T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER NEUTRAL-DELAY DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

SEVİLAY BEYPINAR

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. SALİH YALÇINBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA-2005

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, R. P. KANWAL, K. C. LİU, (Kanwal, R. P., Liu, K. C., 1989) ve M.SEZER, (Sezer, M., 1996)’ in kullandığı metot, ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunması için geliştirilmiştir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konu için gerekli temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde, ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için Taylor yöntemi geliştirilmiştir.

Son olarak üçüncü bölümde, yöntemi açıklayan ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerle ilgili bazı uygulamalar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Taylor polinomları ve serileri, Neutral-Delay diferansiyel denklemler, Diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

In this thesis, the Taylor method of solving of second-order neutral-delay linear differential equation has been developed by using methods of R. P. KANWAL, K. C. LİU, (Kanwal, R. P., Liu, K. C., 1989) and M.SEZER, (Sezer, M., 1996).

The thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the basic notations which we need in investigations has been given.

In the second chapter, the Taylor method for approximate solutions of second order neutral-delay linear differential equations has been developed.

Finally, in the third chapter, some applications, which explain finding the approximate solutions of second order neutral-delay linear differential equations are given.

KEY WORDS: Taylor polynomial and series, Neutral-Delay differential equations, Differential equations.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Çevremizde gelişen olaylar ve bağlı oldukları sistemler hakkında bilgi sahibi olmak, onları anlamak bilimsel açıdan oldukça önemlidir. Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan bir modeldeki değişim oranı geçmişteki durumdan bağımsız olup sadece o andaki zamana bağlıdır. Halbuki, tutarlı bir matematiksel modelde söz konusu sistemin o andaki değişiminin geçmişteki durumundan bağımsız olmaması gerektiği açıktır. Böyle bir matematiksel modelin kurulmasıyla, şimdi gördüğümüz olayları değerlendirerek daha sonra gelişebilecek olaylar hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Yani, bir çok uygulama, fiziksel sistemlerdeki değişim oranının sadece bugünkü zaman ve duruma bağlı olmadığını, aynı zamanda geçmişe de bağlı olduğunu göstermektedir. Model kurarken bu tür gecikmeler de hesaba katılırsa oluşturulan yapılar adi diferansiyel denklemden farklı olup delay, neutral, advanced gibi denklemler olarak adlandırılır.

Neutral-delay yapıdaki diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutmaktadır. Son yıllarda neutral-delay yapıdaki denklemler üzerinde yapılan araştırmalar giderek artmakta ve konu başlığı olarak adi diferansiyel denklemlerden bağımsız hale gelmektedir.

Bu çalışmada, ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerinin çözümü için Taylor yöntemi geliştirilmiş ve çeşitli tipte ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemleri verilen bu yöntem ile çözüldüğü görülmüştür.

Bu çalışma süresince, tezin oluşması ve tamamlanmasında değerli katkıları ve önerilerinden dolayı danışmanım Yrd. Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ’ a, kıymetli görüşlerinden yararlandığım ve yakın ilgisini esirgemeyen Arş. Gör. Fuat YENİÇERİOĞLU’ na, ayrıca bana daima destek olan eşim Mustafa EGELİ ve Aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2005

Sevilay Beypınar

SİMGELER DİZİNİ

$\sum$	Toplam sembolü
max	Maksimum
Δ	Delta
∞	Sonsuz
α	Alfa
β	Beta
γ	Gama
λ	Lambda
ε	Epsilon
π	Pi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Çevremizde gelişen olaylar ve bağlı oldukları sistemler hakkında bilgi sahibi olmak, onları anlamak bilimsel açıdan oldukça önemlidir. Bilindiği gibi adi diferansiyel denklemler ile oluşturulan bir modeldeki değişim oranı geçmişteki durumdan bağımsız olup sadece o andaki zamana bağlıdır. Halbuki, tutarlı bir matematiksel modelde söz konusu sistemin o andaki değişiminin geçmişteki durumundan bağımsız olmaması gerektiği açıktır. Böyle bir matematiksel modelin kurulmasıyla, şimdi gördüğümüz olayları değerlendirerek daha sonra gelişebilecek olaylar hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Yani, bir çok uygulama, fiziksel sistemlerdeki değişim oranının sadece bugünkü zaman ve duruma bağlı olmadığını, aynı zamanda geçmişe de bağlı olduğunu göstermektedir. Model kurarken bu tür gecikmeler de hesaba katılırsa oluşturulan yapılar adi diferansiyel denklemden farklı olup delay, neutral, advanced gibi denklemler olarak adlandırılır.

Matematiksel olarak zamana bağlı

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \quad , \quad t \geq t_0 \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

şeklindeki başlangıç değer problemini kullanarak modelleyebiliriz. Burada t_0 başlangıç noktası, x_0 başlangıç değeri, t_0 ve x_0 reel sabit sayılardır. Eğer t noktasındaki bir çözümün değişim oranı, sadece t noktasındaki çözüme değil, aynı zamanda t' den farklı değerlerdeki çözüme ve çözümün türevlerine bağlı olursa bu sapmalı argümentli diferansiyel denklemdir.

Gecikme günlük hayatımızda sürekli karşılaştığımız bir durumdur. Bütün fiziksel sistemlerde uygulanan bir uyarıcıyla ilgili tepkinin meydana gelmesi arasında muhtemelen kısa olmakla birlikte bir zaman arası olur. Biyolojik sistemlerde gecikme birkaç yüz milisaniye süresindedir ki, bu insandaki tepki sürecidir. Bir antenden elektromanyetik dalgaların iletilmesiyle, uzak bir nesneden yansımasını alması arasındaki gecikmenin kısa süreli olması başlıca özelliğidir. Dikkate değer bir işlemde gecikmeler mikrosaniye ya da daha kısa zamanla ölçülse de çok önemli olabilir. Teorik bir zaman gecikmesi, bir makineye verilen enerji ile alınan randımanla aynı formda bir özelliktir. Uyarıcı $x(t), y(t)$ tepkisiyle sonuçlanır. Burada t zaman, w gecikme olmak üzere $y(t)$ tepkisi $x(t-w)$ ye eşit olur. Daha karmaşık sistemlerde birden fazla gecikme olabilir (Gözükızıl, Ö. F., Şencan, H., 2001).

Neutral-delay yapıdaki diferansiyel denklemler, fonksiyonel diferansiyel denklemler kuramında önemli bir yer tutmaktadır. Son yıllarda neutral-delay yapıdaki denklemler üzerinde yapılan araştırmalar giderek artmakta ve konu başlığı olarak adi diferansiyel denklemlerden bağımsız hale gelmektedir. Neutral diferansiyel denklemler üzerinde çalışmalar Akhmerov (1982) ve Kolmonosvkii ile Nosov' un (1986) tarafından geliştirilmiştir. Daha sonra Hale (1987) neutral denklemler kuramı ile ilgili temel teoremler ve uygulamadan ilginç örnekler vererek araştırmacıların bu konuya ilgilerinin yoğunlaşmasını sağlamıştır. Diferansiyel denklemler kuramında geleneksel yaklaşımlar; çözümlerin salınımlılığı, asimptotik davranışları, kararlılığı gibi başlıklar altında incelenir. Özellikle uygulamadaki zengin örnekler nedeniyle neutral denklemlerde salınım kuralı ilgi odağı olmuştur. Kararlılık teorisinin başlangıcı Bellman ve Cooke (1963) tarafından gerçekleştirilmiştir. Neutral diferansiyel denklemleri, gecikmeler bulunduracak biçimde irdeleyen çalışmaların yoğunluğu da konunun adi diferansiyel denklemlere kıyasla zenginliğini ortaya koymaktadır. Adi diferansiyel denklemler kuramına paralel olarak kısmi diferansiyel denklemlerde neutral özelliğin bulunması problemi de cazip araştırma konularının başında gelmektedir.

Neutral-delay diferansiyel denklemlerin en önemli özelliği bilinmeyen fonksiyonun ve türevlerinin sadece bağımsız değişkenine değil, aynı zamanda w kadar önceki zamana da bağlı olmasıdır. Genel olarak bilinmeyen fonksiyonun en yüksek basamaktan türevi; fonksiyonun kendisine, x anındaki ve $w_1, w_2, \dots$ gibi gecikme anlarındaki değişimlerine bağlı olarak ifade edilmiş ise, bu tür diferansiyel denklemler neutral diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Neutral-delay diferansiyel denklemlerde gecikmeler zamana ve hatta sistemin durum değişkenine (yani denklemdeki bilinmeyen fonksiyona) de bağlı olabilir.

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-w_1), y'(x-w_2))$$
$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x), y(x-w(x)), y'(x-w(x)), y''(x-w(x)))$$

denklemleri birer neutral diferansiyel denklem örnekleri,

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-w(x)))$$
$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x), y(x-w(x)), y'(x-w(x)))$$

denklemleri ise birer delay diferansiyel denklem örnekleridir.

Kuramsal öneminin yanı sıra, uygulamada model olarak, elektrik devrelerindeki akımın kaybı (bilgisayar hızlarının düşmesi) örneğinde görüldüğü gibi neutral denklemlerle çok daha doğru ve anlamlı tanımlanabilmektedir. Neutral denklemlerin uygulamada kullanımına ilk örnekler olarak pek çok araştırmacının kaynak gösterdiği aşağıdaki klasik çalışmalar gösterilebilir. Miranker, elektrik devrelerindeki güç kaybının incelenmesinde α, β ve γ sabitler olmak üzere

$$y'(x) = \alpha y'(x-w) - \beta y(x) - \alpha\gamma y(x-w) + f(y(x), y(x-w))$$

denklemini model olarak seçmiştir (Miranker, 1962).

Philos, ekositik yüzeylerdeki kütle titreşimlerinin tanımlanmasında model olarak,

$$x''(t) + w_1^2 x(t) = \varepsilon f_1(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_1 y''(t-w)$$
$$y''(t) + w_2^2 y(t) = \varepsilon f_2(x(t), x'(t), y(t), y'(t)) + \gamma_2 x''(t-w)$$

sistemini önermiş ve incelemiştir (Philos, 1991).

El'sgol'ts, nükleer reaktörlere ilişkin problemlerin çözümünde

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x), y(x-w), y'(x-w), y''(x-w))$$

denklemini model olarak kullanmıştır (El'sgol'ts, 1973).

Genel olarak neutral diferansiyel denklemler, neutral özellik bulundurmayan delay-advanced denklemlere kıyasla daha karmaşık yapı sergiler. Neutral diferansiyel denklemlerin çözümlerinin asimtotik ve salınımlı davranışlarını inceleme, gerek kurumsal gerekse uygulamaya yönelik olması açısından en fazla araştırma yapılan konuların başında gelmektedir.

1.1. Fark-Diferansiyel Denklemler

"Fark-diferansiyel denklemler" ile x argümanından bir sabit sayı kadar kaydırılarak elde edilen argümanların değişken olduğu bir y bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerini içeren denklemler ifade edilmektedir. Bu tür denklemlere örnek olarak

$$y''(x) - y'(x-1) + y(x) = 0 \tag{1.1}$$

$$y''(x) + \frac{1}{2}y(x) - \frac{1}{2}y(x-\pi) = 0 \quad ; \quad 0 \le x \le \infty \tag{1.2}$$

denklemleri verilebilir.

Burada y' nin, sadece tek bir bağımsız değişken x' in fonksiyonu olduğu problemler ele alınmıştır. Bu nedenle bütün türevler adi türev olarak ortaya çıkarlar. Aynı zamanda bir denklemin türev mertebesi denklemin en yüksek türevinin mertebesi, fark mertebesi ise denklemdeki farklı argümanların sayısının bir eksiğidir. Örneğin, (1.1) denklemi türevler cinsinden ikinci mertebeden, farklar cinsinden de birinci mertebedendir.

Türevler cinsinden *n. mertebeden* ve farklar cinsinden *m. mertebeden* olan bir fark-diferansiyel denkleminin genel formu

$$\begin{gathered} F[x, y(x), y(x-w_1), \ldots, y(x-w_m), y'(x), y'(x-w_1), \\ \ldots, \ldots, y^{(n)}(x), y^{(n)}(x-w_1), \ldots, y^{(n)}(x-w_m)] = 0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

olarak yazılabilir. Burada F, $1+(m+1)(n+1)$ değişkenli bir fonksiyon ve $w_1, \ldots, w_m$ sayıları verilmiştir. Bu sayılar aralık (spans) veya geciktirici (retardations) olarak adlandırılmıştır. Burada, F ve y fonksiyonları reel değişkenli reel fonksiyonlar ve $w_1, \ldots, w_m$ sayıları da reel sayılardır.

Genel olarak fark-diferansiyel denklemler

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x)y^{(j)}(x-w_i) = f(x) \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilebilir. $0 = w_0 < w_1 < \ldots < w_m$ dır. m ve n pozitif tamsayılardır. $f(x)$ ve $(m+1)(n+1)$ sayıdaki $a_{ij}(x)$ fonksiyonları reel $x-ekseninin$ bazı aralıklarında tanımlıdır. Bununla beraber

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}y^{(j)}(x-w_i) = f(x) \tag{1.5}$$

formundaki sabit katsayılı lineer denklemler (1.4)' deki genel lineer denklemler teorisinden hem daha basittir hem de daha bütündür. Bu, diferansiyel denklemler teorisindeki duruma benzer bir durum içerir.

(1.5)' deki türden denklemlerin alt-sınıfı olan, türevler ve farklar cinsinden ikinci mertebeden olan denklemler

$$a_0y''(x) + a_1y''(x-w) + b_0y'(x) + b_1y'(x-w) + c_0y(x) + c_1y(x-w) = f(x) \tag{1.6}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu tür özel denklemler teorisi, genel teorinin hemen hemen bütün belirleyici özelliklerini gösterir. Diferansiyel denklemlerde olduğu gibi cebirsel detayları önemli derecede basitleştirmek için vektör-matris notasyonu kullanılabilir.

Bu fark-diferansiyel denklemlerinden herhangi birisinin çözümü ile çözüm fonksiyonu elde edilir.

$$y(x) = 1 - \sin x \tag{1.7}$$

fonksiyonunun (1.2)' deki denklemin bir çözümü olduğu kolayca görülebilir. (1.7) deki türden açık çözümler elde etmenin her zaman mümkün olmadığı açıktır. Hatta olsa bile, çözümün yapısı ile ilgili bazı soruları cevaplamak için yetersiz olabilir. Böyle bir durumda, yine de bazı analitik işlemler sırasında ilgili bazı sorulara cevap bulmak mümkün olabilir, böylece bir bakıma denklemi çözülmüş kabul edebiliriz.

Fark-diferansiyel denklemler için de aynı durum söz konusudur. Gerçekten de fark-diferansiyel denklemlerinin teorisi ile diferansiyel denklemlerinin teorisi arasında çok yakın bir benzerlik vardır. Diferansiyel denklemlerin sonuçları ile ilgili bilgi sağlamakta yararlanılan yöntemlerden çoğu, fark-diferansiyel denklemlerinin analizinde kullanılabilecek şekilde genişletilebilir.

Problemlerin çoğu aşağıda açıklanan tekniklerin kullanılması ile çözülebilir. Bu teknikler:

a) Başlangıç değer probleminin doğru formülasyonu,
b) Bir çözümün özel noktalarda hesaplanması,
c) Bir çözümün özel çözümlerin toplamı olarak ifade edilmesi,
d) Bir çözümün belirli integraller yardımıyla ifadesi,
e) Çözümlerin asimptotik davranışları,
f) Çözümlerin karalılığı kavramıdır.

Dikkat edilirse bu tekniklerin her birinin diferansiyel denklemler teorisinin konuları olduğu hatırlanacaktır.

Şimdi (1.6) tipindeki fark-diferansiyel denklemine bazı örnekler verelim.

Örnek 1.1.

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x-1) \quad , \quad 1 \le x \le N \\ y(x) &= 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{1.8}$$

özel formunu ele alalım. Adımlar metodu uygulanırsa:

1. adım:

$$y(x)=1 \qquad , \qquad 0\le x\le 1$$

olup, x yerine $x-1$ yazılırsa,

$$y(x-1)=1 \quad \text{ve} \quad 0\le x-1\le 1 \Rightarrow 1\le x\le 2$$

olur. Buna göre,

$$y'(x)=1 \Rightarrow y(x)=x+c$$

olup,

$$y(1)=1$$

olduğundan $c=0$ olarak bulunur. O halde,

$$y(x)=x \quad , \quad 1\le x\le 2$$

elde edilir.

