYS  
FEB 6 2005  
11:40:56  
PLOT NO. 1

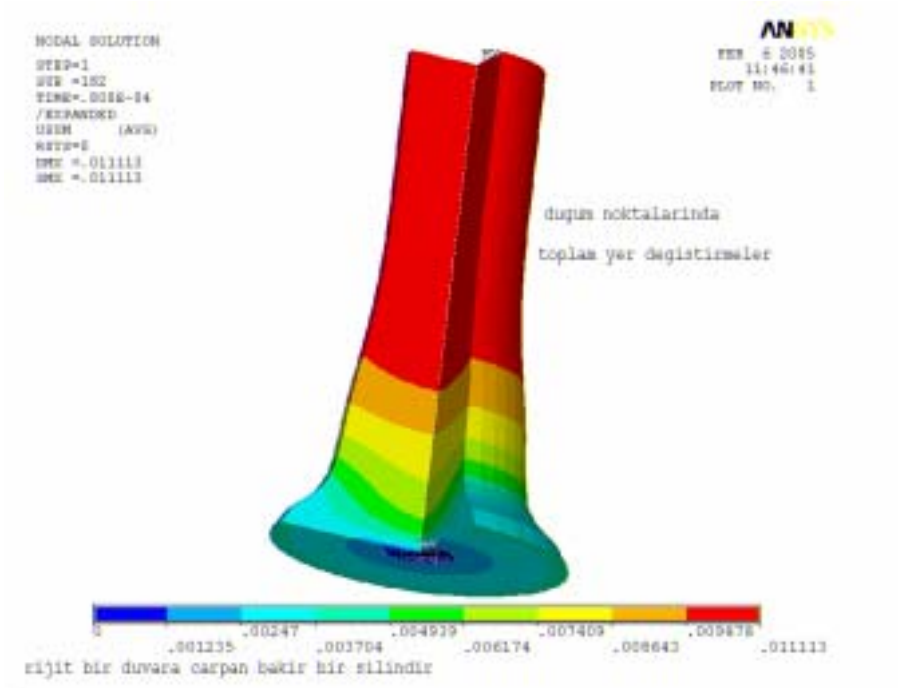
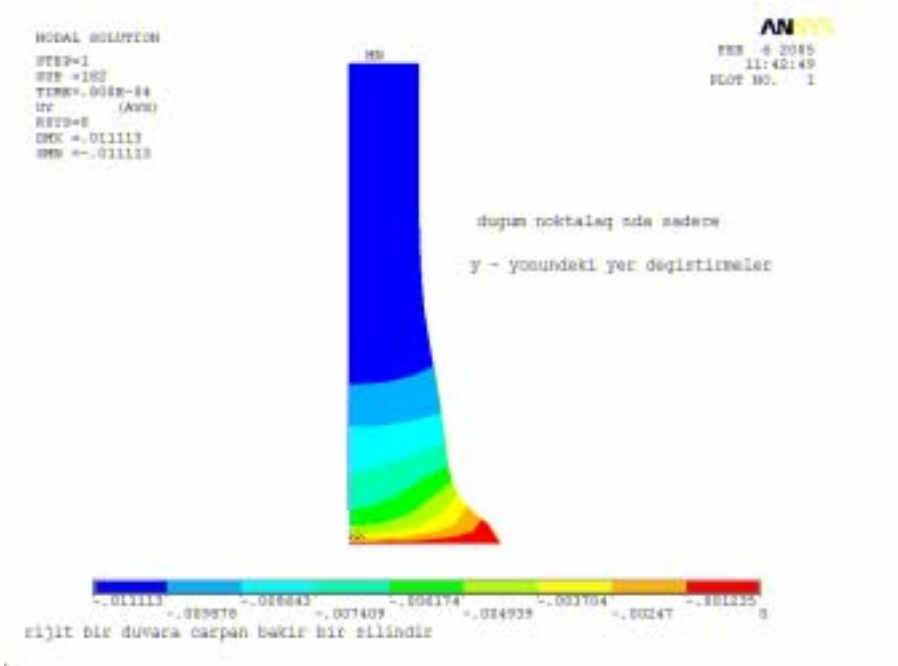


