T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FEEDBACK KONTROLLU NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ALİ FUAT YENİÇERİOĞLU

DANIŞMAN
PROF. DR. AGAMALİ AGAMALİYEV

İKİNCİ DANIŞMAN
DOÇ. DR. ANAR NABİYEV

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA-2005

FEEDBACK KONTROLLU NEUTRAL DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Ali Fuat YENİÇERİOĞLU

Doktora Tezi
MATEMATİK ANABİLİMDALI
ISPARTA 2005

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada feedback kontrollu neutral delay diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılığı, asimptotik kararlılığı ve davranışları incelenmiştir. Feedback kontrol teorisinde adi diferansiyel denklemler için verilen kriter ve teoremler neutral ve delay yapı için genelleştirilmiştir. Ayrıca feedback kontrollu neutral delay diferansiyel denklemlerin gerçek yaşam problemlerinde model olarak kullanımlarının gerekliliği ilginç açıklamalarla gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: feedback kontrol, neutral, delay, kararlılık, Gronwall eşitsizliği, Lyapunov fonksiyonu, adım yöntemi, kapalı çevrimli kontrol sistemi

ABSTRACT

This work deals with the property of solutions of feedback control for neutral delay differential equations. Such as stability of solutions, asymptotic stability of solutions and behaviour of solutions of the neutral delay differential equation. General teorems and basic definitions concerning ordinary differential equations in feedback control theory are generalized for the neutral and delay case. Necessity of feedback control for neutral delay differential equation for the mathematical modeling of real life problem are explained with interesting explanations.

KEYWORDS: feedback control, neutral, delay, stability, Gronwall inequality, Lyapunov function, method of step, closed loop control system.

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Feedback kontrollu neutral delay diferansiyel denklemler üzerine hazırlanan bu çalışmada, bölümlere göre aşağıdaki konu ve kavramlar incelenmiştir.

Giriş bölümünde, günlük yaşamdan örnekler verilerek, kontrol sistemlerle ilgili bazı tanımlar verilmiş ve feedback kontrol metodu özetlenmiştir.

Materyal ve metot bölümünde, feedback kontrollu diferansiyel denklemler ile ilgili bazı önemli kavramlar ve gecikme içeren diferansiyel denklemlerinin çözümünde kullanılacak olan bazı önemli tanım ve yöntemler verilmiştir.

Araştırma bulguları bölümünde ise 6 kısımdan oluşmaktadır. Her kısımda araştırma makaleleri olup değişik türden verilen denklemlerin farklı yöntemlerle çözümlerinin kararlılığı ve davranışları incelenmiş, gerek kuramsal gerekse uygulamaya yönelik olması açısından çalışmadaki en önemli yeniliği oluşturmaktadır.

Bu çalışmanın hazırlanmasındaki yardımları ve katkıları için tez danışmanım Prof.Dr. Agamali Agamaliyev’e, araştırmalarımda bana yardımcı olan İstanbul Üniversitesinden Prof.Dr. Musa Ilyasov’a ve tezimin yazımı ve düzeltilmesi sırasında beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan Doç.Dr. Anar Nabiyev’e teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ali Fuat YENİÇERİOĞLU

Simgeler Dizini

IR	Reel sayılar kümesi
IN	Doğal sayılar kümesi
IR^{+}	Pozitif reel sayılar kümesi
IR^{n}	n boyutlu reel sayılar kümesi
$x^{(n)}(t)$	$x(t)$ nin n. türevi
$\dfrac{d^{n}x(t)}{dt^{n}}$	$x(t)$ nin n. türevi
$\dot{Y}$	Y matrisinin türevi
$\int$	İntegral
$\iint$	Çift katlı integral
$\lvert\cdot\rvert$	Mutlak değer
$\lVert\cdot\rVert$	Norm
$[\cdots]^{T}$	Matrisin transpozesi
∞	Sonsuz
ε	Epsilon
$\in$	Eleman
lim	Limit
max	Maksimum
exp	Üstel fonksiyon
:=	Özdeş
$\neq$	Özdeş değil
$\sum$	Toplam
$\forall$	Her
$V(\cdot)$	Lyapunov fonksiyonu
$\upsilon(\cdot)$	Lyapunov fonksiyonu
liminf	Alt limit
Sup	Supremum
g^{T}	g matrisinin tranpozesi

$C(\cdot)$	Sürekli fonksiyonlar sınıfı
$C^1(\cdot)$	Sürekli türevlenebilen fonksiyonlar sınıfı
∇	Gradyent
$\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x}$	υ nin x e göre kısmi türev

1. GİRİŞ

1.1. Feedback Kontrolun Tarihçesi ve Gelişimi

Otomatik kontrolun esasını oluşturan “geri besleme” (feedback) prensibinin uygulanması, milattan önce (MÖ) 300 yıllarında şamandıralı seviye kontrolu ile başlar. Ortaçağda da münferit pek çok benzer uygulamalar yapılmışsa da Avrupa da ilk bilimselliğe yönelik kontrol uygulamaları; Hollanda’lı Cornelis Drebbel’in geliştirdiği sıcaklık kontrol aygıtı ile Fransız Dennis Pappen’in buhar kazanları için geliştirdiği basınç kontrol valfidir. Basınç kontrol valfini takiben ilk endüstriyel anlamda proses kontrol uygulamaları 1760’da James Watt’ın “Topaçlı Hız Regülatörü” olmuştur. 1765’de Sovyet Polgunov James Watt’ın buhar makinasına paralel olarak buhar kazanları için bir seviye kontrol sistemini geliştirmiştir. 1868’den sonra daha hassas ve karmaşık kontrol sistemlerine duyulan ihtiyaç ve ortaya çıkan kararlılık sorunları, o güne kadar genelde deneme-yanılma yöntemleri ile uygulanan otomatik kontrolun matematik yöntemlere dayanan bilimsel bir teorisinin kurulmasına ve gelişmesine yol açtı. İlk defa J.C. Maxwell diferansiyel denklemleri kullanarak dinamik olayların analizini gerçekleştirdi. Aynı yıllarda Rus matematikçi İ.A. Vişnegradski sürekli regülatörlerle ilgili matematik formülasyonları kullandı.

Otomatik kontrolda teorinin bilimsel olarak uygulamaları ikinci dünya savaşının hemen öncesi yıllarda, Amerika ve Batı Avrupa’da geri beslemeli sistemlerin elektrik ve elektronik devrelere tatbiki ile başlar. Otuzlu yılların sonuna doğru ve kırklı yılların başında gemilerin dengesi ve otomatik karıştırmayla ilgili çalışmalarında (Minorsky, 1942) geri besleme (feedback) mekanizmalarında gecikmelerin ne kadar önemli olduğunu vurgulamıştır. Bu ve bundan sonraki yıllarda kontrol teorisine olan büyük ilgi geçmişe bağımlılığı içeren diferansiyel denklemler teorisinin gelişmesine önemli katkılar sağlamıştır. Bode, Nyquist, Bellman gibi bilim adamlarının yanı sıra Bell Telefon Şirketi mühendislerinden Black, frekans analizi yöntemlerini esas alarak ilk modern yükselticileri ve filtreleri geliştirdiler. Aynı dönemlerde Sovyetler Birliğinde Lyapunov, Minorsky, Pontryagin gibi mekanikçi ve matematikçiler, özellikle zaman bölgesini esas alan analiz ve optimizasyon teorileri geliştirerek bugünkü modern kontrolun temellerini attılar. İkinci dünya savaşı sırasında ve sonrasında özellikle askeri bazlı hayati önemli sistemlerde (silah atış sistemleri, havacılık ve denizcilikte navigasyon sistemleri, haberleşme ve görüntüleme sistemleri gibi) talep edilen performans ve hassasiyetlerinin uydularla başlayan uzay çağınında zorlamaları sonucu yapılan büyük buluş ve uygulamalar, otomatik kontrolun modern asrın vazgeçilmez ve güçlü bir bilim dalı haline gelmesine yol açtı (Dorf, 1992), (Cochin, 1980), (Halsam, 1981) ve (Raven, 1982).

1970'li ve 1980'li yıllardan itibaren dijital devrelerin ve bilgisayarların çığır açıcı gelişmelerine, artan işlem hızlarına ve kapasitelerine paralel olarak, otomatik kontrolda yepyeni bir dönem başlamış, modern otomasyonun temellerini oluşturan çok hızlı üretim, proses kontrol ve fabrikasyon sistemleri ortaya çıkmıştır. Elektrik mekanik, pnömatik ve hidrolik sistemlerin, muhtelif kontrol algoritmaları ile birlikte kullanımları neticesinde, değişik imalat prosedürleri için değişik robot tasarımlarını ve dinamiklerini konu alan "Robotik Bilimi" doğmuştur. Ayrıca "Adaptif Kontrol", "Robust Kontrol", "Fuzzy Teorisi", "Yapay Sinir Ağları Teknolojileri" gibi yeni kontrol yöntemleri geliştirilerek, bunların teknolojinin değişik alanlarında yaygın uygulamaları gerçekleştirilmiştir.

Son yıllarda teknolojinin yanı sıra uygulamaları Tıpta da çığır açan modern kontrol sistemleri sayesinde diyaliz makinaları, tansiyon-kalp atışı düzenleyici cihazları, insülin ve kan şekeri düzenleyici cihazlar, tomografili görüntü ve magnetik rezonans sistemleri ile birlikte yapay organlar geliştirilerek insan sağlığı için uygulamaya konulmuştur.

Ayrıca günümüzde ekonomi, pazarlama, fabrika üretim planlaması ile yönetimi ve sosyal içerikli bilim dallarında da lineer ve lineer olmayan kontrol teorileri başarı ile uygulanmaktadır.

Son yıllarda, çağdaş uygarlığın ve teknolojinin gelişmesi ve ilerlemesi ile birlikte, özellikle gecikme argümanlı diferansiyel denklemlerde kontrol sistemlerinin önemi gittikçe artmaya başlamıştır. Uygulamada günlük etkinliklerimizin her yönü bu tür kontrol sistemlerinden etkilenmektedir. Teorisinin teknolojinin yanı sıra tıp ve sosyal içerikli bilim dallarına da kolayca uygulanabilmesi, kalite, sürat, konfor, emniyet ve ekonomi sağlaması açısından "Feedback Kontrol" insanlığın kullanımına her zaman muhtaç olduğu, limitsiz, yeniliklere ve araştırmalara açık, yaratıcı, zevkli, enteresan, potansiyel bir bilim dalıdır.

1.2. Kontrol Sistemleri

Kontrol sistemleriyle yeni karşılaşan birisinin öğretim üyesine yönelttiği soru genellikle bir kontrol sisteminin ne olduğu sorusudur. Bu soruyu cevaplandırmak üzere günlük hayatımızda başarmamız gereken çok sayıdaki amacı göz önünde bulundurmamız gerekir. Örneğin yaşadığımız ortamlarda konforlu bir yaşam sürdürebilmemiz için binaların sıcaklık ve nemini ayarlamamız gerekmektedir. Ulaşımda bir noktadan diğer bir noktaya emniyetli bir şekilde gidebilmemiz için otomobil ve uçakları kontrol etmek zorundayız. Bir insan, karar verme dahil olmak üzere, çok farklı görevleri yerine getirme yetisine sahiptir. Bu görevlerin bir kısmı, bir nesneyi tutmak ve bir noktadan başka bir noktaya yürümek gibi, çok olağan ve sıradan işlemlerden oluşur. Bazı özel koşullarda bu görevlerin en iyi biçimde yerine getirilmesi istenebilir. Örneğin 100 metre koşan bir atlet bu mesafeyi mümkün olabilecek en kısa zamanda koşmayı amaçlar. Diğer taraftan bir maraton koşucusu mesafeyi en kısa zamanda koşmanın yanı sıra, enerji tüketimini kontrol etmek, kendisi için en uygun yarış stratejisini izlemek zorunluluğundadır. Bu hedeflere ulaşabilmek için genellikle kontrol stratejilerini gözeterek kontrol sistemlerini kullanmak gerekir. Kontrol sistem; kendisini ya da başka bir sistemi, düzenlemek, kumanda etmek ya da yöneltmek üzere uygun bir biçimde bağlanmış fiziksel elemanlar kümesidir.

1.3. Bir Kontrol Sisteminin Temel Öğeleri

Bir kontrol sisteminin temel öğeleri şöyle sıralanmaktadır.

1- Kontrolün amaçları
2- Kontrol sistemi öğeleri
3- Sonuç ya da çıkışlar.

Daha teknik terimlerle ifade edilirse kontrol sistemi u girişleri ile belirlenir, sonuçta ise x çıkışları ya da kontrol edilen değişkenleri etkiler. Genel olarak kontrol sisteminin amacı, kontrol sisteminin elemanları aracılığı ile girişleri kullanarak, çıkışları önceden belirlenmiş bir şekilde kontrol etmektir.

1.4. Kontrol Sistem Uygulamalarına İlişkin Örnekler

Otomobillerde komut kontrolü: Bir basit kontrol sistemine örnek olarak otomobillerdeki komut kontrolü verilebilir. İki ön tekerleğin yönü x kontrol değişkeni ya da çıkış, dümen milinin u yönü giriştir. Bu durumda, kontrol sistemi yönlendirme mekanizması ve tüm otomobilin dinamiğinden oluşur. Eğer amaç otomobilin hızını kontrol etmek ise, ivmelendiriciye uygulanan basıncın miktarı girişe, araç hızı ise çıkışa karşı gelir. Genel anlamda basitleştirilmiş otomobil kontrol sistemi iki girişli (yönlendirme ve ivmelendirme) ve iki çıkışlı (konum ve hız) bir sistemdir. Bu durumda iki kontrol girişi ve çıkışı birbirinden bağımsızdır, ancak genelde kontrol sistemlerinin birbirleriyle ilişkili olduğu sistemler de vardır. Birden fazla giriş ve çıkışı bulunan sistemlere çok değişkenli sistemler denir.

Otomobillerde boşta hız kontrolü: Kontrol sistemlerine başka bir örnek olarak bir otomobil motorunun boşta hız kontrolü verilebilir. Bu tür bir kontrol sisteminde, uygulanan motor yüklerinden (örneğin aktarım, güç kontrolü, havalandırma vb.) bağımsız olarak, yakıt giderlerini mümkün olduğu kadar azaltmak için (yakıt tasarrufu), boşta motor hızı göreli düşük bir değerde tutulmak istenir. Boşta hız kontrolü

yapılmaması halinde, motora uygulanan ani bir yük, motor hızında düşüşe ve hatta motorun durmasına neden olabilir. Buna göre hız kontrolünün amacı
1) Motora yük uygulandığında hız düşüşünü en aza indirmek ve
2) Motorun boştaki hızını belirli bir değerde tutmaktır.

Bir boşta hız kontrol sistemi, girişler-sistem-çıkışlar belirtilmek istenirse bu durumda α kısma valfi açısı ve T_L yük momenti (havalandırmanın devreye sokulması, güç kontrolu, aktarma, güçlü fren v.s. nedeniyle oluşabilen) giriş işaretlerini, ω motor hızı ise çıkış işaretini oluşturur. Sistemde kontrol edilen süreç motordur.

1.5. Açık Çevrimli Kontrol Sistemleri (Feedback'sız Sistemler)

Boşta hız kontrol sistemi bir dereceye kadar basit sistemdir ve açık çevrimli kontrol sistemi olarak adlandırılır. Bu sistemin kritik davranış koşullarını yerine getiremeyeceğini görmek zor değildir. Örneğin eğer α kısma açısı başlangıçta belirli bir değere ayarlanmış ve bu değer belirli bir motor hızına karşı düşüyor ise, belirli bir T_L yük momentinin uygulanması halinde motor hızının düşmesini hiçbir şey engelleyemez. Yük momentine bağlı olarak değişen ω'yi istenen seviyede tutarak çalıştırabilmenin tek yolu, uygulanması gereken α hakkında bilgi sahibi olmaktır. Geleneksel elektrikli çamaşır makinası da açık çevrimli kontrol sistemine bir örnektir, çünkü makina yıkama zamanı tamamen kullanıcının değerlendirme ve öngörüsüne bağlı olarak belirlenir. Bu tür açık çevrimli kontrol sistemine, basit ve ekonomik olmaları nedeniyle, çok sayıda karmaşık olmayan uygulamada rastlamak mümkündür.

1.6. Kapalı Çevrimli Kontrol Sistemleri (Feedback'lı Sistemler)

Açık çevrimli kontrol sistemlerinin hatasız kontrolü için gerekli olan şey, sistem çıkışından girişine bir bağlantının oluşturulması ya da geri beslemedir. Daha hatasız bir kontrol elde etmek için, u kontrol edilen işaret geri beslenilmeli ve girişte karşılaştırılmalı, giriş-çıkış işaretleri farkı ile orantılı bir giriş, hatayı gidermek üzere, sisteme uygulanmalıdır. Burada tanımlandığı üzere bir veya daha çok geri besleme yoluna sahip bir sisteme "kapalı çevrimli sistem" ya da "feedback kontrollu sistem" denir.

Bir kapalı çevrimli boşta hız kontrol sistemindeki ω_r referans girişi istenilen boşta hız değerini belirlesin. Boşta motor hızı ω referans değeri (çıkışı) ile aynı olmalıdır ve T_L momentinin neden olduğu, istenilen hız ile gerçek hız arasındaki her fark, hız dönüştürücü ve hata algılayıcı tarafından algılanmalıdır. Kontrolör farka göre devreye girer ve hatayı gidermek üzere α kısma açısını ayarlayacak bir işaret üretir.

Sonuç olarak, açık çevrimli sistemler ekonomik ancak genelde hassas değildir ve kapalı çevrimli sistemlerin açık çevrimli sistemlere göre üstünlükleri vardır.

1.7. Feedback Kontrol Metodu

Bu metod, çıkan ürünün istenilen değerde olup olmadığını kontrol edebilmek için uygulanan bir kontrol metodudur. Mühendislik uygulamalarının çoğunda bu metodla kontrol yer alır. Feedback kontrol metodunda her an için değişkenin gerçek değeri ile istenilen değeri (ayar noktası) kıyaslanmakta ve hata sıfıra eşitlenmeye çalışılmaktadır. Bu avantaja karşılık açık çevrimli kontrol metoduna karşı dezevantaj olarak gösterilebilecek husus, hatanın oluşumu ile giderilmesi arasında geçen zaman, yani gecikme (delay) ve bu süre içinde işlemin istenen değişken değerinin dışında yürümesidir. Metod, hatanın oluşmasından belirli bir süre sonra harekete geçmektedir.

1.8. Feedback Nedir ve Etkileri Nelerdir?

Çıkış ile girişi birbiri ile karşılaştırmak ve çıkışı referans girişine bağlı olarak istenilen biçimde değiştirmek amacı ile kullanılmasına feedback denir. Feedback (geri besleme) kullanmanın amacı, önceki bölümde aşırı basitleştirme yapılarak, örnekler üzerinde açıklanmıştır. Bu örneklerde feedback, sistem çıkışı ve referans girişi arasındaki hataları azaltmak amacıyla kullanılmıştır. Ancak, kontrol sistemlerinde feedback kullanmanın anlamı bu örneklerde gösterildiğinden çok daha karmaşıktır. Sistem hatasının azaltılması sonucu feedback'ın bir sistem üzerindeki önemli etkilerinden sadece bir tanesidir. Aşağıdaki bölümde feedback'ın kararlılık ile ilgili sistem davranış karakteristikleri üzerinde de etkili olduğu gösterilecektir.

Feedback'ın bir kontrol sistemi üzerindeki etkisini anlayabilmek için bu kavramı daha geniş bir şekilde incelemek gerekir. Feedback özellikle kontrol amacıyla kullanıldığında varlığı kolaylıkla hissedilir. Ancak, ayrıca geri beslenmemiş olmasına rağmen, pek çok fiziksel sistem incelendiğinde tabiatında feedback'ın varolduğu görülür. Genelde sistem değişkenleri arasında bir neden ve etki ilişkisinin, kapalı bir şekilde silsile şeklinde mevcut olması halinde, feedback'ın varlığından bahsedilir. Bu bakış açısı normalde feedback'sız olarak tanımlanabilecek bir çok sistemi kaçınılmaz olarak feedback'ı kabul etmemize neden olur. Ancak, yukarıda açıklandığı anlamda, fiziksel feedback olsun veya olmasın, genel tanımdan hareket ederek feedback'ın varlığı bir kez belirlendikten sonra, sistemler feedback ve kontrol sistem kuramından yararlanılarak, sistematik bir şekilde incelenebilir.

1.9. Feedback'ın Kararlılık Üzerine Etkisi

Geri beslemeli kontrol içeren her sistem mutlaka bir zaman gecikmesine sahiptir. Bunun sebebi bilginin gönderilmesine ve buna tepkinin oluşumuna sonlu bir zamanın gerekmesidir. 1930 ve 1940'lı yıllarda Callender, Hartree ve Forter, 1947, 1948 1962 yıllarında Minosky ve diğerleri, zaman gecikmeleri içeren feedback kontrollu diferansiyel denklemler için kararlılık problemlerini incelemeye başladılar. Kontrol teorisinde, Krasovskii

$$\dot{x}(t) = P(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = Q(t)x(t)$$

$$\dot{u}(t) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t,\theta)] y(t+\theta) + \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)] u(t+\theta)$$

feedback kontrol sisteminin kararlılığı incelemiştir (Krasovskii, 1963). Kubo ve Shimemura sabit katsayılı gecikme içeren

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t)$$

$$u(t) = -R^{-1} B^T P x(t)$$

feedback kontrollu diferansiyel denklemini ele alarak kararlılığını uygulamıştır (Kubo ve Shimemura, 1998). Buna benzer bir çalışma Kapila ve Haddad tarafından yapılarak

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (A_d + \Delta A_d)x(t - \tau_d) + Bu(t)$$

$$u(t) = Kx(t)$$

sisteminin kararlılığı incelenmiştir (Kapila ve Haddad, 1999). Hatta bundan daha geniş çalışma da Yeong tarafından değişken gecikme içeren

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{p} A_i x(t - h_i(t)) + \Delta f\big(t, x(t), x(t-h_1(t)), \cdots, x(t-h_p(t))\big) + Bu(t)$$

$$y(t) = (C + \Delta C(t))x(t)$$

$$u(t) = Kx(t)$$

lineer olmayan sistemine uygulanarak geliştirilmiştir (Yeong, 2002). Weng

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t)\left[r_i(t) - a_{ii}(t) y_i(t) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}(t) \int_0^w K_{ij}(s) y_j(t-s)ds - \alpha_i(t) \int_0^w H_i(s) u_i(t-s) ds \right]$$

$$\dot{u}_i(t) = -\eta_i(t) u(t) + a_i(t) \int_0^w K_i(s) y_i(t-s) ds \quad , \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

integro-diferansiyel denklem sistemini alarak periyodik çözümünün varlığını ve kararlılığını araştırmıştır (Weng, 2000).

Kararlılık bir sistemin giriş komutunu takip edip etmeyeceğini ya da genellikle yararlı olup olamayacağını belirleyen bir kavramdır. Herhangi bir sonlu giriş için sistemin çıkışı sonsuz olur ise sistem kararsızdır denir. Bu nedenle, özgün halde kararlı olan bir sistem feedback ile kararsız hale gelebilir. Feedback'ın başka bir özelliği de kararsız bir sistemi kararlı hale getirebilmesidir. Özet olarak feedback kararlılığa katkıda bulunabilir, ya da doğru uygulanmadığında, ters etkileyebilir. Feedback kontrol fonksiyonu bize verilen problemin kararlılığının ne kadar yararlı olduğunu gösterir. Bu ise kontrol teorisinde diferansiyel denklem sistemlerinin kararlılığı için çok önemlidir.