2. adım:

$$y(x)=x \qquad , \qquad 1\le x\le 2$$

olup, x yerine $x-1$ yazılırsa,

$$y(x-1)=x-1 \quad \text{ve} \quad 1\le x-1\le 2 \Rightarrow 2\le x\le 3$$

olur. Buna göre,

$$y'(x)=x-1 \Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{2}-x+c$$

olup,

$$y(2)=2$$

olduğundan $c = 2$ olarak bulunur. O halde,

$$y(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2 \quad , \qquad 2 \le x \le 3$$

elde edilir.

Bu şekilde $y(x)$' in tanımını bir aralıktan diğerine genişleterek, istediğimiz kadar ilerleyebiliriz. Basit bir tümevarım yardımıyla

$$y(x) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-j)^j}{j!} \quad , \quad N \le x \le N+1, \;\; N = 0,1,2,\ldots \tag{1.9}$$

bağıntısı bulunur. (1.8) ile verilen denklem $x > 1$ için $y'(x)$'in sürekli olmasını gerektirir. $x = 1$ de $y'(x)$'in başlangıçtaki süreksizliğinin (1.8) denklemi ile "yumuşatıldığı" (smoothed out) söylenebilir (Akıllı, S., 2000).

Fark-diferansiyel denklemlerinin incelenmesi için uygun temel yöntemlerden birini gösteren bu örnek, çözümün bir aralıktan diğerine x yönünde ileri doğru genişletildiğini gösterir. Bu yöntem bir denklemin bir çözüme sahip olduğunu ifade ettiği gibi bu çözümün hesaplanabilmesi için de bir yöntem belirler. Bazen çözümü geri yönde genişletmek için de benzer yöntem kullanılabilir. Verilen örnek aynı zamanda bir fark-diferansiyel denkleminin birden fazla çözüme sahip olduğunu gösterir. Birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümünün bir noktada belirlenmiş bir değere sahip olduğu bilindiğinden bu fark-diferansiyel denkleminin çözümlerinden birisinin de belirli bir x-aralığında bilinen bir değer olduğu ortaya çıkar. Bir çözüm üzerindeki böyle ek koşullara SINIR KOŞULLARI denir. (1.8) ile verilen denklem için sınır koşulunun

$$y(x) = g(x) \quad , \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1.10}$$

olduğu görülür. Burada $g(x)$ önceden belirlenmiş herhangi reel sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur.

(1.10) tipindeki sınır koşullarına BAŞLANGIÇ KOŞULU denir. (1.8) ile verilen denklemin çözümleri üzerinde başka türden sınır koşulları da bulmak mümkün olabilir.

Örnek 1.2.

$$y'(x) = y(x-1) + 2y'(x-1) \quad , \quad 1 \le x \le 3 \tag{1.11}$$
$$y(x) = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

özel formunu ele alalım. Adımlar metodu uygulanırsa:

1. adım:

$$y(x) = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

olup, x yerine $x-1$ yazılırsa,

$$y(x-1) = 1 \ , \ y'(x-1) = 0 \ \text{ve} \ 0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

olur. Buna göre,

$$y'(x) = 1 \Rightarrow y(x) = x + c$$

olup,

$$y(1) = 1$$

olduğundan $c = 0$ olarak bulunur. O halde,

$$y(x) = x \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

elde edilir.

2. adım:

$$y(x) = x \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

olup, x yerine $x-1$ yazılırsa,

$$y(x-1)=x-1\ ,\ y'(x-1)=1 \text{ ve } 1\le x-1\le 2 \Rightarrow\ 2\le x\le 3$$

olur. Buna göre,

$$y'(x)=x+1 \Rightarrow y(x)=\frac{x^2}{2}+x+c$$

olup,

$$y(2)=2$$

olduğundan $c=-2$ olarak bulunur. O halde,

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+x-2 \quad , \quad 2\le x\le 3$$

olarak bulunur. (1.9) tipinde bir genel formül bulmak güç olsa da bu işleme devam ederek $y(x)$' i istediğimiz kadar ilerletebiliriz. Ayrıca x 'in elde edilen $y(x)$ çözümü her pozitif tam sayı değerde süreksiz türeve sahiptir. (1.11) denklemi bu tür değerde sadece sağdan ve soldan limitleri varsa sağlanır. (1.11) denkleminin çözümü sürekli ve bütün $x>1$ değerleri için sürekli birinci türeve sahip olması genelde doğru değildir.

(1.11) denklemi $x=1$ de $y'(x)$' in yumuşatılan (smoothed out) bir süreksizliği yoktur.

Örnek 1.3.

(1.6) ile verilen fark-diferansiyel denkleminin

$$y'(x-1)=y(x) \tag{1.12}$$

özel formunu, (1.10) ile verilen başlangıç koşuluna bağlı olarak ele alalım. (1.8) denklemindeki benzer işlemlerle geriye doğru giderek bu çözümü elde etmek mümkündür. Bununla birlikte eğer çözümü ileri doğru devam ettirebilirsek g diferansiyellenebilir olması koşuluyla

$$y(x) = g'(x-1) \qquad , \qquad 1 < x < 2$$

elde edilir. Bu $1 < x < 2$ için $y(x)$' i belirler. $g(x)$' in $0 < x < 1$ için iki kez diferansiyellenebilir olması koşuluyla $y(x)$, $1 < x < 2$ için diferansiyellenebilir. (1.12)' deki denklem $2 < x < 3$ için $y(x)$' i belirlemek için kullanılabilir. Eğer $g(x)$ başlangıç fonksiyonu $0 < x < 1$ için her mertebeden türeve sahipse bu işlemlerin bütün $x > 0$ için bir çözüm verdiği görülebilir.

Örnek 1.4.

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < 1 \\ x & , \quad 1 \le x < 2 \\ 2 & , \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$$

olmak üzere

$$y''(x) + y(x) + (x^3 - 2x^2 + 13x - 6)y(x - \Delta(x)) = 0 \qquad ; \qquad (0 \le x \le 3) \qquad (1.13)$$

denklemini göz önüne alalım. Eğer,

$$\Phi(x) = x \qquad ; \qquad (-1 \le x \le 0)$$

uygun başlangıç fonksiyonu verilirse (1.13) denkleminin çözümü,

$$y(x) = \begin{cases} x(1-x)^3 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 \le x < 2 \\ f(x) & ; \quad 2 \le x < 3 \end{cases}$$

biçiminde elde edilir. Burada $f(x)$ fonksiyonu,

$$y''(x) + y(x) + (x^3 - 2x^2 + 13x - 6)(x-2)(3-x)^3 = 0$$

denkleminin tek çözümüdür.

1.2. İkinci Mertebeden Fark-Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

(1.8), (1.11) ve (1.12)' de ele alınan denklemler, türev ve farklar cinsinden birinci mertebeden, (1.13)' de ele alınan denklem türev ve farklar cinsinden ikinci mertebeden olup,

$$a_0 y''(x) + a_1 y''(x-w) + b_0 y'(x) + b_1 y'(x-w) + c_0 y(x) + c_1 y(x-w) = f(x) \quad (1.6)$$

genel denklemine ait örneklerdir. Bu denklemden çıkarılan sonuçla (1.6) ile verilen denklem çeşitli şekillerde sınıflandırılabilir. Eğer,

i. $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise $b_1 \neq 0$ veya $c_1 \neq 0$ ya da
$a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_0 \neq 0$ ve $b_1 = 0$, $c_1 \neq 0$ ise RETARDED (DELAY) tipli,

ii. $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ya da
$a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $b_0 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ ise NEUTRAL tipli,

iii. $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ya da
$a_0 = a_1 = b_0 = 0$ ve $b_1 \neq 0$ ise ADVANCED tipli,

iv. $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = 0$ ise fonksiyonel denklem tipinde bir (tam) PURE-FARK denklemidir.

Eğer, $c_0 = c_1 = b_0 = b_1 = 0$ veya $c_0 = c_1 = a_0 = a_1 = 0$ ise bir PURE-FARK denklemine indirgenebilir.

Eğer, $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ veya $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ ise ADİ DİFERANSİYEL denklemdir.

Örneğin,

$$y'(x) = y(x-1) \quad (1.8)$$

ile verilen denklem retarded (delay) tipli fark-diferansiyel denklemi,

$$y'(x) = y(x-1) + 2y'(x-1) \qquad (1.11)$$

ile verilen denklem neutral tipli fark-diferansiyel denklemi,

$$y'(x-1) = y(x) \qquad (1.12)$$

ile verilen denklem advanced tipli fark-diferansiyel denklemi,

$$y''(x) + y(x) + (x^3 - 2x^2 + 13x - 6)y(x - \Delta(x)) = 0 \quad ; \quad (0 \le x \le 3) \qquad (1.13)$$

ile verilen denklem retarded (delay) tipli fark-diferansiyel denklemidir.

Genellikle x' in zaman gösterdiği uygulamalarda, retarded (delay) türden bir denklem, miktarındaki değişim oranı, miktarındaki geçmişteki ve şimdiki değerine bağlı olan bir sistem davranışı ifade eder.

Neutral tipli denklem, miktarındaki şimdiki değişim oranı miktarındaki geçmiş ve şimdiki değerine bağlı olduğu gibi geçmiş değişim oranına bağlı bir sistemi ifade eder.

Advanced tipli bir denklem ise, miktarındaki değişim oranı şimdiki ve gelecekteki değerine bağlı (veya miktarın şimdiki değeri geçmiş değerine ve geçmiş değişim oranına bağlı) olduğu bir denklem sistemini ifade eder.

Uygulamalarda x genellikle zaman gösterdiğinden çözümler x' in artışı yönünde devam ettirilecektir. Bununla birlikte x' yerine $-x$ konursa ($x' = -x$ dönüşümü uygulanırsa) x cinsinden retarded tipli bir denklem x' cinsinden bir advanced tipli denkleme dönüşür. Tersine neutral tipli bir denklem başka bir neutral tipli denkleme dönüşür. Böylece genellemeyi kaybetmeden araştırmalarımızı x' in değerini arttırarak sürdürürüz.

Delay tipli denklemler, neutral veya advanced tipli denklemlere kıyasla birçok açıdan daha basittir (Bellman and Cooke, 1963).

1.3. Varlık ve Teklik Teoremleri

$$x''(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i(t) x(t - \Delta_i(t)) + b_i(t) x'(t - \Delta_i(t)) \right) + c(t) \tag{1.14}$$

denkleminde $x(t) = y_1(t)$ ve $x'(t) = y_2(t)$ yazarsak (1.14) denklemine denk olan birinci mertebeden sistem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= \sum_{i=0}^{n} \left(a_i(t) y_1(t - \Delta_i(t)) + b_i(t) y_2(t - \Delta_i(t)) \right) + c(t) \end{aligned} \tag{1.15}$$

formunda olur.

Kolaylık için (1.15) yerine daha genel şekilde olan

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{n} a_{ji}^{k}(t) y_j(t - \Delta_i(t)) + c_k(t) \quad , \quad k = 1,2 \tag{1.16}$$

sistemini göz önüne alalım.

(1.16) sistemi,

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^{\infty} y_j(t - s) dr_j^k(t,s) + c_k(t) \quad , \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{1.17}$$

integrodiferansiyel denklem sisteminin özel bir halidir. (1.17)' deki integral Stieltjes anlamındadır.

"Linear Differential Equations with a Retarded Argument" adlı kitabında Myskis, $r_j^k(t,s)$ fonksiyonu üzerine bazı sınırlamalar koymakla (1.17) sistemi için başlangıç değer probleminin çözümünün varlık ve teklik problemlerini, ayrıca bu çözümün başlangıç verilere bağlılığının sürekli olduğunu ispatlamıştır.

Biz burada bu teoremleri yalnız (1.16) şeklindeki sistemler için inceleyeceğiz:

$$y'_k(t) = \sum_{j=1}^{2}\left(a_{j0}^{k}(t)y_j(t) + a_{j1}^{k}(t)y_j(t-\Delta(t))\right) + c_k(t) \qquad , \qquad k = 1,2 \qquad (1.18)$$

Şimdi (1.18) sisteminin $[A,B)$, $(B \le +\infty)$ aralığında tanımlı ve

$$y_k(A) = y_A^{(k)} = \Phi_k(A)$$

$$y_k(t-\Delta(t)) \equiv \Phi_k(t-\Delta(t)) \quad , \quad t-\Delta(t) < A \qquad (1.19)$$

(1.19) koşullarını sağlayan $y_1(t)$, $y_2(t)$ çözümünü arayacağız. Burada $k = 1,2$ ve $\Phi_k(t)$, E_A başlangıç kümesinde tanımlı bir başlangıç fonksiyonudur. Eğer $a_{j1}^{k}(t) \equiv 0$ $j = (1 \text{ veya } 2)$ ise, y_A^{j} $j = (1 \text{ veya } 2)$ keyfi seçilebilir. Eğer A, E_A' nın ayrık noktası ise $y_A^{(1)}$ ve $y_A^{(2)}$ sayılarının her ikisi kendi seçilebilir.

(1.18) sistemi yanı sıra aşağıdaki integral denklem sistemini

$$y_k(t) = y_A^{(k)} + \int_A^t \left\{ \sum_{j=1}^{2}\left(a_{j0}^{k}(\tau)y_j(\tau) + a_{j1}^{k}(\tau)y_j(\tau-\Delta(\tau))\right) \right\} dr$$
$$+ \int_A^t c_k(\tau)d\tau \quad , \quad k = 1,2; \;\; A \le t < B \qquad (1.20)$$

ve (1.19) koşullarının benzeri olan

$$y_j(\tau-\Delta(\tau)) \equiv \Phi_j(\tau-\Delta(\tau)) \quad , \quad \tau-\Delta(\tau) < A \quad , \quad j = 1,2 \qquad (1.21)$$

koşullarını göz önüne alalım.

Bundan sonra; $a_{j0}^{k}(t)$, $a_{j1}^{k}(t)$, $c_k(t)$ $(j,k = 1,2)$ ve $\Delta(t) \ge 0$ fonksiyonlarının $[A,B)$ aralığında sürekli olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca $\Phi_k(t)$, $(k = 1,2)$ başlangıç fonksiyonlarının E_A üzerinde sürekli olduklarını kabul edeceğiz (Norkin, S. B., 1972).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. İkinci Mertebeden Lineer Neutral-Delay Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri

Bu kısımda ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerin çözümü için Taylor yöntemi geliştirilmiştir. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan yöntem R. P. Kanwall ve K. C. Liu tarafından sunulan yöntemin bir uyarlamasıdır (Kanwall, R. P., Liu, K. C., 1989). Bu yöntemde ilk olarak neutral-delay diferansiyel denklemin her iki tarafının n kez türevi alınır ve sonra sonuç denkleminde bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımı yerine konulur. Burada lineer cebrik sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunur. Elde edilen çözüm bir Taylor seri yaklaşımı olup bu Taylor seri açılımının katsayıları bir lineer cebrik sistemin çözümleridir. Katsayılar, matris denklemleri yardımıyla hesaplanır.

Yöntem,

$$\begin{aligned} &p(x)y''(x)+q(x)y'(x)+r(x)y(x)+k_1(x)y''(x-w)+k_2(x)y'(x-w)+\\ &k_3(x)y(x-w)=f(x) \quad , \quad 0\le x\le a \\ &y(x)=y_0(x) \quad , \quad -w\le x\le 0 \quad (w>0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

formunda ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemine uygulanarak açıklanmıştır. Burada $p(x)\neq 0$, $q(x)$, $r(x)$, $k_1(x), k_2(x)$, $k_3(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $0\le x\le a$ aralığında $n.$ türevlere sahip sürekli fonksiyonlardır. $y_0(x)$ ise $-w\le x\le 0$, aralığında $(n+2).$ türeve sahip sürekli bir başlangıç (verilmiş) fonksiyonudur.

Yukarıdaki koşullar altında, $(j-1)w\le x\le jw$ aralıklarında (2.1) denklemine adımlar metodu uygulanırsa $j=1,2,\ldots,\ell-1,\ell \quad ;(\ell w=a)$ için,

$$y_j(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^n \,, \quad (j-1)w\le c\le jw \tag{2.2}$$

formunda bir Taylor polinom çözümü elde edilir. Burada $x=c$ de $N.$ dereceden bir Taylor polinomu olup, $y^{(n)}(c), n=0,1,2,\ldots,N$ katsayılarını belirler. (2.1) denklemine $(j-1)w \le x \le jw$ aralıklarında adımlar metodunu uygulayalım (Yeniçerioğlu, F., 1998).