duqum noktalarındaki toplam yer değis

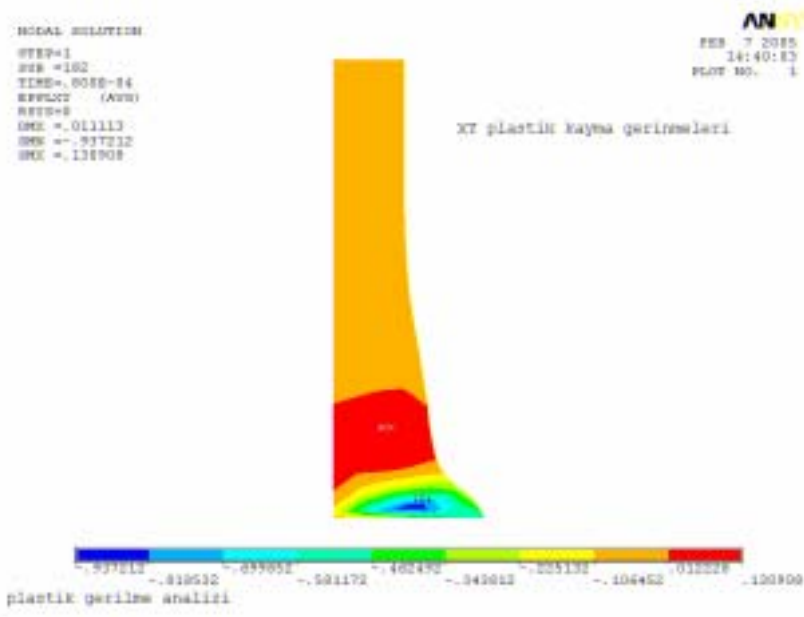


rijit bir duvara carpan bakiir bir silindir

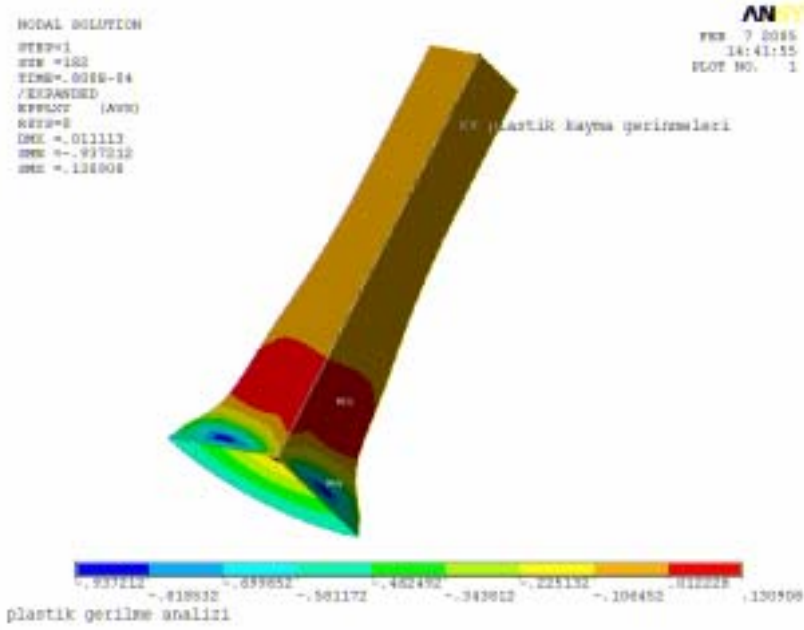
Şekil 4. 30 Dügüm noktalarındaki toplam yer değistirmeler

Şekil. 4.31  $\frac{3}{4}$  Oranında aksenal simetrik görünüm

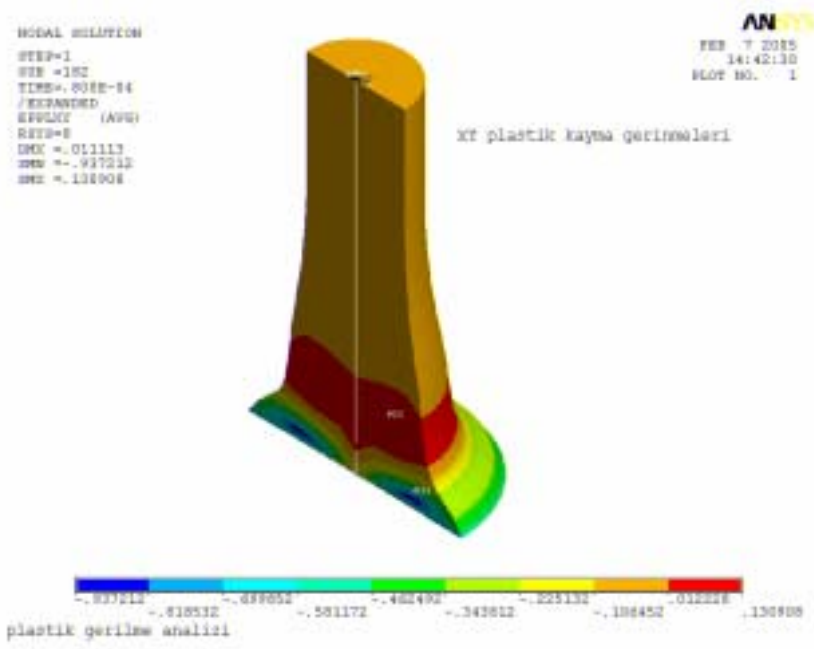
Şekil 4. 32 Düşüm noktalarında sadece y- yönündeki yer değistirmeler



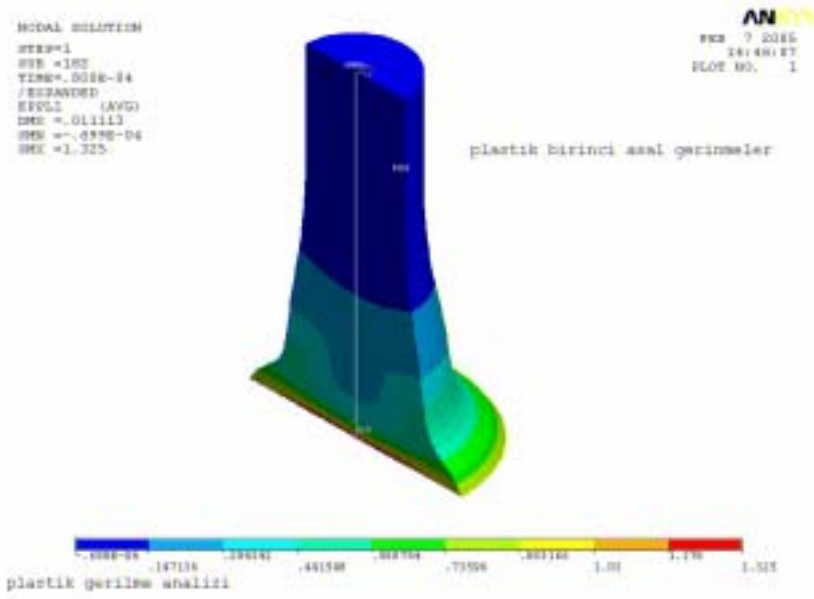
Şekil 4.33 XY plastik kayma gerilmeleri



Şekil 4. 34 Plastik kayma gerilmelerinin ¼ simetrik kesitteki görünümü

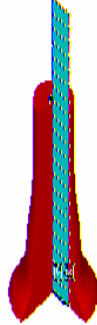


Şekil 4.35 kayma gerilmelerinin  $\frac{1}{2}$  oranında aksenal simetrik görünümü



Şekil 4.36 Plastik birinci asal gerilmeler

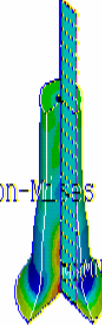
A-E-L-K-N  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =182  
 TIME=.800E-04  
 /EXPANDED  
 NLSEPL (AVG)  
 RSYS=0  
 DMX =.011113