1.10. Doğrusal Olmayan Kontrol Sistemleri

Bu sınıflandırma analiz ve tasarım yöntemlerine göre yapılmıştır. Kesin konuşmak gerekirse, tüm fiziksel sistemler belirli bir ölçünün ötesinde doğrusal olmadığından, uygulamada doğrusal sistem yoktur. Doğrusal feedback kontrol sistemleri, sadece analiz ve tasarım basitliği nedeniyle, analizciler tarafından yaratılmış bir ideal modeldir.

Doğrusal sistemlerin analiz ve tasarımı için çok sayıda analitik ve grafik yöntem geliştirilmiştir. Bu tezdeki konuların büyük bir kısmı doğrusal sistemlerin analiz ve tasarımına ayrılmıştır. Buna karşın doğrusal olmayan sistemleri matematiksel olarak ele almak genellikle çok zordur, ayrıca doğrusal olmayan sistemleri çözmek için genel bir yöntem de mevcut değildir.

2. MATERYAL VE METOD

2.1. Neutral-Delay Diferansiyel Denklemler

2.1.1. Sapma Argümanlı Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Bilimin en ilginç konularından birisi çevremizde gerçekleşen olayları anlamak ve bazı olaylar hakkında tahminler elde edebilmektir. Belli gözlemlere dayanarak şimdi gördüğümüz olayları değerlendirerek daha sonra gerçekleşebilecek olaylar hakkında bilgi sahibi olabilmek için söz konusu sistemin bir matematiksel modelinin kurulması amaçlanır. Ancak birçok uygulamada şöyle bir ilkenin geçerli olduğu kabul edilir: incelenen sistemin gelecekteki durumu geçmişteki durumundan bağımsız olup sadece şimdiki zamana bağlıdır. Bunun sonucu olarak sisteme karşı gelen denklemde, sistemin durumu ve durumunun değişim oranının bulunduğu kabul edilirse, genelde diferansiyel denklemler söz konusudur. Diğer taraftan ayrıntılı bir inceleme, yukarıdaki ilkenin çoğunlukla sadece bir ilk yaklaşım olduğunu ve daha gerçekçi bir modelde sistemin geçmişteki durumunun da göz önüne alınması gerektiğini gösterir. Üstelik bazı problemlerde geçmişe bağımlılığı hesaba katmamak anlamsız olur. Özellikle kontrol teorisinde geçmişe olan bağımlılığı dikkate almak çok önemlidir. Aslında dış dünyadan algılanan bilgilere göre tepki gösteren her sistemde az veya çok bir gecikme vardır. Çünkü algılanan bilgilerin değerlendirilmesi ve buna göre bir tepki gösterilebilmesi için mutlaka zaman geçecektir.

Gecikme günlük hayatımızda sürekli karşılaştırılmış bir durumdur. Bütün fiziksel sistemlerde uygulanan bir uyarıcıyla ilgili tepkinin meydana gelmesi arasında muhtemelen kısa olmakla birlikte bir zaman arası olur. Biyolojik sistemlerde gecikme birkaç yüz milisaniye süresindedir ki bu insandaki tepki sürecidir. Bir antenden elektromanyetik dalgaların iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansımasını alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması başlıca özelliğidir.

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren delay, neutral tipte diferansiyel denklem, integral veya bunların kombinezonundan oluşan neutral-delay integrodiferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip denklemler, bir çok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır.

Dikkate değer bir işlemde gecikmeler mikrosaniye ya da daha kısa zamanla ölçülse de çok önemli olabilir. Teorik bir zaman gecikmesi bir makineye verilen enerji ile alınan randımanla aynı formda bir özelliktir. Uyarıcı $x(t)$, $y(t)$ tepkisiyle sonuçlanır. Burada t zaman, h gecikme olmak üzere $y(t)$ tepkisi $x(t-h)$ ye eşit olur. Daha karmaşık sistemlerde birden fazla gecikme olabilir.

$$F(t, x(f_{01}(t)),...,x(f_{0m}(t)), x'(f_{11}(t)),...,x'(f_{1m}(t)),...,x^{(n)}(f_{n1}(t)),...,x^{(n)}(f_{nm}(t)) = 0$$

denklemi ele alınsın. Bu formdaki bir denklemde $i = 0,1,...,n$ ve $j = 1,2,...,m$ olmak üzere $f_{ij}(t)$ argümanlarından en az ikisi farklı ise buna n. mertebeden "sapma argümanlı diferansiyel denklem (SADD) denir. Eğer SADD'de $j = 1,2,...,m$ için $f_{nj}(t) = f(t)$ ve $i = 0,1,...,(n-1)$ iken $f_{ij}(t) \leq f(t)$ oluyorsa buna "gecikmeli (delay) diferansiyel denklem", $f_{ij}(t) \geq f(t)$ ise "ilerlemeli (advanced) diferansiyel denklem" denir. Eğer SADD'de $j = 1,2,...,m$ ve $i = 0,1,...,n$ için $f_{ij}(t) \leq f(t)$ oluyorsa buna "tarafsız (neutral) diferansiyel denklem" denir.

SADD'deki argümanların hepsinin eşit olması halinde n mertebeden

$$F(t, x(t),...,x^{(n)}(t)) = 0$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür.

Neutral diferansiyel denklemler, SADD'de bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin sapma argümanlı ve sapma argümansız terimleri içerdiği diferansiyel denklemlerdir. Örneğin,

$$x'(t) = -tx'(t-1) + \frac{t}{t+2}x(t-3) + 3\cos t$$

$$x'(t) = 2x(t-\sqrt{t}) - x'(t-2) + 2t$$

$$x''(t) + a(t)x''(t-\tau) + f(t, x(t), x'(t), x'(t-\tau)) = 0 \;, \quad \tau > 0$$

denklemleri neutral diferansiyel denklemlerdir. Başka bir ifadeyle, t'nin zaman gösterdiği uygulamalarda, miktarındaki şimdiki değişim oranı miktarındaki geçmiş ve şimdiki değerlerine bağlı olduğu gibi geçmiş değişim oranına bağlı bir sistemi ifade eder.

Delay diferansiyel denklem ise SADD'de bilinmeyen fonksiyonun en yüksek mertebeden türevinin, argümanının yalnız bir değeri için ifade edildiği bir diferansiyel denklemdir. Bu argüman, bilinmeyen fonksiyonun ve onun denklemde ifade edilen türevlerinin argümanlarından daha küçük değildir. Örneğin,

$$x''(t) - x'(t-1) + x(t) = t$$

$$x'(t) - x(t-1) - x(t-\sqrt{2}) = 0$$

$$x''(t) = x'(t) - 2x(t-\cos^2 t)$$

denklemleri delay diferansiyel denklemlerdir. Başka bir ifadeyle, t'nin zaman gösterdiği uygulamalarda, delay türden bir denklem, değişim oranı, miktarındaki geçmişteki ve şimdiki değerlerine bağlı olan bir sistemin davranışını ifade eder.

2.1.2. Başlangıç Fonksiyon Problemi

Neutral ve delay diferansiyel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerden farklı olarak, verilen bir $t_0 \in IR$ için $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu altında bir çözümü olmayabilir ya da sonsuz çoklukta olabilir. Genelde, bir neutral-delay diferansiyel denkleminin t_0'ın her iki yanında nasıl çözüleceği henüz bilinmemektedir.

$$x'(t) - 2x(t) + x'(t-1) - 2x(t-1) = e^{2t}$$

denkleminin bir çözümü

$$x(t) = \frac{(t+1)e^{2(t+1)}}{1+e^2}$$

biçimindedir. Bu türden açık çözümler elde etmenin her zaman mümkün olmadığı açıktır. Hatta olsa bile, çözümün yapısı ile ilgili bazı soruları cevaplamak için yetersiz olabilir. Böyle bir durumda, yine de bazı analitik işlemler sırasında ilgili bazı sorulara cevap bulmak mümkün olabilir, böylece bir bakıma denklemi çözülmüş kabul edebiliriz. Ancak t_0'ın sağında çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Bu durumda

$$x^{(n)} = f(t, x^{(i)}(t - r_j(t))), \quad i = 0,1,\ldots,n \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

neutral-delay diferansiyel denklemini, $t_0 < t$ için çözmek gerektiğinde, $x^{(i)}(t - r_j(t))$ lerin argümanlarını t_0'dan küçük kılan t değerleri için verilmiş olmaları gerekir. O halde, ancak $t < t_0$ için

$$x(t) = \theta(t) \ , \quad x^{(i)}(t) = \theta^{(i)}(t)$$

olacak şekilde bir $\theta(t)$ başlangıç fonksiyonu verilirse, bir başlangıç fonksiyon problemini çözmek için gerekli veri elde edilmiş olur. Çözülebilirlik problemi bu aşamada söz konusudur.

$$X(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$$

olmak üzere

$$\dot{X}(t) = F(t, X(t - r_j(t))) \qquad r_j(t) \geq 0, \ j = 1,2,\ldots,m \tag{2.1}$$

biçiminde gecikmeli diferansiyel denklem sistemini ele alalım. $\beta \in IR$ ve $j = 1,2,\ldots,m$ olmak üzere $t_0 < t < \beta$ için $\gamma < t - r_j(t) < t_0$ olacak şekilde bir $\gamma < t_0$ gerçel sayısı mevcut olsun. Ayrıca, $A \subset IR^n$ bir açık küme ve $\theta : [\gamma, t_0] \to A$ verilmiş bir başlangıç fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} t \in [\gamma, t_0] &\Rightarrow \ X(t) = \theta(t) \\ t \in [t_0, \beta] &\Rightarrow \ \dot{X}(t) = F(t, X(t - r_j(t))) \end{aligned} \tag{2.2}$$

olsun. F ve x_i fonksiyonlarını sürekli farz edeceğiz. $X(t)$ nin (2.2) denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$X(t)=\begin{cases}\theta(t), & t\in[\gamma,t_0]\\ \theta(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}F(s,X(s-r_j(s))ds, & t\in[t_0,\beta]\end{cases}$$

olmasıdır.

Eğer, F fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir, $j=1,2,...,m$ için $[t_0,\beta)$ üzerinde $\gamma<r_j(t)<t$ ve r_j sürekli, $[\gamma,t_0]$ üzerinde θ ve ilk $n-1$ türevi sürekli ise $[\gamma,\beta)$ aralığında en çok bir çözümü vardır.

Neutral-delay denklem problemlerin çoğu aşağıda açıklanan tekniklerin kullanılması ile çözülebilirler. Bu teknikler;

a) Başlangıç değer probleminin doğru formülasyonu,
b) Bir çözümün özel noktalarda hesaplanması,
c) Bir çözümün özel çözümlerin toplamı olarak ifade edilmesi,
d) Bir çözümün belirli integraller yardımıyla ifadesi,
e) Çözümlerin salınımları,
f) Çözümlerin asimptotik davranışı,
g) Çözümlerin kararlılığı kavramıdır.

Dikkat edilirse bu tekniklerin her birinin diferansiyel denklemler konuları olduğu hatırlanacaktır.

2.1.3. Adım Yöntemi

Bir neutral delay diferansiyel denklem için, farklı başlangıç fonksiyonlarına farklı çözümler karşılık gelir. Adım yöntemiyle, bazı neutral delay diferansiyel denklemlere verilmiş bir başlangıç fonksiyonuna karşılık gelen çözüm belirli bir aralık için bulunabilir. Yöntem, yalnızca bir cins sabit gecikme içeren gecikme içeren diferansiyel denklemlere aşağıdaki gibi uygulanır. Bir r sabit gecikmeli özel hali olan n mertebeden

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x^{(i-1)}(t), x^{(i-1)}(t-r)\right) \quad , \qquad i = 1,2,...,n \tag{2.3}$$

gecikmeli diferansiyel denklemine, $[t_0 - r, t_0]$ aralığında verilmiş bir $x(t) = \theta(t)$ başlangıç fonksiyonuna bağlı olarak, sabit bir $a > t_0$ için $[t_0, a]$ aralığında adım yöntemiyle bir çözüm bulmak istiyoruz.

$$t \in [t_0, t_0 + r] \;\Rightarrow\; t - r \in [t_0 - r, t_0]$$

olduğundan, $[t_0, t_0 + r]$ için

$$\begin{aligned} x(t-r) &= \theta(t-r) \\ x'(t-r) &= \theta'(t-r) \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t-r) &= \theta^{(n-1)}(t-r) \end{aligned}$$

olacaktır. Buna göre, (2.3) denklemi $t \in [t_0, t_0 + r]$ için

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x^{(i-1)}(t), \theta^{(i-1)}(t-r)\right) \quad , \qquad i = 1,2,...,n$$

adi diferansiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin bir $x(t) = \theta_1(t)$ çözümü $[t_0, t_0 + r]$ aralığında yeni bir başlangıç fonksiyonu olarak alınırsa,

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x^{(i-1)}(t), \theta_1^{(i-1)}(t-r)\right) \quad , \qquad i = 1,2,...,n$$

biçiminde adi diferansiyel denkleminin $x(t) = \theta_2(t)$ çözümü, (2.3) denkleminin $[t_0 + r, t_0 + 2r]$ aralığındaki çözümü olacaktır. Böyle devam edilerek, n. adımda (2.3) denkleminin $[t_0 + (n-1)r, t_0 + nr]$ aralığına kısıtlanmış çözümü bulunur. $[t_0, t_0 + nr]$ aralığındaki çözüm olarak da, $[t_0 - r, t_0]$ için $x(t) = \theta(t)$ olmak üzere

$$x(t) = \begin{cases} \theta_1(t) & , \quad t \in [t_0, t_0 + r] \\ \theta_2(t) & , \quad t \in [t_0 + r, t_0 + 2r] \\ \vdots & , \quad \vdots \\ \theta_n(t) & , \quad t \in [t_0 + (n-1)r, t_0 + nr] \end{cases}$$

elde ederiz. $\forall r \geq 0$ için $a \leq nr$ olacak şekilde $\exists n \in IN$ bulunabileceğinden, böyle bir n için n adımdan sonra $[t_0, a]$ aralığında da çözüm bulunmuş olur. Açıkça görüldüğü gibi, adım yönteminin zorluklarından biri işlemlerin gittikçe karışıklaşmasıdır.

Yine $\tau > 0$, T sabit, f ve φ ise $t \in [t_0, T]$ için sürekli olmak üzere (çözümde ve türevlerinde süreksizlik olabilir)

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t), x(t-r)), \quad && 0 \leq t \leq T \\ x(t) &= \varphi(t), && -\tau \leq t \leq 0 \end{aligned}$$

başlangıç fonksiyon problemi alındığında El'sgol'ts adi diferansiyel denklemlerdeki Euler metodunun gecikmeli diferansiyel denklemler için uygulanabileceğini göstermiştir.

Eğer gecikme terimi, t'nin bir fonksiyonu (değişken gecikme durumu) ise, $t \geq t_0$ için $t - r(t)$'ler t_0'dan küçük olmak üzere, başlangıç fonksiyonu $t - r(t)$'nin bütün değerlerini içeren aralıkta verilmelidir.

Gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunması için çeşitli çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Belirli bir başlangıç fonksiyonu kabul ederek çözümü aralıklar içerisinde bulduran adım yöntemi dışında sabit gecikmeli ve değişken gecikmeli durumlar için Euler metodu ve Tek adım yöntemleri diğer çözüm yöntemleridir.

Lyapunov denklemlerinin kümesi içinde çözüm yöntemi geliştirilmiştir. Fakat bu yöntemin, pratikte h gecikmesi küçükse kullanışlı olduğu söylenebilir.

Bu bölümle ilgili daha geniş ayrıntılı bilgiler (Bellman, 1953), (Bellman ve Cooke, 1963), (Burton, 1985), (Driver, 1977), (El'sgol'ts ve Norkin, 1963), (Myshhis, 1951) gibi kaynaklarda bulunabilir.

2.1.4. Kararlılık ve Asimtotik Kararlılık

Verilen bir neutral-delay diferansiyel sistemi için bazen onun tam çözümünü hesaplamadan çözümün dinamiği hakkında bazı bilgiler elde etmek yeterlidir. Örnek olarak, verilen başlangıç fonksiyon probleminin çözümüne, bu probleme yeteri kadar yakın olan problemlerin çözümlerinin de zamanla birbirinden fazla uzaklaşıp uzaklaşmamaları gibi. Bu tür sorulara kararlılık teorisi cevap verir.

Tasarımda kullanılan pek çok davranış kriteri arasında, en önemli koşul sistemin kararlı olmasıdır. Kararsız bir sistem genelde kullanılamaz kabul edilir. Doğrusal, doğrusal olmayan, sabit katsayılı ve değişken katsayılı tüm sistemler göz önünde bulundurulduğunda kararlılık tanımı çok farklı şekillerde verilebilir (El'sgol'ts ve Norkin, 1963), (Bellman ve Cooke, 1963), (Laksmikantham vd, 1994), (Burton, 1983), (Myshkis, 1951), (Fiagbedzi, 1994), (Kwon ve Pearson, 1980), (Leitman, 1999), (Nazaroff, 1973) ve (Wonham, 1979).

(2.3) denklemini ele alalım. $\forall t \geq t_0$ için $f(t,0,0)=0$ olduğunu varsayalım. $[t_0 - r, t_0]$ üzerinde θ ve ilk $n-1$ türevi sürekli olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ ve $t \geq t_0 - r$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki

$$|\theta^{(i)}(t)| < \delta \,, \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

oldukça

$$|x(t)| < \varepsilon$$

elde edilirse (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü "kararlıdır" denir. Ek olarak, eğer

$$\lim_{t \to \infty} |x(t)| = 0$$

oluyorsa (2.3) denkleminin $x = 0$ çözümü "asimtotik kararlıdır" denir.

Sezgisel olarak, θ başlangıç fonksiyonunda küçük bir değişiklik aynı aralıkta tanımlı ve x çözümüne yakın yeni bir çözüm üretir. Doğal olarak, bahsedilen yakınlığın ölçüsü iki çözüm fonksiyonunun farkının mutlak değeridir.

Karalılıkla ilgili sorular doğrudan diferansiyel denklemin çözümü hesaplanarak incelenebilir. Ancak diferansiyel denklemi çözmeden kararlılığı incelemek hem daha ilginç hem de daha kullanışlıdır. Aslında diferansiyel denklemin çözümünün bulunamadığı durumlarda uygulanabilecek yöntemler amaçlanır.

Gronwall Eşitsizliği: $x \in I$ da $\upsilon(x) \geq 0$ ve $A, B \geq 0$ olmak üzere

$$\upsilon(x) \leq A + B\left|\int_a^x \upsilon(t)dt\right|, \qquad \forall x \in I$$

ise bu taktirde

$$\upsilon(x) \leq Ae^{B|x-a|}, \qquad \forall x \in I$$

eşitsizliği sağlanır.

2.2. Feedback Kontrollu Neutral-Delay Diferansiyel Denklemler

2.2.1. Durum Denklemleri

Genel olarak n'inci mertebeden bir diferansiyel denklem n adet birinci mertebeden diferansiyel sistemine ayrıştırılabilir. Birinci mertebeden diferansiyel denklemler, yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere göre daha kolay çözüldüğünden, kontrol sistemlerinin analitik olarak incelenmesinde genellikle birinci mertebeden diferansiyel denklemler kullanılır.

f, r_j ve a_{ij} ler belirli fonksiyonlar olmak üzere ve n'inci mertebeden

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)x^{(i)}(t - r_j(t)) + f(t) \tag{2.4}$$

gecikmeli diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$x_i(t) = x^{(i-1)}(t), \qquad i = 1,2,...,n \tag{2.5}$$

değişkenleri tanımlarsak n'inci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklem aşağıdaki gibi n adet birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklem takımına ayrışır:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t)x_i(t - r_j(t)) + f(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kontrol sistem kuramında, yukarıdaki birinci mertebeden diferansiyel denklem takımına "durum denklemleri" ve $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenlerine "durum değişkenleri" adı verilir.

2.2.2. Durum Değişkenlerinin Tanımı

Bir sistemin durumu sistemin geçmişteki, şimdiki ve gelecekteki konumunu belirtir. Dinamik sistemler modellenirken, durum değişkenlerini ve durum denklemlerini matematiksel olarak tanımlamak kolaylık sağlar. (2.5) ilişkileri ile tanımlanan $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ değişkenleri, n'inci mertebeden (2.4) denkleminin durum değişkenleri ve (2.6) ilişkisi ile verilen n adet birinci mertebeden diferansiyel denklem de durum denklemleridir. Genel olarak, durum denklemlerini oluşturan durum değişkenlerinin tanımlanmasına ilişkin bazı temel kurallar vardır. Durum denklemleri için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1. Herhangi bir $t = t_0$ başlangıç zamanı için $x_1(t_0), x_2(t_0),..., x_n(t_0)$ durum değişkenleri sistemin "başlangıç durumunu" ifade eder.
2. Bir kez $t \geq t_0$ için sisteme ilişkin girişler ve başlangıç durumu belirlendikten sonra durum değişkenleri sistemin gelecekteki davranışını tamamen belirlemelidir.

Sistemin herhangi bir t_0 anındaki durumunu ve daha sonra sisteme uygulanacak giriş bilgileri ile sistemin herhangi bir $t > t_0$ anındaki davranışı belirlenebilir. $x_1(t), x_2(t),..., x_n(t)$ durum değişkenleri kümesi bir sistemin "minimal değişken kümesi" olarak tanımlanır.

Bir sistemin çıkışları durum değişkenleri ile karıştırılmamalıdır. Bir sistemin çıkışı ölçülebilir bir değişkendir, buna karşın bir durum değişkeni bu koşulu her zaman sağlamayabilir. Genel olarak bir çıkış değişkeni durum değişkenlerinin cebirsel bir kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

2.2.3. Durum Denklemlerinin Vektör-Matris Biçimi

$k = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$x'_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kij}(t)x_i(t - r_j(t)) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{kij}(t)u_i(t - h_j(t)) \ , \qquad t \ge t_0$$

formundaki n denklemden oluşan ve n bilinmeyen fonksiyon içeren bir denklem sistemi ele alalım. Burada $(i = 1,...,n)$ ve $(j = 1,...,m)$ olmak üzere $x_i(t)$ durum değişkenleri; $u_i(t)$ girişleri; a_{kij}, b_{kij} değişken katsayıları ve r_j, h_j gecikme fonksiyonlardır. Durum ve giriş vektörleri $(n \times 1)$ boyutlu

$$X(t) = \left[x_k(t)\right]_{n\times 1} \ , \quad U(t) = \left[u_k(t)\right]_{n\times 1} \qquad (k = 1,2,...,n)$$

matrisleriyle ve benzer şekilde a_{kij}, b_{kij} değişken katsayıları için

$$A_j(t) = \left\lfloor a_{kij} \right\rfloor_{n\times n} \quad , \quad B_j(t) = \left\lfloor b_{kij} \right\rfloor_{n\times n}$$

matrisleriyle tanımlanmış olsunlar. Bu durumda durum denklemleri

$$\dot{X}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j(t)X(t - r_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)U(t - h_j(t)) \ , \qquad t \ge t_0 \tag{2.7}$$

vektör-matris biçiminde ifade edilebilir. Burada, (2.7) sistemine "doğrusal kontrol sistem", $U(t)$ giriş vektörüne "kontrol fonksiyon" adı verilir.

(2.7) sisteminde her $j \in \{1,\cdots,m\}$ için değişken gecikmeli $h_j(t)$ ve $r_j(t)$ ler herhangi sürekli, sınırlı ve negatif olmayan fonksiyon olsunlar. Yani, $\overline{h}_j$ ve $\overline{r}_j$ pozitif sabitler olmak üzere

$$0 \le h_j(t) \le \overline{h}_j \quad , \quad 0 \le r_j(t) \le \overline{r}_j$$

eşitsizlikleri vardır. (2.7) sistemi için başlangıç fonksiyonu

$$X(t) = \Phi(t) \, , \qquad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

ile verilsin. Burada $\Phi(t)$, $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur ve

$$\tau := \max\{\overline{h}_j, \overline{r}_j : \quad j = 1,\cdots,m\}$$

dır.