1. adım: $0 \le x \le w$ aralığında $y_0(x)$ başlangıç fonksiyonu için,

$$y(x-w) = y_0(x-w),\ \ y'(x-w) = y_0'(x-w),\ \ y''(x-w) = y_0''(x-w)$$

olduğundan bu ifadeler (2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$h_0(x) = f(x) - k_1(x)y_0''(x-w) - k_2(x)y_0'(x-w) - k_3(x)y_0(x-w)$$

bilinen bir fonksiyon olmak üzere

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = h_0(x) \quad , \quad 0 \le x \le w \tag{2.3}$$

biçiminde bir adi diferansiyel denklem oluşturulur. Bu denklemin x' e göre n defa türevi alınırsa,

$$[p(x)y''(x)]^{(n)} + [q(x)y'(x)]^{(n)} + [r(x)y(x)]^{(n)} = h_0^{(n)}(x)$$

ya da

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left\{ p^{(n-m)}(x)y^{(m+2)}(x) + q^{(n-m)}(x)y^{(m+1)}(x) + r^{(n-m)}(x)y^{(m)}(x) \right\} = h_0^{(n)}(x) \tag{2.4}$$

elde edilir. Leibnitz kuralına göre iki fonksiyonun çarpımının $n.$ mertebeden türevi,

$$[p(x)y(x)]_{x=c}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{(n-i)}(c)y^{(i)}(c)$$

olup, (2.4) eşitliği Leibnitz kuralı yardımıyla

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left\{ p^{(n-m)}(c)y^{(m+2)}(c) + q^{(n-m)}(c)y^{(m+1)}(c) + r^{(n-m)}(c)y^{(m)}(c) \right\} = h_0^{(n)}(c) \tag{2.5}$$

formunda yazılabilir. Burada $y^{(0)}(c)$, $y^{(1)}(c)$,…, $y^{(N)}(c)$ bilinmeyen katsayılar olup $p^{(i)}(c)$, $q^{(i)}(c)$, $r^{(i)}(c)$ ve $h_0^{(i)}(c)$ sırasıyla $x=c$ de p, q, r, h_0 bilinen fonksiyonlarının i. türevlerinin değerlerini gösterir.

(2.5) bağıntısından bilinmeyen katsayıları hesaplamak için (2.1) sistemindeki $y_0(x)$ başlangıç fonksiyonundan yararlanarak $x=0$ deki

$$y(0)=y_0(0) \text{ ve } y'(0)=y_0'(0) \tag{2.6}$$

başlangıç koşulları kullanılabilir.

(2.1) denklemi ve (2.6) koşullarından oluşan en genel problemin çözümü için, (2.5) sisteminin matris formu,

$$\mathbf{W_0 Y} = \mathbf{H_0} \tag{2.7}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \left[y^{(0)}(c) \quad y^{(1)}(c) \quad \ldots \quad y^{(N)}(c)\right]^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{H_0} &= \left[h_0^{(0)}(c) \quad h_0^{(1)}(c) \quad \ldots \quad h_0^{(N)}(c)\right]^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{W_0} &= \left[\mathrm{w}_{\mathrm{nm}}\right] \quad , \quad (n,m=0,1,2,\ldots,N) \end{aligned}$$

şeklinde olup, $\mathbf{W_0}$ ’ ın elemanları açık olarak

$$\mathrm{w}_{\mathrm{nm}} = \binom{n}{m-2} p^{(n-m+2)}(c) + \binom{n}{m-1} q^{(n-m+1)}(c) + \binom{n}{m} r^{(n-m)}(c) \tag{2.8}$$

biçiminde verilebilir. (2.8) denkleminde $k<0$ için,

$$p^{(k)}(c)=0 \, , \quad q^{(k)}(c)=0 \, , \quad r^{(k)}(c)=0$$

ve $j<0$, $j>i$ için,

$$\binom{i}{j} = 0$$

olup, buradaki i , j ve k tam sayılardır. Böylece $n < m - 2$ $(n = 0,1,\dots,N-3;\ m = 3,4,\dots,N)$ için (2.8) denkleminde

$$\mathrm{w}_{\mathrm{nm}} = 0$$

olur.

(2.5) sisteminin arttırılmış katsayılar matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \left[\mathrm{w}_{\mathrm{nm}} \quad ; \quad h_0^{(n)}(c)\right] \quad , \quad 0 \le c \le w \qquad (2.9)$$

şeklindedir.

(2.2) ifadesi $j = 1$ için,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(x-c)^n \quad , \quad 0 \le c \le w$$

biçiminde olup, bu çözüm ve onun türevi aşağıdaki gibi matris denklemlerine denktir:

$$y_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{0!} & \frac{(x-c)}{1!} & \frac{(x-c)^2}{2!} & \dots & \frac{(x-c)^N}{N!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$
$$y_1'(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & \frac{(x-c)}{1!} & \dots & \frac{(x-c)^{N-1}}{(N-1)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Buradaki $\mathbf{Y}$, (2.7) denkleminde tanımlanmıştır.

Buradan $x = 0$ da $h = -c$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
y_1(0) &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{1!} & \frac{h^2}{2!} & \dots & \frac{h^N}{N!} \end{bmatrix} \mathbf{Y} \\
y_1'(0) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{0!} & \frac{h}{1!} & \dots & \frac{h^{N-1}}{(N-1)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

değerleri elde edilir. (2.6) koşulundan yararlanılarak,

$$
y_1(0) = y_0(0) \quad \text{ve} \quad y_1'(0) = y_0'(0) \tag{2.11}
$$

yazılabilir. Böylece (2.3) denkleminin başlangıç değer koşulları elde edilir. (2.11) denkleminde (2.10) değerini yerine koyarsak ve gerekli sadeleşmeleri yaparsak, sırasıyla ilk ve ikinci koşullu matris şekillerini,

$$
\mathbf{U_0 Y} = [y_0(0)] \quad \text{ve} \quad \mathbf{V_0 Y} = [y_0'(0)]
$$

biçiminde elde ederiz. Daha açık şekilde arttırılmış matrisler,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{U}}_\mathbf{0} &= \begin{bmatrix} u_0^0 & u_1^0 & \dots & u_N^0 & ; & y_0(0) \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{V}}_\mathbf{0} &= \begin{bmatrix} v_0^0 & v_1^0 & \dots & v_N^0 & ; & y_0'(0) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

şeklinde olup, buradaki u_j^0 ve v_j^0, (2.10) değerlerindeki h katsayısına bağlıdır.

Sonuç olarak, (2.9) arttırılmış matrisinin son iki sırasına (2.12) satır matrislerini tekrar yerine koyarsak aşağıdaki $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}^*$ arttırılmış matrisini elde ederiz:

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}^* = \begin{bmatrix}
w_{00} & w_{01} & w_{02} & 0 & 0 & \dots & 0 & ; & h_0^{(0)}(c) \\
w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & \dots & 0 & ; & h_0^{(1)}(c) \\
w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & \dots & 0 & ; & h_0^{(2)}(c) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\
w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & w_{N-2,2} & w_{N-2,3} & w_{N-2,4} & \dots & w_{N-2,N} & ; & h_0^{(N-2)}(c) \\
u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0 & \dots & u_N^0 & ; & y_0(0) \\
v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & v_3^0 & v_4^0 & \dots & v_N^0 & ; & y_0'(0)
\end{bmatrix}
\tag{2.13}
$$

Buradaki w_{nm} ve $h_0^{(n)}(c)$; $(n = 0,1,2,\ldots,N-2\ ;\ m = 0,1,2,\ldots,N)$ değerleri (2.7)' de tanımlanmıştır. (2.13) arttırılmış matrisi aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\mathbf{W_0^*} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & \ldots & 0 \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & w_{N-2,2} & w_{N-2,3} & w_{N-2,4} & \ldots & w_{N-2,N} \\ u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0 & \ldots & u_N^0 \\ v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & v_3^0 & v_4^0 & \ldots & v_N^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H_0^*} = \begin{bmatrix} h_0^{(0)}(c) \\ h_0^{(1)}(c) \\ h_0^{(2)}(c) \\ \ldots \\ h_0^{(N-2)}(c) \\ y_0(0) \\ y_0'(0) \end{bmatrix}$$

Koşullara göre yeniden düzenlenen matris sistemi,

$$\mathbf{W_0^* Y} = \mathbf{H_0^*}$$

formuna dönüşür.

Eğer $rank\mathbf{W_0^*} = rank\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}^* = N+1$ ise,

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{W_0^*})^{-1}\mathbf{H_0^*} \tag{2.14}$$

ya da

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & \ldots & 0 \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & w_{N-2,2} & w_{N-2,3} & w_{N-2,4} & \ldots & w_{N-2,N} \\ u_0^0 & u_1^0 & u_2^0 & u_3^0 & u_4^0 & \ldots & u_N^0 \\ v_0^0 & v_1^0 & v_2^0 & v_3^0 & v_4^0 & \ldots & v_N^0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_0^{(0)}(c) \\ h_0^{(1)}(c) \\ h_0^{(2)}(c) \\ \ldots \\ h_0^{(N-2)}(c) \\ y_0(0) \\ y_0'(0) \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Böylece, $y^{(n)}(c)$, $n = 0,1,\ldots,N$ katsayıları (2.14) koşulunda tek türlü belirlenir. Bundan dolayı $0 \le x \le w$ aralığında (2.3) diferansiyel denklemi ile (2.11) koşulları bir tek çözüme sahiptir. Bu çözüm,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , \quad 0 \le x, c \le w \tag{2.15}$$

şeklindeki Taylor polinomu ile verilir.

$y_1(x)$ çözümü ve onun türevleri olan $y_1'(x)$ ve $y_1''(x)$, (2.3) denkleminde yerine konulduğunda (2.3) denkleminin $0 \le x \le w$ aralığında bir yaklaşık çözümüdür. Sonuç denklem bu aralıkta x' in verilen bir değeri için yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani, $x = x_i \in [0, w]$; $i = 0,1,\ldots,m$ için,

$$D(x_i) = \left| p(x_i) y_1''(x_i) + q(x_i) y_1'(x_i) + r(x_i) y_1(x_i) - h_0(x_i) \right| \cong 0 \tag{2.16}$$

dır. Burada

$$D(x_i) \le 10^{-k_i} \quad (k_i \text{ pozitif bir tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k}$ (k_i pozitif bir tamsayı) önceden belirlenmiş ise, x_i noktalarının her birindeki $D(x_i)$ farkı belirlenen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar N kesme sınırı yükseltilebilir (Yalçınbaş, S., Sezer M., 2000).

Böylece

$$y_1(x_i) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{n!} h_i^n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h_i}{1!} & \frac{h_i^2}{2!} & \cdots & \frac{h_i^N}{N!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$y_1'(x_i) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{(n-1)!} h_i^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{h_i}{1!} & \cdots & \frac{h_i^{N-1}}{(N-1)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$y_1''(x_i) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y^{(n)}(c)}{(n-2)!} h_i^{n-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{h_i}{1!} & \cdots & \frac{h_i^{N-2}}{(N-2)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde birinci adımda olduğu gibi ikinci adımda da benzer işlemler yapılırsa,

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , \qquad w \le x, c \le 2w$$

formunda bir Taylor çözümü bulunur.

Genel olarak, ℓ. adım için bir Taylor çözümü oluşturulmak istenirse:

ℓ. adım: ℓ. adıma geçerken $(\ell-1)$. adımdaki $y_{\ell-1}(x)$ Taylor çözümünün bulunduğunu varsayıyoruz. (2.1) sistemine benzer formdaki

$$\begin{aligned} p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) + k_1(x)y''(x-w) + k_2(x)y'(x-w) + \\ k_3(x)y(x-w) = f(x) \quad , \qquad (\ell-1)w \le x \le \ell w \\ y(x) = y_{\ell-1}(x) \quad , \quad (\ell-2)w \le x \le (\ell-1)w \quad (w>0) \end{aligned} \tag{2.17}$$

denkleminin elde edildiğini kabul edelim. Burada $y_{\ell-1}(x)$ fonksiyonu, $(\ell-1)$. adımda bulunan bir yaklaşık çözüm olup, $\ell w = a$ dır. $(\ell-1)w \le x \le a$ aralığında

$$y(x-w) = y_{\ell-1}(x-w) \ , \ y'(x-w) = y'_{\ell-1}(x-w) \ , \ y''(x-w) = y''_{\ell-1}(x-w)$$

olduklarından bunlar (2.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$h_{\ell-1}(x) = f(x) - k_1(x)y''_{\ell-1}(x-w) - k_2(x)y'_{\ell-1}(x-w) - k_3(x)y_{\ell-1}(x-w)$$

olmak üzere

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = h_{\ell-1}(x) \quad , \qquad (\ell-1)w \le x \le a \tag{2.18}$$

biçimine indirgenecektir.

$y_{\ell-1}(x)$ fonksiyonu $(\ell-2)w \le x \le (\ell-1)w$ aralığında Taylor çözümü olduğundan $x = (\ell-1)w$ noktasında (2.18) denkleminin

$$y((\ell-1)w) = y_{\ell-1}((\ell-1)w) \ , \ y'((\ell-1)w) = y'_{\ell-1}((\ell-1)w) \tag{2.19}$$

başlangıç koşulları elde edilir.

(2.18) denkleminde x' e göre n defa türev alınırsa,

$$\left[p(x)y''(x)\right]^{(n)}+\left[q(x)y'(x)\right]^{(n)}+\left[r(x)y(x)\right]^{(n)}=h_{\ell-1}^{(n)}(x)$$

elde edilir. Buradan fonksiyonların çarpımlarının türevleri ile ilgili olan Leibnitz kuralı uygulanıp gerekli sadeleşmeler yapıldıktan sonra sonuç denkleminde $x=c$; $((\ell-1)w\leq c\leq a)$ konulursa,

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left\{p^{(n-m)}(c)y^{(m+2)}(c)+q^{(n-m)}(c)y^{(m+1)}(c)+r^{(n-m)}(c)y^{(m)}(c)\right\}=h_{\ell-1}^{(n)}(c) \quad (2.20)$$

elde edilir. (2.20) sisteminin matris şekli yazılırsa,

$$\mathbf{W}_{\ell\text{-}\mathbf{1}}\mathbf{Y}=\mathbf{H}_{\ell\text{-}\mathbf{1}} \quad (2.21)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Y}=\left[y^{(0)}(c)\quad y^{(1)}(c)\quad \ldots\quad y^{(N)}(c)\right]^{\mathrm{T}}\\
&\mathbf{H}_{\ell\text{-}\mathbf{1}}=\left[h_{\ell-1}^{(0)}(c)\quad h_{\ell-1}^{(1)}(c)\quad \ldots\quad h_{\ell-1}^{(N)}(c)\right]^{\mathrm{T}}\\
&\mathbf{W}_{\ell\text{-}\mathbf{1}}=\left[\mathrm{w}_{\mathrm{nm}}\right]\quad ;\quad (n,m=0,1,\ldots,N)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

$\mathbf{W}_{\ell\text{-}\mathbf{1}}$ ' in elemanları (2.8)' deki gibi tanımlanır. (2.20) sisteminin arttırılmış katsayılar matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\ell\text{-}\mathbf{1}}=\left[\mathrm{w}_{\mathrm{nm}}\quad ;\quad \mathrm{h}_{\ell\text{-}1}^{(\mathrm{n})}(c)\right]\ ,\quad (\ell-1)\mathrm{w}\leq \mathrm{c}\leq \mathrm{a} \quad (2.22)$$

biçimindedir.

(2.18) denkleminin çözümü (2.2)' den $j=\ell$ yazılarak,

$$y_{\ell}(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^{n}\quad ,\quad (\ell-1)\mathrm{w}\leq \mathrm{c}\leq \mathrm{a} \quad (2.23)$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki $x = c$' de N. dereceden bir Taylor polinomu olup $y^{(n)}(c)$, $(n = 0,1,\ldots,N)$ bilinmeyen katsayılarını belirler. (2.23) çözümü ve onun türevleri aşağıdaki gibi matris denklemlerine denktir:

$$y_\ell(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{0!} & \dfrac{(x-c)}{1!} & \dfrac{(x-c)^2}{2!} & \ldots & \dfrac{(x-c)^N}{N!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

$$y'_\ell(x) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{0!} & \dfrac{(x-c)}{1!} & \ldots & \dfrac{(x-c)^{N-1}}{(N-1)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y}$$

Buradaki $\mathbf{Y}$, (2.7) denkleminde tanımlanmıştır. Bu matrisler kullanılarak $y_\ell((\ell-1)w)$ ve $y'_\ell((\ell-1)w)$ değerleri,

$$\begin{aligned} y_\ell((\ell-1)w) &= \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{h}{1!} & \dfrac{h^2}{2!} & \ldots & \dfrac{h^N}{N!} \end{bmatrix} \mathbf{Y} \\ y'_\ell((\ell-1)w) &= \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{0!} & \dfrac{h}{1!} & \ldots & \dfrac{h^{N-1}}{(N-1)!} \end{bmatrix} \mathbf{Y} \end{aligned} \tag{2.24}$$

biçiminde olurlar. Burada $h = (\ell-1)w - c$ dır.