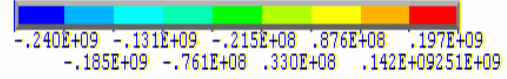
plastik gerilmeler

ANSYS 9.0  
 FEB 6 2005  
 12:16:34  
 PLOT NO. 1

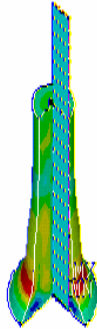
A-E-L-K-N  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =182  
 TIME=.800E-04  
 /EXPANDED  
 NLHPRE (AVG)  
 RSYS=0  
 DMX =.011113  
 SMN =-.240E+09  
 SMX =.251E+09



von-Mises elastik gerilmele



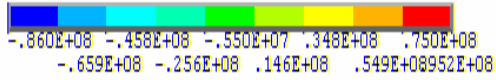
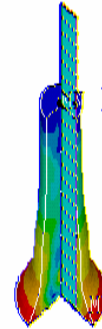
A-E-L-K-N  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =182  
 TIME=.800E-04  
 /EXPANDED  
 SXY (AVG)  
 RSYS=0  
 DMX =.011113  
 SMN =-.860E+08  
 SMX =.952E+08



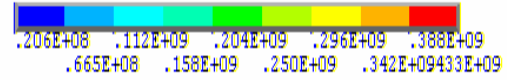
hidrostatik basinc

ANSYS 9.0  
 FEB 6 2005  
 12:16:34  
 PLOT NO. 1

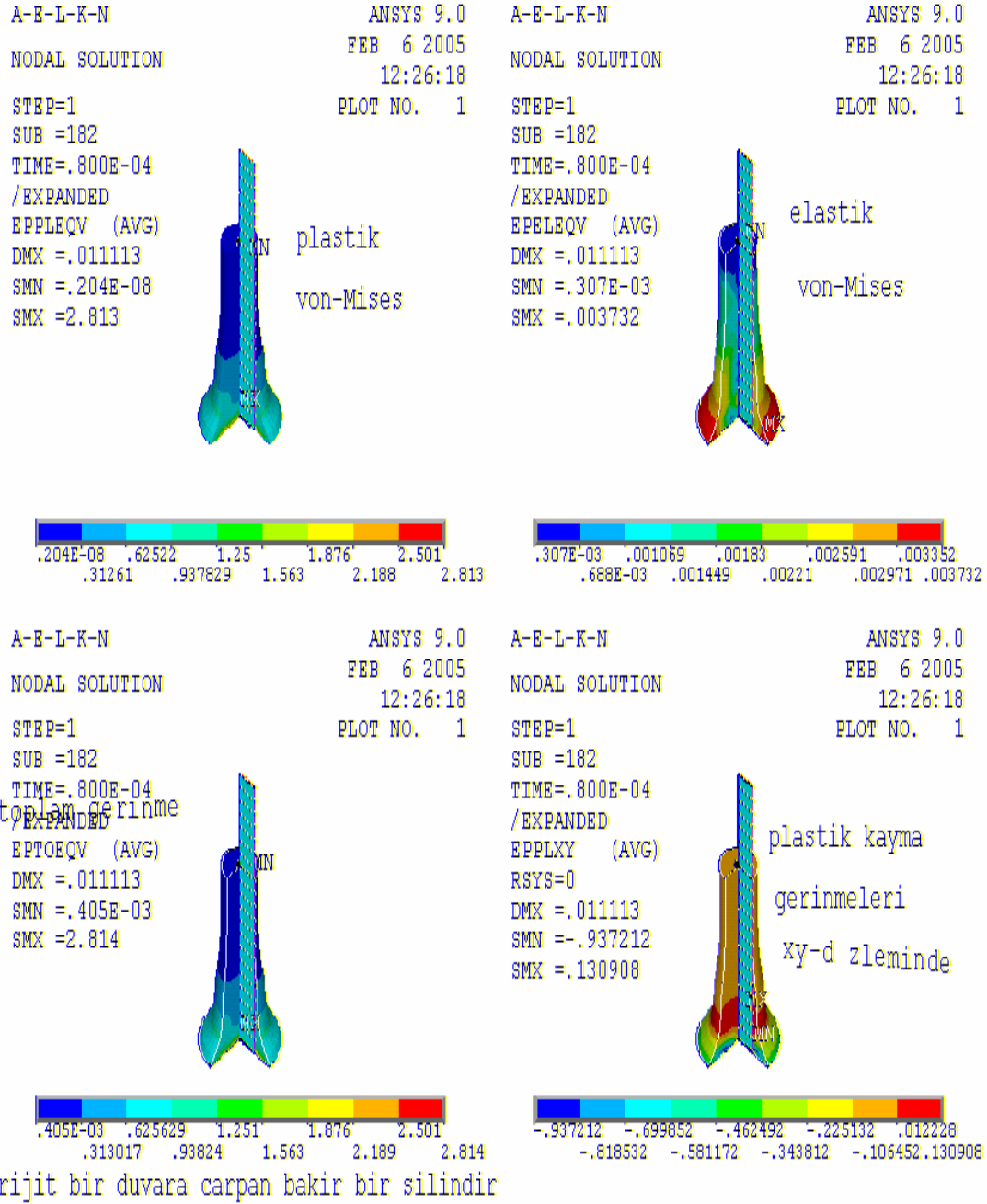
A-E-L-K-N  
 NODAL SOLUTION  
 STEP=1  
 SUB =182  
 TIME=.800E-04  
 /EXPANDED  
 SEQV (AVG)  
 RSYS=0  
 DMX =.011113  
 SMN =.206E+08  
 SMX =.433E+09



rijit bir duvara carpan bakir bir silindir



Şekil 4.37 Değişik gerilme durumlarının bir arada görünümü



Şekil 4. 38 Farklı gerinme durumlarının bir arada gösterilmesi



## 5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada, plastisite teorisi ile ilgili temel kavramlardan başlayarak malzemelerin plastik davranışı sürekli ortamlar mekaniği kapsamında incelenmiştir. Hızdan bağımsız plastisite teorisi üzerinde yoğunlaşan bir çalışma gerçekleştirilmiştir. Gerilme tansörü, sapma tansörü ve hidrostatik basınç kavramları açıkça izah edildikten sonra gerilme tansörü ile sapma tansörüne ait invaryant parametreler belirlenmiş ve bu invaryantlar arasındaki ilişkiler ifade edilmiştir. Levy-Mises ve Prandtl-Reus teorileri açıklanmış ve bu teorilerin plastisite teorisi içerisindeki yeri ifade edilmiştir. ANSYS sonlu elemanlar programı kullanılarak iki farklı plastisite problemine sayısal çözümler elde edilmiştir. Ekler kısmında, sürekli ortamlar mekaniği ile ilgili konularda oldukça etkili ve faydalı bir biçimde kullanılan Legendre transformasyonu izah edilmiştir.