Tanım: Her $t \geq t_0$ için (2.7) sistemini ve $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında $X(t) = \Phi(t)$ başlangıç fonksiyonunu sağlayan $X(t) \in IR^n$ sürekli fonksiyonuna (2.7) sisteminin $U(t)$ kontrol fonksiyonu tarafından üretilen çözümü denir.

Doğrusal olmayan durum denklemleri için, $f[\cdot]$ $(n \times 1)$ boyutlu bir matris fonksiyonu göstermek üzere

$$\frac{dX(t)}{dt} = f[X(t - r_j(t)), U(t - h_j(t)), t]$$

vektör-matris biçiminde ifade edilebilir.

2.2.4. Genel Kontroledilebilirlik Kavramı

Kuramsal ve uygulamalı modern kontrolda önemli bir rol üstlenen "kontroledilebilirlik" kavramı ilk kez (Kalman, 1961) tarafından ortaya atılmıştır. Kontroledilebilirlik koşulu özellikle bir optimal kontrol problemine ilişkin çözümünün varlığını belirler. Bu geleneksel kontrol kuramı ile optimal kontrol kuramı arasındaki en temel farktır. Geleneksel kontrol kuramında tasarım deneme sınama yöntemleriyle gerçeklendiğinden tasarımcı başlangıçta verilen bir dizi tasarım koşulu için çözümün var olup olmadığını bilemez. Optimal kontrol kuramında ise verilen sistem parametreleri ve tasarım amaçları yönünde bir çözümün varolup olmadığını belirleyen kriterler mevcuttur.

Kontroledilebilirlik incelemesinin önemini göstermek için

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} A_j X(t - r_j) + \sum_{j=1}^{m} B_j U(t - r_j)$$

biçiminde sabit katsayılı bir sistemi ele alalım. Kapalı çevrimli sistemin durum değişkenleri sabit katsayılı K kazanç matrisi üzerinden geri beslenerek elde edilir. Buna göre, K feedback matrisi $(n \times n)$ boyutlu olmak üzere,

$$U(t) = -KX(t) + R(t)$$

yazılabilir. Burada $R(t)$ $(n \times 1)$ boyutlu belirli bir vektör fonksiyonudur. Kapalı çevrimli sistem

$$\frac{dX(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} (A_j - B_j K) X(t - r_j) + \sum_{j=1}^{m} B_j R(t - r_j)$$

denklemiyle ifade edilir. Bu problem durum feedback ile "kutup yerleştirme tasarımı" olarak da bilinir. Tasarımın amacı, burada kapalı çevrimli $(A - BK)$ matrisinin özdeğerlerine karşı gelen özvektör kümesi elde edilecek şekilde K feedback matrisinin belirlenmesi gerekmektedir.

Burada K sabit olduğu gibi $K = k(t)$ değişken katsayısı ve hatta $K = k(x(t), t)$ gibi lineer olmayan bir fonksiyonu da karşımıza çıkabilir. (Davison, 1974), (Leitman, 1999). Böyle bir durumda $u(t)$ girişi belirlenmesi için sistemin kontroledilebilir olması gerekir.

$X(t)$ durumunu $X(t_f)$ son durumuna sonlu $(t_f - t_0) \geq 0$ zamanında iletecek parçalı sürekli bir $u(t)$ girişi mevcut ise, $X(t)$ durumu $t = t_0$'da kontroledilebilir denir. Eğer sistemin her $X(t_0)$ durumu sonlu zaman aralığında kontroledilebilir ise, sisteme "kontroledilebilir" denir. Sezgisel olarak, durum değişkenlerinden herhangi birinin $u(t)$ kontrol değişkenlerine bağımlı olmaması halinde bu özel durum değişkeninin belirli bir kontrol gücü ile sonlu zamanda istenen bir duruma getirilemeyeceği açıktır. Bu nedenle böyle bir özel durum kontrol edilemez ve böyle bir kontroledilemez durum bulunduğu sürece, tüm sistem de "kontroledilemez" denir.

Örneğin, iki durum değişkenli kontroledilemeyen basit doğrusal bir sistemi ele alalım. $u(t)$ kontrol değişkeni sadece $x_1(t)$ değişkenini etkilediğinden $x_2(t)$ durumu kontrol edilemez. Diğer bir deyişle, $x_2(t)$ değişkeni $u(t)$ kontrol değişkeni ile belirli bir $x_2(t_0)$ başlangıç durumundan istenen bir $x_2(t_f)$ hedefine sınırlı bir $t_f - t_0$ zamanında getirilemez. Bu nedenle tüm sistem kontroledilemez olur.

Burada verilen kontroledilebilirlik kavramı bir duruma ilişkindir ve bu nedenle “durum kontroledilebilirlik” olarak da adlandırılır. Kontroledilebilirlik sistemin çıkışları için de tanımlanabilir, bu nedenle durum kontroledilebilirlik ile çıkış kontroledilebilirlik arasında bir farktır.

Kapalı çevrimli sistem bir kez tasarlandıktan sonra durum değişkenlerini feedback haline getirilirken için iki sorunla karşı karşıya kalınır. İlkin durum değişkenlerinin sayısı çok fazla olabilir ve feedback oluşturmak için bu değişkenlerin ölçülmesi yüksek masraf nedeniyle tasarımı engeller. İkinci sorun tüm durum değişkenlerin fiziksel erişilemez olmasından kaynaklanır.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Feedback Kontrollu Birinci Mertebeden Delay İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Kararlılığı

Teknolojik sistemlerin yanı sıra feedback kontrollü neutral delay diferansiyel denklemler biyolojik, sosyal ve ekolojik sistemlerde de tamamen hakimdir. İntegral ve integro diferansiyel denklemler ve kontrol teorisi ile ilgili temel bilgiler (Bartle, 1966), (Burton, 1983), (Corduneanu, 1971), (Corduneanu, 1991), (Györi ve Ladas, 1992), (Miller, 1971) ve (Mitrinovic vd., 1991) gibi kaynaklarda verilmektedir. Bu çalışmada (Fiagbedzi, 1994), (Feliachi ve Thowsen, 1981), (Kwon ve Pearson, 1977) ve (Mori vd., 1983) kaynaklarından yararlanarak feedback kontrollü delay sistemlerin kararlılığı için bir yeterli koşul verilmiştir.

$$x'(t) = a_0 x(t) + \sum_{j=1}^{n_d} a_j x(t - r_j) + \int_{-r}^{0} a(\theta) x(t+\theta) d\theta$$

$$+ b_0 u(t) + \sum_{j=1}^{m_d} b_j u(t - h_j) + \int_{-h}^{0} b(\theta) u(t+\theta) d\theta \ , \quad t \ge 0 \qquad (3.1)$$

delay integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $x(t) \in IR$, $u(t) \in IR$; $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_{n_d} \le r < \infty$, $0 < h_1 < h_2 < \cdots < h_{n_d} \le h < \infty$; $a_j \in IR$, $j = 0,1,\cdots,n_d$; $b_j \in IR$, $j = 0,1,\cdots,m_d$; $a(.)$, $[-r,0]$ aralığında reel değerli parçalı sürekli bir fonksiyon ve $b(.)$, $[-h,0]$ aralığında reel değerli parçalı sürekli bir fonksiyondur. $[-r,0]$ aralığı üzerinde IR değerli sürekli fonksiyonların sınıfı $C([-r,0]; IR)$ olarak gösterilsin ve $\phi \in C([-r,0]; IR)$ fonksiyonu (3.1) denkleminin verilen bir başlangıç fonksiyonu olsun. Buradaki u fonksiyonunu $k \in IR$ olmak üzere

$$u(t) = -kx(t) \qquad (3.2)$$

formunda feedback kontrol olarak düşünelim. $t \in [-r,0]$ için $x(t) = \phi(t)$ ile birlikte $t \ge 0$ için (3.1) denklemini sağlayan $x(t; \phi, u)$ fonksiyonuna (3.1) denkleminin bir çözümüdür denir. Burada $x(t)=\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu ve (3.1) diferansiyel denklemi başlangıç fonksiyon problemi olarak adlandırılır.

Yeteri kadar büyük t için

$$|x(t)|<ke^{-vt}$$

olacak şekilde k ve v pozitif sayıları bulunuyorsa $x(t)=0$ çözümü kararlı olur. Eğer (3.1) denkleminin $x(t)=0$ çözümü kararlı değilse, (3.2) formu sayesinde ve belli bir koşul altında bu çözüm kararlı duruma gelebilir.

Teorem 3.1.1. $1\le m<\infty$ ve $v_0>0$ olmak üzere $\left|e^{(a_0-b_0k)t}\right|<me^{-v_0t}$ olacak şekilde $k\in IR$ mevcut olsun. Eğer

$$e^{v_0r}\left(\sum_{j=1}^{n_d}|a_j|+\int_{-r}^{0}|a(\theta)|\,d\theta\right)+|k|\,e^{v_0h}\left(\sum_{j=1}^{m_d}|b_j|+\int_{-h}^{0}|b(\theta)|\,d\theta\right)<\frac{v_0}{m} \qquad (3.3)$$

eşitsizliği gerçekleşirse (3.1) denkleminin $x(t)=0$ çözümü kararlı olur.

İspat: (3.2) dönüşümü (3.1) denkleminde uygulanırsa kapalı çevrimli delay integro-diferansiyel denklemi

$$x'(t)=(a_0-b_0k)x(t)+\sum_{j=1}^{n_d}a_jx(t-r_j)-k\sum_{j=1}^{m_d}b_jx(t-h_j)$$

$$+\int_{-r}^{0}a(\theta)x(t+\theta)d\theta-k\int_{-h}^{0}b(\theta)x(t+\theta)d\theta\ , \qquad t\ge 0 \qquad (3.4)$$

$$x(t)=\phi(t)\ , \qquad -r\le t\le 0$$

biçiminde gerçekleşir. Bu denklemi parametrelerin değişimi metodu uygulanarak

$$x(t)=e^{(a_0-b_0k)t}\phi(0)+\sum_{j=1}^{n_d}\int_0^t e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}a_jx(\tau-r_j)d\tau-k\sum_{j=1}^{m_d}\int_0^t e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}b_jx(\tau-h_j)d\tau$$

$$+\int_0^t\int_{-r}^{0}e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}a(\theta)x(\tau+\theta)d\theta d\tau-k\int_0^t\int_{-h}^{0}e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}b(\theta)x(\tau+\theta)d\theta d\tau$$

şeklinde integral denklemine denk olur. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$|x(t)| \le e^{(a_0-b_0k)t}\,|\phi(0)| + \sum_{j=1}^{n_d}\int_0^t e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}\,|a_j|\,|x(\tau-r_j)|\,d\tau$$

$$+|k|\sum_{j=1}^{m_d}\int_0^t e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}\,|b_j|\,|x(\tau-h_j)|\,d\tau + \int_0^t\int_{-r}^0 e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}\,|a(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$+|k|\int_0^t\int_{-h}^0 e^{(a_0-b_0k)(t-\tau)}\,|b(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$\le me^{-v_0t}\,|\phi(0)| + m\sum_{j=1}^{n_d}\int_{-r_j}^{t-r_j} e^{-v_0(t-r_j-\tau)}\,|a_j|\,|x(\tau)|\,d\tau$$

$$+|k|\,m\sum_{j=1}^{m_d}\int_{-h_j}^{t-h_j} e^{-v_0(t-h_j-\tau)}\,|b_j|\,|x(\tau)|\,d\tau + m\int_0^t\int_{-r}^0 e^{-v_0(t-\tau)}\,|a(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$+|k|\,m\int_0^t\int_{-h}^0 e^{-v_0(t-\tau)}\,|b(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau\,,$$

ya da

$$e^{v_0t}\,|x(t)| \le m\,|\phi(0)| + m\sum_{j=1}^{n_d} e^{v_0r_j}\,|a_j|\int_{-r_j}^{t-r_j} e^{v_0\tau}\,|x(\tau)|\,d\tau$$

$$+|k|\,m\sum_{j=1}^{m_d} e^{v_0h_j}\,|b_j|\int_{-h_j}^{t-h_j} e^{v_0\tau}\,|x(\tau)|\,d\tau + m\int_0^t\int_{-r}^0 e^{v_0\tau}\,|a(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$+|k|\,m\int_0^t\int_{-h}^0 e^{v_0\tau}\,|b(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$\le m\,|\phi(0)| + m\sum_{j=1}^{n_d} e^{v_0r_j}\,|a_j|\int_{-r_j}^{t} e^{v_0\tau}\,|x(\tau)|\,d\tau$$

$$+|k|\,m\sum_{j=1}^{m_d} e^{v_0h_j}\,|b_j|\int_{-h_j}^{t} e^{v_0\tau}\,|x(\tau)|\,d\tau + m\int_0^t\int_{-r}^0 e^{v_0\tau}\,|a(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau$$

$$+|k|\,m\int_0^t\int_{-h}^0 e^{v_0\tau}\,|b(\theta)|\,|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau \qquad (3.5)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de (3.5) eşitsizliğinin sağ tarafındaki son iki terim için

$$\int_0^t \int_{-r}^0 e^{v_0\tau} \,|\, a(\theta) \,\|\, x(\tau+\theta) \,|\, d\theta d\tau = \int_0^t \int_{-r}^0 e^{-v_0\theta} e^{v_0(\theta+\tau)} \,|\, a(\theta) \,\|\, x(\tau+\theta) \,|\, d\theta d\tau$$

$$= \int_{-r}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, a(\theta) \,|\, \left\{ \int_0^t e^{v_0(\theta+\tau)} \,|\, x(\tau+\theta) \,|\, d\tau \right\} d\theta$$

$$= \int_{-r}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, a(\theta) \,|\, \left\{ \int_{\theta}^{t+\theta} e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau \right\} d\theta$$

$$\leq \int_{-r}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, a(\theta) \,|\, d\theta \int_{-r}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau$$

ve benzer şekilde

$$\int_0^t \int_{-h}^0 e^{v_0\tau} \,|\, b(\theta) \,\|\, x(\tau+\theta) \,|\, d\theta d\tau \leq \int_{-h}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, b(\theta) \,|\, d\theta \int_{-h}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu taktirde elde edilen son eşitsizlikler (3.5)'te yerine konulursa

$$e^{v_0 t} \,|\, x(t) \,| \leq m \,|\, \phi(0) \,| + m \sum_{j=1}^{n_d} e^{v_0 r_j} \,|\, a_j \,|\, \int_{-r_j}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau$$

$$+ |\, k \,|\, m \sum_{j=1}^{m_d} e^{v_0 h_j} \,|\, b_j \,|\, \int_{-h_j}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau + m \int_{-r}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, a(\theta) \,|\, d\theta \int_{-r}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau$$

$$+ m \,|\, k \,|\, \int_{-h}^0 e^{-v_0\theta} \,|\, b(\theta) \,|\, d\theta \int_{-h}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau \qquad (3.6)$$

yazılabilir. Buradaki bazı integraller için başlangıç fonksiyonu göz önüne alınırsa örneğin;

$$\int_{-r}^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau = \int_{-r}^0 e^{v_0\tau} \,|\, \phi(\tau) \,|\, d\tau + \int_0^t e^{v_0\tau} \,|\, x(\tau) \,|\, d\tau$$

biçimindeki durum elde edilir. Bu durumda

$$k_0 = m \,|\, \phi(0) \,| + m e^{v_0 r} \sum_{j=1}^{n_d} |\, a_j \,|\, \int_{-r_j}^0 e^{v_0\tau} \,|\, \phi(\tau) \,|\, d\tau$$

$$+|k|me^{v_0 h}\sum_{j=1}^{m_d}|b_j|\int_{-h_j}^{0}e^{v_0\tau}|\phi(\tau)|d\tau+m\int_{-r}^{0}e^{-v_0\theta}|a(\theta)|d\theta\int_{-r}^{0}e^{v_0\tau}|\phi(\tau)|d\tau$$

$$+m|k|\int_{-h}^{0}e^{-v_0\theta}|b(\theta)|d\theta\int_{-h}^{0}e^{v_0\tau}|\phi(\tau)|d\tau$$

ve

$$\frac{k_1}{m}=e^{v_0 r}\left(\sum_{j=1}^{n_d}|a_j|+\int_{-r}^{0}|a(\theta)|d\theta\right)+|k|e^{v_0 h}\left(\sum_{j=1}^{m_d}|b_j|+\int_{-h}^{0}|b(\theta)|d\theta\right)$$

olmak üzere (3.6)’dan

$$e^{v_0 t}|x(t)|\leq k_0+k_1\int_{0}^{t}e^{v_0\tau}|x(\tau)|d\tau \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliğine Gronwall (Corduneanu, 1971) eşitsizliği uygulanırsa

$$|x(t)|\leq k_0 e^{-(v_0-k_1)t}$$

sonucu bulunur. (3.3)’te verilen koşul $k_1 < v_0$ olduğundan, dolayısıyla $x(t)=0$ çözümü kararlıdır. Ayrıca $\lim_{t\to\infty}|x(t)|=0$ olduğundan $x(t)=0$ çözümü asimptotik kararlıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.2. Birinci Mertebeden Feedback Kontrollu Neutral Delay İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

Şimdi, birinci mertebeden neutral delay diferansiyel denklemini

$$x'(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x(t-w) + a_2(t)x'(t-w) + \int_{-w}^{0} a(\theta)x(t+\theta)d\theta$$

$$+ b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-w) + b_2(t)u'(t-w) + \int_{-w}^{0} b(\theta)u(t+\theta)d\theta \ , \quad t \geq 0 \qquad (3.8)$$

biçiminde göz önüne alalım. Burada $\forall t \geq 0$ için $x(t),\, u(t) \in IR$, $a_j(t)$ ve $b_j(t)$ $(j = 0,1,2)$ fonksiyonları sürekli ve $a_2(t)$ ve $b_2(t)$ sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır. $[-w,0]$ aralığında $a(.)$ ve $b(.)$ fonksiyonları parçalı sürekli olsun ve bu aralıkta sürekli bir $x(t) = \Phi(t)$ başlangıç fonksiyonu verilsin. Ayrıca u fonksiyonu için $k(t) \in IR$ $(t \in IR)$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(t) = k(t)x(t) \qquad (3.9)$$

feedback kontrol olarak tanımlansın.

Uygulanmak istenen yöntem, (3.9) dönüşümünü kullanarak kapalı çevrimli (3.8) denkleminin $[(n-1)w, nw]$, $(n \geq 1)$ aralıklarında adımlar metodu uygulanarak çözümlerin ve türevlerinin varlığı için yeterli koşullar elde etmektir. (3.8) denklemi, (3.1) denkleminin delay ve sabit katsayılı olması durumundan geliştirilmiştir (Yeniçerioğlu, vd., 2002).

Teorem 3.2.1. $\forall t \in [0,\infty)$ için

$$|\, a_0(t) + k(t)b_0(t) \,| \leq c_0 \, , \quad |\, a_1(t) + k(t-w)b_1(t) + k'(t-w)b_2(t) \,| \leq c_1 \, ,$$

$$|\, a_2(t) + k(t-w)b_2(t) \,| \leq c_2 \, , \quad \left| \left(a_2(t) + k(t-w)b_2(t) \right)' \right| \leq \tilde{c}_2$$

koşulları sağlanacak şekilde ve $c=\max\limits_{\theta\in[-w,0]}|a(\theta)+k(t+w)b(\theta)|$, $g=\max\limits_{t\in[-w,0]}|\Phi(t)|$ olacak şekilde $c, g, \tilde{c}_2, c_j$ $(j=0,1,2)$ sayıları varsa bu durumda (3.8) denkleminin $x(t)$ çözümü için $t\in[(n-1)w, nw]$, $n=1,2,...$ aralıklarında

$$|x(t)|\leq g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\tilde{c}_2+cw)(t+nw)\} \tag{3.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.9) dönüşümü (3.8) denkleminde yerine yazılırsa $t\geq 0$ için kapalı çevrimli denklem

$$x'(t)=(a_0(t)+k(t)b_0(t))x(t)+(a_1(t)+k(t-w)b_1(t)+k'(t-w)b_2(t))x(t-w)$$

$$+(a_2(t)+k(t-w)b_2(t))x'(t-w)+\int\limits_{-w}^{0}(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta))x(t+\theta)d\theta \tag{3.11}$$

formuna dönüşür. $0\leq t\leq w$ aralığında (3.11) denkleminin her iki tarafı 0 dan t ye kadar integre edilirse

$$x(t)=x(0)+\int\limits_0^t(a_0(\tau)+k(\tau)b_0(\tau))x(\tau)d\tau$$

$$+\int\limits_0^t(a_1(\tau)+k(\tau-w)b_1(\tau)+k'(\tau-w)b_2(\tau))x(\tau-w)d\tau$$

$$+\int\limits_0^t(a_2(\tau)+k(\tau-w)b_2(\tau))x'(\tau-w)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{-w}^0(a(\theta)+k(\tau+\theta)b(\theta))x(\tau+\theta)d\theta d\tau$$

denklemi elde edilir. $0\leq t\leq w$ aralığında $x(t-w)=\Phi(t-w)$, $x(0)=\Phi(0)$, $x(-w)=\Phi(-w)$ olduğundan ve yukarıdaki son denklemin sağ tarafındaki 4. terimde kısmi integrasyon formülü uygulanırsa

$$x(t)=\Phi(0)+\int_0^t\big(a_0(\tau)+k(\tau)b_0(\tau)\big)x(\tau)d\tau+\big(a_2(t)+k(t-w)b_2(t)\big)\Phi(t-w)$$

$$-\big(a_2(0)+k(-w)b_2(0)\big)\Phi(-w)+\int_0^t\big(a_1(\tau)+k(\tau-w)b_1(\tau)+k'(\tau-w)b_2(\tau)\big)x(\tau-w)d\tau$$

$$-\int_0^t\big(a_2(\tau)+k(\tau-w)b_2(\tau)\big)'x(\tau-w)d\tau+\int_0^t\int_{-w}^0\big(a(\theta)+k(\tau+\theta)b(\theta)\big)x(\tau+\theta)d\theta d\tau$$

bulunur. Bu denklemin her iki tarafını mutlak değeri alınarak

$$|x(t)|\le\Phi(0)+\int_0^t|a_0(\tau)+k(\tau)b_0(\tau)||x(\tau)|d\tau+|a_2(t)+k(t-w)b_2(t)||\Phi(t-w)|$$

$$+|a_2(0)+k(-w)b_2(0)||\Phi(-w)|+\int_0^t|a_1(\tau)+k(\tau-w)b_1(\tau)+k'(\tau-w)b_2(\tau)||x(\tau-w)|d\tau$$

$$+\int_0^t\left|\big(a_2(\tau)+k(\tau-w)b_2(\tau)\big)'\right||x(\tau-w)|d\tau+\int_0^t\int_{-w}^0|a(\theta)+k(\tau+\theta)b(\theta)||x(\tau+\theta)|d\theta d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Teoremin koşulları kullanılarak

$$|x(t)|\le g+c_0\int_0^t|x(\tau)|d\tau+2c_2g+c_1\int_0^t|x(\tau-w)|d\tau+\widetilde{c}_2\int_0^t|x(\tau-w)|d\tau$$

$$+c\int_0^t\int_{-w}^0|x(\tau+\theta)|d\theta d\tau$$

$$=g(1+2c_2)+c_0\int_0^t|x(\tau)|d\tau+c_1\int_{-w}^{t-w}|x(\tau)|d\tau+\widetilde{c}_2\int_{-w}^{t-w}|x(\tau)|d\tau+c\int_0^t\int_{-w}^0|x(\tau+\theta)|d\theta d\tau$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki integraller için

$$\int_0^t|x(\tau)|d\tau\le\int_{-w}^t|x(\tau)|d\tau\ ,\qquad \int_{-w}^{t-w}|x(\tau)|d\tau\le\int_{-w}^t|x(\tau)|d\tau$$

ve

$$\int_0^t\int_{-w}^0|x(\tau+\theta)|d\theta d\tau=\int_{-w}^0\left\{\int_0^t|x(\tau+\theta)|d\tau\right\}d\theta=\int_{-w}^0\left\{\int_\theta^{t+\theta}|x(\tau)|d\tau\right\}d\theta$$

$$\le\int_{-w}^0d\theta\int_{-w}^t|x(\tau)|d\tau=w\int_{-w}^t|x(\tau)|d\tau$$

yazılabildiğinden

$$|x(t)| \le g(1+2c_2) + c_0 \int_{-w}^{t} |x(\tau)|\, d\tau + c_1 \int_{-w}^{t} |x(\tau)|d\tau + \tilde{c}_2 \int_{-w}^{t} |x(\tau)|d\tau + cw \int_{-w}^{t} |x(\tau)|\, d\tau$$

$$= g(1+2c_2) + \left(c_0 + c_1 + \tilde{c}_2 + cw\right) \int_{-w}^{t} |x(\tau)|\, d\tau$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliği uygulanırsa $0 \le t \le w$ aralığındaki (3.11) denkleminin çözümü için

$$|x(t)| \le g(1+2c_2) \exp\left\{\left(c_0 + c_1 + \tilde{c}_2 + cw\right)(t+w)\right\}$$

sonucu bulunur.

