FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

Aytekin ERYILMAZ

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
ISPARTA 2006

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

Aytekin ERYILMAZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA, 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET

FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

Aytekin ERYILMAZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ele alınmıştır.

İkinci bölümde, $\mathcal{H}$ Hilbert Uzayında lineer operatörler teorisi ile ilgili temel oluşturacak bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Bunun yanında, dilatasyon tanımı verilerek, bir disipatif operatörün dilatasyonunu kurmak için gerekli tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, sınır koşullarında spektral parametre bulunduran sonsuz bir Jakobi matrisi ile elde edilen kendine eş olmayan fark operatörü incelenmiştir. Daha sonra sınır koşuluna sahip disipatif operatörü sıfırda disipatiflik durumu ele alınmıştır. Bu operatörlerin kendine eş dilatasyonu ve bir fonksiyonel modeli kurulmuş, karakteristik fonksiyonu hesaplanmıştır. Disipatif operatörün ve sınır değer problemin özvektör ve assosye vektörler sistemi için tamlık teoremleri ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde sınır koşullarında spektral parametre bulunduran ve sonsuzda disipatif Sturm-Liouville fark sınır değer problemi ele alınmıştır. Maksimal disipatif operatör oluşturulmuş ve onun kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Lax-Philips saçılma teorisi kullanılarak dilatasyonun spektral analizi yapılmıştır. Sturm-Liouville fark sınır değer problemi ve disipatif operatörün özvektörler ve asosye vektörler sistemi için tamlık teoremleri verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : Kendine eş olmayan operatör, simetrik operatör, sınır koşullarında spektral parametre, minimal operatör, maksimal operatör, dilatasyon, fonksiyonel model, karakteristik fonksiyon, saçılma teorisi.

ABSTRACT

SPECTRAL THEORY OF DIFFERENCE OPERATORS

Aytekin ERYILMAZ

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, the historical progress of the subject is considered.

In the second chapter, some definitions and theorems based on linear operators in Hilbert space are given. In addition essential definition and theorems to construct the dilation of a dissipative operator by giving dilation definition.

In the third chapter, nonselfadjoint difference operator generated by an infinite Jacobi matrix with a spectral parameter in the boundary condition is investigated. Then the dissipation at zero of dissipative operator having boundary condition is considered.

The selfadjoint dilation and a functional model of this operator are constructed by taking into consideration of characteristic function. Theorems on completeness of the system of eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and boundary value problem is proved.

In the fourth chapter, Sturm-Liouville difference boundary value problem dissipative at infinite and having spectral parameter at boundary conditions is studied. Moreover, maximal dissipative operator is obtained and selfadjoint dilations is constructed dilation spectral analized by using Lax-Philips scattering theory. Furthermore theorem on completeness of the sytem of eigenvectors and associated vectors of the dissipative operator and Sturm-Liouville difference boundary value problem are given.

KEYWORDS: Nonselfadjoint operator, symmetric operator, spectral parameter in the boundary condition, minimal operator, maximal operator, dilations, functional model, characteristic function, scattering theory.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve desteğini hep gördüğüm değerli danışman hocam Prof.Dr.Bilender PAŞAOĞLU'na, SDÜ FEF Matematik Bölümü'nün değerli hocalarına teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışma 0693D03 nolu proje kapsamında Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Projeler Araştırma Birimi tarafından desteklenmiştir. Bu desteklerinden dolayı ilgili kuruma teşekkür ederiz.

SİMGELER DİZİNİ

$I\!N$	: Doğal sayılar kümesi
Z	: Tam sayılar kümesi
$I\!R$	: Reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathcal{H}$	: Hilbert Uzayı
$D(A)$	: A nın tanım kümesi
A^*	: A nın eş (adjoint) operatörü
ℓy	: Fark ifadesi
U_t	: Uniter operatörler grubu
L	: Maksimal operatör
L_0	: Minimal simetrik operatör
$def\, L_0$	: L_0 operatörünün defekt sayısı
A_h	: Maksimal disipatif operatör
Z_t	: Yarı grup
B_h	: Yarı grubun üreteci
$\mathcal{L}_h$	: A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu
D_-	: Giren alt uzay
D_+	: Çıkan alt uzay
$\eta(\lambda)$	: Kompleks düzlemde meromorfik fonksiyon
$S_h(\lambda)$	: Karakteristik fonksiyon
T	: Model disipatif operatör
$s(\lambda)$	: Singüler çarpan
$B(\lambda)$	: Blaschke çarpanı