Ayrıca, taneli malzemeler için bünye modellerinin gelişimine uygun bir plastisite formülasyonu geliştirilmiştir. Bu yaklaşımın belirli özellikleri termodinamik ilkelere dayanmaktadır, böylece bu çerçevede geliştirilen tüm modeller otomatik olarak termodinamik kurallara uymaktadır. İkinci olarak jeomalzemeler, makul doğrulukta model alınacağı zaman gerekli olan sürtünme ve dilatasyon (genişleme) gibi özellikleri sağlamak için bu modeller yeterli esnekliği sağlar.

Burada bahsedilen yaklaşım kinematik değişkenlerin fonksiyonlarıyla başlar, fakat bunlar toprağın plastisitesi ile ilgili geleneksel yaklaşımlara alışık kişiler için oldukça yabancı olduğundan bu formülasyon gerilme değişkenleri şeklinde yeniden anlatılmaktadır. Formülasyonun bu şekilde yeniden anlatılması dissipasyon fonksiyonu, akma yüzeyi ve akış kuralı ile ilgili önemli bağlantıları gösterdiği için önemlidir. Özellikle de sürtünme kavramı ve birbirinden bağımsız olan akımın aslında birbirlerine çok yakın olduğunu gösterir. Bu çalışmada aynı zamanda elasto-plastik modeller ile bağımsız akım kuralları da herhangi bir termodinamik kanun ihlal edilmeden teorik olarak işlenmektedir.

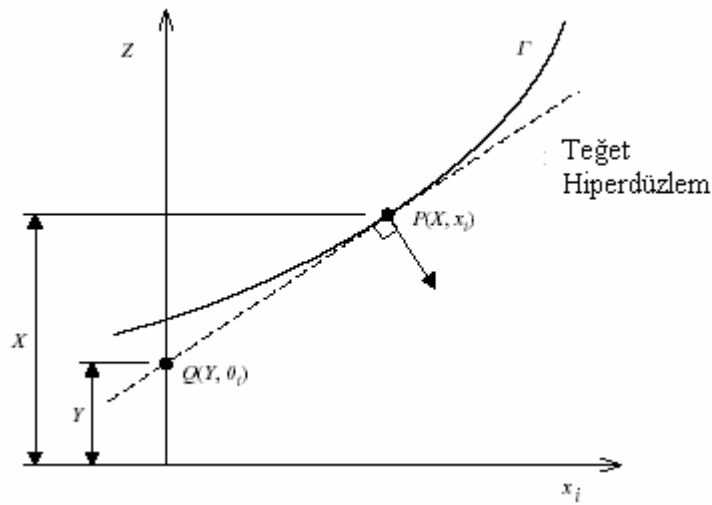
Dissipasyon fonksiyonlarının kullanımı ve bunların akma yüzeyinin şekli ile olan bağlantısı bazı modern yaklaşımların malzemenin davranışına uygulanmasıdır ve bu yaklaşımdaki fenomenolojik modeller, dissipasyonun hesaplanabileceği mikro yapısal modellerin göz önüne alınmasından da çıkarılabilir.

Hem birleşik etkiler taşıyan kapıl malzemeler hem de birleşik etkiler taşımayan malzemeler için yeni formüllerin kullanımı ile gerinme sertleşmesi, sürtünme ve genişleme için plastisite modelleri ile ilgili örnekler verilmiştir. Cam-Kili malzemeler ailesi aynı zamanda bu yeni yaklaşımla da anlatılabilir.

Bu çalışmada termodinamik fonksiyonlardan başlayarak bünye modellerinin geliştirilmesinde güçlü bir teknik olarak gözüken Legendre transformasyonu kullanılmıştır.

### Ek: Legendre Transformasyonları

Legendre transformasyonu, rolü her zaman tam olarak kabul edilmese de matematikte uygulanan en faydalı yöntemlerden birisidir. Bunlarla ilgili tanınmış örnekler arasında analitik mekanikteki Lagrange ve Hamilton fonksiyonları, akım ve plastik katılarla ilgili



Şekil 5.1. Boyutsal aralıkta  $\Gamma$ 'in sunumu ( $n+1$ )

teorilerdeki fiziksel ve hodograf düzlemler arasındaki termodinamik potansiyel teorileri, ve elastik teorideki dissipasyon enerjisi ile tamamlayıcı enerji örnekleri verilebilir. Sewell (1987) belirli konulara özellikle vurgularda bulunarak tamamlayıcı değişken ve ekstremum ilkelerinin genel teorilerindeki Legendre transformasyonu ile ilgili önemli bilgiler sunmaktadır. Bu transformasyon aynı zamanda gerilme oranları ile deformasyon oranları potansiyelleri arasındaki transferler için elasto-plastik malzemelerin gerilme hızı formülleri için de kullanılmıştır. Bu uygulamalar burada kullanılanlardan oldukça farklıdır. Bu yüzden bu metinde gerekli olan temel transformasyon özelliklerini tekrar gözden geçireceğiz:

#### **(a)Legendre transformasyonunun geometrik sunumu**

$Z = X(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  fonksiyonu  $(n+1)$  boyutlu  $(Z, x_i)$  uzayında bir  $\Gamma$  yüzeyini tanımlar. Aynı yüzey teğet hiper düzlemlerinin zarfı olarak da kabul edilebilir. Legendre transformasyonu ile ilgili bir yaklaşıma göre bu hiper düzlemler cinsinden  $Z$ 'yi tanımlayan fonksiyonel bir temsil oluşturur. Bu bağıntı geometride iyi bilinen bir düalliteyi ifade eder.  $X(x_i)$  fonksiyonunun gradientleri  $y_i$ ,