Şimdi de Tümevarım yöntemini kullanacak olursak, $(n-1)w \le t \le nw$ aralığındaki (3.10) eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilerek Bu durumda, $nw \le t \le (n+1)w$ aralığında (3.11) denkleminin her iki tarafını nw den t ye kadar integre edersek

$$x(t) = x(nw) + \int_{nw}^{t} \left(a_0(\tau) + k(\tau) b_0(\tau)\right) x(\tau) d\tau$$

$$+ \int_{nw}^{t} \left(a_1(\tau) + k(\tau - w) b_1(\tau) + k'(\tau - w) b_2(\tau)\right) x(\tau - w) d\tau$$

$$+ \int_{nw}^{t} \left(a_2(\tau) + k(\tau - w) b_2(\tau)\right) x'(\tau - w) d\tau + \int_{nw-w}^{t} \int^{0} \left(a(\theta) + k(\tau + \theta) b(\theta)\right) x(\tau + \theta) d\theta d\tau ,$$

$$x(t) = x(nw) + \int_{nw}^{t} \left(a_0(\tau) + k(\tau) b_0(\tau)\right) x(\tau) d\tau + \left(a_2(t) + k(t-w) b_2(t)\right) x(t-w)$$

$$- \left(a_2(nw) + k((n-1)w) b_2(nw)\right) x((n-1)w) - \int_{nw}^{t} \left(a_2(\tau) + k(\tau - w) b_2(\tau)\right)' x(\tau - w) d\tau$$

$$+ \int_{nw}^{t} \left(a_1(\tau) + k(\tau - w) b_1(\tau) + k'(\tau - w) b_2(\tau)\right) x(\tau - w) d\tau$$

$$+ \int_{nw-w}^{t} \int^{0} \left(a(\theta) + k(\tau + \theta) b(\theta)\right) x(\tau + \theta) d\theta d\tau ,$$

$$|x(t)| \le |x(nw)| + \int_{nw}^{t} |a_0(\tau)+k(\tau)b_0(\tau)||x(\tau)|\,d\tau + |a_2(t)+k(t-w)b_2(t)||x(t-w)|$$

$$+|a_2(nw)+k((n-1)w)b_2(nw)||x((n-1)w)| + \int_{nw}^{t}\left|\left(a_2(\tau)+k(\tau-w)b_2(\tau)\right)'\right||x(\tau-w)|d\tau$$

$$+\int_{nw}^{t}|a_1(\tau)+k(\tau-w)b_1(\tau)+k'(\tau-w)b_2(\tau)||x(\tau-w)|d\tau$$

$$+\int_{nw-w}^{t}\int^{0}|a(\theta)+k(\tau+\theta)b(\theta)||x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau\,,$$

$$|x(t)| \le |x(nw)| + c_0\int_{nw}^{t}|x(\tau)|\,d\tau + c_2\,|x(t-w)| + c_2\,|x((n-1)w)| + \widetilde{c}_2\int_{nw}^{t}|x(\tau-w)|d\tau$$

$$+c_1\int_{nw}^{t}|x(\tau-w)|d\tau + c\int_{nw-w}^{t}\int^{0}|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. $(n-1)w \le t \le nw$ aralığındaki (3.10) eşitsizliği kabul edildiğine göre

$$|x(nw)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\}$$

$$|x((n-1)w)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)((2n-1)w)\}$$

$$\le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\}$$

$$|x(t-w)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(t+(n-1)w)\}$$

$$\le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\}$$

sağlanır. (3.12)'den $\alpha=(1+2c_2)\exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2w)\}$ olmak üzere

$$|x(t)| \le g\alpha^n + c_0\int_{nw}^{t}|x(\tau)|\,d\tau + 2c_2 g\alpha^n + \widetilde{c}_2\int_{(n-1)w}^{t-w}|x(\tau)|d\tau$$

$$+c_1\int_{(n-1)w}^{t-w}|x(\tau)|d\tau + c\int_{nw-w}^{t}\int^{0}|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau \tag{3.13}$$

elde edilir. Buradaki integraller için

$$\int_{nw}^{t}|x(\tau)|\,d\tau \le \int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau \quad , \qquad \int_{(n-1)w}^{t-w}|x(\tau)|\,d\tau \le \int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau$$

ve

$$\int_{nw-w}^{t}\int^{0}|x(\tau+\theta)|\,d\theta d\tau=\int_{-w}^{0}\left\{\int_{nw}^{t}|x(\tau+\theta)|\,d\tau\right\}d\theta=\int_{-w}^{0}\left\{\int_{nw+\theta}^{t+\theta}|x(\tau)|\,d\tau\right\}d\theta$$

$$\leq\int_{-w}^{0}d\theta\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau=w\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau$$

olduklarından bu taktirde (3.13) eşitsizliğinden

$$|x(t)|\leq g\alpha^{n}+c_0\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau+2c_2 g\alpha^{n}+\tilde{c}_2\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|d\tau+c_1\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|d\tau$$

$$+cw\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|\,d\tau\,,$$

$$|x(t)|\leq g\alpha^{n}(1+2c_2)+\left(c_0+\tilde{c}_2+c_1+cw\right)\int_{(n-1)w}^{t}|x(\tau)|d\tau$$

elde edilir. Buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa

$$|x(t)|\leq g\alpha^{n}(1+2c_2)\exp\left(c_0+\tilde{c}_2+c_1+cw\right)\left(t-(n-1)w\right)$$

ya da

$$|x(t)|\leq g(1+2c_2)^{n+1}\exp\left(c_0+\tilde{c}_2+c_1+cw\right)\left(t+(n+1)w\right)$$

sonucu elde edilir ve Teorem 3.2.1'nin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2. Teorem 3.2.1'nin hipotezleri altında ek olarak, eğer $\Phi(t)\in C^1\left([-w,0],IR\right)$ ve $x(t)\in C^1\left([(n-1)w,nw],IR\right)$, $n\geq 0$ ise bu durumda $m=\max_{t\in[-w,0]}\left[|\Phi(t)|+|\Phi'(t)|\right]$, $\alpha=(1+2c_2)\exp\left\{\left(c_0+c_1+\tilde{c}_2+cw\right)(2w)\right\}$,

$c_{1,2}=\max\{c_1,c_2\}$ sayıları ve

$$m_1=m\,,\;\; m_n=g\alpha^{n-1}+\left[g\alpha^{n-2}(c_0+cw)+c_{1,2}m_{n-1}\right]\exp\left\{\left(c_0+cw\right)2w\right\},\;\; n\geq 2$$

dizisi tanımlanmak üzere $t\in[(n-1)w,nw]$, $(n=1,2,...)$ aralıklarında

$$|x'(t)|\leq\left[\alpha^{n-1}g(c_0+cw)+c_{1,2}m_n\right]\exp\left\{(c_0+cw)(t-(n-2)w)\right\}\qquad(3.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: $0 \le t \le w$ aralığında (3.11) denkleminin sağ tarafındaki 1. ve 4. terimler için integral hesabının temel teoremi uygulanırsa, sırasıyla

$$\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)x(t)=\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)\int_0^t x'(\tau)d\tau+\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)x(0)$$

ve

$$\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)x(t+\theta)d\theta=\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)\left\{\int_0^t x'(\tau+\theta)d\tau\right\}d\theta$$
$$+\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)x(\theta)d\theta$$

özdeşlikleri elde edilir. Bu özdeşlikler (3.11) denkleminde yerine yazılırsa

$$x'(t)=\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)\int_0^t x'(\tau)d\tau+\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)x(0)$$
$$+\left(a_1(t)+k(t-w)b_1(t)+k'(t-w)b_2(t)\right)x(t-w)+\left(a_2(t)+k(t-w)b_2(t)\right)x'(t-w)$$
$$+\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)\left\{\int_0^t x'(\tau+\theta)d\tau\right\}d\theta+\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)x(\theta)d\theta,$$

$$x'(t)=\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)\int_0^t x'(\tau)d\tau+\left(a_0(t)+k(t)b_0(t)\right)\Phi(0)$$
$$+\left(a_1(t)+k(t-w)b_1(t)+k'(t-w)b_2(t)\right)\Phi(t-w)+\left(a_2(t)+k(t-w)b_2(t)\right)\Phi'(t-w)$$
$$+\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)\left\{\int_0^t x'(\tau+\theta)d\tau\right\}d\theta+\int_{-w}^{0}\left(a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)\right)\Phi(\theta)d\theta$$

denklemi bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafın mutlak değeri alınır ve Teorem 3.2.2.’nin koşulları uygulanırsa

$$|x'(t)|\le|a_0(t)+k(t)b_0(t)|\int_0^t|x'(\tau)|\,d\tau+|a_0(t)+k(t)b_0(t)||\Phi(0)|$$
$$+|a_1(t)+k(t-w)b_1(t)+k'(t-w)b_2(t)||\Phi(t-w)|+|a_2(t)+k(t-w)b_2(t)||\Phi'(t-w)|$$
$$+\int_{-w}^{0}|a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)|\left\{\int_0^t|x'(\tau+\theta)|\,d\tau\right\}d\theta+\int_{-w}^{0}|a(\theta)+k(t+\theta)b(\theta)||\Phi(\theta)|\,d\theta,$$

$$|x'(t)| \le c_0 \int_0^t |x'(\tau)|\,d\tau + c_0\,|\Phi(0)| + c_{1,2}\big[|\Phi(t-w)| + |\Phi'(t-w)|\big]$$

$$+ c\int_{-w}^{0}\left\{\int_0^t |x'(\tau+\theta)|\,d\tau\right\}d\theta + c\int_{-w}^{0}|\Phi(\theta)|\,d\theta$$

$$\le c_0\int_0^t |x'(\tau)|\,d\tau + c_0 g + c_{1,2} m + cw\int_{\theta}^{t+\theta}|x'(\tau)|\,d\tau + cwg$$

$$\le c_0 g + cwg + c_{1,2}m + c_0\int_{-w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau + cw\int_{-w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau$$

$$= (c_0 + cw)g + c_{1,2}m + (c_0 + cw)\int_{-w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Gronwall eşitsizliği kullanılırsa $0 \le t \le w$ aralığında

$$|x'(t)| \le \big[(c_0 + cw)g + c_{1,2}m\big]\exp\{(c_0 + cw)(t+w)\}$$

bulunur.

$(n-1)w \le t \le nw$ aralığında Tümevarım yöntemi uygulanırsa, (3.14) eşitsizliğinin doğru olduğu kabul edilip, bu durumda, $nw \le t \le (n+1)w$ aralığında (3.11) eşitliğinin sağ tarafındaki 1.ve 4. terimlerine integral hesabının temel teoremi uygulanırsa

$$x'(t) = \big(a_0(t) + k(t)b_0(t)\big)\int_{nw}^{t} x'(\tau)d\tau + \big(a_0(t) + k(t)b_0(t)\big)x(nw)$$

$$+ \big(a_1(t) + k(t-w)b_1(t) + k'(t-w)b_2(t)\big)x(t-w) + \big(a_2(t) + k(t-w)b_2(t)\big)x'(t-w)$$

$$+ \int_{-w}^{0}\big(a(\theta) + k(t+\theta)b(\theta)\big)\left\{\int_{nw}^{t} x'(\tau+\theta)d\tau\right\}d\theta + \int_{-w}^{0}\big(a(\theta) + k(t+\theta)b(\theta)\big)x(nw+\theta)d\theta,$$

$$|x'(t)| \le c_0\int_{nw}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau + c_0\,|x(nw)| + c_{1,2}\big[|x(t-w)| + |x'(t-w)|\big]$$

$$+ c\int_{-w}^{0}\left\{\int_{nw}^{t}|x'(\tau+\theta)|\,d\tau\right\}d\theta + c\int_{-w}^{0}|x(nw+\theta)|\,d\theta \tag{3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.10) eşitsizliği

$$|x(nw)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\} = g\alpha^n$$

$$|x(nw+\theta)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw+\theta)\}$$

$$\le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\} = g\alpha^n$$

$$|x(t-w)| \le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(t+(n-1)w)\}$$

$$\le g(1+2c_2)^n \exp\{(c_0+c_1+\widetilde{c}_2+cw)(2nw)\} = g\alpha^n$$

sağladığından ve (3.14) eşitsizliği

$$|x'(t-w)| \le \left[\alpha^{n-1} g(c_0+cw) + c_{1,2}m_n\right] \exp\{(c_0+cw)(t-(n-1)w\}$$

$$\le \left[\alpha^{n-1} g(c_0+cw) + c_{1,2}m_n\right] \exp\{(c_0+cw)2w\}$$

olarak yazılabildiğinden

$$|x(t-w)| + |x'(t-w)| \le g\alpha^n + \left[\alpha^{n-1} g(c_0+cw) + c_{1,2}m_n\right] \exp\{(c_0+cw)2w\}$$

veya

$$|x(t-w)| + |x'(t-w)| \le m_{n+1}$$

elde edilir. Böylece (3.15)'den

$$|x'(t)| \le c_0 \int_{nw}^{t} |x'(\tau)|\,d\tau + c_0 g\alpha^n + c_{1,2}m_{n+1} + c\int_{-w}^{0}\left\{\int_{nw}^{t}|x'(\tau+\theta)|\,d\tau\right\}d\theta + cwg\alpha^n$$

$$= c_0 \int_{nw}^{t} |x'(\tau)|\,d\tau + c_0 g\alpha^n + c_{1,2}m_{n+1} + cw\int_{nw+\theta}^{t+\theta}|x'(\tau)|\,d\tau + cwg\alpha^n$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki 1. ve 4. terimde bulunan integraller için

$$\int_{nw}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau \le \int_{(n-1)w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau \quad , \qquad \int_{nw+\theta}^{t+\theta}|x'(\tau)|\,d\tau \le \int_{(n-1)w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau$$

olduklarından

$$|x'(t)| \le g\alpha^n(c_0+cw) + c_{1,2}m_{n+1} + c_0\int_{(n-1)w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau + cw\int_{(n-1)w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau$$

$$\le g\alpha^n(c_0+cw) + c_{1,2}m_{n+1} + (c_0+cw)\int_{(n-1)w}^{t}|x'(\tau)|\,d\tau$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan Gronwall eşitsizliği kullanılırsa $nw \le t \le (n+1)w$ aralığında

$$|x'(t)| \le \left[\alpha^n g(c_0 + cw) + c_{1,2} m_{n+1}\right] \exp\{(c_0 + cw)(t - (n-1)w)\}$$

sonucu bulunur ve ispat tamamlanır.

3.3. Durum Feedback Kontrollu Birinci Mertebeden Lineer ve Lineer Olmayan Neutral Delay Diferansiyel Denklemlerin Sınırlılığı

Birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemini

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a_0(t)x(t) + a_1(t)x(t-w) + a_2(t)x'(t-w) + h(t, x(t-w), x'(t-w)) \\ &\quad - b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-w) + b_2(t)u'(t-w) \quad , \qquad t \geq 0 \qquad (3.16) \\ x(t) &= g(t) \quad , \quad -w \leq t \leq 0 \quad (w > 0) \end{aligned}$$

biçiminde ele alalım. Burada $x(t)$, $u(t) \in IR$; $t \geq 0$ için $a_j(t)$ ve $b_j(t)$, $(j = 0,1,2)$ w-periyotlu sürekli fonksiyon; $g(t)$, $[-w,0]$ aralığında sürekli türevlenebilen verilen bir başlangıç fonksiyonu olsun. h fonksiyonu ise $h(t, x_1, x_2) \in C(IR \times IR \times IR, IR)$ ve

$$h(t + w, x_1, x_2) = h(t, x_1, x_2) \qquad (3.17)$$

özelliğini sağlayan bir fonksiyon olarak tanımlansın. Ayrıca $u(t)$ feedback kontrol fonksiyonu

$$u(t) = k(t)x(t) \qquad (3.18)$$

formunda olsun. Burada $k(t)$ fonksiyonu her $t \in IR$ için w-periyotlu sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur.

(Al-mutib, 1984), (Bellen, vd., 1988) ve (Torelli, 1989) makalelerinde, (3.16) denkleminin özel bir hali olan delay diferansiyel denkleminin kararlılığı için bir nümerik çözüm metodu kullanılmıştır. Bu çalışmada ise, (3.16) denkleminin kararlılığı için alternatif bir yöntem sunulmuştur. Bu durum lineer delay diferansiyel denklemin daha genel bir hali olmuştur (Agamaliyev ve Yeniçerioğlu, 2003).

Teorem 3.3.1. $\forall t \geq 0$ için $h(t, x_1, x_2) \equiv 0$, $a(t) > 0$ ve

$$|c(t)| + \left| \frac{b(t)}{a(t)} - c(t) \right| \leq 1$$

koşulları sağlanırsa

$$F_1 = \max\left\{ \max_{-w \le t \le 0} |\, g(t)\,| \quad , \quad \max_{-w \le t \le 0} \frac{|\, b(t+w)g(t) + c(t+w)g'(t)\,|}{a(t+w)} \right\}$$

olmak üzere (3.16) denkleminin çözümleri için

$$|\, x(t)\,|\,, \quad \frac{|\, b(t)x(t) + c(t)x'(t)\,|}{a(t)} \le F_1 \tag{3.19}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$a(t) = a_0(t) + k(t)b_0(t) \ , \quad c(t) = a_2(t) + k(t-w)b_2(t)$$

ve

$$b(t) = a_1(t) + k(t-w)b_1(t) + k'(t-w)b_2(t)$$

şeklindedirler.

İspat. (3.18) dönüşümü (3.16) denkleminde yerine yazılırsa kapalı çevrimli neutral delay diferansiyel denklemi

$$x'(t) = -\big(a_0(t) + k(t)b_0(t)\big)x(t) + \big(a_1(t) + k(t-w)b_1(t) + k'(t-w)b_2(t)\big)x(t-w)$$
$$+ \big(a_2(t) + k(t-w)b_2(t)\big)x'(t-w) \quad , \quad t \ge 0$$

ya da

$$x'(t) = -a(t)x(t) + b(t)x(t-w) + c(t)x'(t-w) \quad , \quad t \ge 0 \tag{3.20}$$

denklemine dönüşür. (3.20) denkleminin $0 \le t \le w$ aralığındaki çözümü

$$x(t) = x(t,0)g(0) + \int_0^t x(t,s)\big(b(s)g(s-w) + c(s)g'(s-w)\big)ds \tag{3.21}$$

olarak elde edilir. Burada

$$x(t,s) = \exp\left\{ -\int_s^t a(\tau)d\tau \right\}$$

dır.

$$\int_\tau^t x(t,s)a(s)ds = 1 - x(t,\tau) \tag{3.22}$$

olduğu göz önünde tutularak (3.21) denkleminden

$$|x(t)|\le x(t,0)\,|g(0)|+\int_0^t x(t,s)a(s)\frac{|b(s)g(s-w)+c(s)g'(s-w)|}{a(s)}ds$$

$$\le x(t,0)\max_{-w\le t\le 0}|g(t)|+\max_{0\le t\le w}\frac{|b(t)g(t-w)+c(t)g'(t-w)|}{a(t)}\int_0^t x(t,s)a(s)ds$$

$$\le \max\left\{\max_{-w\le t\le 0}|g(t)|\quad,\quad \max_{-w\le t\le 0}\frac{|b(t+w)g(t)+c(t+w)g'(t)|}{a(t+w)}\right\}\big(x(t,0)+1-x(t,0)\big)$$

$$=F_1,$$

yani, $t\in[0,w]$ için

$$|x(t)|\le F_1$$

elde edilir. Öte yandan, (3.20) denkleminden

$$b(t)x(t)+c(t)x'(t)=-\big(c(t)a(t)-b(t)\big)x(t)+c(t)\big(b(t)g(t-w)+c(t)g'(t-w)\big)$$

yazılabilir. $t\in[0,w]$ aralığında

$$\frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)|}{a(t)}\le\left|\frac{b(t)}{a(t)}-c(t)\right||x(t)|+|c(t)|\frac{|b(t)g(t-w)+c(t)g'(t-w)|}{a(t)}$$

$$\le\left(\left|\frac{b(t)}{a(t)}-c(t)\right|+|c(t)|\right)F_1\le F_1$$

ya da

$$\frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)|}{a(t)}\le F_1$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $t\in[(n-1)w,nw]$ aralığında (3.19) eşitsizliği doğru olsun. Bu taktirde $nw\le t\le(n+1)w$ aralığında (3.20) denkleminin çözümü

$$x(t)=x(t,nw)x(nw)+\int_{nw}^t x(t,s)\big(b(s)x(s-w)+c(s)x'(s-w)\big)ds$$

olarak bulunur. (3.22) ifadesi kullanılarak $b(t)$, $c(t)$ ve $a(t)$ periyodik olmasından dolayı

$$|x(t)| \le x(t,nw)\,|x(nw)| + \int_{nw}^{t} x(t,s)a(s)\frac{|b(s)x(s-w)+c(s)x'(s-w)|}{a(s)}ds$$

$$\le x(t,nw)\,|x(nw)| + \big(1-x(t,nw)\big)\max_{nw\le t\le (n+1)w}\frac{|b(t)x(t-w)+c(t)x'(t-w)|}{a(t)}$$

$$\le \max\left\{\max_{(n-1)w\le t\le nw}|x(t)| \quad , \quad \max_{(n-1)w\le t\le nw}\frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)|}{a(t)}\right\}\big(x(t,nw)+1-x(t,nw)\big)$$

$$\le F_1,$$

yani $t\in[nw,(n+1)w]$ için

$$|x(t)| \le F_1$$

elde edilir. (3.20) denkleminden

$$b(t)x(t)+c(t)x'(t) = -\big(c(t)a(t)-b(t)\big)x(t) + c(t)\big(b(t)x(t-w)+c(t)x'(t-w)\big)$$

olduğundan

$$\frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)|}{a(t)} \le \left|\frac{b(t)}{a(t)}-c(t)\right|\,|x(t)| + |c(t)|\frac{|b(t)x(t-w)+c(t)x'(t-w)|}{a(t)}$$

$$\le \left(\left|\frac{b(t)}{a(t)}-c(t)\right| + |c(t)|\right)F_1 \le F_1$$

ya da $t\in[nw,(n+1)w]$ için

$$\frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)|}{a(t)} \le F_1$$

sonucu elde edilir. Bu sonuçtan, Tümevarım yöntemi kullanılarak $\forall t\in[0,\infty)$ için (3.19) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olur. Ayrıca $\forall t\in[0,\infty)$ için $|x(t)|\le F_1$ olduğundan (3.16) denkleminin $x=0$ çözümü kararlıdır.