(2.19) koşulu (2.24) değerlerinde yerine konulur ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa,

$$\mathbf{U}_{\ell-1}\mathbf{Y} = \left[y_{\ell-1}((\ell-1)w)\right] \text{ ve } \mathbf{V}_{\ell-1}\mathbf{Y} = \left[y'_{\ell-1}((\ell-1)w)\right]$$

veya daha açık formdaki arttırılmış matrisler,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}_{\ell-1} &= \left[u_0^{\ell-1} \quad u_1^{\ell-1} \quad \ldots \quad u_N^{\ell-1} \quad ; \quad y_{\ell-1}((\ell-1)w)\right] \\ \tilde{\mathbf{V}}_{\ell-1} &= \left[v_0^{\ell-1} \quad v_1^{\ell-1} \quad \ldots \quad v_N^{\ell-1} \quad ; \quad y'_{\ell-1}((\ell-1)w)\right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $u_j^{\ell-1}$ ve $v_j^{\ell-1}$, (2.24) matrisindeki h sayısına bağlıdır.

Sonuç olarak, (2.22) arttırılmış matrisinin son iki satırına, (2.25) sıra matrisleri yerine konulursa aşağıdaki

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{*}_{\ell-\mathbf{1}}=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & 0 & 0 & \dots & 0 & ; & h^{(0)}_{\ell-1}(c) \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & \dots & 0 & ; & h^{(1)}_{\ell-1}(c) \\ w_{20} & w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} & \dots & 0 & ; & h^{(2)}_{\ell-1}(c) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & & \dots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & w_{N-2,2} & w_{N-2,3} & w_{N-2,4} & \dots & w_{N-2,N} & ; & h^{(N-2)}_{\ell-1}(c) \\ u^{\ell-1}_{0} & u^{\ell-1}_{1} & u^{\ell-1}_{2} & u^{\ell-1}_{3} & u^{\ell-1}_{4} & \dots & u^{\ell-1}_{N} & ; & y_{\ell-1}((\ell-1)w) \\ v^{\ell-1}_{0} & v^{\ell-1}_{1} & v^{\ell-1}_{2} & v^{\ell-1}_{3} & v^{\ell-1}_{4} & \dots & v^{\ell-1}_{N} & ; & y'_{\ell-1}((\ell-1)w) \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.

Buradaki w_{nm} ve $h^{(n)}_{\ell-1}(c)$, $(n=0,1,2,\dots,N-2\ ;\ m=0,1,2,\dots,N)$ (2.7)’ de tanımlanmıştır. Eğer, $rank\mathbf{W}^{*}_{\ell-\mathbf{1}}=rank\widetilde{\mathbf{W}}^{*}_{\ell-\mathbf{1}}=N+1$ ise,

$$\mathbf{Y}=(\mathbf{W}^{*}_{\ell-\mathbf{1}})^{-1}\,\mathbf{H}^{*}_{\ell-\mathbf{1}} \tag{2.26}$$

yazılabilir. Burada

$$\widetilde{\mathbf{W}}^{*}_{\ell-\mathbf{1}}=\begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & w_{02} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ w_{N-2,0} & w_{N-2,1} & w_{N-2,2} & w_{N-2,3} & w_{N-2,4} & \dots & w_{N-2,N} \\ u^{\ell-1}_{0} & u^{\ell-1}_{1} & u^{\ell-1}_{2} & u^{\ell-1}_{3} & u^{\ell-1}_{4} & \dots & u^{\ell-1}_{N} \\ v^{\ell-1}_{0} & v^{\ell-1}_{1} & v^{\ell-1}_{2} & v^{\ell-1}_{3} & v^{\ell-1}_{4} & \dots & v^{\ell-1}_{N} \end{bmatrix},\quad \mathbf{H}^{*}_{\ell-\mathbf{1}}=\begin{bmatrix} h^{(0)}_{\ell-1}(c) \\ h^{(1)}_{\ell-1}(c) \\ \vdots \\ h^{(N-2)}_{\ell-1}(c) \\ y_{\ell-1}((\ell-1)w) \\ y'_{\ell-1}((\ell-1)w) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Böylece, $y^{(n)}(c)\ ;\ (\ell-1)w\le c\le a\ ;\ (n=0,1,\dots,N)$ katsayıları (2.26) koşulunda tek türlü belirlenir. Bundan dolayı $(\ell-1)w\le c\le a$ aralığında (2.18) diferansiyel denklemi ile (2.19) koşulları bir tek çözüme sahiptir. Bu çözüm,

$$y_{\ell}(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^{n}\qquad,\qquad (\ell-1)w\le x,c\le a$$

formundaki Taylor polinomu ile verilir.

Bu yaklaşık çözüm, $x = x_i \in \left[(\ell-1)w, a\right]$; $(i = 0,1,\ldots,m)$ değeri için (2.16)' daki ifadeye benzer şekilde sağlanmalıdır. Böylece $x = x_i \in \left[(\ell-1)w, a\right]$; $(i = 0,1,\ldots,m)$ için,

$$D(x_i) = \left| p(x_i)y''(x_i) + q(x_i)y'(x_i) + r(x_i)y(x_i) - h_{\ell-1}(x_i) \right| \cong 0$$

veya

$$D(x_i) \leq 10^{-k_i} \quad (k_i \text{ pozitif bir tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k}$ (k_i pozitif bir tamsayı) önceden belirlenmiş ise, x_i noktalarının her birindeki $D(x_i)$ farkı belirlenen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar N kesme sınırı yükseltilebilir (Yalçınbaş, S., 1998).

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. İkinci Meretebeden Neutral-Delay Diferansiyel Denklemlerle İlgili Uygulamalar

Örnek 3.1. İkinci mertebeden lineer

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) - y'(x-1) = e^x - e^{x-1} \quad ; \quad 1 \le x \le 3 \tag{3.1}$$

$$y(x) = e^x \quad ; \quad 0 \le x \le 1$$

delay diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.1) denkleminin yaklaşık çözümünü $N = 4, 6, 8$ için arayalım.

İlk olarak $N = 4$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x) = e^x$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1) = e^{x-1} \;\; ve \;\; y'(x-1) = e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.1) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) - e^{x-1} = e^x - e^{x-1}$$

veya

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) = e^x \tag{3.2}$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2 \text{ olup } \quad y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

dır. Buna göre,

$$P(x) = 1 \;\;,\;\; Q(x) = -x \;\;,\;\; R(x) = x \;\;,\;\; h_0(x) = e^x$$

olup, burada

$$P'(x)=0,\ P''(x)=0,\ P'''(x)=0,\ P^{(4)}(x)=0$$

$$Q'(x)=-1,\ Q''(x)=0,\ Q'''(x)=0,\ Q^{(4)}(x)=0$$

$$R'(x)=1\ ,\ R''(x)=0\ ,\ R'''(x)=0\ ,\ R^{(4)}(x)=0$$

$$h_0(x)=e^x\ ,\ h_0'(x)=e^x\ ,\ h_0''(x)=e^x\ ,\ h_0'''(x)=e^x\ ,\ h_0^{(4)}(x)=e^x$$

dır. Böylece, $N=4$ ve $c=\dfrac{3}{2}$ için (2.8)' deki w_{nm} , $(n,m=0,1,\dots,4)$ değerleri,

$$
\begin{aligned}
w_{00} &= \binom{0}{-2}P^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{-1}Q^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{0}R^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\\
w_{01} &= \binom{0}{-1}P^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{0}Q^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{1}R^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}\\
w_{02} &= \binom{0}{0}P^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{1}Q^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{0}{2}R^{(-2)}\left(\frac{3}{2}\right)=1\\
w_{03} &= w_{04}=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_{10} &= \binom{1}{-2}P^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{-1}Q^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{0}R^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)=1\\
w_{11} &= \binom{1}{-1}P^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{0}Q^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{1}R^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\\
w_{12} &= \binom{1}{0}P^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{1}Q^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{2}R^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}\\
w_{13} &= \binom{1}{1}P^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{2}Q^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{1}{3}R^{(-2)}\left(\frac{3}{2}\right)=1\\
w_{14} &= 0
\end{aligned}
$$

$$w_{20}=\binom{2}{-2}P^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{-1}Q^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{0}R^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{21}=\binom{2}{-1}P^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{0}Q^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{1}R^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)=2$$

$$w_{22}=\binom{2}{0}P^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{1}Q^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{2}R^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-1}{2}$$

$$w_{23}=\binom{2}{1}P^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{2}Q^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{3}R^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}$$

$$w_{24}=\binom{2}{2}P^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{3}Q^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{2}{4}R^{(-2)}\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

$$w_{30}=\binom{3}{-2}P^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{-1}Q^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{0}R^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{31}=\binom{3}{-1}P^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{0}Q^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{1}R^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{32}=\binom{3}{0}P^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{1}Q^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{2}R^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)=3$$

$$w_{33}=\binom{3}{1}P^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{2}Q^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{3}R^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}$$

$$w_{34}=\binom{3}{2}P^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{3}Q^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{3}{4}R^{(-1)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-3}{2}$$

$$w_{40}=\binom{4}{-2}P^{(6)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{-1}Q^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{0}R^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{41}=\binom{4}{-1}P^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{0}Q^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{1}R^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{42}=\binom{4}{0}P^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{1}Q^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{2}R^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$w_{43}=\binom{4}{1}P^{(3)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{2}Q^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{3}R^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)=4$$

$$w_{44}=\binom{4}{2}P^{(2)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{3}Q^{(1)}\left(\frac{3}{2}\right)+\binom{4}{4}R^{(0)}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{-5}{2}$$

olarak elde edilir. Böylece (2.7)’ deki $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \;,\; h_0'\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \;,\; h_0''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \;,\; h_0'''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \;,\; h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}$$

olup, (2.9)' deki $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & ; & e \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & ; & e \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

şeklindedir.

$$y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

olduğundan $N = 4$ ve $c = \frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} \end{bmatrix}$$

$$y_1'(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} \end{bmatrix}$$

olup, (2.12)' deki

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & e \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & e \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.3)' ün son iki satırının yerine tekrar yazılırsa (2.13)' deki $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & e \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & e \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4.4876 \\ 4.4996 \\ 4.4997 \\ 4.4938 \\ 4.4731 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (4.4876) + (4.4996)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4997)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &\quad + (1/6)(4.4938)\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4731)\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.1) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) - y_1'(x-1) = e^x - e^{x-1} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) &= (4.4876) + (4.4996)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4997)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &+ (1/6)(4.4938)\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4731)\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 \qquad ; \qquad 1 \le x \le 2 \end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.4)' te yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) + xy(x) &= e^x - e^{x-1} - 6.7497 + 4.4997x \\ &+ 2.2469\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 0.74552\left(x - \frac{5}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1 \le x - 1 \le 2 \Rightarrow 2 \le x \le 3$$

olup,

$$y_1(2) = 7.4051 \text{ ve } y_1'(2) = 7.4044$$

dır. Bu durumda, $N = 4$ ve $c = \frac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{5}{2}\right)=12.2\ ,\ h_1'\left(\frac{5}{2}\right)=12.201\ ,\ h_1''\left(\frac{5}{2}\right)=12.195,$$
$$h_1'''\left(\frac{5}{2}\right)=12.174\ ,\ h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right)=7.7008$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.2 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.201 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.195 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & ; & 12.174 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & ; & 7.7008 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

biçiminde elde edilir.

$$y_1(2)=7.4051 \text{ ve } y_1'(2)=7.4044$$

olduğundan $N=4$ ve $c=\frac{5}{2}$ için,

$$y_2(2)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384}\end{bmatrix}$$
$$y_2'(2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 7.4051\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 7.4044\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.5)' in son iki satırının yerine tekrar yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.2 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.201 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.195 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 7.4051 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 7.4044 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 12.229 & 12.279 & 12.325 & 12.364 & 12.385 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\mathrm{y}_2(x) = (12.229) + (12.279)\left(x - \frac{5}{2}\right) + (1/2)(12.325)\left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$
$$+ (1/6)(12.364)\left(x - \frac{5}{2}\right)^3 + (1/24)(12.385)\left(x - \frac{5}{2}\right)^4$$

olarak elde edilir.

$N = 4$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.1.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.1. $N = 4$ için Örnek 3.1.' in Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	9.3618×10^{-2}		2	7.4048	3.0295×10^{-1}
1.2	3.3215	2.0387×10^{-2}		2.2	9.0485	6.1793×10^{-2}
1.4	4.0594	7.621×10^{-4}		2.4	11.061	1.5322×10^{-3}
1.6	4.9608	7.2038×10^{-4}		2.6	13.521	2.733×10^{-3}
1.8	6.0617	1.8809×10^{-2}		2.8	16.527	4.7542×10^{-2}
2	7.4051	8.1756×10^{-2}		3	20.199	1.8386×10^{-1}

Şimdi $N=6$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=e^{x}$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1)=e^{x-1} \quad \text{ve} \quad y'(x-1)=e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.1) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)-xy'(x)+xy(x)=e^{x} \tag{3.6}$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

olup,

$$y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\dfrac{3}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},\ h_0'\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},\ h_0''\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},$$
$$h_0'''\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},\ h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},$$
$$h_0^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}},\ h_0^{(6)}\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}}$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-9}{2} & ; & e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

olduğundan $N=6$ ve $c=\frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080}\end{bmatrix}$$
$$y_1'(1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \left[1 \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{-1}{48} \quad \frac{1}{384} \quad \frac{-1}{3840} \quad \frac{1}{46080} \quad ; \quad e\right]$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \left[0 \quad 1 \quad \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{-1}{48} \quad \frac{1}{384} \quad \frac{-1}{3840} \quad ; \quad e\right]$$

matrisleri (3.7)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*} = \left[\begin{array}{ccccccccc}
\frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & e \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & e
\end{array}\right]$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}4.4817 & 4.4818 & 4.4818 & 4.4818 & 4.4816 & 4.4812 & 4.4804\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

bulunur.Buradan

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x) = {} & (4.4817) + (4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (1/6)(4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 \\
& + (1/24)(4.4816)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 + (1/120)(4.4812)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5 + (1/720)(4.4804)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6
\end{aligned}$$

formunda elde edilir.

2. adım: (3.1) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) - y_1'(x-1) = e^x - e^{x-1} \tag{3.8}$$

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= (4.4817) + (4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \\
&\quad + (1/6)(4.4818)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4816)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 \\
&\quad + (1/120)(4.4812)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5 + (1/720)(4.4804)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6 \qquad ; \qquad 1 \le x \le 2
\end{aligned}
$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.8)'de yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
y''(x) - xy'(x) + xy(x) = e^x - 1.0e^{x-1.0} &- 6.7228 + 4.4818x \\
&+ 2.2409(x-2.5)^2 + 0.74693(x-2.5)^3 \\
&+ 0.18672(x-2.5)^4 + 3.7337\times 10^{-2}(x-2.5)^5
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1 \le x-1 \le 2 \Rightarrow 2 \le x \le 3 \text{ olup } y_1(2) = 7.3892 \text{ ve } y_1'(2) = 7.3892$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\frac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$
\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix}
\frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-7}{2}
\end{bmatrix}
$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{5}{2}\right)=12.183,\ h_1'\left(\frac{5}{2}\right)=12.183,\ h_1''\left(\frac{5}{2}\right)=12.183,$$
$$h_1'''\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,$$
$$h_1^{(5)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.181,\ h_1^{(6)}\left(\frac{5}{2}\right)=7.7008$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & ; & 12.181 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-7}{2} & ; & 7.7008 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

biçiminde elde edilir.

$$y_1(2)=7.3892 \text{ ve } y_1'(2)=7.3892$$

olduğundan $N=6$ ve $c=\frac{5}{2}$ için,

$$y_2(2)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080}\end{bmatrix}$$
$$y_2'(2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 7.3892 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 7.3892 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.9)'un son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.183 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.182 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 7.3892 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 7.3892 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 12.183 \\ 12.183 \\ 12.184 \\ 12.184 \\ 12.184 \\ 12.183 \\ 12.18 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\mathrm{y}_2(x) = (12.183) + (12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right) + (1/2)(12.184)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (1/6)(12.184)\left(x-\frac{5}{2}\right)^3$$
$$+ (1/24)(12.184)\left(x-\frac{5}{2}\right)^4 + (1/120)(12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right)^5 + (1/720)(12.18)\left(x-\frac{5}{2}\right)^6$$

olarak elde edilir.