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad (A1)$$

ile verilir, böylece  $(n+1)$  boyutlu uzayda  $\Gamma$  yüzeyine dik doğrultu  $(-1, y_i)$  dir. Eğer  $\Gamma$  üzerinde  $P(X, x_i)$  noktasındaki teğet hiper düzlemi  $Z$ - eksenini  $Q(-Y, 0)$ 'da kesiyorsa,  $(X+Y, x_i)$  vektörü teğet hiper düzlem üzerinde yer alır ve bu yüzden  $P$  noktasında  $\Gamma$  yüzeyine diktir. Bu iki vektörün skaler çarpımı,

$$X(x_i) + Y(y_i) = x_i y_i \quad (A2)$$

şeklinde olur.  $Z = -Y(y_i)$  fonksiyonu teğet hiper düzlemlerini kuşatan bir aileyi tanımlar ve  $\Gamma$  yüzeyinin düal tanımını oluşturur. Bu fonksiyon (A1) ve (A2)'deki

$n+1$  denklemden  $n$  adet  $x_i$  değişkenini elimine ederek oluşturulabilir. Bu durum yerel olarak mümkündür,  $x_i$  ler için (A1) ters çevrilebilir ve çözülebilir, yani tekil olmayan

Hessian matris formda  $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}\right)$  şeklinde ifade edilebilir. Hessian matrisinin ,determinantının sıfır olduğu noktalar transformasyonun tekillikleridir.  $y_i$  ye göre tekil olmayan bir noktada (A2) nin türevi alınırsa

$$\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + \frac{\partial Y}{\partial y_i} = y_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} + x_i \quad (\text{A3})$$

bulunur. (A1) ifadesinin yardımıyla aşığıdaki sonuca indirgenir:

$$x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A4})$$

(A1), (A2) ve (A4) ilişkileri Legendre transformasyonunu olarak tanımlanır. Bu transformasyon  $X$  ve  $Y$  nin rollerinin değişebileceğinden dolayı kendi kendisinin dualidir.

Transformasyon genellikle analitik bir şekilde gerçekleştirilmez.  $X(x_i) = (1/2) A_{ij} x_i x_j$  şeklinde ifade edilen quadratik form istisnai bir durum oluşturur, burada  $A_{ij}$  tekil olmayan simetrik bir matrisdir. Dual değişkenler  $x_i = A_{ij}^{-1} y_j$  olduğundan dolayı  $y_i = (\partial X / \partial x_i) = A_{ij} x_j$  şeklinde olur ve Legendre duali quadratik formu aşığıdaki şekilde olur.

$$Y(y_i) = x_i y_i - X(x_i) = A_{ij}^{-1} y_i y_j - \frac{1}{2} A_{ij}^{-1} y_i y_j = \frac{1}{2} A_{ij}^{-1} y_i y_j \quad (\text{A5})$$

Bazı yazarların  $Y$  fonksiyonunun işaretini değiştirdiğini dikkate almalıyız, yukarıdaki notasyon transformasyon simetrisini açıkca ortaya çıkardığı için kullanılır. Sewell (1987) bu transformasyonla ilgili alternatif geometrik açıklamalar sunmaktadır.

## (B) Homojen Fonksiyonlar

$Z = X(x_i)$  fonksiyonunun  $x_i$ 's'de  $n$  dereceden homojen olduğu durumlara özellikle dikkat etmek gerekir. Bu yüzden herhangi bir  $\lambda$  skaleri için  $X(\lambda x_i) = \lambda^n X(x_i)$  olmaktadır. Euler teoremi kullanarak aşağıdaki bağıntıya geçilebilir.

$$nX(x_i) = x_i \frac{\partial X}{\partial x_i} = x_i y_i \quad (\text{A6})$$

Bu sebepten A2 denklemleri kullanılarak,

$$mY(y_i) = x_i y_i = y_i \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A7})$$

elde edilir, burada  $(1/n) + (1/m) = 1$  olur. Bu yüzden  $Y(y_i)$  Legendre duali  $m = n/(n-1)$  derecesinden homojendir.

Yukarıdaki örnekte  $n=2$  dir, böylece  $X$  ve  $Y$ 'nin her ikisi de ikinci dereceden homojendir. Bu durumun benzer bir örneği lineer elastisitedir ve burada elastik gerinme enerjisi  $W(\varepsilon_{ij})$  ve tamamlayıcı enerji  $W_c(\sigma_{ij})$ 'nin ikisi de argümanlarının kuadratik formudur ve aşağıdaki temel bağlantıyı sağlar:

$$W(\varepsilon_{ij}) + W_c(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (\text{A8})$$

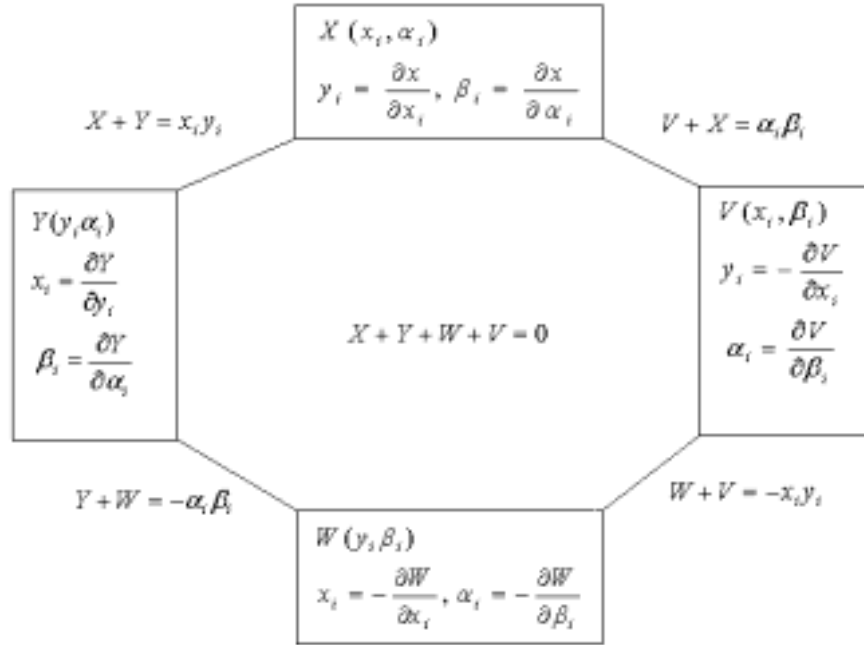
## (c) Kısmi Legendre Transformasyonları Ve Kapalı Transformasyon Zincirleri