Teorem 3.3.2. Kabul edelim ki

i) $a(t)>0$, $\forall t\in[0,\infty)$;

ii) $IR\times IR\times IR$ bölgesinde h fonksiyonu için $\big(h(t,x_1,x_2)\neq 0\big)$

$$|h(t,x_1(t),x_2(t))| \le m(t)\,|x_1(t)| \qquad (3.23)$$

koşulunu sağlayacak biçimde bir $m(t)$ fonksiyonu olsun; ve

iii) $$\left|\frac{b(t)}{a(t)} - c(t)\right| + |c(t)| + \frac{m(t)}{a(t)} \le 1 \ , \ \forall t \in [0,\infty) \tag{3.24}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\forall t \in [0,\infty)$ için

$$|x(t)| \quad , \quad \frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \le F_2 \tag{3.25}$$

eşitsizlikleri sağlanır, burada

$$F_2 = \max\left\{ \max_{-w\le t\le 0} |g(t)| \quad , \quad \max_{-w\le t\le 0} \frac{|b(t+w)g(t) + c(t+w)g'(t) + h(t+w, g(t), g'(t))|}{a(t+w)} \right\} \tag{3.26}$$

dır.

İspat. (3.16) probleminin $0 \le t \le w$ aralığında

$$x(t,s) = \exp\left\{ -\int_s^t a(\tau)d\tau \right\}$$

olmak üzere

$$x(t) = x(t,0)g(0) + \int_0^t x(t,s)\left[b(s)g(s-w) + c(s)g'(s-w) + h(s, g(s-w), g'(s-w))\right]ds$$

biçiminde integral denklemine denktir. . (3.22) eşitliği kullanılarak

$$|x(t)| \le x(t,0)\,|g(0)|$$

$$+ \int_0^t x(t,s)a(s) \frac{|b(s)g(s-w) + c(s)g'(s-w) + h(s, g(s-w), g'(s-w))|}{a(s)} ds$$

$$\le x(t,0)\,|g(0)|$$

$$+ \max_{0\le s\le w} \frac{|b(s)g(s-w) + c(s)g'(s-w) + h(s, g(s-w), g'(s-w))|}{a(s)} \int_0^t x(t,s)a(s)ds$$

$$\le \max\left\{ \max_{-w\le t\le 0} |g(t)| \quad , \quad \max_{-w\le t\le 0} \frac{|b(t+w)g(t) + c(t+w)g'(t) + h(t+w, g(t), g'(t))|}{a(t+w)} \right\}$$

$$\times \left(x(t,0) + 1 - x(t,0) \right)$$

$$= F_2 ,$$

bulunur. Böylece $t \in [0, w]$ için

$$|x(t)| \le F_2 \tag{3.27}$$

yazılabilir.

$$b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t)) = -\big(c(t)a(t) - b(t)\big)x(t)$$

$$+ c(t)\big[b(t)g(t-w) + c(t)g'(t-w) + h(t, g(t-w), g'(t-w))\big] + h(t, x(t), x'(t)).$$

eşitliğinden (3.23), (3.24) ve (3.27) ifadeleri kullanılarak

$$\frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \le \left|\frac{b(t)}{a(t)} - c(t)\right| |x(t)|$$

$$+ |c(t)| \frac{|b(t)g(t-w) + c(t)g'(t-w) + h(t, g(t-w), g'(t-w)|}{a(t)} + \frac{m(t)\,|x(t)|}{a(t)}$$

$$\le \left(\left|\frac{b(t)}{a(t)} - c(t)\right| + |c(t)| + \frac{m(t)}{a(t)}\right) F_2 \le F_2$$

elde edilir. Dolayısıyla $t \in [0, w]$ için

$$\frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \le F_2 \tag{3.28}$$

eşitsizliği sağlanır.

Kabul edelim ki $t \in [(n-1)w, nw]$ için (3.24) eşitsizliği sağlansın. $nw \le t \le (n+1)w$ aralığında (3.16) denkleminin çözümü

$$x(t) = x(t, nw)x(nw) + \int_{nw}^{t} x(t,s)\big[b(s)x(s-w) + c(s)x'(s-w) + h(s, x(s-w), x'(s-w))\big]ds$$

şeklindedir. (3.17) ve (3.22) ifadeleri kullanılarak ve $b(t)$, $c(t)$ ve $a(t)$ fonksiyonlarının periyodik olmasından dolayı

$$|x(t)| \le x(t, nw)\,|x(nw)|$$

$$+ \int_{nw}^{t} x(t,s)a(s) \frac{|b(s)x(s-w) + c(s)x'(s-w) + h(s, x(s-w), x'(s-w))|}{a(s)} ds$$

$$\le x(t, nw) + \big(1 - x(t, nw)\big)$$

$$\times \max\left\{ \max_{(n-1)w \le t \le nw} |x(t)| \quad , \quad \max_{(n-1)w \le t \le nw} \frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \right\}$$

$$\leq F_2$$

elde edilir. Yani, $t \in [nw, (n+1)w]$ için

$$|x(t)| \leq F_2 \tag{3.29}$$

sağlanır. Ayrıca

$$b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t)) = -\big(c(t)a(t) - b(t)\big)x(t)$$
$$+ c(t)\big[b(t)x(t-w) + c(t)x'(t-w) + h(t, x(t-w), x'(t-w))\big] + h(t, x(t), x'(t))$$

eşitliğinden (3.23), (3.24) ve (3.29) ifadeleri kullanılarak

$$\frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \leq \left|\frac{b(t)}{a(t)} - c(t)\right| |x(t)|$$
$$+ |c(t)| \frac{|b(t)x(t-w) + c(t)x'(t-w) + h(t, x(t-w), x'(t-w)|}{a(t)} + \frac{m(t)|x(t)|}{a(t)}$$
$$\leq \left(\left|\frac{b(t)}{a(t)} - c(t)\right| + |c(t)| + \frac{m(t)}{a(t)}\right) F_2 \leq F_2$$

bulunur. Böylece $\forall t \in [nw, (n+1)w]$ için

$$\frac{|b(t)x(t) + c(t)x'(t) + h(t, x(t), x'(t))|}{a(t)} \leq F_2 \tag{3.30}$$

elde edilir. Böylece, Tümevarım yöntemi kullanılarak $\forall t \in [0, \infty)$ için (3.25) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olup $|x(t)| \leq F_2$ sağlandığından (3.16) denkleminin $x = 0$ çözümü kararlıdır.

Teorem 3.3.3. Kabul edelim ki

i) $a(t) > 0$, $\forall t \in [0, \infty)$;

ii) $IR \times IR \times IR$ bölgesinde h fonksiyonu için $\big(h(t, x_1, x_2) \neq 0\big)$

$$|h(t, x_1(t), x_2(t))| \leq k_1 |x_1(t)| + k_2$$

olacak şekilde negatif olmayan k_1 ve k_2 sayıları bulunsun; ve

iii) $|b(t) - c(t)a(t)| + a(t)|c(t)| + k_1 + \dfrac{k_2}{F_2} \leq a(t)$, $\forall t \in [0, \infty)$

eşitsizliği sağlansın. Burada F_2, (3.26)'da verildiği gibidir. Bu durumda (3.16) problemin çözümü için $\forall t \in [0,\infty)$ aralığında

$$|x(t)| \quad , \quad \frac{|b(t)x(t)+c(t)x'(t)+h(t,x(t),x'(t))|}{a(t)} \leq F_2$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.3.3.'ün ispatı Teorem 3.3.2.'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

3.4. Feedback Kontrollu İkinci Mertebeden Lineer Delay Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Varlığı

İkinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemler kontrol teorisinde özel bir yere sahiptir. Bu sınıftan olan denklemler klasik mekanikte, kuantum mekaniğinde, otomatik kontrolda, fiziğin ve matematiğin bir çok dallarında kullanılmaktadır. Bu çalışmada Bölüm 3.3.'teki yöntemden farklı değildir, fakat bu yöntem sadece çözümlerin varlığı hakkında bilgi vermektedir (Yeniçerioğlu ve Yalçınbaş, 2004).

$$
\begin{aligned}
&x''(t) + a_0(t)x'(t) + a_1(t)x(t) + a_2(t)x(t-w) + a_3(t)x'(t-w) \\
&\quad + b_0(t)u'(t) + b_1(t)u(t) + b_2(t)u(t-w) + b_3(t)u'(t-w) = 0, \quad t \geq 0 \qquad (3.31) \\
&\qquad x(t) = g(t)\ ,\ -w \leq t \leq 0
\end{aligned}
$$

biçimindeki bir denklemi göz önüne alalım. Burada $x(t)$, $u(t) \in IR$; $a_j(t)$ ve $b_j(t)$, $(j = 0,2,3)$ $t \geq 0$ için w-periyotlu sürekli fonksiyonlar; $a_1(t)$ ve $b_1(t)$ ise $t \geq 0$ için sürekli fonksiyonlardır. $[-w,0]$ aralığında verilen sürekli türevlenebilen bir $g(t)$ başlangıç fonksiyonu olarak tanımlansın. Ayrıca $u(t)$ feedback kontrol fonksiyonu

$$u(t) = k(t)x(t) \qquad (3.32)$$

formunda olsun. Burada $k(t)$ fonksiyonu her $t \in IR$ için w-periyotlu sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur.

Şimdi, (3.31) denklemine ait bir teoreme geçmeden önce ikinci mertebeden adi diferansiyel denkleminin temel çözümleri ile ilgili bir hatırlatma yapalım. Şöyle ki,

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \qquad (3.33)$$

biçiminde bir denklem olsun. $\{\Phi_1(t), \Phi_2(t)\}$ ikilisi (3.33) denkleminin $t_0 \geq 0$ için $\Phi_1(t_0) = 1$, $\Phi_1'(t_0) = 0$, $\Phi_2(t_0) = 0$, $\Phi_2'(t_0) = 1$ koşullarını sağlayan temel çözümleri olsun. Bu durumda (3.33) denkleminin $x(t_0) = c_1$, $x'(t_0) = c_2$ başlangıç koşullarını sağlayan tek çözümü

$$x(t) = c_1\Phi_1(t) + c_2\Phi_2(t) \quad , \quad t \geq 0$$

biçimindedir.

$h(t)$, $t \geq 0$ için sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = h(t), \quad t \geq 0 \tag{3.34}$$

denkleminin çözümü ise parametrelerin değişimi metodu ile

$$x(t) = x(t_0)\Phi_1(t) + x'(t_0)\Phi_2(t) + \int_{t_0}^{t} \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds\right\}\left(\Phi_2(t)\Phi_1(\tau) - \Phi_1(t)\Phi_2(\tau)\right)h(\tau)d\tau$$

olarak bulunur.

(3.32) dönüşümü, (3.31) denkleminde kullanılarak $a(t) = a_0(t) + k(t)b_0(t)$, $b(t) = a_1(t) + k(t)b_1(t) + k'(t)b_0(t)$, $c(t) = a_2(t) + k(t-w)b_2(t) + k'(t-w)b_0(t)$ ve $d(t) = a_3(t) + k(t-w)b_3(t)$ olmak üzere

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)x(t-w) + d(t)x'(t-w) = 0 \tag{3.35}$$

denklemi elde edilir. (3.35) denklemine $\forall t \in [nw,(n+1)w]$, $(n = 0,1,2,...)$ aralıklarında adımlar metodu uygulanırsa (3.34) denklemi gibi bu denklem de her adımda adi diferansiyel denkleme dönüşecektir.

Teorem 3.4.1. $\forall t \in [0,\infty)$ için $a(t) > 0$ ve $|c(t)| + |d(t)| \leq 2a(t)$ eşitsizlikleri sağlansın ve $\forall t \in [nw,(n+1)w]$, $(n = 0,1,2,...)$ aralıklarında (3.32) denkleminin temel çözümleri için

$$|\Phi_1(t)|,\ |\Phi_2(t)|,\ |\Phi_1'(t)|,\ |\Phi_2'(t)| \leq k \exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\} \tag{3.36}$$

olacak şekilde bir $k > 1$ sayısı bulunabilsin. Bu durumda (3.31) problemin çözümleri için $\forall t \in [(n-1)w, nw]$, $(n = 1,2,...)$ aralıklarında

$$|x(t)| + |x'(t)|\ ,\quad \frac{|c(t)||x(t)| + |d(t)||x'(t)|}{a(t)} \leq (2\alpha)^n F \tag{3.37}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\alpha = 2k^2$ ve

$$F=\max\left\{\max_{-w\le t\le 0}\left[|g(t)|+|g'(t)|\right]\quad,\quad \max_{-w\le t\le 0}\frac{|c(t+w)||g(t)|+|d(t+w)||g'(t)|}{a(t+w)}\right\}$$

biçimindedir.

İspat: $0\le t\le w$ aralığında (3.35) denkleminin çözümü

$$x(t)=g(0)\Phi_1(t)+g'(0)\Phi_2(t)$$

$$-\int_0^t \exp\left\{\int_0^\tau a(s)ds\right\}\left(\Phi_2(t)\Phi_1(\tau)-\Phi_1(t)\Phi_2(\tau)\right)\left(c(\tau)g(\tau-w)+d(\tau)g'(\tau-w)\right)d\tau \quad (3.38)$$

olarak elde edilir. Eşitliğin her iki tarafın mutlak değeri alınırsa

$$|x(t)|\le|g(0)||\Phi_1(t)|+|g'(0)||\Phi_2(t)|$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_0^\tau a(s)ds\right\}\left(|\Phi_2(t)||\Phi_1(\tau)|+|\Phi_1(t)||\Phi_2(\tau)|\right)$$

$$\times\left(|c(\tau)||g(\tau-w)|+|d(\tau)||g'(\tau-w)|\right)d\tau$$

$$\le\left(|g(0)|+|g'(0)|\right)k\exp\left\{-\int_0^t a(s)ds\right\}$$

$$+\int_0^t \exp\left\{\int_0^\tau a(s)ds\right\}k\exp\left\{-\int_0^t a(s)ds\right\}\left(|\Phi_1(\tau)|+|\Phi_2(\tau)|\right)$$

$$\times\left(|c(\tau)||g(\tau-w)|+|d(\tau)||g'(\tau-w)|\right)d\tau,$$

$$|x(t)|\le k\left(|g(0)|+|g'(0)|\right)\exp\left\{-\int_0^t a(s)ds\right\}$$

$$+2k^2\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t a(s)ds\right\}a(\tau)\frac{|c(\tau)||g(\tau-w)|+|d(\tau)||g'(\tau-w)|}{a(\tau)}d\tau$$

$$\le\alpha\max_{-w\le t\le 0}\left(|g(t)|+|g'(t)|\right)\exp\left\{-\int_0^t a(s)ds\right\}$$

$$+\alpha\max_{0\le t\le w}\frac{|c(t)||g(t-w)|+|d(t)||g'(t-w)|}{a(t)}\int_0^t \exp\left\{-\int_\tau^t a(s)ds\right\}a(\tau)d\tau$$

$$= \alpha \left\{ \max_{-w \le t \le 0} \left(| g(t) | + | g'(t) | \right) \exp \left\{ - \int_0^t a(s) ds \right\} \right.$$

$$\left. + \max_{-w \le t \le 0} \frac{| c(t+w) || g(t) | + | d(t+w) || g'(t) |}{a(t+w)} \left(1 - \exp \left\{ - \int_0^t a(s) ds \right\} \right) \right\}$$

$$\le \alpha \max \left\{ \max_{-w \le t \le 0} \left(| g(t) | + | g'(t) | \right) \ , \quad \max_{-w \le t \le 0} \frac{| c(t+w) || g(t) | + | d(t+w) || g'(t) |}{a(t+w)} \right\}$$

$$\times \left(\exp \left\{ - \int_0^t a(s) ds \right\} + 1 - \exp \left\{ - \int_0^t a(s) ds \right\} \right)$$

$$= \alpha \max \left\{ \max_{-w \le t \le 0} \left(| g(t) | + | g'(t) | \right) \ , \quad \max_{-w \le t \le 0} \frac{| c(t+w) || g(t) | + | d(t+w) || g'(t) |}{a(t+w)} \right\}$$

$$= \alpha F$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\forall t \in [0, w]$ aralığında

$$| x(t) | \le \alpha F$$

sağlanır. (3.38) eşitliğinin her iki tarafın türevi alınırsa

$$x'(t) = g(0)\Phi_1'(t) + g'(0)\Phi_2'(t)$$

$$- \int_0^t \exp \left\{ \int_0^\tau a(s) ds \right\} \left(\Phi_2'(t)\Phi_1(\tau) - \Phi_1'(t)\Phi_2(\tau) \right) \left(c(\tau) g(\tau - w) + d(\tau) g'(\tau - w) \right) d\tau$$

bulunur. Yukarıdaki gibi benzer işlemler yapıldığında

$$| x'(t) | \le \alpha F \ , \quad 0 \le t \le w$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak, $\forall t \in [0, w]$ aralığında

$$| x(t) | + | x'(t) | \le 2\alpha F \tag{3.39}$$

sağlandığı görülür. Diğer taraftan $\forall t \in [0, w]$ aralığında

$$\frac{| c(t) || x(t) | + | d(t) || x'(t) |}{a(t)} \le \alpha F \frac{| c(t) | + | d(t) |}{a(t)} \le 2\alpha F \tag{3.40}$$

bulunur. Böylece, (3.39) ve (3.40)'dan $\forall t \in [0, w]$ için (3.37) eşitsizliği sağlanır. Kabul edelim ki $t \in [(n-1)w, nw]$ aralığında (3.37) eşitsizliği sağlansın. $nw \le t \le (n+1)w$ aralığında ise (3.35) denkleminin çözümü

$$x(t) = x(nw)\Phi_1(t) + x'(nw)\Phi_2(t)$$

$$-\int_{nw}^{t} \exp\left\{\int_{nw}^{\tau} a(s)ds\right\}\left(\Phi_2(t)\Phi_1(\tau) - \Phi_1(t)\Phi_2(\tau)\right)\left(c(\tau)x(\tau - w) + d(\tau)x'(\tau - w)\right)d\tau \quad (3.41)$$

biçimindedir. Buradan

$$|x(t)| \leq |x(nw)||\Phi_1(t)| + |x'(nw)||\Phi_2(t)|$$

$$+\int_{nw}^{t} \exp\left\{\int_{nw}^{\tau} a(s)ds\right\}\left(|\Phi_2(t)||\Phi_1(\tau)| + |\Phi_1(t)||\Phi_2(\tau)|\right)$$

$$\times\left(|c(\tau)||x(\tau - w)| + |d(\tau)||x'(\tau - w)|\right)d\tau$$

$$|x(t)| \leq k\left(|x(nw)| + |x'(nw)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}$$

$$+\int_{nw}^{t} \exp\left\{\int_{nw}^{\tau} a(s)ds\right\} k\exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}\left(|\Phi_1(\tau)| + |\Phi_2(\tau)|\right)$$

$$\times\left(|c(\tau)||x(\tau - w)| + |d(\tau)||x'(\tau - w)|\right)d\tau$$

$$\leq k \max_{(n-1)w \leq t \leq nw}\left(|x(t)| + |x'(t)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}$$

$$+2k^2\int_{nw}^{t} \exp\left\{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right\} a(\tau)\frac{|c(\tau)||x(\tau - w)| + |d(\tau)||x'(\tau - w)|}{a(\tau)}d\tau$$

$$\leq \alpha\left\{\max_{(n-1)w \leq t \leq nw}\left(|x(t)| + |x'(t)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}\right.$$

$$\left.+\max_{nw \leq t \leq (n+1)w}\frac{|c(t)||x(t - w)| + |d(t)||x'(t - w)|}{a(t)}\int_{nw}^{t} \exp\left\{-\int_{\tau}^{t} a(s)ds\right\} a(\tau)d\tau\right\}.$$

dır. $c(t)$, $d(t)$ ve $a(t)$ fonksiyonları periyodik olduğundan

$$|x(t)| \leq \alpha\left\{\max_{(n-1)w \leq t \leq nw}\left(|x(t)| + |x'(t)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}\right.$$

$$\left.+\max_{(n-1)w \leq t \leq nw}\frac{|c(t + w)||x(t)| + |d(t + w)||x'(t)|}{a(t + w)}\left(1 - \exp\left\{-\int_{nw}^{t} a(s)ds\right\}\right)\right\}$$

$$\le \alpha \max\left\{ \max_{(n-1)w\le t\le nw}\left(|x(t)|+|x'(t)|\right) \quad , \quad \max_{(n-1)w\le t\le nw}\frac{|c(t+w)||x(t)|+|d(t+w)||x'(t)|}{a(t+w)}\right\}$$

$$\times\left(\exp\left\{-\int_{nw}^{t}a(s)ds\right\}+1-\exp\left\{-\int_{nw}^{t}a(s)ds\right\}\right)$$

$$=\alpha \max\left\{ \max_{(n-1)w\le t\le nw}\left(|x(t)|+|x'(t)|\right) \quad , \quad \max_{(n-1)w\le t\le nw}\frac{|c(t)||x(t)|+|d(t)||x'(t)|}{a(t)}\right\}$$

$$\le \alpha(2\alpha)^{n}F$$

elde edilir. Yani,

$$|x(t)|\le (2\alpha)^{n+1}\frac{F}{2} \quad , \quad nw\le t\le (n+1)w$$

sağlanır. (3.41) eşitliğinin her iki tarafın türevi alınırsa

$$x'(t)=x(nw)\Phi_1'(t)+x'(nw)\Phi_2'(t)$$

$$-\int_{nw}^{t}\exp\left(\int_{nw}^{\tau}a(s)ds\right)\left(\Phi_2'(t)\Phi_1(\tau)-\Phi_1'(t)\Phi_2(\tau)\right)\left(c(\tau)x(\tau-w)+d(\tau)x'(\tau-w)\right)d\tau.$$

elde edilir. Buradan

$$|x'(t)|\le |x(nw)||\Phi_1'(t)|+|x'(nw)||\Phi_2'(t)|$$

$$+\int_{nw}^{t}\exp\left\{\int_{nw}^{\tau}a(s)ds\right\}\left(|\Phi_2'(t)||\Phi_1(\tau)|+|\Phi_1'(t)||\Phi_2(\tau)|\right)$$

$$\times\left(|c(\tau)||x(\tau-w)|+|d(\tau)||x'(\tau-w)|\right)d\tau$$

$$\le k\left(|x(nw)|+|x'(nw)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t}a(s)ds\right\}$$

$$+2k^2\int_{nw}^{t}\exp\left\{-\int_{\tau}^{t}a(s)ds\right\}a(\tau)\frac{|c(\tau)||x(\tau-w)|+|d(\tau)||x'(\tau-w)|}{a(\tau)}d\tau$$

$$\le \alpha\left\{ \max_{(n-1)w\le t\le nw}\left(|x(t)|+|x'(t)|\right)\exp\left\{-\int_{nw}^{t}a(s)ds\right\}\right.$$

$$\left. + \max_{(n-1)w\le t\le nw}\frac{|c(t+w)||x(t)|+|d(t+w)||x'(t)|}{a(t+w)}\left(1-\exp\left\{-\int_{nw}^{t}a(s)ds\right\}\right)\right\}$$

$$\leq \alpha \max\left\{ \max_{(n-1)w \leq t \leq nw} \left(|x(t)| + |x'(t)| \right) \quad , \quad \max_{(n-1)w \leq t \leq nw} \frac{|c(t)||x(t)| + |d(t)||x'(t)|}{a(t)} \right\}$$

$$\leq \alpha (2\alpha)^n F$$

elde edilir. Yani,

$$| x'(t) | \leq (2\alpha)^{n+1} \frac{F}{2} \quad , \quad nw \leq t \leq (n+1)w$$

dır. Böylece $t \in [nw, (n+1)w]$ aralığında

$$| x(t) | + | x'(t) | \leq (2\alpha)^{n+1} F$$

sağlandığı görülür. Diğer taraftan $\forall t \in [nw, (n+1)w]$ aralığında

$$\frac{| c(t) || x(t) | + | d(t) || x'(t) |}{a(t)} \leq (2\alpha)^{n+1} \frac{F}{2} \frac{|c(t)| + |d(t)|}{a(t)} \leq (2\alpha)^{n+1} F$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak, Tümevarım yöntemine göre $\forall t \in [0, \infty)$ için (3.37) eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmiş olup ispat tamamlanır.