$N = 6$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.2.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.2. $N = 6$ için Örnek 3.1.' in Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	1.1729×10^{-3}		2	7.3892	3.5424×10^{-3}
1.2	3.3201	9.1792×10^{-5}		2.2	9.0252	2.6611×10^{-4}
1.4	4.0552	3.73×10^{-7}		2.4	11.024	1.044×10^{-6}
1.6	4.9531	3.72×10^{-7}		2.6	13.464	9.81×10^{-7}
1.8	6.0498	8.7266×10^{-5}		2.8	16.445	2.2001×10^{-4}
2	7.3892	1.0764×10^{-3}		3	20.086	2.5557×10^{-3}

Son olarak $N = 8$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x) = e^x$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1) = e^{x-1} \quad ve \quad y'(x-1) = e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.1) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x) - xy'(x) + xy(x) = e^x \tag{3.10}$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

olup,

$$y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

dır. Bu durumda, $N = 8$ ve $c = \dfrac{3}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$
\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix}
\frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-9}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{-11}{2} & \frac{-3}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{-13}{2}
\end{bmatrix}
$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$
\begin{gathered}
h_0\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ h_0'\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ h_0''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}, \\
h_0'''\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ h_0^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}, \\
h_0^{(6)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ \ h_0^{(7)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}},\ \ h_0^{(8)}\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}}
\end{gathered}
$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-9}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{-11}{2} & \frac{-3}{2} & ; & e^{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{-13}{2} & ; & e^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

biçiminde elde edilir.

$$y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

olduğundan $N = 8$ ve $c = \frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & e \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & e \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.11)' in son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix}
\frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 3 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & 0 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-9}{2} & \frac{-3}{2} & 1 & ; & e^{\frac{3}{2}} \\
1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & e \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & e
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. O halde, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817 & 4.4817\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x) &= (4.4817)+(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)+(1/2)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \\
&+(1/6)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+(1/24)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 \\
&+(1/120)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5+(1/720)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6 \\
&+(1/7!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^7+(1/8!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^8
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

2. adım: (3.1) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)-xy'(x)+xy(x)-y_1'(x-1)=e^{x}-e^{x-1} \tag{3.12}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x) = (4.4817) &+ (4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right) + (1/2)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \\
&+ (1/6)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 \\
&+ (1/120)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5 + (1/720)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6 \\
&+ (1/7!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^7 + (1/8!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^8 \quad ; \quad 1 \le x \le 2
\end{aligned}
$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.12)' de yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
y''(x) - xy'(x) + xy(x) = e^x - 1.0e^{x-1.0} &- 6.7225 + 4.4817x \\
&+ 2.2408(x-2.5)^2 + 0.74695(x-2.5)^3 \\
&+ 0.18674(x-2.5)^4 + 3.7347\times10^{-2}(x-2.5)^5 \\
&+ 6.2245\times10^{-3}(x-2.5)^6 + 8.8922\times10^{-4}(x-2.5)^7
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1 \le x-1 \le 2 \Rightarrow 2 \le x \le 3$$

olup,

$$y_1(2) = 7.3891 \text{ ve } y_1'(2) = 7.3891$$

dır. Bu durumda, $N=8$ ve $c=\frac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W}_1$ matrisi,

$$\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{-9}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{-11}{2} \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1'\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1''\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,$$
$$h_1'''\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,$$
$$h_1^{(5)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1^{(6)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,$$
$$h_1^{(7)}\left(\frac{5}{2}\right)=12.182,\ h_1^{(8)}\left(\frac{5}{2}\right)=7.7008$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182\\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182\\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182\\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.182\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.182\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.182\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{-9}{2} & \frac{-5}{2} & ; & 7.3891\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{-11}{2} & ; & 7.3891\end{bmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilir.

$$y_1(2)=7.3891 \text{ ve } y_1'(2)=7.3891$$

olduğundan $N=8$ ve $c=\frac{5}{2}$ için,

$$y_2(2)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920}\end{bmatrix}$$

$$y_2'(2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 7.3891\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 7.3891\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.13)' ün son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{-3}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{-5}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & 0 & ; & 12.182 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{-7}{2} & \frac{-5}{2} & 1 & ; & 12.182 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 7.3891 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 7.3891 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 & 12.182 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_2(x) = {} & (12.182) + (12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right) + (1/2)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \\ & + (1/6)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^3 + (1/24)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^4 \\ & + (1/120)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^5 + (1/720)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^6 \\ & + (1/7!)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^7 + (1/8!)(12.182)\left(x - \frac{5}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

formunda elde edilir.

$N = 8$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.3.’ de verilmiştir.

Çizelge 3.1.3. $N = 8$ için Örnek 3.1.' in Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	6.971×10^{-6}		2	7.3891	2.0535×10^{-5}
1.2	3.3201	1.96×10^{-7}		2.2	9.025	5.72×10^{-7}
1.4	4.0552	3.0×10^{-9}		2.4	11.023	3.0×10^{-9}
1.6	4.953	3.0×10^{-9}		2.6	13.464	2.7×10^{-8}
1.8	6.0496	1.97×10^{-7}		2.8	16.445	4.8×10^{-7}
2	7.3891	6.541×10^{-6}		3	20.086	1.6121×10^{-5}

Örnek 3.2. İkinci mertebeden lineer

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) - y''(x-\pi) - y(x-\pi) = x\sin x \ ; \quad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \tag{3.14}$$

$$y(x) = \cos x \quad ; \quad \frac{-3\pi}{2} \le x \le \frac{-\pi}{2}$$

neutral diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.14) denkleminin yaklaşık çözümünü $N = 4,6,8$ için arayalım.

İlk olarak $N = 4$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x) = \cos x$ denkleminde x yerine ($x-\pi$) yazılırsa,

$$y(x-\pi) = -\cos x \ , \ y'(x-\pi) = \sin x \quad ve \quad y''(x-\pi) = \cos x$$

olup bunlar (3.14) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sin x \tag{3.15}$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{-3\pi}{2} \le x-\pi \le \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ olup } \quad y\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \text{ ve } y'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$$

dır. Bu durumda, $N = 4$ ve $c = 0$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0(0) = 0\ ,\ h_0'(0) = 0\ ,\ h_0''(0) = 2,$$
$$h_0'''(0) = 0\ ,\ h_0^{(4)}(0) = -4$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & ; & -4 \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

biçiminde elde edilir.

$$y\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \text{ ve } y'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$$

olduğundan $N = 4$ ve $c = 0$ için,

$$y_1\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} \end{bmatrix}$$
$$y_1'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\pi}{2} & \dfrac{\pi^2}{8} & \dfrac{-\pi^3}{48} & \dfrac{\pi^4}{384} & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dfrac{-\pi}{2} & \dfrac{\pi^2}{8} & \dfrac{-\pi^3}{48} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.16)' nın son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & ; & 2 \\ 1 & \dfrac{-\pi}{2} & \dfrac{\pi^2}{8} & \dfrac{-\pi^3}{48} & \dfrac{\pi^4}{384} & ; & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{-\pi}{2} & \dfrac{\pi^2}{8} & \dfrac{-\pi^3}{48} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1.0328 & 2.5485\times10^{-3} & -1.0328 & 0 & 9.6724\times10^{-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

olup,

$$\mathrm{y}_1(x) = (1.0328) + (2.5485\times10^{-3})x - (1/2)(1.0328)x^2 + (1/24)(9.6724\times10^{-1})x^4$$

şeklinde elde edilir.

2. adım: (3.14) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) - y_1''(x-\pi) - y_1(x-\pi) = x\sin x \qquad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) = {} & (1.0328) + (2.5485\times10^{-3})x - (1/2)(1.0328)x^2 \\ & + (1/24)(9.6724\times10^{-1})x^4 \qquad ; \qquad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-\pi)$ yazılırsa, $y_1(x-\pi)$ ve $y_1''(x-\pi)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.17)' de yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sin x &- 3.278\times 10^{-2}(x-\pi)^2 \\
&+ 2.5485\times 10^{-3}x - 2.5485\times 10^{-3}\pi \\
&+ 4.0302\times 10^{-2}(x-\pi)^4
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$\frac{-\pi}{2} \le x-\pi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \text{ olup } y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7.9965\times 10^{-3} \text{ ve}$$

$$y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -9.9497\times 10^{-1}$$

dır. Bu durumda, $N=4$ ve $c=\pi$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$
\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix}
1 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\pi & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -\pi & 1 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -\pi \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{bmatrix}
$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&h_1(\pi) = 0 \,,\; h_1'(\pi) = -3.139 \,,\; h_1''(\pi) = -2.0656, \\
&h_1'''(\pi) = 3.1416 \,,\; h_1^{(4)}(\pi) = 4.9672
\end{aligned}
$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \left[\begin{array}{ccccccc}
1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & ; & -3.139 \\
0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & ; & -2.0656 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & ; & 3.1416 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & ; & 4.9672
\end{array}\right] \tag{3.18}
$$

biçiminde elde edilir.

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7.9965\times 10^{-3} \text{ ve } y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -9.9497\times 10^{-1}$$

olduğundan $N=4$ ve $c=\pi$ için,

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384}\end{bmatrix}$$
$$y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & ; & 7.9965\times10^{-3}\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & ; & -9.9497\times10^{-1}\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.18)' in son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^*=\begin{bmatrix}1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & 0\\ 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & ; & -3.139\\ 0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & ; & -2.0656\\ 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & ; & 7.9965\times10^{-3}\\ 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & ; & -9.9497\times10^{-1}\end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}-9.8761\times10^{-1} & 1.2225\times10^{-2} & 1.026 & 8.4307\times10^{-2} & -7.7473\times10^{-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_2(x)&=(-9.8761\times10^{-1})+(1.2225\times10^{-2})(x-\pi)+(1/2)(1.026)(x-\pi)^2\\&+(1/6)(8.4307\times10^{-2})(x-\pi)^3-(1/24)(7.7473\times10^{-1})(x-\pi)^4\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$N=4$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.4.' te verilmiştir.

Çizelge 3.1.4. $N = 4$ için Örnek 3.2.' nin Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
$-\pi/2$	-9.808×10^{-6}	1.6058×10^{-1}		$\pi/2$	7.9791×10^{-3}	2.2263×10^{-1}
$-\pi/4$	7.2759×10^{-1}	1.5497×10^{-2}		$3\pi/4$	6.9986×10^{-1}	2.2987×10^{-2}
0	1.0328	0		π	9.8761×10^{-1}	1.597×10^{-5}
$\pi/4$	7.316×10^{-1}	1.5497×10^{-2}		$5\pi/4$	6.6704×10^{-1}	1.0299×10^{-1}
$\pi/2$	7.9965×10^{-3}	1.6058×10^{-1}		$3\pi/2$	1.553×10^{-1}	8.8224×10^{-1}

Şimdi $N = 6$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x) = \cos x$ denkleminde x yerine ($x - \pi$) yazılırsa,

$$y(x-\pi) = -\cos x \ , \ y'(x-\pi) = \sin x \quad ve \quad y''(x-\pi) = \cos x$$

olup, bunlar (3.14) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sin x \tag{3.19}$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{-3\pi}{2} \le x - \pi \le \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

olup,

$$y\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \text{ ve } y'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$$

dır. Bu durumda, $N = 6$ ve $c = 0$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0(0) = 0 \ , \ h_0'(0) = 0 \ , \ h_0''(0) = 2 \ , \ h_0'''(0) = 0,$$
$$h_0^{(4)}(0) = -4 \ , \ h_0^{(5)}(0) = 0 \ , \ h_0^{(6)}(0) = 6$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & ; & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & ; & 6 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

biçiminde elde edilir.

$$y\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 0 \text{ ve } y'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 1$$

olduğundan $N = 6$ ve $c = 0$ için,

$$y_1\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} \end{bmatrix}$$
$$y_1'\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & ; & 0\end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & ; & 1\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.20)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^*=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & 2\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & ; & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & ; & -4\\ 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & ; & 0\\ 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & ; & 1\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^*)^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^*$ olduğundan

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}9.9812\times10^{-1} & 8.6\times10^{-5} & -9.9812\times10^{-1} & 0 & 1.0019 & 0 & -9.9442\times10^{-1}\end{bmatrix}^T$$

olup,

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_1(x)&=(9.9812\times10^{-1})+(8.6\times10^{-5})x-(1/2)(9.9812\times10^{-1})x^2\\&+(1/24)(1.0019)x^4-(1/720)(9.9442\times10^{-1})x^6\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.14) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)-xy'(x)+y(x)-y_1''(x-\pi)-y_1(x-\pi)=x\sin x \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_1(x)&=(9.9812\times10^{-1})+(8.6\times10^{-5})x-(1/2)(9.9812\times10^{-1})x^2\\&+(1/24)(1.0019)x^4-(1/720)(9.9442\times10^{-1})x^6 \quad ; \quad \frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-\pi)$ yazılırsa, $y_1(x-\pi)$ ve $y_1'(x-\pi)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.21)' de yerine yazıldığında,

$$y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\sin x+1.89\times10^{-4}(x-\pi)^2+3.1167\times10^{-4}(x-\pi)^4$$
$$+8.6\times10^{-5}x-8.6\times10^{-5}\pi-1.3811\times10^{-3}(x-\pi)^6$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$\frac{-\pi}{2}\le x-\pi\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\ \text{olup}\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.7831\times10^{-4}\ \text{ve}$$

$$y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-9.9981\times10^{-1}$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\pi$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix}1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\pi\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1(\pi)=0\ ,\ h_1'(\pi)=-3.1415\ ,\ h_1''(\pi)=-1.9962\ ,\ h_1'''(\pi)=3.1416,$$
$$h_1^{(4)}(\pi)=4.0075\ ,\ h_1^{(5)}(\pi)=-3.1416\ ,\ h_1^{(6)}(\pi)=-6.9944$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{1}}=\begin{bmatrix}
1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0\\
0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -3.1415\\
0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & -1.9962\\
0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0 & ; & 3.1416\\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1 & ; & 4.0075\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\pi & ; & -3.1416\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & ; & -6.9944
\end{bmatrix} \tag{3.22}
$$

şeklinde elde edilir.

$$
y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.7831\times10^{-4} \text{ ve } y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-9.9981\times10^{-1}
$$

olduğundan $N=6$ ve $c=\pi$ için,

$$
\begin{aligned}
y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080}\end{bmatrix}\\
y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)&=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{1}}&=\begin{bmatrix}1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & ; & 2.7831\times10^{-4}\end{bmatrix}\\
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}}&=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & ; & -9.9981\times10^{-1}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

matrisleri (3.22)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{1}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & -3.1415 \\ 0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & -1.9962 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0 & ; & 3.1416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1 & ; & 4.0075 \\ 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & ; & 2.7831\times10^{-4} \\ 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & ; & -9.9981\times10^{-1} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -9.9967\times10^{-1} \\ -2.9966\times10^{-4} \\ 9.9873\times10^{-1} \\ -3.8647\times10^{-3} \\ -1.0097 \\ -3.8047\times10^{-2} \\ 8.5775\times10^{-1} \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned} y_2(x) = {} & (-9.9967\times10^{-1}) - (2.9966\times10^{-4})(x-\pi) + (1/2)(9.9873\times10^{-1})(x-\pi)^2 \\ & - (1/6)(3.8647\times10^{-3})(x-\pi)^3 - (1/24)(1.0097)(x-\pi)^4 \\ & - (1/120)(3.8047\times10^{-2})(x-\pi)^5 + (1/720)(8.5775\times10^{-1})(x-\pi)^6 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$N=6$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.5.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.5. $N=6$ için Örnek 3.2.' nin Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
$-\pi/2$	8.1361×10^{-6}	1.4344×10^{-2}		$\pi/2$	2.2853×10^{-4}	1.529×10^{-2}
$-\pi/4$	7.0577×10^{-1}	3.0234×10^{-4}		$3\pi/4$	-7.0672×10^{-1}	6.0503×10^{-4}
0	9.9812×10^{-1}	0		π	-9.9967×10^{-1}	1.4097×10^{-6}
$\pi/4$	7.059×10^{-1}	3.0234×10^{-4}		$5\pi/4$	-7.0801×10^{-1}	2.2376×10^{-3}
$\pi/2$	2.7831×10^{-4}	1.4344×10^{-2}		$3\pi/2$	-1.177×10^{-2}	8.2668×10^{-2}

Son olarak $N=8$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=\cos x$ denkleminde x yerine ($x-\pi$) yazılırsa,

$$y(x-\pi)=-\cos x \ , \ y'(x-\pi)=\sin x \quad ve \quad y''(x-\pi)=\cos x$$

olup, bunlar (3.14) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)-xy'(x)+y(x)=x\sin x \tag{3.23}$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{-3\pi}{2}\le x-\pi\le\frac{-\pi}{2}\Rightarrow\frac{-\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2} \text{ olup } \quad y\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0 \text{ ve } y'\left(\frac{-\pi}{2}\right)=1$$

dır. Bu durumda, $N=8$ ve $c=0$ olmak üzere $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0(0)=0\ ,\ h_0'(0)=0\ ,\ h_0''(0)=2\ ,\ h_0'''(0)=0\ ,\ h_0^{(4)}(0)=-4,$$
$$h_0^{(5)}(0)=0\ ,\ h_0^{(6)}(0)=6\ ,\ h_0^{(7)}(0)=0\ ,\ h_0^{(8)}(0)=-8$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0&0&;&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&;&0\\0&0&-1&0&1&0&0&0&0&;&2\\0&0&0&-2&0&1&0&0&0&;&0\\0&0&0&0&-3&0&1&0&0&;&-4\\0&0&0&0&0&-4&0&1&0&;&0\\0&0&0&0&0&0&-5&0&1&;&6\\0&0&0&0&0&0&0&-6&0&;&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&-7&;&-8\end{bmatrix}\tag{3.24}$$

biçiminde elde edilir.