Şimdi  $X(x_i, \alpha_i)$  iki değişken ailesine bağlı fonksiyonların dikkate alalım, burada  $x_i$  ve  $\alpha_i$  sırasıyla  $n$ - ve  $m$ - boyutlu vektörlerdir. Yukarıdaki gibi  $x_i$  değişkenine göre Legendre transformasyonu gerçekleştirebilir ve  $Y(y_i, \alpha_i)$  dual fonksiyonu elde

edilir.  $\alpha_i$  değişkeni bu transformasyonda pasif bir rol oynar ve sabit parametre gibi davranış gösterir.

Bu yüzden üç temel bağıntı artık aşağıdaki şekli alır:

$$X(x_i, \alpha_i) + Y(y_i, \alpha_i) = x_i y_i \quad (\text{A9})$$



Şekil 5.2. Dört Legendre transformasyonunun zinciri

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} \quad \text{ve} \quad x_i = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad (\text{A10})$$

Eğer pasif değişkenlere bağlı olarak  $X$ 'in türevi alınır  $\beta_i$  şeklinde gösterilirse, tarafından verilirse, (A9)denkleminin aşağıdaki şekli alır.

$$\beta_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = -\frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A11})$$

$\alpha_i$  değişkenlerine göre  $X(x_i, \alpha_i)$  üzerinde bir Legendre transformasyonu gerçekleştirmek mümkündür ve bu ikinci dual fonksiyon  $V(x_i, \beta_i)$  özellikler ile aşağıdaki gibi oluşur

$$X(x_i, \alpha_i) + V(x_i, \beta_i) = \alpha_i \beta_i \quad (\text{A12})$$

burada,

$$\beta_i = \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} \quad \alpha_i = \frac{\partial V}{\partial \beta_i} \quad (\text{A13})$$

şeklinde tanımlanır ve ayrıca  $x_i$ 'ler pasif değişkenler olduğundan,

$$y_i = \frac{\partial X}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (\text{A14})$$

yazılır. Bu süreç devam ettirilebilir.  $\alpha_i$  değişkenlerine göre  $Y(y_i, \alpha_i)$  üzerinde gerçekleştiren bir Legendre transformasyonu dördüncü dereceden bir  $W(y_i, \beta_i)$  fonksiyonu üretir. Aynı fonksiyon  $x_i$  değişkenlerine göre  $V(x_i, \beta_i)$  transformasyonu ile de elde edilebilir. Böylece kapalı bir transformasyon zinciri Şekil 5.2.'de gösterildiği gibi ortaya çıkar. Burada temel diferansiyel bağıntılar özetlenmiştir. Bu kapalı zincirin en iyi bilinen örneği klasik termodinamikte karşımıza çıkar. Burada dört temel fonksiyon; iç enerji  $U(s, v)$ , Helmholtz serbest enerjisi  $F(\theta, v)$ , Gibbs serbest enerjisi  $G(\theta, p)$  ve serbest entalpi  $H(s, p)$ 'dir. Burada  $\theta$ ,  $s$ ,  $v$  ve  $p$  sırasıyla sıcaklık, entropi, özgül hacim ve basıncı temsil eder.

#### (d) Tekil Transformasyon

$X$  homojen ve  $x_i$ 'ye göre birinci dereceden olduğundan (yani,  $\lambda X(x_i, \alpha_i) = X(\lambda x_i, \alpha_i)$  ise) hızdan bağımsız elastisite teorisinde önemli bir durum

ortaya çıkar. Şöyleki;  $X(x_i, \alpha_i) = x_i y_i$  olduğunda (A2)'den görüleceği gibi dual fonksiyon  $Y(y_i)$  özdeş olarak sıfırdır. Ulaşılması zor olan bu sonucun basit bir geometrik yorumu vardır: (n+1) boyutlu  $Z=X(x_i, a_i)$  yüzeyi köşeleri orijinde olan bir hiperkonidir. Böylece bütün teğet hiper düzlemler  $Z=0$  noktasında Z eksenini keser. Böylece bütün  $y_i$ 'ler için  $Y(y_i, a_i)=0$  dır. Ayrıca  $y_i = (\partial X / \partial x_i)$  nin değeri  $x_i \rightarrow \lambda x_i$  transformasyonundan etkilenmez ve böylece  $x_i \rightarrow y_i$  eşleştirmelerinden sonra sınırdaki  $\infty \rightarrow 1$  sonucuna ulaşılır. Ayrıca dual fonksiyon  $Y(y_i, \alpha_i)$  özdeş olarak sıfıra eşit olduğundan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0 \quad (\text{A15})$$

$$x_i dy_i + y_i dx_i = dX + dY = \frac{\partial X}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} d\alpha_i \quad (\text{A16})$$

bu da (A1) ifadesinin yardımıyla aşağıdaki forma indirgenir:

$$x_i dy_i - \frac{\partial X}{\partial \alpha_i} d\alpha_i = 0 \quad (\text{A17})$$

Bu yüzden (A15) ile (A17) karşılaştırıldığında şu sonuç elde edilir:

$$x_i = \lambda \frac{\partial Y}{\partial y_i} \quad \text{ve} \quad -\frac{\partial X}{\partial \alpha_i} = \lambda \frac{\partial Y}{\partial \alpha_i} \quad (\text{A18})$$

Burada  $\lambda$  bu tekil transformasyonun birden fazla farklı tabiata sahip olmasını yansıtan belirlenmemiş bir skaler değerdir. Bütün fonksiyonlar yeterince düzgün ve sürekli, bütün türevler mevcut iken yukarıdaki gelişim bir anlamda klasik bir yaklaşımdır. Pratikte plastisite teorisinde karşılaşılan yüzeyler, farklı düzlemler, kenarlar ve köşeleri içerir. Böyle yüzeyler ve onları tanımlayan fonksiyonlar konveks analizin kavramlarını kullanarak genel teoriye dahil edilebilir.