3.5. Değişken Gecikmeli (Delay) Durum Feedback Kontrollu Lineer Olmayan Diferansiyel Sistemlerin Kararlılığı

Bu kısımda değişken gecikmeli büyük ölçüde lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı için kararlılık problemi ele alınıyor. Burada Razumikhin tipi teorem ile Lyapunov kararlılık teorisini birleştirerek (Laksmikantham vd., 1994) veya (Burton, 1983), değişken gecikmeli sistemlerin bazı kararlılığını her zaman garanti edebilen bir durum feedback kontrol sınıfını öneriyoruz. Bu bölümde, değişken gecikmeli fonksiyonların sürekli ve sınırlı negatif olmayan fonksiyonlar olarak varsayıyoruz.

Büyük ölçüde dinamik sistemlerin kontrol problemi çok ilgi çekmektedir, çünkü birçok pratik kontrol probleminde çok sayıda dinamik sistem vardır (örneğin; ulaşım sistemleri, güç sistemleri, iletişim sistemleri, ekonomik sistemler, sosyal sistemler vesaire). Son yıllarda büyük ölçüde dinamik sistemlerin kararlılığı fazla çalışılmıştır; (Davision, 1974; Siljak ve Veckevic, 1977; Ikeda ve Siljak, 1980; Shi ve Gao, 1987). Özel olarak (Ikeda ve Siljak, 1980) çalışmasında değişken katsayılı lineer dinamik sistemler için kararlılığı temsil eden durum feedback kontrol sınıfını önermiştir. Daha sonra, (Shi ve Gao, 1987)'de ve (Ikeda ve Siljak, 1980) çalışmalarında geliştirilen sonuçlar, zamana göre değişen lineer sistemlerin iki sınıfına genişletilmiştir.

Diğer taraftan kontrol gerektiren birçok mühendislik sistemlerinde sabit veya zamana bağlı gecikmelerin ortaya çıktığı ve sık olarak da gecikmenin bir kararsızlık kaynağı olduğu çok iyi bilinmektedir. Bu yüzden zamana bağlı gecikmeli sistemlerinin kararlılık problemi yıllar boyu kontrol sistemlerinde en popüler araştırma konusu olmuştur. Bu konuda birçok makale ve eserler çıkmış ve zamana bağlı gecikmeli sistemleriyle ilgili birçok çözüm yaklaşımı sunulmuştur, (Feliachi ve Thowsen, 1981; Mori vd., 1983, Ikeda ve Ashida, 1979; Watanabe vd., 1983; Know ve Pearson, 1980). Son yıllarda büyük ölçüde değişken gecikmeli dinamik sistemler için kararlılık problemi önemli ölçüde dikkat çekmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin (Sinha, 1990)'de sınırsız gecikmeli büyük ölçüde lineer olmayan dinamik sistemlerin bir sınıfı için kararlılık problemini almıştır. (Lee ve Radovic, 1987)'de doğrusal zamana göre değişen büyük ölçüde çok değişkenli ve değişken gecikmeli sistemlerin kararlılık problemi ele alınmış ve yerel durum feedback kontrol için yeterli koşullar türetilmiştir.

Bu bölümde, değişken gecikme içeren büyük ölçüde lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı için kararlılık problemi ele alınmaktadır. Razumikhin tipi teoremi ve Lyapunov kararlılık kuramıyla birleştirilerek değişken gecikmeli büyük ölçüde dinamik sistemlerin bir sınıfı için bazı tip kararlılığı her zaman garanti edebilen durum feedback kontrollerin bir sınıfı önerilmektedir. Özel olarak, lineer durum için bu bölümde önerilen durum feedback kontroller (Ikeda ve Siljak, 1980)'de önerilenlere benzerdir ve (Ikeda ve Siljak, 1980)'de verilen sonuçların sistemlerde değişken gecikmeli büyük ölçüde sistemlere bir genişlemesi olarak düşünülebilir.

Ek olarak, değişken gecikmenin herhangi sürekli, sınırlı ve negatif olmayan bir fonksiyon olmasını istiyoruz; değişken gecikmeli fonksiyonun yani, $h(t)$'nın $h'(t) < 1$ eşitsizliğini sağlamasına gerek duymuyoruz. bu duruma eşitsizlikle ilgili birçok makalede gerek duyulmuştu (Ikeda ve Ashida, 1979) ve (Sinha, 1990). Ayrıca önerilen durum feedback kontroller gecikmeden bağımsız olduğundan bu bölümde elde edilen sonuçlar gecikme hakkında kesin bilgiye sahip olunmadığı sistemlere örneğin bozuk gecikmeye sahip sistemlere de uygulanabilir.

Bu çalışmadaki Bölüm 3.5.1.'de değişken gecikmeli büyük ölçüde lineer olmayan sistemlerin bir sınıfı incelenecek ve bazı standart varsayımlar ifade edilecektir. Bölüm 3.5.2.'de sırasıyla büyük ölçüde değişken gecikmeli lineer olmayan sistemler için kararlılığı garanti eden durum feedback kontrollerin bir sınıfını önerilecektir.

3.5.1. Problem Kurma ve Varsayımlar

3.5.1.1. Problem kurma. N tane gecikmeli diferansiyel denklemleriyle verilmiş S_i, $i = 1,2,...,N$ alt sistemlerinden oluşan, değişken gecikmeli büyük ölçüde lineer olmayan sistemlerin

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_i(t),t) + g_i(x_i(t),t)u_i(t) + E_i(x(t), x(t-h(t)),t) \,. \qquad (3.42)$$

formundaki bir S sınıfını düşünelim. Burada $t \in IR^+$, durumun şimdiki değeri $x_i(t) \in IR^{n_i}$ ve $u_i(t) \in IR^{m_i}$ kontrol vektörüdür. Bu bölümde, $x(t) \in IR^n$ durum vektörünü ve $x(t-h(t)) \in IR^n$ ifadesini $n = n_1 + n_2 + ... + n_N$ olmak üzere $\left[x_1^T(t-h_1(t)) \cdots x_N^T(t-h_N(t))\right]^T$ temsil eder. Her $i \in \{1,\cdots,N\}$ için $f_i(\cdot): IR^{n_i} \times IR \to IR^{n_i}$, $g_i(\cdot): IR^{n_i} \times IR \to IR^{n_i \times m_i}$ ve $E_i(\cdot): IR^n \times IR^n \times IR \to IR^{n_i}$ sırasıyla sürekli vektör ve matris fonksiyonlarıdır. Ayrıca her $i \in \{1,\cdots,N\}$ için değişken gecikmeli $h_i(t)$ fonksiyonu herhangi sürekli, sınırlı ve negatif olmayan bir fonksiyondur. Yani, $\bar{h}_i$ pozitif bir sabit olmak üzere

$$0 \le h_i(t) \le \bar{h}_i$$

eşitsizliği vardır.

Değişken gecikmeli her alt sistem için başlangıç koşulu

$$x_i(t) = \psi_i(t) \ , \qquad t \in [t_0 - \bar{h}, t_0] \qquad (3.43)$$

ile verilir. Burada $\psi_i(t)$, $[t_0 - \bar{h}, t_0]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur ve

$$\bar{h} := \max\{\bar{h}_i, i = 1,\cdots,N\}$$

dır. Genelliği kaybetmeden her S_i alt sisteminde herhangi $t \in IR^+$ için

$$f_i(0,t) = 0 \ , \quad i = 1,\cdots,N$$

olduğunu varsayabiliriz, yani orijin ($x = 0$) noktası

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_i(t),t) \ , \qquad i = 1,\cdots,N \tag{3.44}$$

şeklindeki zorlanmamış izole alt sistem için bir denge noktasıdır. Değişken gecikmeli büyük ölçüde lineer olmayan sistemlerin bu sınıfı için durum feedback kontrol fonksiyonu

$$u_i(t) = \gamma_i(x_i(t),t) \ , \qquad i = 1,\cdots,N \tag{3.45}$$

ile verilir. Burada her S_i alt sistemi için $\gamma_i(\cdot): IR^{n_i} \times IR \to IR^{m_i}$ sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda (3.45) dönüşümü (3.42)'de yerine yazılırsa S_{cli}, $i = 1,\cdots,N$ kapalı çevrimli büyük ölçüde değişken gecikmeli lineer olmayan alt sistemler

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_i(t),t) + g_i(x_i(t),t)\gamma_i(x_i(t),t) + E_i(x(t),x(t-h(t)),t) \tag{3.46}$$

olarak bulunur.

Bu bölümün amacı (3.45)'te verilen yerel lineer olmayan durum feedback $u_i(t)$ kontrolörü gecikme durumlarının varlığında bile (3.42)-(3.43) ile gösterilen büyük ölçüde (S) sistemini kararlı yapacak şekilde sentezlemektir.

3.5.1.2. Varsayımlar: Sentez yaklaşımımızı vermeden önce (3.42) sistemi için önce aşağıdaki standart varsayımları tanıtacağız.

Varsayım 1. $f_i(\cdot)$, $g_i(\cdot)$ *ve* $E_i(\cdot)$ ($i = 1,\cdots,N$) vektör ve matris fonksiyonları sürekli ve zamana göre düzgün sınırlıdır ve duruma göre yerel düzgün sınırlıdır.

Varsayım 2. Her $E_i(\cdot)$, $i \in \{1,\cdots,N\}$ için

$$E_i(x(t),x(t-h(t)),t) = g_i(x_i(t),t)\xi_i(x(t),x(t-h(t)),t) \tag{3.47}$$

olacak şekilde $(x,x_h,t) \in IR^n \times IR^n \times IR$ için sürekli bir $\xi_i(\cdot): IR^n \times IR^n \times IR \to IR^{m_i}$ dönüşümü vardır. Burada x_h, $x(t-h(t))$ vektörünü gösterir.

Varsayım 3. Her $\xi_i(\cdot)$, $i \in \{1,\cdots,N\}$ için öyle negatif olmayan c_{ij}, $\tilde{c}_{ij}$, $\hat{c}_{ij}$ ($j=1,\cdots,N$) sabitleri vardır ki her $(x, x_h, t) \in IR^n \times IR^n \times IR$ için

$$\| \xi_i(x(t), x(t-h(t)), t) \| \leq \sum_{j=1}^{N} \left[c_{ij} \| x_j(t) \| + \tilde{c}_{ij} \| x_j(t-h_j(t)) \| + \hat{c}_{ij} \right] \quad (3.48)$$

sağlanır. Burada (3.48) eşitsizliğin sol ve sağ taraftaki $\|\cdot\|$ ifadesi sırasıyla bir $(\cdot)$ vektörün Öklid normunu ve kısıtlanmış matris normunu gösterir.

Varsayım 4. Orijin ($x=0$) noktası (3.44) şeklindeki zorlanmamış her izole alt sistem için bir denge noktasıdır. Daha özel olarak (3.44) sistemi için bir $\Re_i(x_i, t)$ Lyapunov fonksiyonları ailesi vardır. Yani her $(x_i, t) \in IR^{n_i} \times IR$ için

$$\left(\lambda_{i\min} \| x_i(t) \|\right)^2 \leq \upsilon_i(x_i(t), t) \leq \left(\lambda_{i\max} \| x_i(t) \|\right)^2$$

$$\frac{\partial \upsilon_i(x_i(t), t)}{\partial t} + \nabla_{x_i}^T \upsilon_i(x_i, t) f_i(x_i(t), t) \leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t), t)$$

olacak şekilde C^1 sınıfından bir $\upsilon_i(\cdot) \in \Re_i(x_i, t) : IR^{n_i} \times IR \rightarrow IR^+$ fonksiyonu ve $\lambda_{i\max}$, η_i $\lambda_{i\min}$ sabitleri vardır.

Hatırlatma 1. Varsayım 1.'in matematiksel tamlık için teknik bir varsayım olduğu açıktır. Varsayım 2. büyük ölçüde sistemlerin giriş-bağlantılı olduğunu gösterir. Varsayım 3. standarttır ve büyük ölçüde lineer olmayan bağlantılı sistemlerin kontrol problemleri ile ilgili makalelerde bulunabilir. Varsayım 4. her zorlanmamış izole alt sistemin bir Lyapunov fonksiyonu var olması hesabıyla zorunlu olarak kararlıdır. Aslında büyük ölçüde bağlantılı sistemlerde, her izole alt sistemin ve tüm sistemin kararlılığını garanti etmek için izole alt sistemlerin kararlılığı uygulanabilir olması gereklidir.

Hatırlatma 2. Gerçekten Varsayım 4. daha geneldir. Bir büyük ölçüde lineer olmayan sistemi Varsayım 4.'e uydurmak için her izole alt sistemi karşılık gelir.. Yani değişken gecikmeli içeren bağlantılı terimlerinin etkisini kontrol etmeden önce Varsayım 4.'te içeren belli kararlılık özelliklerine sahip her izole alt sistemi elde etmek için kontrolün bir bölümünü kullanmamız gereklidir. Buna göre bir yerel kontrolcü iki parçadan oluşur. Bunlardan birisi her izole alt sistemi kararlılığa uygular, diğeri bağlantılı terimlerin yaklaşıklarını elde etmede kullanılır.

Yardımcı Teorem 3.5.1.1.

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [t_0 - \overline{h}, t_0] \tag{3.49}$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x_t) \tag{3.50}$$

fonksiyonel diferansiyel denklemi düşünelim. Burada, $x_t = x(t+\theta)$, $t_0 - \overline{h} \leq \theta \leq t_0$ dır. $s > 0$ için $W_i(s) > 0$, $(i = 1,2,3)$ ve $W_i(0) = 0$, $(i = 1,2)$ olmak üzere azalmayan sürekli $W_i : IR^+ \to IR^+$ ($i = 1,2,3$) fonksiyonlar olsun. Varsayalım ki

i) Herhangi $t \in [t_0 - \overline{h}, \infty)$ ve $x \in IR^n$ için

$$W_1(\| x \|) \leq V(t,x) \leq W_2(\| x \|) \;;$$

ii) Eğer $t - \overline{h} \leq \xi \leq t$, $t \geq t_0$ için $\| x(\xi) \| < q \| x(t) \|$ ise $V'(t,x) \leq -W_3(\| x \|)$ olacak şekilde pozitif bir $q > 1$ vardır.

koşullarını sağlayan sürekli bir $V(\cdot):[t_0 - \overline{h}, \infty) \times IR^n \to IR^+$ fonksiyonu bulunsun. Bu durumda (3.49)-(3.50)'in çözümleri düzgün asimptotik kararlıdır.

Yardımcı Teorem 3.5.1.2. (3.49)-(3.50)'de verilen fonksiyonel diferansiyel denklemini göz önüne alalım. $s > 0$ için $W_i(s) > 0$, $(i = 1,2,3)$ ve $W_i(0) = 0$, $(i = 1,2)$ olmak üzere azalmayan sürekli $W_i : IR^+ \to IR^+$ ($i = 1,2,3$) fonksiyonlar olsun. Varsayalım ki aşağıdaki şartları sağlayan sürekli bir $V(\cdot):[t_0 - \overline{h}, \infty) \times IR^n \to IR^+$ fonksiyonu var olsun.

i) Herhangi $t \in [t_0 - \overline{h}, \infty)$ ve $x \in IR^n$ için

$$W_1(\| x \|) \leq V(t,x) \leq W_2(\| x \|) \;;$$

ii) Eğer $t - \bar{h} \le \xi \le t$, $t \ge t_0$ için $\| x(\xi) \| < q \| x(t) \|$ ise $V'(t,x) \le -W_3(\| x \|) + \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir $q > 1$ vardır. Burada $\varepsilon > 0$ ifadesi $\varepsilon < \liminf_{r \to \infty} W_3(r)$ sağlayan bir sabittir.

Bu durumda (3.49)-(3.50)'in çözümleri düzgün sınırlıdır.

Hatırlatma 3. Yardımcı Teorem 3.5.1.1. değişken gecikmeli dinamik sistemler için meşhur Razumikhin tipi teoreminin geliştirilmiş bir şeklidir (Hale ve Lunel, 1993) ve (Xu ve Liu, 1994). Diğer bir taraftan, Yardımcı Teorem 3.5.1.2. (Xu ve Liu, 1994)'deki benzer metot kullanılarak (Hale ve Lunel, 1993)'ün Bölüm 5'teki Teorem 4.3.'ün yardımı ile kolayca elde edilebilir.

3.5.2. Yerel Durum Feedback Kontrolörleri

Bu bölümde, ilk olarak bölüm 3.5.1.'de anlatılan büyük ölçüde değişken gecikmeli lineer olmayan sistemleri düşüneceğiz; daha sonra hiçbir izole alt sistemi lineer olmayan büyük ölçüde değişken gecikmeli sistemlerin bir sınıfı için kararlılık problemini tartışacağız.

3.5.2.1. lineer Olmayan Büyük Ölçüde Sistemler için Durum Feedback Kontrolörleri

İlk olarak kapalı çevrimli sistemlerinin düzgün sınırlılığını garanti edebilecek durum feedback kontrolörlerinin bir sınıfını sunuyoruz. Daha sonra bu sınıfı kapalı sistemler için düzgün asimptotik kararlılık sonuçları elde etmek için değiştireceğiz.

Sistemlerin Düzgün Sınırlılığı: (1)'de verilen S büyük ölçüde değişken gecikmeli lineer olmayan sistemi düşünelim. Lyapunov yaklaşımını temel alarak aşağıdaki yerel durum feedback kontrolörlerini öneriyoruz:

$$u_i(t) = \gamma_i(x_i(t),t) = -k_i g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t), \qquad i = 1,\ldots,N \quad (3.51)$$

burada k_i, ($i=1,...,N$) ler kontrol kazanımları yani,

$$k_i = \sum_{j=1}^{N}\left[d_j^2 c_{ij}^2 + e_j^2 \tilde{c}_{ij}^2 + \delta_j^2 \hat{c}_{ij}^2\right], \qquad i=1,...,N \tag{3.52}$$

$$\frac{1}{d_j^2} + \frac{1}{e_j^2} < 4\eta_j \frac{\lambda_{j\min}^2}{N} \quad , \qquad j=1,...,N \tag{3.53}$$

biçimindedir. Burada d_j, e_j ve δ_j pozitif sabitler ve d_j, e_j sabitler (3.53)'ü sağlayacak şekilde seçilmişlerdir.

Hatırlatma 3.5.2.1.1. (3.51), (3.52) ve (3.53)'den her S_i alt sistemi için $u_i(t)$ yerel durum feedback kontrolörünün sürekli olduğu açıktır. (3.52) ve (3.53)'nin ışığında feedback kazanımı k_i'yi kolayca belirleyebiliriz. Buna göre önerilen kontrolörlerin bağlantılarda durum gecikmelerini içeren büyük ölçüde lineer olmayan S sistemi için kararlılığa garanti edici durum feedback kontrolörlerinin bir sınıfı olduğunu gösteren aşağıdaki teoremi ifade ederiz.

Teorem 3.5.2.1.1. Varsayım 1.- 4.'ü sağlayan geniş ölçüde değişken gecikmeli (3.42) lineer olmayan dinamik sistemini düşünelim. Bu durumda (3.51), (3.52) ve (3.53)'de verilen $u_i(t)$, $i=1,...,N$ durum feedback kontrolörlerini kullanarak geniş ölçüde S sisteminin düzgün sınırlılığı garanti edilebilir.

İspat: $i \in \{1,...,N\}$ olmak üzere $t \geq t_0$ için $x_i(t)$, her kapalı çevrimli S_{cli} alt sisteminin çözümü; ve her zorlanmamış izole (3.44) alt sisteminin $\upsilon_i(\cdot) \in \Re_i(x_i,t)$ Lyapunov fonksiyonu, her kapalı çevrimli S_{cli} alt sistemi için Lyapunov fonksiyonu olsun. Bu durumda Varsayım 2., 4. ve (3.46)'ten herhangi $t \geq t_0$ için ve her kapalı çevrimli S_{cli} alt sistemi için

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} = \frac{\partial \upsilon_i(x_i(t),t)}{\partial t} + \nabla_{x_i}^T \upsilon_i(x_i(t),t)$$
$$\times \left\{ f_i(x_i(t),t) + g_i(x_i(t),t)\gamma_i(x_i(t),t) + E_i(x(t),x(t-h(t)),t) \right\}$$

$$\leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) + \nabla^T_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) g_i(x_i(t),t) \gamma_i(x_i(t),t)$$

$$+ \nabla^T_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) g_i(x_i(t),t) \xi_i(x(t),x(t-h(t)),t) \qquad (3.54)$$

olduğunu görürüz. Daha sonra (3.48), (3.51), (3.52), (3.53), (3.54) ve norm tanımından

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) - k_i \nabla^T_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) g_i(x_i(t),t) g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t)$$

$$+ \nabla^T_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) g_i(x_i(t),t) \xi_i(x(t),x(t-h(t)),t)$$

$$\leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) - k_i \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \|^2$$

$$+ \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \cdot \| \xi_i(x(t),x(t-h(t)),t) \|$$

$$\leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) - k_i \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \|^2$$

$$+ \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \sum_{j=1}^{N} \left[c_{ij} \| x_j(t) \| + \tilde{c}_{ij} \| x_j(t-h_j(t)) \| + \hat{c}_{ij} \right]$$

$$\leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) - \sum_{j=1}^{N} \left[d_j^2 c_{ij}^2 + e_j^2 \tilde{c}_{ij}^2 + \delta_j^2 \hat{c}_{ij}^2 \right] \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \|^2$$

$$+ \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \sum_{j=1}^{N} \left[c_{ij} \| x_j(t) \| + \tilde{c}_{ij} \| x_j(t-h_j(t)) \| + \hat{c}_{ij} \right] \qquad (3.55)$$

elde ederiz. Geliştirilmiş Razumikhin-tip Teoreminin ışığında (Yardımcı Teorem 3.5.1.2.) her alt sistemde herhangi pozitif $q_i > 1$ için

$$\| x_i(\xi) \| < q_i \| x_i(t) \| , \qquad t - \bar{h} \leq \xi \leq t , \qquad \forall i \in \{1,...,N\} . \qquad (3.56)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.56) ifadesini (3.55)'de yerine koyarak

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) - \sum_{j=1}^{N} \left[d_j^2 c_{ij}^2 \right] \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \|^2$$

$$+ \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \sum_{j=1}^{N} \left[c_{ij} \| x_j(t) \| \right]$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \left[e_j^2 \tilde{c}_{ij}^2 \right] \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \|^2$$

$$+\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \sum_{j=1}^{N}\left[q_j\widetilde{c}_{ij}\,\|x_j(t)\|\right]$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\left[\delta_j^2\hat{c}_{ij}^2\right]\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2$$

$$+\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \sum_{j=1}^{N}\hat{c}_{ij} \tag{3.57}$$

elde ederiz.

$$V(x_t,t) := \sum_{i=1}^{N}\upsilon_i(x_i(t),t)$$

olduğu kabul edilirse (3.57)'ten

$$\frac{dV(x_t,t)}{dt} \le -\sum_{i=1}^{N}\eta_i\upsilon_i(x_i(t),t) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[d_j^2 c_{ij}^2\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2\right.$$

$$\left.- c_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|\cdot\|x_j(t)\|\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[e_j^2\widetilde{c}_{ij}^2\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2\right.$$

$$\left.- q_j\widetilde{c}_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|\cdot\|x_j(t)\|\right]$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\delta_j^2\hat{c}_{ij}^2\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2\right.$$

$$\left.- \hat{c}_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|\right]$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\eta_i\upsilon_i(x_i(t),t) - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[d_j c_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| - \left(\frac{1}{2d_j}\right)\|x_j(t)\|\right]^2$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[e_j\widetilde{c}_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| - \frac{q_j\,\|x_j(t)\|}{2e_j}\right]^2$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left[\delta_j\hat{c}_{ij}\,\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| - \frac{1}{2\delta_j}\right]^2$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{4d_j^2}\right)\|x_j(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{q_j^2}{4e_j^2}\right)\|x_j(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\delta_j^2}$$

$$\leq -\sum_{i=1}^{N}\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{4d_j^2}+\frac{q_j^2}{4e_j^2}\right)\| x_j(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{4\delta_j^2}$$

$$\leq -\sum_{i=1}^{N}\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N}{4}\right)\left[\frac{1}{d_i^2}+\frac{q_i^2}{e_i^2}\right]\| x_i(t)\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{N}{4\delta_i^2} \tag{3.58}$$

elde edilir. Eğer her $i \in \{1,...,N\}$ için

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t),t) + \left(\frac{N}{4}\right)\left[\frac{1}{d_i^2}+\frac{q_i^2}{e_i^2}\right]\| x_i(t)\|^2 + \frac{N}{4\delta_i^2} \tag{3.59}$$

formundaki bir eşitsizlik sağlanırsa (3.58) eşitsizliğinin de sağlanacağı $V(x_t,t)$ tanımından açıktır. Buna göre her $i \in \{1,...,N\}$ için (3.59)'dan

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \leq -\omega_i \| x_i(t)\|^2 + \varepsilon_i \tag{3.60}$$

elde edilir, burada

$$\omega_i := \eta_i \lambda_{i\min}^2 - \left(\frac{N}{4}\right)\left(\frac{1}{d_i^2}+\frac{q_i^2}{e_i^2}\right), \qquad \varepsilon_i := \frac{N}{4\delta_i^2}$$

dır. Buradaki d_j ve e_j kontrol kazanım parametreleri (3.53) sağlanacak şekilde seçilmiştir. Dolayısıyla her $i = 1,...,N$ için $\omega_i > 0$ olacak şekilde yeteri kadar küçük $q_i > 1$ vardır. Diğer taraftan $i \in \{1,...,N\}$ olmak üzere herhangi $\delta_i > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\varepsilon_i < \liminf_{r\to\infty} W_{3i}(r),$$

burada

$$W_{3i}(\| x_i(t)\|) := \omega_i \| x_i(t)\|^2$$

dır. Sonuç olarak, Yardımcı Teorem 3.5.1.2.'ye göre (3.60)'den ve $V(x_t,t)$ tanımından geniş ölçüde S sistemi (3.51), (3.52) ve (3.53)'de verilen yerel durum feedback kontrolörleri altında düzgün sınırlılığa sahiptir.