$$y\left(\frac{-\pi}{2}\right)=0\ \text{ve}\ y'\left(\frac{-\pi}{2}\right)=1$$

olduğundan $N=8$ ve $c=0$ için,

$$y_1\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}1&\frac{-\pi}{2}&\frac{\pi^2}{8}&\frac{-\pi^3}{48}&\frac{\pi^4}{384}&\frac{-\pi^5}{3840}&\frac{\pi^6}{46080}&\frac{-\pi^7}{645120}&\frac{\pi^8}{10321920}\end{bmatrix}$$
$$y_1'\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}0&1&\frac{-\pi}{2}&\frac{\pi^2}{8}&\frac{-\pi^3}{48}&\frac{\pi^4}{384}&\frac{-\pi^5}{3840}&\frac{\pi^6}{46080}&\frac{-\pi^7}{645120}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}1&\frac{-\pi}{2}&\frac{\pi^2}{8}&\frac{-\pi^3}{48}&\frac{\pi^4}{384}&\frac{-\pi^5}{3840}&\frac{\pi^6}{46080}&\frac{-\pi^7}{645120}&\frac{\pi^8}{10321920}&;&0\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}0&1&\frac{-\pi}{2}&\frac{\pi^2}{8}&\frac{-\pi^3}{48}&\frac{\pi^4}{384}&\frac{-\pi^5}{3840}&\frac{\pi^6}{46080}&\frac{-\pi^7}{645120}&;&1\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.24)' ün son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & ; & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 1 & ; & 6 \\ 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^{2}}{8} & \frac{-\pi^{3}}{48} & \frac{\pi^{4}}{384} & \frac{-\pi^{5}}{3840} & \frac{\pi^{6}}{46080} & \frac{-\pi^{7}}{645120} & \frac{\pi^{8}}{10321920} & ; & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^{2}}{8} & \frac{-\pi^{3}}{48} & \frac{\pi^{4}}{384} & \frac{-\pi^{5}}{3840} & \frac{\pi^{6}}{46080} & \frac{-\pi^{7}}{645120} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} 1.0001 \\ -1.3576\times10^{-5} \\ -1.0001 \\ 0 \\ 9.9993\times10^{-1} \\ 0 \\ -1.0002 \\ 0 \\ 9.989\times10^{-1} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_{1}(x) &= (1.0001)\text{ - }(1.3576\times10^{-5})x\text{ - }(1/2)(1.0001)x^{2} \\ &+(1/24)(9.9993\times10^{-1})x^{4}\text{ - }(1/720)(1.0002)x^{6}+(1/8!)(9.989\times10^{-1})x^{8} \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

2. adım: (3.14) denkleminde $y_{1}(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)-xy'(x)+y(x)-y_{1}''(x-\pi)-y_{1}(x-\pi)=x\sin x \qquad (3.25)$$

$$\mathrm{y}_1(x) = (1.0001) - (1.3576\times10^{-5})x - (1/2)(1.0001)x^2 + (1/24)(9.9993\times10^{-1})x^4$$
$$- (1/720)(1.0002)x^6 + (1/8!)(9.989\times10^{-1})x^8 \qquad ; \qquad \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-\pi)$ yazılırsa, $y_1(x-\pi)$ ve $y_1'(x-\pi)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.25)' de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sin x &- 8.5\times10^{-5}(x-\pi)^2 - 1.125\times10^{-5}(x-\pi)^4 \\ &- 1.8056\times10^{-6}(x-\pi)^6 - 1.3576\times10^{-5}x \\ &+ 1.3576\times10^{-5}\pi + 2.4774\times10^{-5}(x-\pi)^8 \end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$\frac{-\pi}{2} \le x - \pi \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$$

olup,

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4.2899\times10^{-5} \text{ ve } y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.0001$$

dır. Bu durumda, $N = 8$ ve $c = \pi$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\pi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1(\pi)=0\ ,\ h_1'(\pi)=-3.1416\ ,\ h_1''(\pi)=-2.0002\ ,\ h_1'''(\pi)=3.1416\ ,$$
$$h_1^{(4)}(\pi)=3.9997\ ,\ h_1^{(5)}(\pi)=-3.1416\ ,\ h_1^{(6)}(\pi)=-6.0013\ ,$$
$$h_1^{(7)}(\pi)=3.1416\ ,\ h_1^{(8)}(\pi)=8.9989$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1=\begin{bmatrix} 1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -3.1416 \\ 0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -2.0002 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 3.1416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & 3.9997 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\pi & 1 & 0 & ; & -3.1416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\pi & 1 & ; & -6.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -\pi & ; & 3.1416 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & ; & 8.9989 \end{bmatrix} \qquad (3.26)$$

şeklinde elde edilir.

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=-4.2899\times10^{-5}\ \text{ve}\ y_1'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1.0001$$

olduğundan $N=8$ ve $c=\pi$ için,

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} & \frac{\pi^8}{10321920} \end{bmatrix}$$
$$y_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} & \frac{\pi^8}{10321920} & ; & \begin{matrix}-4.2899\\ \times10^{-5}\end{matrix} \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} & ; & -1.0001 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.26)' nın son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix}
1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\
0 & 0 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -3.1416 \\
0 & 0 & -1 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -2.0002 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -\pi & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 3.1416 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -\pi & 1 & 0 & 0 & ; & 3.9997 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\pi & 1 & 0 & ; & -3.1416 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -\pi & 1 & ; & -6.0013 \\
1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} & \frac{\pi^8}{10321920} & ; & -4.2899\times 10^{-5} \\
0 & 1 & \frac{-\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{-\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{-\pi^5}{3840} & \frac{\pi^6}{46080} & \frac{-\pi^7}{645120} & ; & -1.0001
\end{bmatrix}
$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$
\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}
-1.0001 \\
-2.0093\times 10^{-6} \\
1.0001 \\
2.2273\times 10^{-4} \\
-9.9945\times 10^{-1} \\
2.1233\times 10^{-3} \\
1.0068 \\
3.2293\times 10^{-2} \\
-8.5951\times 10^{-1}
\end{bmatrix}
$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}_2(x) = {} & (-1.0001) - (2.0093\times 10^{-6})(x-\pi) + (1/2)(1.0001)(x-\pi)^2 + (1/6)(2.2273\times 10^{-4})(x-\pi)^3 \\
& - (1/24)(9.9945\times 10^{-1})(x-\pi)^4 + (1/120)(2.1233\times 10^{-3})(x-\pi)^5 \\
& + (1/720)(1.0068)(x-\pi)^6 + (1/7!)(3.2293\times 10^{-2})(x-\pi)^7 - (1/8!)(8.5951\times 10^{-1})(x-\pi)^8
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$N = 8$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.6.' da verilmiştir.

Çizelge 3.1.6. $N=8$ için Örnek 3.2.' nin Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
$-\pi/2$	-2.4919×10^{-7}	7.1735×10^{-4}		$\pi/2$	-5.1949×10^{-5}	3.3114×10^{-4}
$-\pi/4$	7.0719×10^{-1}	1.2753×10^{-5}		$3\pi/4$	-7.0719×10^{-1}	3.4867×10^{-5}
0	1.0001	0		π	-1.0001	6.3124×10^{-6}
$\pi/4$	7.0716×10^{-1}	1.2753×10^{-5}		$5\pi/4$	-7.0714×10^{-1}	1.2787×10^{-4}
$\pi/2$	-4.2899×10^{-5}	7.1735×10^{-4}		$3\pi/2$	8.7029×10^{-4}	5.2131×10^{-3}

Örnek 3.3. İkinci mertebeden lineer

$$\begin{aligned} y''(x)+xy'(x)+xy(x)+(x+3)y''(x-1)& \\ -y'(x-1)-y(x-1)=x^2 &\quad ; \quad -1\le x\le 1 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$y(x)=x+1 \quad ; \quad -2\le x\le -1$$

neutral diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.27) denkleminin yaklaşık çözümünü $N=4,6,8$ için arayalım.

İlk olarak $N=4$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=x+1$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1)=x \ , \ y'(x-1)=1 \ \text{ve} \ y''(x-1)=0$$

olup, bunlar (3.27) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=x^2+x+1 \tag{3.28}$$

olur. Ayrıca,

$$-2\le x-1\le -1 \Rightarrow -1\le x\le 0 \ \text{olup}, \quad y(-1)=0 \ \text{ve} \ y'(-1)=1$$

dır. Bu durumda, $N=4$ ve $c=\dfrac{-1}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{4} \;,\; h_0'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0 \;,\; h_0''\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \;,\; h_0'''\left(\frac{-1}{2}\right) = 0 \;,\; h_0^{(4)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & ; & 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(-1) = 0 \text{ ve } y'(-1) = 1$$

olduğundan $N = 4$ ve $c = \frac{-1}{2}$ için,

$$y_1(-1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.29)' un son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 2 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 7.5359\times10^{-1} & 2.0441 & 2.1489 & -7.0122\times10^{-1} & -5.6621 \end{bmatrix}^{T}$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) &= (7.5359\times10^{-1}) + (2.0441)\left(x+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)(2.1489)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &- \left(\frac{1}{6}\right)(7.0122\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{24}\right)(5.6621)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.27) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x) + xy'(x) + xy(x) + (x+3)y_1''(x-1) - y_1'(x-1) - y_1(x-1) = x^2 \qquad (3.30)$$

$$\mathrm{y}_1(x)=(7.5359\times10^{-1})+(2.0441)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)(2.1489)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{1}{6}\right)(7.0122\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{24}\right)(5.6621)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 \quad ; \quad -1\leq x\leq 0$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$, $y_1'(x-1)$ ve $y_1''(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.30)' da yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}y''(x)+xy'(x)+xy(x)=x^2-(x+3)&\left(2.4995-0.70122x-2.8311(x-(0.5))^2\right)\\&+0.70119+4.193x+0.72384\left(x-(0.5)\right)^2\\&-1.0606\left(x-(0.5)\right)^3-0.23592\left(x-(0.5)\right)^4\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$-1\leq x-1\leq 0\Rightarrow 0\leq x\leq 1 \text{ olup } y_1(0)=2.0149 \text{ ve}$$
$$y_1'(0)=2.9129$$

dır. Bu durumda, $N=4$ ve $c=\frac{1}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0\\1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&2&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&1\\0&0&3&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&4&\frac{9}{2}\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right)=-4.4734,\ h_1'\left(\frac{1}{2}\right)=5.4984,\ h_1''\left(\frac{1}{2}\right)=24.668,$$
$$h_1'''\left(\frac{1}{2}\right)=10.623,\ h_1^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)=-5.6621$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_{1}=\begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & -4.4734 \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & 5.4984 \\
0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & 24.668 \\
0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & ; & 10.623 \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & ; & -5.6621
\end{bmatrix} \tag{3.31}
$$

biçiminde elde edilir.

$$
y_1(0)=2.0149 \text{ ve } y_1'(0)=2.9129
$$

olduğundan $N=4$ ve $c=\frac{1}{2}$ için,

$$
\begin{aligned}
y_2(0)&=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} \end{bmatrix} \\
y_2'(0)&=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olup,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{U}}_{1}&=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 2.0149 \end{bmatrix} \\
\widetilde{\mathbf{V}}_{1}&=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 2.9129 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

matrisleri (3.31)’ in son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{1}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & -4.4734 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & 5.4984 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & 24.668 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 2.0149 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 2.9129 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1.3857 & -2.469 & -3.9318 & 9.782 & 34.544 \end{bmatrix}^T$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned} y_2(x) = (1.3857) - (2.469)\left(x - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)(3.9318)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \\ + \left(\frac{1}{6}\right)(9.782)\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{24}\right)(34.544)\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$N = 4$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.7.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.7. $N = 4$ için Örnek 3.3.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
-1	0	0.2083		0	2.0149	0.25343
-0.8	0.2383	4.0922×10^{-2}		0.2	2.5006	1.8029×10^{-2}
-0.6	0.56001	1.346×10^{-3}		0.4	2.7544	8.1367×10^{-4}
-0.4	0.9686	1.1575×10^{-3}		0.6	2.7625	2.4168×10^{-3}
-0.2	1.4585	2.5652×10^{-2}		0.8	2.57	0.11182
0	2.0149	9.0477×10^{-2}		1	2.2799	0.74851

Şimdi $N=6$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=x+1$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1)=x \ , \ y'(x-1)=1 \text{ ve } y''(x-1)=0$$

olup, bunlar (3.27) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=x^2+x+1 \tag{3.32}$$

olur. Ayrıca,

$$-2\le x-1\le -1 \Rightarrow -1\le x\le 0 \text{ olup } \quad y(-1)=0 \text{ ve } y'(-1)=1$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\dfrac{-1}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{3}{4} \ , \ h_0'\left(\frac{-1}{2}\right)=0 \ , \ h_0''\left(\frac{-1}{2}\right)=2 \ , \ h_0'''\left(\frac{-1}{2}\right)=0,$$
$$h_0^{(4)}\left(\frac{-1}{2}\right)=0 \ , \ h_0^{(5)}\left(\frac{-1}{2}\right)=0 \ , \ h_0^{(6)}\left(\frac{-1}{2}\right)=0$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{11}{2} & ; & 1 \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(-1)=0 \text{ ve } y'(-1)=1$$

olduğundan $N=6$ ve $c=\frac{-1}{2}$ için,

$$y_1(-1)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(-1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 0 \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.33)’ ün son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}7.666\times10^{-1} & 2.0814 & 2.174 & -7.203\times10^{-1} & -5.7839 & -7.6132 & 19.318\end{bmatrix}^{T}$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) &= (7.666\times10^{-1})+(2.0814)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(1/2)(2.174)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - (1/6)(7.203\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\quad - (1/24)(5.7839)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4-(1/120)(7.6132)\left(x+\frac{1}{2}\right)^5+(1/720)(19.318)\left(x+\frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.27) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)+(x+3)y_1''(x-1)-y_1'(x-1)-y_1(x-1)=x^2 \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) &= (7.666\times10^{-1})+(2.0814)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(1/2)(2.174)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad - (1/6)(7.203\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - (1/24)(5.7839)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 \\ &\quad -(1/120)(7.6132)\left(x+\frac{1}{2}\right)^5+(1/720)(19.318)\left(x+\frac{1}{2}\right)^6 \quad ; \quad -1\le x\le 0 \end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$, $y_1'(x-1)$ ve $y_1''(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.34)' te yerine yazıldığında,

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)=x^2-(x+3)\begin{pmatrix}2.5342-0.7203x-2.892(x-(0.5))^2\\ -1.2689(x-(0.5))^3+0.80492(x-(0.5))^4\end{pmatrix}$$

$$+0.7203+4.2554x+0.72685(x-(0.5))^2$$
$$-1.084(x-(0.5))^3-0.55821(x-(0.5))^4$$
$$+0.09754(x-(0.5))^5+2.6831\times10^{-2}(x-(0.5))^6$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$-1\le x-1\le 0\Rightarrow 0\le x\le 1 \text{ olup } y_1(0)=2.0474 \text{ ve}$$

$$y_1'(0)=2.9431$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\dfrac{1}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0&0&0\\ 1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0&0\\ 0&2&\frac{5}{2}&\frac{1}{2}&1&0&0\\ 0&0&3&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\ 0&0&0&4&\frac{9}{2}&\frac{1}{2}&1\\ 0&0&0&0&5&\frac{11}{2}&\frac{1}{2}\\ 0&0&0&0&0&6&\frac{13}{2}\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right)=-4.5112\ ,\ h_1'\left(\frac{1}{2}\right)=5.6024\ ,\ h_1''\left(\frac{1}{2}\right)=25.138\ ,\ h_1'''\left(\frac{1}{2}\right)=37.495,$$

$$h_1^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)=-50.557\ ,\ h_1^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right)=-84.886\ ,\ h_1^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right)=19.318$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -4.5112 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 5.6024 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 25.138 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & 37.495 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & -50.557 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & ; & -84.886 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{13}{2} & ; & 19.318 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

biçiminde elde edilir.