## 6. KAYNAKLAR

- ANSYS Inc., Guide to ANSYS User programmable features, ANSYS Inc., 1998.
- Backofen, W.A., (1972). Deformation Processing. Addison-wesley Publishing, London.
- Baker, R., Desai, C. S. (1984). Induced anisotropy during plastic straining. Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomechan. 8, 167-185
- Butterfield, R., (1979). A natural compression law for soils. Geotechnique, 29, 469-480.
- Callen, H. B.,(1960). Thermodynamics. New York: Wiley.
- Chandler, H. W.,(1985). A plasticity theory without Drucker's postulate, suitable for granular materials. J. Mech. Phys. Solids 33, 215-226.
- Chandler, H. W., (1988). A variational principle for granular materials. Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech. 12,371-378.
- Chandler, H. W., (1990). Homogeneous and localised deformation in granular materials: a mechanistic model. Int. J. Eng. Sci. 28, 719-734.
- Chen, W.F., Mizuno, E., (1990). Nonlinear Analysis in Soil Mechanics. Elsevier Science Publishers, Amsterdam.
- Collins, I.F., Houlsby, G.T., (1997). Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials. Proc. R. Soc. 453, 1975-2000, London.
- Çapan, L., (1999). Metallere Plastik Şekil Verme. Çağlayan Kitabevi, Beyoğlu-İstanbul.
- Dafalias, Y.F., (1998). Plastic Spin: Necessity or Redundancy? International Journal of Plasticity, 14, 909.
- Dafalias, Y.F., (1985). The Plastic Spin, Trans, ASME Journal of Applied Mechanics, 52, 865.
- Dienes, J.k., (1979). On the analysis of Rotation and Stres Rate in Deforming Bodies. Acta Mechanica, 32, 217.
- Dieter, G.E., Bacon, D., (1988). Mechanical Metallurgy. McGraw-Hill Book , London.

- Drucker, D. C., Prager, W., (1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Q. Appl. Math.* 10, 157-164.
- Eringen, A. C., (1981). On nonlocal plasticity. *Int. J. Engng. Sci.* Vol. 19, No. 12, 1461-1474. Printed in GB.
- Eve, R. A., Reddy, B. D., Rockefellar, R. T., (1990). An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality. *Q. Appl. Math.* 48, 59-83.
- Germain, P., Nguyen, Q. S., Suquet, P., (1983). Continuum thermodynamics. *J. Appl. Mech.* 50, 1010-1020.
- Halphen, B., Nyugen, Q.S., (1975). Sur les materiaux standards generalises. *J. Mech.* 14, 39-63.
- Hill, R., Rice, J. R., (1973). Elastic potentials and the structure of inelastic constitutive laws. *SIAM JI Appl. Math.* 25. 448-461.
- Hill, R., (1959). Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time. *J. Mech. Phys. Solids* 7, 209-225.
- Hill, R., (1978). Aspects of invariance in solid mechanics. *Adv. Appl. Mech.* 18, 39-63.
- Hill, R., (1987). Constitutive dual potentials in classical plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 35, 23-33.
- Houlsby, G.T., (1979). The work input to a granular material. *Geotechnique* 29, 354-358.
- Houlsby, G. T., (1981). A study of plasticity theories and their applicability to soils. Ph. D. Thesis, university of Cambridge.
- Houlsby, G. T., (1982). A derivation of the small-strain incremental theory of plasticity from thermodynamics. *Proc. IUTAM Conf. On Deformation and Failure of Granular Materials, Delft*, pp. 109-118.
- Houlsby, G. T., (1983). Interpretion of dilation as a kinematic constraint. *Modern approaches to plasticity* (ed. D. Kolymbas), pp. 19-38. New York: Elsevier.
- Hosford, W.F., Caddel, R. M., (1993). *Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*, Prentice Hall, Sydney.
- Kachanov, L.M., (1974). *Fundamentals of the Theory of Plasticity*. Mir Publishers, Moscow.

- Kestin, J., Rice, J. R., (1970). Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids. A critical review of thermodynamics (ed. E. B. Stuart et al.), pp, 275-298. Baltimore: Mono Book Corp.
- Khan, A. S., Huang, S., (1995). Continuum Theory of Plasticity, John Wiley & Sons, Inc.
- Kondo, K., (1952). On the Geometrical and Physical Foundations of the theory of Yielding. In: Proc. 2 Japan Congress of Applied Mechanics (p.41).
- Kröner, E., (1958). Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. In Collatz, I., Lösche, F. (Eds.), Ergebnisse der Angewandte Mathematik, vol. 5.
- Kuroda, m., (1995). Plastic Spin Associated with a Corner Theory of Plasticity. International Journal of Plasticity 11 (5), 547.
- Lade, P. V., Kim, M. K., (1988). Single hardening constitutive model for frictional materials. II. Yield criterion and plastic work contours. cOmput. Geotech. 6, 13-29.
- Le, K.C., Stumpf, H., (1996). Nonlinear continuum theory of Dislocations. International Journal of Engineering Science 34, 339.
- Lemaitre, J., Chaboche, J. L., (1990). Mechanics of solid materials. Cambridge University Press.
- Lippmann, H., (1972). Extremum and variational principles in mechanics. CISM-Courses and lectures, vol. 54. Vienna: Springer.
- Lubliner, J., (1972). On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. Int. J. Non-Linear Mech. 7, 237-254.
- Lubliner, J., (1990). Plasticity Theory. Macmillan Publishing Company, New York.
- Maier, G., Hueckel, T., (1977). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for geotechnical media. Proc. 9<sup>th</sup> Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Tokyo, Speciality session 7. Onstitutie relations for soils, pp. 129-142.
- Maugin, G.A., (1992). The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge University Pres, New York.
- Martin, J. B., Reddy, B. D., (1993). Piecewise smooth dissipation and yield functions in plasticity. Meccanica 28, 169-175.
- Matsuoka, H., Nakai, T., (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. Proc. JSCE 232, 59-70.