Sistemlerin Düzgün Asimptotik Kararlılığı: Sistem (3.42)'in düzgün sınırlılığını garanti edebilecek kararlılık edici durum feedback kontrolörlerinin bir sınıfını önerdik. Sistem (3.42)'in daha iyi bir dinamiğini elde etmek için (örneğin, düzgün sınırlılık bölgesinin daha küçük olması gibi) $i \in \{1,...,N\}$ olmak üzere daha büyük bir k_i kazanım parametresi seçmenin (ki bu yüksek kazanım kontrolörüne yol açabilir) gerekli olduğu (3.60)'den bilinebilir. Bunun üstesinden gelmek için şimdi yukarıda önerilen kontrolörleri biraz değiştireceğiz. Değiştirilmiş kontrolörler (3.42) sisteminin düzgün asimptotik kararlılığı garanti edebilir ve

$$u_i(t) = \hat{\gamma}_i(x_i(t),t) = p_{1i}(x_i(t),t) + p_{2i}(x_i(t),t) \tag{3.61}$$

ile verilebilir, burada $p_{1i}(\cdot)$ ve $p_{2i}(\cdot)$ aşağıdaki fonksiyonlarla verilir:

$$p_{1i}(x_i(t),t) = -\hat{k}_{i1} g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \tag{3.62}$$

$$p_{2i}(x_i(t),t) = -\frac{\hat{k}_{i2}^2 g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t)}{\left[\| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \hat{k}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t) \|^2\right]} \tag{3.63}$$

ve burada her $i = 1,...,N$ için $\hat{k}_{i1}$ ve $\hat{k}_{i2}$ kontrol kazanımları

$$\hat{k}_{i1} = \sum_{j=1}^{N} \left[d_j^2 c_{ij}^2 + e_j^2 \tilde{c}_{ij}^2 \right], \qquad i = 1,...,N \tag{3.64}$$

$$\hat{k}_{i2} = \sum_{j=1}^{N} \hat{c}_{ij}, \qquad i = 1,...,N \tag{3.65}$$

$$\frac{1}{d_j^2} + \frac{1}{e_j^2} < 4\left(\frac{\eta_j \lambda_{j\min}^2 - \hat{\varepsilon}_j}{N} \right), \qquad j = 1,...,N \tag{3.66}$$

biçimindedir. Burada d_j, e_j ve $\hat{\varepsilon}_j$ pozitif sabitler ve (3.66)'ı sağlayacak şekilde seçilmişlerdir.

Hatırlatma 3.5.2.1.2. Varsayım 1., 2. ve 4.'ten (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) ve (3.66)'da önerilen yerel durum kontrolörlerinin düzgün sürekli olduğu açıktır. Ayrıca, herhangi $(t, x_i) \in IR^+ \times IR^{n_i}$ için

$$\| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \hat{k}_{i2} \le \| g_i^T(x_i(t),t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t),t) \| \hat{k}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t) \|^2$$

olduğunu göz önüne alırsak (3.63)'den herhangi $(t, x_i) \in IR^+ \times IR^{n_i}$ için

$$\| p_{2i}(x_i(t), t) \| \leq \hat{k}_{i2}$$

olduğunu elde ederiz, bu da (3.63) kontrol fonksiyonunun sınırlılığını gösterir. Dolayısıyla (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65) ve (3.66)'da verilen yerel durum kontrolörlerinin düzgün sürekli ve yerel düzgün sınırlı olduğu görülür.

Hatırlatma 3.5.2.1.3. $x = 0$ **'**da (3.63)'de verilen kontrolün pay ve paydasının birlikte sıfıra gittiği dikkate değerdir. Bu (3.42) ve (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66)'le verilen kapalı çevrimli geniş ölçüde bağlantılı sistem için çözümlerin varlığının $x = 0$ **'**da garanti edilemeyeceğini gösterir. Bununla birlikte (Gutman, 1979)'dekine benzer bir metod uygulayarak (3.42) ve (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66)'le verilen kapalı çevrimli sisteminin sağ tarafının $(x, t) \in IR^n \times IR^+$ üzerinde üstten yarı sürekli olduğu ispatlanabilir. Dolayısıyla bir genel dinamik sistem olarak kapalı çevrimli sisteminin çözümlerinin varlığı pekala garanti edilebilir. Bu da (3.63) kontrolünün $x = 0$ orijine yaklaştığında bir limite sahip olduğunu gösterir.

Teorem 3.5.2.1.2. Varsayım 1.- 4.'lere uyan geniş ölçüde değişken gecikmeli (3.42) lineer olmayan sistemini düşünelim. Bu durumda $i = 1, ..., N$ olmak üzere (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66)'de verilen $u_i(t)$ durum feedback kontrolörleri altında (3.42)'de gösterilen geniş ölçüde değişken gecikmeli sistem düzgün asimptotik kararlıdır.

İspat: Teorem 3.5.2.1.1.'in ispatına benzer şekilde (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) kontrolörünü kullanarak herhangi $t \geq t_0$ için

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t), t)}{dt} \leq -\eta_i \upsilon_i(x_i(t), t) - \sum_{j=1}^{N} \left[d_j^2 c_{ij}^2 + e_j^2 \widetilde{c}_{ij}^2 \right] \| g_i^T(x_i(t), t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t), t) \|^2$$

$$+ \| g_i^T(x_i(t), t) \nabla_{x_i} \upsilon_i(x_i(t), t) \| \sum_{j=1}^{N} \left[c_{ij} \| x_j(t) \| + \widetilde{c}_{ij} \| x_j(t - h_j(t)) \| \right]$$

$$-\frac{\hat{k}_{i2}^2 \| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2}{\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2}$$

$$+\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2} \tag{3.67}$$

olduğunu kolayca elde edebiliriz.

$$-\frac{\hat{k}_{i2}^2 \| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2}{\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2} + \| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2}$$

$$= \frac{\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2} \cdot \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2}{\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \hat{k}_{i2} + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2} \le \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2 \tag{3.68}$$

olduğu dikkat edilirse (3.68)'yi (3.67)'da yerine yazarak

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \le -\eta_i\upsilon_i(x_i(t),t) + \hat{\varepsilon}_i \| x_i(t)\|^2$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\left[d_j^2 c_{ij}^2 + e_j^2 \tilde{c}_{ij}^2\right] \| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\|^2$$

$$+\| g_i^T(x_i(t),t)\nabla_{x_i}\upsilon_i(x_i(t),t)\| \sum_{j=1}^{N}\left[c_{ij} \| x_j(t)\| + \tilde{c}_{ij} \| x_j(t-h_j(t))\|\right] \tag{3.69}$$

elde edilir. Geliştirilmiş Razumikhin tipi teoreminin ışığında (Yardımcı Teorem 3.5.1.2.) her alt sisteminin herhangi pozitif $q_i > 1$ için aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu varsayıyoruz:

$$\| x_i(\xi)\| < q_i \| x_i(t)\| \ , \qquad t - \bar{h}_i \le \xi \le t \ , \qquad \forall i \in \{1,\dots,N\} \tag{3.70}$$

Bu durumda, Teorem 3.5.2.1.1.'in ispatına benzer şekilde (3.70)'yi (3.69)'da yerine koyarak

$$\frac{dV(x_t,t)}{dt} \le -\sum_{i=1}^{N}\eta_i\upsilon_i(x_i(t),t) + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{N}{4}\right)\left[\frac{1}{d_i^2} + \frac{q_i^2}{e_i^2} + \hat{\varepsilon}_i\right] \| x_i(t)\|^2 \tag{3.71}$$

elde ederiz.

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \le -\eta_i\upsilon_i(x_i(t),t) + \left(\frac{N}{4}\right)\left[\frac{1}{d_i^2} + \frac{q_i^2}{e_i^2} + \hat{\varepsilon}_i\right] \| x_i(t)\|^2 \tag{3.72}$$

formundaki bir eşitsizlik her $i \in \{1,...,N\}$ için sağlanırsa (3.71) eşitsizliğinin de sağlanacağı $V(x_t, t)$ tanımından açıktır. Buna göre (3.72)'ten her $i \in \{1,...,N\}$ için

$$\frac{d\upsilon_i(x_i(t),t)}{dt} \le -\hat{\omega}_i \, \| x_i(t) \|^2 \tag{3.73}$$

elde edilebilir, burada

$$\hat{\omega}_i := \eta_i \lambda_{i\min}^2 - \left(\frac{N}{4}\right)\left(\frac{1}{d_i^2} + \frac{q_i^2}{e_i^2} + \hat{\varepsilon}_i\right)$$

dır. Buradaki d_j ve e_j kontrol kazanım parametreleri (3.66) sağlanacak şekilde seçilmiştir. Dolayısıyla, her $i \in \{1,...,N\}$ için $\hat{\omega}_i > 0$ olacak şekilde $i = 1,...,N$ olmak üzere yeteri kadar küçük $q_i > 1$ vardır. Buna göre Yardımcı Teorem 3.5.1.1.'e göre (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66) kontrolü altında (3.42)'de verilen tüm sistemin düzgün asimptotik kararlı olduğu (3.73)'ten açıktır.

3.6. Sınırsız Gecikme İçeren Feedback Kontrollu Lineer İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Davranışları

Bu bölümde, sınırsız gecikme içeren feedback kontrollu lineer integro-diferansiyel denklemlerin davranışı hakkında temel bir teorem verilmiş ve bu temel teoremden faydalanılarak aşikar çözümünün kararlılık kriterleri incelenmiştir. Bu çalışmada, diğer bölümlerdeki yöntemlerden farklı olarak, karakteristik denklemin kökü tek olacak şekilde yeterli koşullar verilmiş ve bu köke bağlı olarak aşikar çözümünün kararlılığı incelenmiştir.

a_i, $i=1,2$ reel sayılar ve g_i, $i=1,2$ fonksiyonları $[0,\infty)$ aralığında sıfırdan farklı ve reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$x'(t)=a_1x(t)+\int_{-\infty}^{t} g_1(t-s)x(s)ds+a_2u(t)+\int_{-\infty}^{t} g_2(t-s)u(s)ds \tag{3.74}$$

sınırsız gecikmeli skaler lineer integro-diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada (3.74) integro-diferansiyel denkleminin çözümü, $[0,\infty)$ aralığında sürekli diferansiyellenebilen ve $\forall t\geq 0$ için (3.74) denklemini sağlayan IR reel doğru üzerinde tanımlanan sürekli bir reel değerli fonksiyon olarak tanımlanır. (3.74) denkleminde verilen $u(t)$ fonksiyonu $k\in IR$ için

$$u(t)=-kx(t) \tag{3.75}$$

biçiminde bir feedback kontroldür. (3.75) dönüşümü (3.74) denkleminde uygulanırsa kapalı-çevrimli denklem

$$x'(t)=(a_1-ka_2)x(t)+\int_{-\infty}^{t}(g_1(t-s)-kg_2(t-s))x(s)ds$$

ya da $a=a_1-ka_2$ ve $g=g_1-kg_2$ olmak üzere

$$x'(t)=ax(t)+\int_{-\infty}^{t} g(t-s)x(s)ds \tag{3.76}$$

biçiminde yazılabilir.

$(-\infty,0]$ aralığında tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $C\big((-\infty,0],IR\big)$ olsun. p kümesi $C\big((-\infty,0],IR\big)$'nin boş olmayan altkümesi olmak üzere $\phi \in p$ için

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{0} g(t-s)\phi(s)ds\,,\quad t\geq 0$$

fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyondur.

Verilen herhangi başlangıç $\phi \in p$ fonksiyonu için

$$x(t)=\phi(t)\,,\qquad t\in(-\infty,0] \tag{3.77}$$

başlangıç koşulunu sağlayan (3.76) integro-diferansiyel denkleminin tek bir x çözümü vardır. Burada x, (3.76), (3.77) başlangıç fonksiyon probleminin çözümü ya da kısaca (3.76), (3.77)'nin çözümü olarak adlandırılabilir.

Bu çalışmada,

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma s}\,|\,g(s)\,|\,ds<\infty$$

olacak şekilde bir reel γ sayısının var olduğunu kabul edeceğiz. Bu kabulden p kümesinin $t\in(-\infty,0]$ için $\phi(t)=e^{\gamma t}$ fonksiyonunu kapsadığını garanti eder.

Eğer $t\in IR$ için $x(t)=e^{\lambda t}$ formunda (3.76)'nin bir çözümü olarak tanımlarsak

$$\lambda=a+\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda s}g(s)ds \tag{3.78}$$

karakteristik denkleminin bir kökü olması gerektiğini görürüz.

Aşağıdaki koşulları sağlayan

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma s}g(s)ds>\gamma-a \quad \text{ve} \quad \int_{0}^{\infty} e^{-\gamma s}s\,|\,g(s)\,|\,ds\leq 1 \tag{3.79}$$

hipotezimiz olsun. Bu hipotez altında, (3.78) karakteristik denkleminin (γ,∞) aralığında bir tek λ_0 kökü vardır; bu kök

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s\,|\,g(s)\,|\,ds < 1 \tag{3.80}$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten, eğer

$$F(\lambda) = \lambda - a - \int_0^\infty e^{-\lambda s} g(s)ds \ , \qquad \lambda \geq \gamma$$

olarak gösterilirse, bu taktirde, (3.79)'un birinci eşitsizliğinden $F(\gamma) < 0$ olur. Ayrıca, (3.79)'un ikinci eşitsizliğinden $\lambda > \gamma$ için

$$F'(\lambda) = 1 + \int_0^\infty e^{-\lambda s} sg(s)ds \geq 1 - \int_0^\infty e^{-\lambda s} s\,|\,g(s)\,|\,ds > 1 - \int_0^\infty e^{-\gamma s} s\,|\,g(s)\,|\,ds \geq 0$$

elde edilir ve bunun sonucu olarak (γ,∞) aralığında F fonksiyonu kesin artan olduğu görülür. Diğer taraftan, her $\lambda \geq \gamma$ için

$$F(\lambda) \geq \lambda - a - \int_0^\infty e^{-\lambda s}\,|\,g(s)\,|\,ds \geq \lambda - a - \int_0^\infty e^{-\gamma s}\,|\,g(s)\,|\,ds$$

dır, ve böylece $F(\infty) = \infty$ elde edilir. Dolayısıyla, (γ,∞) aralığında $F(\lambda) = 0$ denkleminin bir tek λ_0 çözümü vardır. (3.79)'un ikinci eşitsizliğinden

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s\,|\,g(s)\,|\,ds < \int_0^\infty e^{-\gamma s} s\,|\,g(s)\,|\,ds \leq 1$$

olacağından λ_0, (3.80) denklemini sağlar. Özel olarak, (3.80)'den

$$1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s\,|\,g(s)\,|\,ds > 0 \tag{3.81}$$

olduğu açıktır.

Sonuç olarak, (3.79) hipotezi altında, (γ,∞) aralığında (3.78) denkleminin bir tek λ_0 kökü varsa, bu durumda aşağıdaki gibi tanımlanan p'nin boş olmayan alt kümesi için $p(\lambda_0)$ anlamındadır: $\phi \in p(\lambda_0)$ fonksiyonu ancak ve ancak $t \leq 0$ için $e^{-\lambda_0 t}\phi(t)$ fonksiyonunun $(-\infty,0]$ aralığında sınırlı olmasıdır. Kolayca görülebilir ki $p(\lambda_0)$, $t \in (-\infty,0]$ için $\phi(t) = e^{\lambda_0 t}$ fonksiyonunu kapsar.

Bu kısmı bitirmeden önce, iki önemli tanımı verelim (Burton, 1983). Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $\phi \in p$ için

$$\| \phi \| \equiv \sup_{t \le 0} | \phi(t) | < \delta$$

oldukça

$$| x(t) | < \varepsilon, \quad \forall t \in IR \text{ için}$$

elde edilirse (3.76) denkleminin $x = 0$ çözümü "kararlıdır" denir. Ek olarak, eğer

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

sağlanırsa (3.76)'nin $x = 0$ çözümü "asimtotik kararlıdır" denir.

Teorem 3.6.1. (3.79) hipotezi sağlansın ve (γ, ∞) aralığında (3.78) karakteristik denkleminin tek kökü λ_0 olsun. Bu taktirde, herhangi $\phi \in p(\lambda_0)$ için (3.76), (3.77)'nin bir x çözümü

$$\left| e^{-\lambda_0 t} x(t) - \frac{L(\phi)}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} \right| \le M(\phi) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | \, ds, \qquad \forall t \ge 0 \qquad (3.82)$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$L(\phi) = \phi(0) + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{-s}^0 e^{-\lambda_0 r} \phi(r) dr \right] ds \qquad (3.83)$$

ve

$$M(\phi) = \sup_{t \le 0} \left| e^{-\lambda_0 t} \phi(t) - \frac{L(\phi)}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} \right| \qquad (3.84)$$

dır.

İspat: Keyfi bir $\phi \in p(\lambda_0)$ gözönüne alalım. (3.80)'den açık olarak $L(\phi)$ bir reel sayıdır. Bundan başka, (3.81)'den $M(\phi)$'nin sonlu olduğunu iddia ederiz. Şimdi, (3.76), (3.77)'nin bir çözümü x olsun.

$$y(t) = e^{-\lambda_0 t} x(t), \qquad t \in IR \text{ için}$$

tanımlansın. Bu durumda kolayca görülebilir ki $\forall t \geq 0$ için (3.76) denkleminin bir çözümü x olduğundan

$$y'(t) = (a - \lambda_0) y(t) + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) y(t-s) ds \ , \qquad t \geq 0 \text{ için} \tag{3.85}$$

denklemine dönüşür. Ayrıca, (3.77) başlangıç koşulu yerine

$$y(t) = e^{-\lambda_0 t} \phi(t), \qquad t \in (-\infty, 0] \tag{3.86}$$

formunu yazabiliriz. Bundan başka, (3.78) denkleminin bir kökü λ_0 olmasından ve (3.83) ve (3.86) ifadeleri kullanarak (3.85)'den

$$y(t) = \phi(0) + \int_0^t (a - \lambda_0) y(s) ds + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \int_0^t y(\xi - s) d\xi$$

$$= \phi(0) + (a - \lambda_0) \int_0^t y(s) ds + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \int_{-s}^{t-s} y(r) dr$$

$$= \phi(0) - \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) ds \int_0^t y(r) dr + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left\{ \int_{-s}^0 e^{-\lambda_0 r} \phi(r) dr + \int_0^{t-s} y(r) dr \right\} ds$$

$$= \phi(0) - \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{t-s}^t y(r) dr \right] ds + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) ds \int_{-s}^0 e^{-\lambda_0 r} \phi(r) dr$$

yani

$$y(t) = -\int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{t-s}^t y(r) dr \right] ds + L(\phi), \qquad t \geq 0 \text{ için} \tag{3.87}$$

denklemine denk olduğu görülür.

Şimdi, (3.81)'den yararlanarak

$$z(t) = y(t) - \frac{L(\phi)}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} \quad , \quad t \in IR \text{ için}$$

tanımlayabiliriz. Bu taktirde (3.87) denklemine denk olan denklem

$$z(t) = -\int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{t-s}^{t} z(r) dr \right] ds, \quad t \geq 0 \text{ için} \tag{3.88}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, (3.86) başlangıç koşulu

$$z(t) = e^{-\lambda_0 t} \phi(t) - \frac{L(\phi)}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} \quad , \quad t \in (-\infty, 0] \text{ için} \tag{3.89}$$

formuna dönüşür. y ve z tanımlarından dolayı (3.82) eşitsizliğine denk olan eşitsizlik

$$| z(t) | \leq M(\phi) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | ds, \quad \forall t \geq 0 \text{ için} \tag{3.90}$$

biçimindedir. (3.90)'in ispatı aşağıdadır.

Şimdi, (3.84) ve (3.89)'dan

$$| z(t) | \leq M(\phi), \quad t \leq 0 \text{ için} \tag{3.91}$$

elde edebiliriz. Biz burada

$$| z(t) | \leq M(\phi), \quad \forall t \in IR \text{ için} \tag{3.92}$$

olduğunu göstermek istiyoruz. (3.92)'ye denk olarak $\forall \varepsilon > 0$ için

$$| z(t) | < M(\phi) + \varepsilon, \quad \forall t \in IR \tag{3.93}$$

olduğunu ispatlayalım. Cauchy-Peano Varlık Teoremine göre öyle bir $t_1 > 0$ noktası vardır ki $(-\infty, t_1]$ aralığında tanımlı olan tek çözümünün olduğunu ve bu çözümün

$$| z(t) | < M(\phi) + \varepsilon, \quad t \in (-\infty, t_1]$$

olduğunu söyleyebiliriz. Yani $(-\infty, 0]$ aralığında tanımlanmış çözümü 0 (sıfır)'dan sağa devam ettirilebilir. Benzer şekilde, $(-\infty, t_1]$ aralığında tanımlanmış çözümü ∞'a genişletilebilir, aksi halde, $z(t)$ nin ∞'a devam ettirilemeyen çözüm olduğunu kabul edelim. Yani ε 'a bağlı öyle bir $t^* = t^*(\varepsilon) > 0$ noktası vardır ki (3.93)'ü sağlamayan ilk nokta olsun. $z(t)$ nin sürekliliğinden dolayı

$$| z(t) | < M(\phi), \quad t < t^* \text{ için} \quad \text{ve} \quad | z(t^*) | = M(\phi) + \varepsilon$$

olmalıdır. Bu durumda (3.88)'dan

$$M(\phi) + \varepsilon = | z(t^*) | = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{t^*-s}^{t^*} z(r) dr \right] ds \right|$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} \, | g(s) | \left[\int_{t^*-s}^{t^*} | z(r) | \, dr \right] ds \leq \left(M(\phi) + \varepsilon \right) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | ds$$

ya da

$$1 \leq \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | ds$$

elde ederiz. Bu ise (3.80) eşitsizliği ile çelişir. Böylece (3.92) eşitsizliğinin doğruluğunu göstermiş oluruz. (3.92) eşitsizliği kullanılarak (3.88)'dan her $t \geq 0$ için

$$| z(t) | = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} g(s) \left[\int_{t-s}^{t} z(r) dr \right] ds \right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} \, | g(s) | \left[\int_{t-s}^{t} | z(r) | \, dr \right] ds$$

$$\leq M(\phi) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | ds$$

elde ederiz. Bunun sonucu olarak (3.90) sağlanır. Teorem 3.6.1.'in ispatı biter.