$$y_1(0) = 2.0474 \text{ ve } y_1'(0) = 2.9431$$

olduğundan $N = 6$ ve $c = \frac{1}{2}$ için,

$$y_2(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} \end{bmatrix}$$
$$y_2'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 2.0474 \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 2.9431 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.35)’ in son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -4.5112 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 5.6024 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 25.138 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & 37.495 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & -50.557 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 2.0474 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 2.9431 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ olduğundan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2.7866 \\ -6.0038\times 10^{-2} \\ -5.8745 \\ 5.8431 \\ 37.023 \\ 16.156 \\ -248.61 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_2(x) = (2.7866) - (6.0038\times 10^{-2})\left(x-\frac{1}{2}\right) - (1/2)(5.8745)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (1/6)(5.8431)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \\ + (1/24)(37.023)\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 + (1/120)(16.156)\left(x-\frac{1}{2}\right)^5 - (1/720)(248.61)\left(x-\frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$N = 6$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.8.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.8. $N = 6$ için Örnek 3.3.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
-1	0	2.0073×10^{-2}		0	2.0474	9.1767×10^{-2}
-0.8	0.24148	1.5304×10^{-3}		0.2	2.5259	6.2317×10^{-3}
-0.6	0.56943	6.1516×10^{-6}		0.4	2.7624	2.1648×10^{-5}
-0.4	0.98547	5.9831×10^{-6}		0.6	2.7524	1.7373×10^{-5}
-0.2	1.4835	1.4078×10^{-3}		0.8	2.5432	3.1165×10^{-3}
0	2.0474	1.7444×10^{-2}		1	2.2393	2.4999×10^{-2}

Son olarak $N = 8$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x) = x + 1$ denkleminde x yerine $(x-1)$ yazılırsa,

$$y(x-1) = x \ , \ y'(x-1) = 1 \text{ ve } y''(x-1) = 0$$

olup, bunlar (3.27) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x) + xy'(x) + xy(x) = x^2 + x + 1 \tag{3.36}$$

olur. Ayrıca,

$$-2 \le x-1 \le -1 \Rightarrow -1 \le x \le 0$$

olup,

$$y(-1) = 0 \text{ ve } y'(-1) = 1$$

dır. Bu durumda, $N = 8$ ve $c = \dfrac{-1}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{11}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{13}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{3}{4}\ ,\ h_0'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0\ ,\ h_0''\left(\frac{-1}{2}\right) = 2,$$
$$h_0'''\left(\frac{-1}{2}\right) = 0\ ,\ h_0^{(4)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0\ ,\ h_0^{(5)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0,$$
$$h_0^{(6)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0\ ,\ h_0^{(7)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0\ ,\ h_0^{(8)}\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{11}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{13}{2} & \frac{-1}{2} & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{15}{2} & ; & 0 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(-1) = 0 \text{ ve } y'(-1) = 1$$

olduğundan $N = 8$ ve $c = \frac{-1}{2}$ için,

$$y_1(-1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(-1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 0 \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.37)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{7}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{9}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{11}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & ; & 0 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} 7.657\times10^{-1} \\ 2.0789 \\ 2.1723 \\ -7.19\times10^{-1} \\ -5.7758 \\ -7.6073 \\ 19.288 \\ 72.756 \\ -24.06 \end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} \mathrm{y}_1(x) &= (7.657\times10^{-1})+(2.0789)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(1/2)(2.1723)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\ &-(1/6)(7.19\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - (1/24)(5.7758)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 - (1/120)(7.6073)\left(x+\frac{1}{2}\right)^5 \\ &+(1/720)(19.288)\left(x+\frac{1}{2}\right)^6+(1/7!)(72.756)\left(x+\frac{1}{2}\right)^7 - (1/8!)(24.06)\left(x+\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

2. adım: (3.27) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)+xy'(x)+xy(x)+(x+3)y_1''(x-1)-y_1'(x-1)-y_1(x-1)=x^2 \qquad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x) &= (7.657\times10^{-1})+(2.0789)\left(x+\frac{1}{2}\right)+(1/2)(2.1723)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\quad -(1/6)(7.19\times10^{-1})\left(x+\frac{1}{2}\right)^3 - (1/24)(5.7758)\left(x+\frac{1}{2}\right)^4 \\
&\quad - (1/120)(7.6073)\left(x+\frac{1}{2}\right)^5 + (1/720)(19.288)\left(x+\frac{1}{2}\right)^6 \\
&\quad + (1/7!)(72.756)\left(x+\frac{1}{2}\right)^7 - (1/8!)(24.06)\left(x+\frac{1}{2}\right)^8 \quad ; \quad -1\le x\le 0
\end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$, $y_1'(x-1)$ ve $y_1''(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.38)' de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
y''(x)+xy'(x)+xy(x) &= x^2-1.2665-0.0934x+1.4457(x-(0.5))^2 \\
&\quad +0.8428(x-(0.5))^3+0.07631(x-(0.5))^4 \\
&\quad -0.22412(x-(0.5))^5-7.4261\times10^{-2}(x-(0.5))^6 \\
&\quad +0.01921(x-(0.5))^7-5.9673\times10^{-4}(x-(0.5))^8
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$-1\le x-1\le 0 \Rightarrow 0\le x\le 1$$

olup,

$$y_1(0)=2.0452 \ \text{ve} \ y_1'(0)=2.9416$$

dır. Bu durumda, $N=8$ ve $c=\dfrac{1}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right) = -1.0632\ ,\ h_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 0.9066,$$
$$h_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 4.8914\ ,\ h_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = 5.0568,$$
$$h_1^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = 1.8314\ ,\ h_1^{(5)}\left(\frac{1}{2}\right) = -26.894,$$
$$h_1^{(6)}\left(\frac{1}{2}\right) = -53.468\ ,\ h_1^{(7)}\left(\frac{1}{2}\right) = 96.818\ ,\ h_1^{(8)}\left(\frac{1}{2}\right) = -24.06$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -1.0632 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0.9066 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 4.8914 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 5.0568 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 1.8314 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & -26.894 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & -53.468 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & \frac{15}{2} & \frac{1}{2} & ; & 96.818 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \frac{17}{2} & ; & -24.06 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

şeklinde elde edilir.

$$y_1(0) = 2.0452 \text{ ve } y_1'(0) = 2.9416$$

olduğundan $N = 8$ ve $c = \frac{1}{2}$ için,

$$y_2(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} \end{bmatrix}$$

$$y_2'(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 2.0452 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 2.9416 \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.39)' un son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & -1.0632 \\
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 0.9066 \\
0 & 2 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 4.8914 \\
0 & 0 & 3 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 5.0568 \\
0 & 0 & 0 & 4 & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 1.8314 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & ; & -26.894 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 & ; & -53.468 \\
1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 2.0452 \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 2.9416
\end{bmatrix}
$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$
\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3.2706 \\ 1.7411 \\ -3.5691 \\ -3.1912 \\ 11.927 \\ 20.969 \\ -49.562 \\ -177.08 \\ 231.41 \end{bmatrix}
$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) = {} & (3.2706) + (1.7411)\left(x-\frac{1}{2}\right) - (1/2)(3.5691)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - (1/6)(3.1912)\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 \\
& + (1/24)(11.927)\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 + (1/120)(20.969)\left(x-\frac{1}{2}\right)^5 - (1/720)(49.562)\left(x-\frac{1}{2}\right)^6 \\
& - (1/7!)(177.08)\left(x-\frac{1}{2}\right)^7 + (1/8!)(231.41)\left(x-\frac{1}{2}\right)^8
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$N=8$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.9.' da verilmiştir.

Çizelge 3.1.9. $N=8$ için Örnek 3.3.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
-1	0	9.2092×10^{-4}		0	2.0452	8.3447×10^{-3}
-0.8	0.24123	2.6236×10^{-5}		0.2	2.5252	2.2528×10^{-4}
-0.6	0.56876	1.25×10^{-8}		0.4	2.7641	1.0029×10^{-7}
-0.4	0.98431	1.19×10^{-8}		0.6	2.7563	9.7213×10^{-8}
-0.2	1.4818	2.7543×10^{-5}		0.8	2.5491	1.9642×10^{-4}
0	2.0452	9.9873×10^{-4}		1	2.2461	6.6265×10^{-3}

Örnek 3.4. İkinci mertebeden lineer

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)-y'(x-1)+y(x-1)=xe^{x} \quad ; \quad 1\le x\le 3 \qquad (3.40)$$

$$y(x)=e^{x} \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

delay diferansiyel denklemini göz önüne alalım. (3.40) denkleminin yaklaşık çözümünü $N=4,6,8$ için arayalım.

İlk olarak $N=4$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=e^{x}$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1)=e^{x-1} \text{ ve } y'(x-1)=e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.40) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)=xe^{x} \qquad (3.41)$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2 \text{ olup} \quad y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

dır. Bu durumda, $N=4$ ve $c=\frac{3}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{3}{2}\right)=6.7225 \text{ , } h_0'\left(\frac{3}{2}\right)=11.204 \text{ , } h_0''\left(\frac{3}{2}\right)=15.686 \text{ , } h_0'''\left(\frac{3}{2}\right)=20.168 \text{ , } h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)=24.649$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 6.7225 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 11.204 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 15.686 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & ; & 20.168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & ; & 24.649 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

olduğundan $N=4$ ve $c=\frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384}\end{bmatrix}$$
$$y_1'(1)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & e\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & e\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.42)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 6.7225\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 11.204\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 15.686\\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & e\\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & e\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}4.4847 & 4.4878 & 4.4755 & 4.491 & 4.4739\end{bmatrix}^{T}$$

olup,

$$\mathrm{y}_1(x)=(4.4847)+(4.4878)\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)(4.4755)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{1}{6}\right)(4.491)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{24}\right)(4.4739)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.40) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)-y_1'(x-1)+y_1(x-1)=xe^x \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_1(x)=&(4.4847)+(4.4878)\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)(4.4755)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\\&+\left(\frac{1}{6}\right)(4.491)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{24}\right)(4.4739)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 \qquad ; \qquad 1\le x\le 2\end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.43)' te yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}y''(x)+xy'(x)-y(x)=xe^x&+3.4106\times10^{-2}-0.01238x+7.7888\times10^{-3}(x-(2.5))^2\\&-2.8559\times10^{-3}(x-(2.5))^3-0.18641(x-(2.5))^4\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1\le x-1\le 2\Rightarrow 2\le x\le 3 \text{ olup } y_1(2)=7.3932 \text{ ve}$$

$$y_1'(2)=7.3802$$

dır. Bu durumda, $N=4$ ve $c=\dfrac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$h_1\left(\frac{5}{2}\right)=30.459\ ,\ h_1'\left(\frac{5}{2}\right)=42.626\ ,\ h_1''\left(\frac{5}{2}\right)=54.837,$$
$$h_1'''\left(\frac{5}{2}\right)=66.987\ ,\ h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right)=74.712$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 30.459 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 42.626 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 54.837 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & ; & 66.987 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & ; & 74.712 \end{bmatrix} \tag{3.44}
$$

biçiminde elde edilir.

$$
y_1(2) = 7.3932 \text{ ve } y_1'(2) = 7.3802
$$

olduğundan $N = 4$ ve $c = \frac{5}{2}$ için,

$$
y_2(2) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} \end{bmatrix}
$$
$$
y_2'(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} \end{bmatrix}
$$

olup,

$$
\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 7.3932 \end{bmatrix}
$$
$$
\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 7.3802 \end{bmatrix}
$$

matrisleri (3.44)' ün son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{1}}^{*}$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{1}}^{*} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 30.459 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 42.626 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 54.837 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & ; & 7.3932 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & ; & 7.3802 \end{bmatrix}
$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}12.191 & 12.193 & 12.169 & 12.204 & 12.158\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$\begin{aligned}\mathrm{y}_2(x)=(12.191)+(12.193)\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)(12.169)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2\\+\left(\frac{1}{6}\right)(12.204)\left(x-\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{24}\right)(12.158)\left(x-\frac{5}{2}\right)^4\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$N=4$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.10.' da verilmiştir.

Çizelge 3.1.10. $N=4$ için Örnek 3.4.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	7.0896×10^{-2}		2	7.3932	0.17595
1.2	3.321	1.6904×10^{-2}		2.2	9.03	4.3669×10^{-2}
1.4	4.0575	7.0138×10^{-4}		2.4	11.031	1.8787×10^{-3}
1.6	4.9566	7.9504×10^{-4}		2.6	13.473	2.1976×10^{-3}
1.8	6.0541	2.4551×10^{-2}		2.8	16.455	6.9689×10^{-2}
2	7.3932	0.13084		3	20.094	0.37962

Şimdi $N=6$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=e^x$ denkleminde x yerine $(x-1)$ yazılırsa,

$$y(x-1)=e^{x-1} \text{ ve } y'(x-1)=e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.40) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)=xe^x \tag{3.45}$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2 \text{ olup } y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

dır. Bu durumda, $N=6$ ve $c=\dfrac{3}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$h_0\left(\frac{3}{2}\right)=6.7225 \text{ , } h_0'\left(\frac{3}{2}\right)=11.204 \text{ , } h_0''\left(\frac{3}{2}\right)=15.686 \text{ , } h_0'''\left(\frac{3}{2}\right)=20.168,$$
$$h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right)=24.649 \text{ , } h_0^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right)=29.131 \text{ , } h_0^{(6)}\left(\frac{3}{2}\right)=33.613$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 6.7225 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 11.204 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 15.686 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 20.168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 24.649 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & ; & 29.131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & ; & 33.613 \end{bmatrix} \tag{3.46}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

olduğundan $N = 6$ ve $c = \frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & e \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & e \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.46)' nın son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 6.7225 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 11.204 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 15.686 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 20.168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 24.649 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & e \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & e \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ olduğundan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4.4817 & 4.4817 & 4.4816 & 4.4818 & 4.4816 & 4.4816 & 4.482 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

olup,

$$\mathrm{y}_1(x) = (4.4817) + (4.4817)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$+ (1/6)(4.4818)\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^4$$
$$+ (1/120)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^5 + (1/720)(4.482)\left(x - \frac{3}{2}\right)^6$$

olarak elde edilir.

2. adım: (3.40) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x) + xy'(x) - y(x) - y_1'(x-1) + y_1(x-1) = xe^x \qquad (3.47)$$

$$\mathrm{y}_1(x) = (4.4817) + (4.4817)\left(x - \frac{3}{2}\right) + (1/2)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$
$$+ (1/6)(4.4818)\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + (1/24)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^4$$
$$+ (1/120)(4.4816)\left(x - \frac{3}{2}\right)^5 + (1/720)(4.482)\left(x - \frac{3}{2}\right)^6 \qquad ; \qquad 1 \le x \le 2$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.47)' de yerine yazıldığında,

$$y''(x) + xy'(x) - y(x) = xe^x + 2.8981\times 10^{-4} - 1.0586\times 10^{-4}x + 6.5072\times 10^{-5}(x-(2.5))^2$$
$$- 2.386\times 10^{-5}(x-(2.5))^3 + 2.7113\times 10^{-7}(x-(2.5))^4$$
$$+ 2.8469\times 10^{-6}(x-(2.5))^5 - 6.225\times 10^{-3}(x-(2.5))^6$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1 \le x-1 \le 2 \Rightarrow 2 \le x \le 3 \text{ olup } y_1(2) = 7.3891 \text{ ve}$$

$$y_1'(2) = 7.389$$

dır. Bu durumda, $N = 6$ ve $c = \dfrac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$
\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix}
-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5
\end{bmatrix}
$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$
h_1\left(\frac{5}{2}\right) = 30.456\ ,\ h_1'\left(\frac{5}{2}\right) = 42.639\ ,\ h_1''\left(\frac{5}{2}\right) = 54.821\ ,\ h_1'''\left(\frac{5}{2}\right) = 67.004,
$$
$$
h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right) = 79.186\ ,\ h_1^{(5)}\left(\frac{5}{2}\right) = 91.369\ ,\ h_1^{(6)}\left(\frac{5}{2}\right) = 99.069
$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \begin{bmatrix}
-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 30.456 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 42.639 \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 54.821 \\
0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 67.004 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 79.186 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{5}{2} & ; & 91.369 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & ; & 99.069
\end{bmatrix} \tag{3.48}
$$

biçiminde elde edilir.

$$
y_1(2) = 7.3891 \text{ ve } y_1'(2) = 7.389
$$

olduğundan $N = 6$ ve $c = \frac{5}{2}$ için,

$$y_2(2)=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080}\end{bmatrix}$$
$$y_2'(2)=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840}\end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1=\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 7.3891\end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 7.389\end{bmatrix}$$

matrisleri (3.48)' in son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1^*=\begin{bmatrix}-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 30.456\\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 42.639\\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 54.821\\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 67.004\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 79.186\\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & ; & 7.3891\\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & ; & 7.389\end{bmatrix}$$

biçiminde olur. Buna göre, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ olduğundan

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}12.183\\12.183\\12.182\\12.183\\12.182\\12.183\\12.183\end{bmatrix}$$

olup,

$$y_2(x) = (12.183) + (12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right) + (1/2)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$$
$$+ (1/6)(12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right)^3 + (1/24)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^4$$
$$+ (1/120)(12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right)^5 + (1/720)(12.183)\left(x-\frac{5}{2}\right)^6$$

olarak elde edilir.