- Maugin, G. A., (1992). The thermodynamics of plasticity and fracture. Cambridge University Press.
- Mendelson, A., (1968). Plasticity: Theory and application. The Macmillan Company, New York.
- Meguid, S.A., (1989). Engineering Fracture Mechanics. Elsevier Applied Science, London.
- Modaressi, H., Laloui, L., Aubry, D., (1994). Thermodynamical approach for camclay-family models with Roscoe-type dilatancy rules, *Int. J. Num. Analyt. Meth. Geomech.* 18, 133-138.
- Moreau, J. J., (1970). Sur les lois de frottement, de viscosite et de plasticite. *C. R. Acad. Sci.* 271. 608-611.
- Nagtegaal, J.C., Jong, J.E., (1982). Some Aspects of anisotropic Work Hardening in Finite Strain Plasticity. *Proc. Workshop on Plasticity as finite Strain*, Stanford University, p.65.
- Prevost, J. H., (1987). Modelling the behaviour of geomaterials. *Geotechnical modeling and applications* (ed. S. M. Sayed) pp. 8-75. Houston, TX:Gulf.
- Reddy, B. D., Martin, J. B., (1994). Internal variable formulations of problems in elastoplasticity: constitutive and algorithmic aspects. *Appl. Mech. Rev.* 47, 429-456.
- Rice, J. R., (1971). Inelastic constitutive relations for solids: an interval-variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 9, 433-456.
- Rowe, G.W., Sturgess, C.E.N., Hartley, P., Pillinger, I., (1991). *Finite-Element Plasticity and Metalforming Analysis*. Cambridge University press, Cambridge.
- Sawczuk, A., Stutz, P., (1968). On formulation of stress-strain relations for soils at failure. *Z. Angew. Math. Phys.* 19, 770-778.
- Sedov, L.I., Berdichevsky, V.L., (1967). A Dynamic Theory of continual Dislocations. In: Kröner, e. (Ed.), *Mechanics of generalized Continua*. Springer, Berlin, p. 215.
- Sewell, M. J., (1982). Legendre formations and extremum principles. *Mechanics of solids*, The rodney Hill 60<sup>th</sup> anniversary volume (ed. H. G. Hopkins & M. J. Sewell), pp. 563-605. Oxford: Pergamon.
- Sewell, M. J., (1987). *Maximum and minimum principles*. Cambridge University Press.

- Shizawa, K., Zbib, H.M., (1999). A Thermodynamical Theory of Gradient Elastoplasticity with dislocation Density Tensor. I: Fundamentals, *International Journal of Plasticity*, 15, 899-938.
- Sowerby, R., Chu, E., (1984). Rotations, Stress Rates and Strain Measures in Homogeneous Deformation Processes. *International Journal of Solids and Structures*, 20, 1037.
- Springer, Heidelberg, Bilby, B.A., (1960). Continuous Distribution of Dislocations, In: Sneddon, I.N., Hill, R. (Eds.), *Progress in Solid Mechanics*, Vol, 1. North Holland, Amsterdam, p. 329.
- Szabo, L., Balla, M., (1989). Comparison of Some Stress Rates. *International Journal of Solids and Structures* 25 (3), 279.
- Taylor, G. I., (1934). The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I: Theoretical. *Proc. R. Soc. London A* 105:362.
- Thomas, T. Y., (1954). Interdependence of the yield condition and the stress-strain relations for plastic flow. *Proc. Natn. Acad. Sci. U. S. A.* 40, 593-597.
- Truesdell, C., (1969). *Rational thermodynamics*. New York: McGraw-Hill.
- Wagoner, R. H., Chenot, J.L., (1997). *Fundamentals of Metal Forming*. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Wood, D. M., (1990). *soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press.
- Yang, W., Cheng, L., Hwang, K., (1992). Objective Corotational Rates and Shear Oscillation. *International Journal of Plasticity* 8, 643.
- Zbib, H.M., Aifantis, E.C., (1988). On the concept of Relative and plastic Deformation. *Res. Mechanica. International Journal of Structural Mechanics and Materials Science* 23, 261.
- Ziegler, H., (1959). A Modification of Prager's Hardening Rule. *Quarterly of Applied Mathematics*, 17, 55.
- Ziegler, H., (1972). Thermomechanics. *Q. Appl. Math.* 30, 91-107.
- Ziegler, H., (1975). Non-linearity in thermomechanics. *Int. J. Non-Linear Mech.* 10, 145-154.
- Ziegler, H., (1981). Discussion of some objections to thermomechanics orthogonality. *Ingenieur-Archiv*. 50, 149-164.

Ziegler, H., (1983). An Introduction to thermomechanics, 2<sup>nd</sup> edn. Amsterdam: North-Holland.

Ziegler, H., Wehrli, C., (1987). The derivation of constitutive relations from the free energy and the dissipation function. Adv. Appl. Mech. 25, 183-238.

**ÖZGEÇMİŞ**

Adı Soyadı : Özdemir DENİZ

Doğum Yeri : Isparta

Doğum Yılı : 1975

**Eğitim ve Akademik Durumu:**

Lise 1985-1992 Isparta Anadolu Lisesi

Lisans 1992-1998 Gazi Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

**İş Deneyimi:**

1998-2000 Serbest (Ticaret)

2000-..... Öğretim Görevlisi (S.D.Ü Uluborlu S. Karasoy MYO  
Elektronik Programı)

**Çalıştığı Konular:**

Sayısal Sistemler

Programlanabilir Denetleyiciler

Aydınlatma Sistemleri

Kontrol Sistemleri