Teorem 3.6.2. (3.79) hipotezi sağlansın ve (γ, ∞) aralığında (3.78) karakteristik denkleminin tek kökü λ_0 olsun. Bu taktirde, herhangi $\phi \in p(\lambda_0)$ için (3.76), (3.77)'nin bir x çözümü

$$\Theta = \frac{\left[1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | \, ds \right]^2}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \, | g(s) | \, ds \tag{3.94}$$

ve

$$N(\phi) = \sup_{t \le 0}\left[e^{-\lambda_0 t} \,|\, \phi(t) \,|\right] \tag{3.95}$$

olmak üzere

$$|\, x(t) \,| \le \Theta N(\phi) e^{\lambda_0 t} \ , \qquad \forall t \ge 0 \text{ için} \tag{3.96}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, eğer $\lambda_0 = 0$ ise (3.76)'nin apaçık çözümü kararlıdır ve $\lambda_0 < 0$ ise asimptotik kararlıdır.

İspat: (3.80) ve (3.81)'den dolayı (3.94) ifadesinde $\Theta > 1$ olduğu açıktır. $\phi \in p(\lambda_0)$ ve (3.76), (3.77)'nin bir çözümü x olsun. $p(\lambda_0)$, $N(\phi)$ ifadeleri sonludur. $L(\phi)$ ve $M(\phi)$, (3.83) ve (3.84)'te tanımlanmak üzere (3.82) eşitsizliğin sağlandığını biliyoruz. (3.82)'ten $\forall t \ge 0$ için

$$e^{-\lambda_0 t} \,|\, x(t) \,| \le \frac{|\, L(\phi) \,|}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} + M(\phi) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \,|\, g(s) \,|\, ds \tag{3.97}$$

elde ederiz. Fakat (3.84)'ten

$$M(\phi) \le N(\phi) + \frac{|\, L(\phi) \,|}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds}$$

şeklinde yazılabileceğinden yukarıdaki son eşitsizlik

$$e^{-\lambda_0 t} \,|\, x(t) \,| \le \frac{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \,|\, g(s) \,|\, ds}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} \,|\, L(\phi) \,| + N(\phi) \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \,|\, g(s) \,|\, ds \tag{3.98}$$

şeklinde oluşturulur. Ayrıca, (3.83)'den

$$|\, L(\phi) \,| \le |\, \phi(0) \,| + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} \,|\, g(s) \,| \left[\int_{-s}^0 e^{-\lambda_0 r} \,|\, \phi(r) \,|\, dr \right] ds$$

ya da

$$|\, L(\phi) \,| \le \left[1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \,|\, g(s) \,|\, ds \right] N(\phi)$$

yazılabildiğinden, (3.98)’den $t \geq 0$ için

$$e^{-\lambda_0 t} \mid x(t) \mid \leq \left\{ \frac{\left[1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \mid g(s) \mid ds \right]^2}{1 + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s g(s) ds} + \int_0^\infty e^{-\lambda_0 s} s \mid g(s) \mid ds \right\} N(\phi)$$

sonucunu elde ederiz ve böylece (3.96) sağlanmış olur.

Şimdi, (3.78) karakteristik denkleminin λ_0 kökü için $\lambda_0 \leq 0$ olmak üzere; $(-\infty,0]$ aralığında sınırlı olan keyfi bir başlangıç $\phi \in p$ fonksiyonu göz önüne alalım ve

$$\| \phi \| = \sup_{t \leq 0} | \phi(t) |$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\phi \in p(\lambda_0)$ ve

$$N(\phi) \leq \| \phi \|$$

eşitsizliği sağlanır. (3.96)’den

$$| x(t) | \leq \Theta \| \phi \| e^{\lambda_0 t} \quad , \qquad \forall t \geq 0 \text{ için} \tag{3.99}$$

yazılabilir. $\lambda_0 \leq 0$ olduğundan, (3.99) eşitsizlikten $\forall t \geq 0$ için $| x(t) | \leq \Theta \| \phi \|$ şeklinde de yazılabilir. Böylece, $\Theta > 1$ olduğundan

$$| x(t) | \leq \Theta \| \phi \| \ , \qquad \forall t \in IR \text{ için}$$

elde ederiz. (3.76)’nin apaçık çözümü kararlıdır.

Eğer $\lambda_0 < 0$ ise bu durumda (3.99)’den

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

sağlandığından (3.76)’nin apaçık çözümü asimptotik kararlıdır. Böylece Teorem 3.6.2. ispatlanmış olur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

1) Bölüm 3.2.'deki (3.8) denklemi $a_2(t) \equiv 0$, $b_2(t) \equiv 0$ ve sabit katsayılı olması durumunda (3.1) denkleminin bir özel hali olur. Bölüm 3.1.'deki denklem neutral yapıdaki bir denklem olsaydı bu yöntemi kullanmak imkansız ya da oldukça zor olurdu. Fakat, Bölüm 3.2.'de verilen denklem neutral yapıda bir denklem olup farklı bir yöntem sunulmuştur. (3.8) denkleminin $x = 0$ çözümü Teorem 3.2.1.'deki (3.10) eşitsizliğinden dolayı kararsızdır. Eğer Teorem3.2.1 ve Teorem3.2.2 yerine aşağıdaki gibi düzenlenirse kararlı hale getirilebilir. (3.11) denkleminden faydalanarak, $f(t)$ fonksiyonu ϕ ve c_2'ye bağlı ve $g(t)$ fonksiyonu da tüm değişken katsayılarına bağlı fonksiyonlar olmak üzere $\forall t \in [nw,(n+1)w]$ için

$$| x(t) | \leq f(t) + \int_{(n-1)w}^{t} f(\tau) g(\tau) \exp\left\{ \int_{\tau}^{t} g(s) ds \right\} \tag{4.1}$$

seklindeki gibi bir eşitsizliği elde etmek mümkündür. Eğer bu şekildeki bir eşitsizlikte

$$f(t) \leq e^{-\mu t} \text{ ve } \int_{(n-1)w}^{t} f(\tau) g(\tau) \exp\left\{ \int_{\tau}^{t} g(s) ds \right\} < \infty$$

olacak şekilde bir $\mu > 0$ sayısı bulunabilirse (4.1) eşitsizliği $t \to \infty$ için sınırlı olmaktadır. Dolayısıyla $x(t) = 0$ çözümü kararlıdır.

Diğer taraftan yine (3.11) denkleminden, $\forall t \in [nw,(n+1)w]$ için $\vartheta > 0$ belli bir sabit ile

$$| x'(t) | \leq \psi(t) \exp\{ \vartheta(t-(n-2)w \}$$

eşitsizliği elde edilebilir. Eğer $t \to \infty$ için $x'(t) \to 0$ olacak şekilde $\psi(t) \leq e^{-\kappa t}$, ($\kappa > 0$) fonksiyonu seçilebilirse $x(t) = 0$ çözümü kararlıdır (Saaty, 1964).

2) İkinci mertebeden

$$x''(t)+a_0(t)x'(t)+b_0(t)x(t)+c_0(t)u'(t)+d_0(t)u(t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)x'(t-r_j)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}b_j(t)x(t-r_j)+\sum_{j=1}^{m}c_j(t)u'(t-h_j)+\sum_{j=1}^{m}d_j(t)u(t-h_j)$$

$$+\int_{-r}^{0}\left(\alpha_1(\theta)\vartheta_1(t)x(t+\theta)+\alpha_2(\theta)\vartheta_2(t)x'(t+\theta)\right)d\theta$$

$$+\int_{-h}^{0}\left(\beta_1(\theta)\varsigma_1(t)u(t+\theta)+\beta_2(\theta)\varsigma_2(t)u'(t+\theta)\right)d\theta \qquad (4.2)$$

denklemi Bölüm 3.1.'deki gibi bir yöntem ile çözülebilir. Burada $\vartheta_1,\vartheta_2,\ t\geq -r$ için monoton azalan sürekli fonksiyon ve $\varsigma_1,\varsigma_2,\ t\geq -h$ için monoton azalan sürekli fonksiyonlardır. $[-r,0]$ aralığında α_1,α_2 parçalı sürekli ve $[-h,0]$ aralığında β_1,β_2 parçalı sürekli fonksiyonlardır. (4.2) denkleminde değişken katsayılar, başlangıç fonksiyonu ve gecikmeler için Bölüm 3.1.'deki gibi benzer tanımlar yapılabilir. Teorem 3.1.1.'deki gibi benzer teorem oluşturularak ve ek koşullar eklenerek aynı yöntemle ispatlanabilir.

Bu durum (4.2) denkleminin daha genel hali olan n. mertebeden denklemlere ve hatta denklem sistemlerine de genişletilebilir

3) Bölüm 3.3.'de $x(t,s)$ temel çözümleri için kaynakların çoğunda sınır koşulu varsayılmıştır. Halbuki bu bölümde $x(t,s)$'in hiçbir sınır konulmamıştır ve bu yüzden kararlı yapılabilmesi için farklı bir yöntem sunulmuştur.

4) Bölüm 3.4.'de (3.35) denkleminde $d(t)=0$ olması halinde adımlar metodu ve kuvvet serisi yöntemi kullanılarak (3.35) denkleminin tam çözümü hesaplanabilir (Yalçınbaş ve Yeniçerioğlu, 2004). Böyle bir tam çözüm için t değişkeni sonsuz artarsa $x(t)$ değişkeni de sınırsız olarak artar. Dolayısıyla (3.35) denkleminin $x=0$ çözümü kararsız olur.

(3.35) denkleminden daha genel olan n. mertebeden

$$x^{(n)}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}a_j(t)x^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(t)x^{(i)}(t-w)=0, \qquad t\geq 0$$

formundaki denklemi yazılıp aynı yöntemle çözülebilir.

5) Bölüm 3.5.'de değişken gecikmeli fonksiyonun yani, $h(t)$'in $h'(t)<1$ eşitsizliği sağlamasına gerek yoktur, çünkü Lyapunov fonksiyonu ve Razumikhin tipi teoremi sayesinde sistem kararlı ve asimptotik kararlı olduğu elde edilmiştir. $h(t)$'in bu eşitsizliğiyle ilgili duruma birçok makalede ve kitaplarda gerek duyulmuştur.

6) Gecikme içeren diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemlerinin genelde sonsuz sayıda kökü vardır. Bu köklerin hesaplanması kendi başına bir problem yarattığından, Differential-Difference Equations adlı kitapta köklerin dağılımı hakkında bilgi verilmiştir (Bellman ve Cooke, 1963). Son Bölümde, (3.76) karakteristik denkleminin belli koşullar altında bir tek reel kökü olduğu gösterilmiştir.

(3.75) denkleminden biraz farklı olarak $\tau>0$ olmak üzere

$$x'(t)=a_1x(t)+a_2x(t-\tau)+a_3\int_{t-\tau}^{t}x(s)ds+b_1u(t)+b_2u(t-\tau)+b_3\int_{t-\tau}^{t}u(s)ds$$

formunda bir denklem yazılabilirse bu bölümdeki gibi benzer teoremler ve sonuçlar elde edilebilir.

7) Bir sistemin kararlılığını garanti eden bir durum feedback tasarımı elde etmek için bu kontrol tasarımına bir optimal kontrol yaklaşımı önerilebilir. Bu feedback kontrol problemi bir minimum ya da maksimum optimal kontrol problemine çevrilebilir, yani, optimal kontrol problemindeki bir çözüm aynı zamanda feedback kontrol problemi için de bir çözümdür. Bu yaklaşım doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerle ilgilidir (Lin, 2000).

5. KAYNAKLAR

Agamaliyev, A ve Yeniçerioğlu, F., (2003). Stability Estimates of State Feedback Controller First order linear and Nonlinear Neutral Delay Differential Equations. *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Dergisi*, vol: 61-62, (2002-2003), 69-79.

Al-Mutib, A.N., (1984). Stability properties of numerical methods for solving delay differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 10, 71-79.

Ashyralyev, A. and Akca, H., (2001). Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations, *Nonlinear Analysis* 44, 443-452.

Ashyralyev, A., Akca, H. and Guray, U., (1997). Second-order accuracy difference scheme for the non-smooth solutionns of delay differential equations, *Proceedings of the 28th Annual Iranian Mathematics Conference,* March 18-31, Tabriz.

Ashyralyev, A., Akca, H. and Yeniçerioğlu, A.F., (2003). Stability properties of difference schemes for neutral differential equations, Differential equations and Applications, *Nova Science Publishers,* New York, vol. 3, 57-66.

Bartle, G.R., (1966). *The Elements of Integration*. John Wiley & Sons. New York.

Bellen, A., Jackiewicz, Z. and Zennaro, M., (1998). Stability analysis of one-step methods for neutral–delay differential equations, *Numer. Math.* 52, 605-619.

Bellman, R., (1953). *Stabiliy Theory of Differential Equations,* Mcgraw-hill book company, Inc., New York, Toronto, London.

Bellman, R. and Cooke, K., (1963). *Differential-Difference Equations.* Academic Press, New York.

Burton, T.A., (1983). *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York.

Burton, T.A., (1985). *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations,* Academic Press, New York.

Cochin, I., (1980). *Analysis and Design of Dynamic Systems*. Herper&Row Publishers.

Cooke, K.L. and Györi, I., (1990). Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments, *Comput. Math. Appl.* 28 (1-3), 81-92.

Corduneanu, C., (1971). *Principles of Differential and Integral Equations,* Allyn and Bacon, Inc. Boston.

Corduneanu, C., (1991). *Integral Equations and Applications,* Cambridge University Press, New York.

Corduneanu, C. and Lakshmikantham, V., (1990). Equations with unbounded delay: A Survey, *Nonlinear Anal*. 4, 831-877.

Cronin, J., (1994). *Differential Equations,* Marcel Dekker, Inc., New York.

Danan, F.M. and Elaydi, S., (1986). Lipschitz stability of nonlinear systems of differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 113 No.2, 562-577.

Davison, E.J., (1974). The decentralized stabilization and control of a class of unknown nonlinear time-varying systems, *Automatica,* Vol. 10, pp. 289-305.

Dorf, R., (1992). *Modern Control Systems*. Sixth Edition. Addison Wesley.

Driver, R.D., (1977). *Ordinary and delay Differential Equations*, Applied Math. Sciences 20, Springer, Berlin.

El'sgol'ts, L.E. and Norkin, S.B., (1973). *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments,* Academic Pres, New York, London.

Feliachi, A. and Thowsen A., (1981). Memoryless stabilization of linear delay differential systems, *IEEE Trans. On Auto. Contr.* Vol. 26, pp.586-587.

Fiagbedzi, Y.A., (1994). Direct criterion of memoryless stabilizability of delay systems. *IEEE Trans. On Auto. Contr.,* AC-26, p.586.

Györi, I. and Ladas, G., (1992). Positive solutions of integro-differential equations with unbounded delay, *J. Integral Equations Appl*. 4, 377-390.

Gutman, S., (1979). Uncertain dynamical systems: A Lyapunov min-max approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, pp. 437-443.

Hale, J.K. and Lunel, S.M.V., (1993). *Introduction to Functional Differential Equations,* Springer Verlag, New York.

Hale, J.K., (1977). *Theory of Functional Differential Equations,* Springer-Verlag, New-York.

Haslam, J.A., (1981). *Engineering Insrumentation and Control.* Edward Arnold Ltd.

Ikeda, I. and Ashida, T., (1979). Stabilization of linear systems with time-varying delay, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 24, pp. 369-370.

Ikeda, M. and Siljak, D.D., (1980). Decentralized stabilization of linear time-varying systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 25, pp. 106-107.

Kalman, R.E., (1961). On the general theory of control systems, *Proc-Ifac*, Vol. 1, pp. 481-492, Butterworty, London.

Kapila, V. and Haddad, W.M., (1999). Robust stabilization for systems with parametric uncertainty and time delay, *J. of the Franklin Ins.,* 336, 473-480.

Kordonis, I.-G.E. and Philos, Ch.G., (1999). The behavior of solutions of linear integro differential equations with unbounded delay, *Computers and Mathematics with Applications,* Vol. 38, 45-50.

Krasovskii, N., (1963). On the satbilization of unstable motions by additional forces when the feedback loop is incomplete, *Prinkl. Mat. Mek.,* 27, 641-663; TPMM, 971-1004.

Kubo, T. and Shimemura, E., (1998). Exponential stabilization of systems with time-delay by optimal memoryless feedback, *Math. and Comp. İn Sim.,* 45, 319-328.

Kuo, B., (1987). *Automatic Control Systems.* 5. th. Edition. Prentice Hall.

Kwon, W.H. and Pearson, A.E., (1977). A note on feedback stabilization of time-delay systems using finite dimensional compensators, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-22, 3, 468-470.

Kwon, W.H. and Pearson, A.E., (1980). Feedback stabilization of linear systems with delay control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 25, pp. 266-269.

Laksmikantham, V., Wen, L. And Zhang, B., (1994). *Theory of Differential Equations with Unbounded Delay,* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Lee, T.N. and Radovic, U.L., (1987). General decentralized stabilization of large-scale linear continuous and discrete time-delay systems, *International Journal of Control,* Vol. 46, pp. 2127-2140.

Lee, T.N. and Radovic, U.L., (1988). Decentralized stabilization of linear continuous and discrete-time systems with delays in interconnections, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 33, pp. 757-761.

Leitman, G., (1999). Decentralized stabilizing state feedback controllers for a class of large-scale systems including state delays in the interconnections, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 100, no.1, 59-87.

Lianhua, L., (1993). The stability of the block θ-methods, IMA J. *Numer. Anal.* 13, 101-114.

Lin, F., (2000). An optimal approach to robust control design, *Int. J. Control,* 73, 177-186.

Mahmoud, M.S., Hassan, M.F. and Darwish, M.G., (1985). *Large-Scale Control Systems: Theories and Techniques,* Mercel Dekker, New York.

Miller, R.K., (1971). *Nonlinear Volterra Integral Equations,* Benjamin, New York.

Minorsky, N., (1942). Self-excited oscillations in dynamical systems possesing retarded actions. *J. Appl. Mech*. 9: 65-71.

Mitrinoviç, D.S., Pecaric, J.E., and Fink, A.M., (1991). *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Mori, T., Noldus, E. and Kuwahara, M., (1983). A way to stabilize linear systems with delayed state, *Automatica*, Vol. 19, pp. 571-573.

Myshkis, A.D., (1951). *Linear Differential Equations with a Retarded Argument,* Ed. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, (in Russian; 2^{nd} edit. 1972).

Nazaroff, G.J., (1973). Stability and stabilization of linear differential delay systems, *IEEE Trans. On Auto. Contr.,* 317-318, June.

Philos, C.G. and Sficas, Y.G., (1990). On the existence of positive solutions of integro-differential equations, *Appl. Anal.* 36, 189-210.

Raven, F., (1982). *Automatic Control Engineering.* Mc Graw Hill.

Saaty, T.L., (1964). *Modern Nonlinear Equations,* Dover Publications, Inc., New-York.

Shi, Z.C. and Gao, W.B., (1987). Decentralized sabilization of time-varying large-scale interconnected systems, *International Journal of Systems Science,* Vol. 18, pp. 1523-1535.

Shtokalo, I.Z., (1961). *Linear Differential Equations with Variable Coeefficients.* Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York.

Siljak, D.D., (1978). *Large-Scale Dynamic Systems:* Stability and Structure, North-Holland, Amsterdam, Holland.

Siljak, D.D. and Vukcevic, M.B., (1977). Decentrally stabilizable linear and bilinear large-scale systems, *International Journal of Control,* Vol. 26, pp. 289-305.

Sinha, A.S.C., (1990). Stabilization of large-scale nonlinear infinite-delay systems, international journal of systems science, Vol. Pp. 2679-2684.

Torelli, L., (1989). Stability of numerical methods for delay differential equations, *J. Comput. and Appl. Math. 25, 15-26.*

Watanabe, K., Ito, M., Kaneko, M. and Ouchi, T., (1983). Finite spectrum assignment problem for systems with delay in state variable, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 28, pp. 506-508.

Wonham, W.M., (1979). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach (Second Edition),* Springer-Verlag, New-York.

Yalçınbaş, S. ve Yeniçerioğlu, F., (2004), Exact and Approximate Solutions of Second Order Including Function Delay Differential Equatıons wıth Variable Coeffıcıents, *Applied Mathematics and Computation*, vol:148, s:287-298.

Yeniçerioğlu, F., (1998). *Neutral Diferansiyel Denklemlerde Kararlılık,* Akdeniz Uni. Fen Bilimleri Ens. Yüksek Lisans Tezi, Antalya.

Yeniçerioğlu, F., Agamaliyev, A. ve İlyasov, M., (2002). Birinci Mertebeden Neutral Geriye Kontrol Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri ve Türevleri için Elde Edilen Eşitsizlikleri, *XV. Ulusal Matematik Sempozyumu*, 4-7 Eylül 2002, Mersin Ünv. Mersin.

Yeniçerioğlu, F. and Yalçınbaş, S., (2004). On the stability of the second order delay differential equations with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, vol:152, 667-673.

Yeong, J.S., (2002). Global stabilizability of uncertain systems with time-varying delays via dynamic observer-based output feedback, Linear Algebra and its Appl., 353, 91-105.

Weng, P., (2000). Existence and global stability of positive periodic solution of periodic İntegrodifferential systems with feedback controls, *Computers and Mathematics with Applications*, 40, 747-759.

Xu, B. And Liu, Y., (1994). An Improved Razumikhin-Type Theorem and Its Applications, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, pp. 839-841.

ÖZGEÇMİŞ

1. Kimlik

-Adı ve Soyadı **:**Ali Fuat YENİÇERİOĞLU

-Doğum Yeri ve Yılı **:**İstanbul 06-07-1972

-Medeni Hali **:**Bekar

2. Eğitim Durumu

-İlkokul **:**Ödemiş İstiklal İlkokulu, 1978-1982

-Oataokul **:**Ödemiş Lisesi Orta Kısım, 1982-1986

-Lise **:**Ödemiş Lisesi, 1986-1990

-Lisans **:**Akdeniz Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 1992-1996

-Yüksek Lisans **:**Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, 1996-1998
Danışman: Prof.Dr. Haydar AKÇA
Tezin Adı: Neutral Diferansiyel Denklemlerde Kararlılık

-Doktora **:**Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, 1999-2005
Danışman: Prof.Dr. Agamali AGAMALİYEV
Tezin Adı: Feedback Kontrollu Neutral Delay Diferansiyel Denklemler

3. Çalıştığı Kurumlar (Kadrolu)

-AKDENİZ ÜNV. Fen Bilimleri Enstitüsü, Arş. Grv., 1997-1999

-S.D.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü, Arş. Grv., 2001-2005