$N=6$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.11.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.11. $N=6$ için Örnek 3.4.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	9.7911×10^{-4}		2	7.3891	2.5119×10^{-3}
1.2	3.3201	8.0993×10^{-5}		2.2	9.0251	2.1285×10^{-4}
1.4	4.0552	3.57×10^{-7}		2.4	11.023	9.7×10^{-7}
1.6	4.9531	3.94×10^{-7}		2.6	13.464	1.09×10^{-6}
1.8	6.0497	1.0382×10^{-4}		2.8	16.445	2.9055×10^{-4}
2	7.3891	1.4736×10^{-3}		3	20.086	4.1928×10^{-3}

Son olarak $N=8$ için çözüm arayalım.

1. adım: $y(x)=e^x$ denkleminde x yerine ($x-1$) yazılırsa,

$$y(x-1)=e^{x-1} \text{ ve } y'(x-1)=e^{x-1}$$

olup, bunlar (3.40) denkleminde yerine konulursa,

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)=xe^x \tag{3.49}$$

olur. Ayrıca,

$$0 \le x-1 \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

olup,

$$y(1) = e \text{ ve } y'(1) = e$$

dır. Bu durumda, $N = 8$ ve $c = \dfrac{3}{2}$ için $\mathbf{W_0}$ matrisi,

$$\mathbf{W_0} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

formunda elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} & h_0\left(\frac{3}{2}\right) = 6.7225 \;,\; h_0'\left(\frac{3}{2}\right) = 11.204, \\ & h_0''\left(\frac{3}{2}\right) = 15.686 \;,\; h_0'''\left(\frac{3}{2}\right) = 20.168, \\ & h_0^{(4)}\left(\frac{3}{2}\right) = 24.649 \;,\; h_0^{(5)}\left(\frac{3}{2}\right) = 29.131, \\ & h_0^{(6)}\left(\frac{3}{2}\right) = 33.613 \;,\; h_0^{(7)}\left(\frac{3}{2}\right) = 38.094 \;,\; h_0^{(8)}\left(\frac{3}{2}\right) = 42.576 \end{aligned}$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 6.7225 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 11.204 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 15.686 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 20.168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 24.649 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 29.131 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 33.613 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{3}{2} & ; & 38.094 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & ; & 42.576 \end{bmatrix} \tag{3.50}$$

biçiminde elde edilir.

$$y(1)=e \text{ ve } y'(1)=e$$

olduğundan $N=8$ ve $c=\frac{3}{2}$ için,

$$y_1(1)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} \end{bmatrix}$$
$$y_1'(1)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} \end{bmatrix}$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & e \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{\mathbf{V}}_{\mathbf{0}}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & e \end{bmatrix}$$

matrisleri (3.50)'nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{0}}^{*}=\begin{bmatrix}
-1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 6.7225\\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 11.204\\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 15.686\\
0 & 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 20.168\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 24.649\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & ; & 29.131\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{3}{2} & 1 & ; & 33.613\\
1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & e\\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & e
\end{bmatrix}$$

elde edilir. O halde, $\mathbf{Y}=(\mathbf{W}_{\mathbf{0}}^{*})^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{0}}^{*}$ denklemi yardımı ile

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\\4.4817\end{bmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x)&=(4.4817)+(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)+(1/2)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(1/6)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\\
&+(1/24)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4+(1/120)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5+(1/720)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6\\
&+(1/7!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^7+(1/8!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^8
\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

2. adım: (3.40) denkleminde $y_1(x)$ çözümü yazıldığında,

$$y''(x)+xy'(x)-y(x)-y_1'(x-1)+y_1(x-1)=xe^x \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}_1(x) &= (4.4817)+(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)+(1/2)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 \\
&+(1/6)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+(1/24)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^4 \\
&+(1/120)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^5+(1/720)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^6 \\
&+(1/7!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^7+(1/8!)(4.4817)\left(x-\frac{3}{2}\right)^8 \quad ; \quad 1\le x\le 2
\end{aligned}$$

olup, $y_1(x)$ de x yerine $(x-1)$ yazılırsa, $y_1(x-1)$ ve $y_1'(x-1)$ ifadeleri elde edilir. Bunlar (3.51)' de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
y''(x)+xy'(x)-y(x) &= xe^x+1.3\times10^{-6}-4.79\times10^{-7}x+2.9051\times10^{-7}\left(x-(2.5)\right)^2 \\
&-1.0652\times10^{-7}\left(x-(2.5)\right)^3+1.2105\times10^{-9}\left(x-(2.5)\right)^4 \\
&+1.271\times10^{-8}(x-(2.5))^5-2.9353\times10^{-9}(x-(2.5))^6 \\
&-8.3218\times10^{-10}(x-(2.5))^7-1.1115\times10^{-4}(x-(2.5))^8
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Ayrıca,

$$1\le x-1\le 2 \Rightarrow 2\le x\le 3$$

olup,

$$y_1(2)=7.3891 \text{ ve } y_1'(2)=7.3891$$

dır. Bu durumda, $N=8$ ve $c=\dfrac{5}{2}$ olmak üzere $\mathbf{W_1}$ matrisi,

$$
\mathbf{W_1} = \begin{bmatrix}
-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{5}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{bmatrix}
$$

biçiminde olur. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
&h_1\left(\frac{5}{2}\right) = 30.456 \ , \ h_1'\left(\frac{5}{2}\right) = 42.639, \\
&h_1''\left(\frac{5}{2}\right) = 54.821 \ , \ h_1'''\left(\frac{5}{2}\right) = 67.004, \\
&h_1^{(4)}\left(\frac{5}{2}\right) = 79.186 \ , \ h_1^{(5)}\left(\frac{5}{2}\right) = 91.369, \\
&h_1^{(6)}\left(\frac{5}{2}\right) = 103.55 \ , \ h_1^{(7)}\left(\frac{5}{2}\right) = 115.73 \ , \ h_1^{(8)}\left(\frac{5}{2}\right) = 123.43
\end{aligned}
$$

olup $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ matrisi,

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccc} -1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 30.456 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 42.639 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 54.821 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 67.004 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 79.186 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 91.369 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 103.55 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \frac{5}{2} & ; & 115.73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & ; & 123.43 \end{array}\right] \tag{3.52}$$

şeklinde elde edilir.

$$y_1(2) = 7.3891 \text{ ve } y_1'(2) = 7.3891$$

olduğundan $N = 8$ ve $c = \frac{5}{2}$ için,

$$y_2(2) = \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} \end{array}\right]$$

$$y_2'(2) = \left[\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} \end{array}\right]$$

olup,

$$\widetilde{\mathbf{U}}_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 7.3891 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_1 = \left[\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 7.3891 \end{array}\right]$$

matrisleri (3.52)' nin son iki satırı yerine yazılırsa $\widetilde{\mathbf{W}}_1^*$ matrisi,

$$
\widetilde{\mathbf{W}}_1^* = \begin{bmatrix}
-1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 30.456 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 42.639 \\
0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ; & 54.821 \\
0 & 0 & 0 & 2 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 67.004 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & ; & 79.186 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \frac{5}{2} & 1 & 0 & ; & 91.369 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \frac{5}{2} & 1 & ; & 103.55 \\
1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & \frac{1}{10321920} & ; & 7.3891 \\
0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{-1}{48} & \frac{1}{384} & \frac{-1}{3840} & \frac{1}{46080} & \frac{-1}{645120} & ; & 7.3891
\end{bmatrix}
$$

elde edilir. Böylece, $\mathbf{Y} = (\mathbf{W}_1^*)^{-1}\mathbf{H}_1^*$ denklemi yardımı ile

$$
\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \\ 12.182 \end{bmatrix}
$$

bulunur. Böylece $y_2(x)$ çözümü,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}_2(x) = {} & (12.182) + (12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right) + (1/2)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + (1/6)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^3 \\
& + (1/24)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^4 + (1/120)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^5 + (1/720)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^6 \\
& + (1/7!)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^7 + (1/8!)(12.182)\left(x-\frac{5}{2}\right)^8
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

$N=8$ için bulunan bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 3.1.12.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1.12. $N=8$ için Örnek 3.4.' ün Nümerik Sonuçları

x_i	$y_1(x_i)$	$D(x_i)$		x_i	$y_2(x_i)$	$D(x_i)$
1	2.7183	6.102×10^{-6}		2	7.3891	1.589×10^{-5}
1.2	3.3201	1.78×10^{-7}		2.2	9.025	4.6×10^{-7}
1.4	4.0552	3.0×10^{-9}		2.4	11.023	1.0×10^{-8}
1.6	4.953	5.0×10^{-9}		2.6	13.464	1.0×10^{-8}
1.8	6.0496	2.2×10^{-7}		2.8	16.445	6.0×10^{-7}
2	7.3891	8.31×10^{-6}		3	20.086	2.337×10^{-5}

Örnek 3.5. İkinci mertebeden lineer

$$\begin{aligned} y''(x)+2xy'(x)-xy(x)+xy''(x-1)& \\ +xy(x-1)=2x^2+4x+2 \quad &; \quad 1\le x\le\infty \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$y(x)=x^2+x \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

neutral diferansiyel denklemini ele alalım. (3.53) denkleminin $N=4,6,8,...$ için önceki örneklerdeki gibi benzer işlemler yapıldığında, her adımda

$$y(x)=x^2+x$$

çözümüne ulaşılmıştır. Bu çözüm (3.53) denkleminin tam çözümüdür.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak fark-diferansiyel denklemler ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Daha sonra ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için Taylor yöntemi geliştirilmiştir. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan yöntem R. P. Kanwall ve K. C. Liu tarafından sunulan yöntemin bir uyarlamasıdır (Kanwall, R. P., Liu, K. C., 1989). Bu yöntemde ilk olarak neutral-delay diferansiyel denklemin her iki tarafının n kez türevi alınır ve sonra sonuç denklemde bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımı yerine konulur. Burada lineer cebrik sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunur. Elde edilen çözüm bir Taylor seri yaklaşımı olup bu Taylor seri açılımının katsayıları bir lineer cebrik sistemin çözümleridir. Katsayılar, matris denklemleri yardımıyla hesaplanır.

Burada elde edilen lineer cebrik sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunmaktadır.

Yöntemin geçerli olabilmesi için,

$$\begin{aligned}
&p(x)y''(x)+q(x)y'(x)+r(x)y(x)+k_1(x)y''(x-w)+k_2(x)y'(x-w)+\\
&k_3(x)y(x-w)=f(x) \quad , \quad 0\le x\le a\\
&y(x)=y_0(x) \quad , \quad -w\le x\le 0 \quad (w>0)
\end{aligned}$$

formundaki ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemdeki $p(x)\neq 0$, $q(x)$, $r(x)$, $k_1(x), k_2(x)$, $k_3(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları $0\le x\le a$ aralığında $n.$ mertebeden türevlerinin mevcut olması gerekmektedir. $y_0(x)$ ise $-w\le x\le 0$, aralığında $(n+2).$ türeve sahip sürekli bir başlangıç (verilmiş) fonksiyonudur.

Bu durum sağlandığında $x=c$ noktası civarında,

$$y_j(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^n \ , \quad (j-1)w\le c\le jw \ , \ j=1,2,...,\ell-1,\ell$$

formunda $n.$ dereceden Taylor polinomu bulunabilir. Aksi halde yöntem kullanılamaz. Burada çözüm bulunurken verilen ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denklemine $(j-1)w \leq x \leq jw$ aralıklarında adımlar metodu uygulanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde, çeşitli ikinci mertebeden lineer neutral-delay diferansiyel denkleminin çözülebildiği görülmüştür. Bu yöntemin ilginç bir özelliği son bölümde yer alan örneklerden de anlaşılacağı üzere, çözüm fonksiyonlarının polinom olduğu durumlarda N kesme sınırının yüksek dereceli polinom derecesi ya da daha büyük alınarak analitik çözüme ulaşılmasıdır.

Bu yöntem yüksek mertebeden lineer ve lineer olmayan neutral-delay diferansiyel denklem ve denklem sistemlerine de genişletilebilir.

Ayrıca kısmi diferansiyel, diferansiyel cebirsel denklem sistemleri ve optimal kontrol sistemlerinin de bu yöntem ile çözülebileceği düşünülmektedir.

5. KAYNAKLAR

Akhmerov R. R., Kamenskii M. I. and Potapov A. S., 1982. Theory of equations of neutral type. Math. Anal., 19(1), 55-126.

Akıllı S., 2000. Neutral Tipli Fark-Diferansiyel Denklemlerin Simetrik Sistemlerinin Nümerik İntegrasyonu. Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 49s, İzmir.

Bellman R., 1949. On the Existense and Boundedness of Solutions of Non-Linear Difference-Differential Equations. Annals of Math., 50p.

Bellman R. and Cooke K. L., 1963. Differential- Difference Equations. Academic Press, New York.

Brayton R. K. and Willoughby R. A., 1967. Difference-Differential Equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 182-189pp.

Coddington E. and Levinson W., 1955. Theory of Ordinary Differential Equations. C. Graw Hill, New York.

Dahlquist G. G., 1963. A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods. BIT3, 27-43pp.

Demirbaş M., 2002. İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Isparta.

Driver R. D., 1978. Introduction to Ordinary Differential Equations. Harper and Rom Pub. Comp., 315ss, New York.

El'sgol'ts L. E. and Norkin S. B., 1973. Introduction to The Theory of Differential Equations with Deviating Arguments. Holden-Day Inc., 109ss, San Francisco.

El-Gendi S.E., 1969. "Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro -Differential Equations, Comp. J., 12, 282-287.

Gözükızıl Ö. F., Şencan H., 2001. Gecikmeli Diferansiyel Denklemler. S. A. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 5(1), 55-57.

Hale J., 1987. Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, 238ss, New York.

Kanwall R. P., Liu K. C., 1989. A Taylor Expansion Approach for Solving Integral Equtations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 20, (3), 411-414.

Kolmanovskii V. B. and Nosov V. R., 1986. Stability of Functional Differential Equations. Academic Press, 378ss, New York.

Myshkis A. D., Linear Differential Equations with a Retarded Argument. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1951 (in Russian: 2nd ed., 1972).

Norkin S. B., 1972. Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument some Problems of the Theory of Vibrations of Systems with Retardation. American Mathematical Society Providence, Rhode Island.

Philos C. G. and Sficas Y. G., 1991. On the nature of the nonoscillatory solutions of a class of neutral delay differential equations. J. Math. Analy. and Applications, 154(1), 417-434.

Ross S. L., 1991. “Differential Equations”. University of New Hampshire.

Sezer M., 1992. The Solutions of Certain Classes of Ferdholm Integral Equations by Means of Taylor Series, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakülteleri Dergisi, Cilt:VII, Sayı:2, 17-24.

Sezer M., 1994. Taylor Polynomial Solutation of Volterra Integral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,25, (5), 625-633.

Sezer M., 1996. A Method for The Approximate Solutation of The Second-Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Int.J.Math.Educ.Sci.Technol., 27, (6), 821-834.

Yalçınbaş S., Sezer M., 2000. The Approximate Solutions of High-Order Linear Volterra- Fredholm Integro-Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Applied Mathematics and Computation, 112, 291-308.

Yalçınbaş S., Demirbaş M., 2001. The Approximate Solutions of High-Order Linear Differential Equation sytems with variable coefficients in Terms of Taylor Polynomials, Tools For Mathematical Modelling, Saint Petersburg, Rusya, 8, 175-188.

Yalçınbaş S., “Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri”, II. Uluslararası Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi, 20-22 Mayıs 1998, Kırıkkale.

Yeniçerioğlu F., 1998. “Neutral Diferansiyel Denklemlerde Kararlılık”, Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.

ÖZGEÇMİŞ

1. Kimlik:

-Adı Soyadı : Sevilay Beypınar

-Doğum Yeri : Antalya

-Doğum Yılı : 20/02/1979

-Medeni Hali : Evli

2. Eğitim Durumu:

-İlkokul : Barboros İlkokulu, 1986-1990

-Ortaokul : Kamile Çömlekçioğlu Ortaokulu, 1991-1993

-Lise : Karatay Lisesi, 1994-1997

-Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi
Matematik Bölümü, 1998-2002

-Yabancı Dil : İngilizce