W_2^1	: Sobolev Uzayı
F_-, F_+	: İzometrik dönüşümler
$\overline{S}_h(\lambda)$	: Saçılma matrisi

1.GİRİŞ

Fiziğin, mekaniğin ve matematiksel fiziğin pek çok problemi operatörlerin spektral teorisiyle yakından ilişkilidir. Bu problemlerin çoğu değişkenlerine ayırma (Fourier) yöntemi kullanılarak operatörlerin spektral teorisinin incelenmesine dönüşmektedir. Uygulamalar açısından fark (difference) operatörlerin spektral teorisini incelemek önem taşımaktadır. Bu nedenle incelenecek konu yeni çalışmalar olup, bu alandaki boşluğu dolduracaktır.

Sınır şartlarında spektral parametre bulunduran kendine eş regüler Sturm-Liouville problemlerinin fiziksel uygulamaları oldukça fazla sayıda ve çeşitliliktedir. Örnek olarak; ısı akımı, mekanik titreşimler, gözenekli ortamda difüzyon, elektrik devreleri vs. verilebilir. Bu örneklerden bazıları Walter (1973), Fulton (1977), Hinton (1979), Shkalikov (1983), Allahverdiev (2005, 2006) yapmış oldukları çalışmalarda incelemişlerdir. Bu tür problemlerin çeşitli hallerde özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasına ait çok sayıda kitaplar ve makaleler yazılmıştır. Atkinson (1964) de, λ parametresinin hem aralığının uç noktalarında verilmesi hem de aralığın içindeki süreksizlik noktalarında verilmesi durumunu incelemiştir. Benzer durum doktora tezi olarak Altınışık (1998) tarafından çalışılmıştır.

Kendine eş olan fark operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili Akhiezer (1965), Atkinson (1964), Berazanskij (1965), Clark (1996), Shi ve Chen (1999, 2004) Stone (1932), Welstead (1982) çalışma yapmışlardır.

Kendine eş olmayan operatörlerin spektral analizinde ilk genel metod rezolventin çevre integrasyonu metodudur. Bu metod, spektrumu ayıran çevreler üzerinde rezolventi hesaplama tekniğidir ve Naimark (1968) tarafından genel biçimde incelenmiştir. 1970 yıllarında Pavlov, genel metodun koşullarının esnek olmadığını belirterek probleme başka yaklaşımlar gerektiğini belirtmiştir. Böylece kendine eş olmayan operatörlerin spektral analizi için analitik metodların, pratik olarak Cauchy integraline indirgemede yetersiz kaldığı görülmüştür. Nagy ve Foiaş (1970), Hilbert uzayında lineer bir büzülmenin genel modeli olan çok basit formdaki bir operatörün spektral özelliklerini incelemiştir. Operatörlerin spektral özellikleri hakkında tam bilgiyi taşıyan bu modellerin parametresi, operatörün rezolventi değil, çok daha basit bir kavram olan operatörün karakteristik fonksiyonudur. Nagy ve Foiaş'dan bağımsız olarak Lax ve Phillips (1967) önemli bir yer tutan soyut saçılma teorisini geliştirmişlerdir. Bu teori, orijinal üniter grubun özelliklerinden yararlanılarak saçılma matrisinin analitik özellikleri hakkında bilgi edinmek için, giren ve çıkan altuzaylar kavramlarına dayanmaktadır.

Nagy – Foiaş ve Lax – Phillips'in sonuçları birleştirilerek karakteristik fonksiyon, saçılma matrisi ile ifade edilmiş ve disipatif operatörün dilatasyonu kurulmuştur. Özvektörler sisteminin tamlık problemi, karakteristik fonksiyonun faktorizasyon biçiminde yazılmasıyla çözülmüştür. Böylece disipatif operatörlerin spektral analizi, dilatasyonun kurulması, buna karşılık gelen saçılma teorisi probleminin araştırılması ve karakteristik fonksiyonun saçılma matrisi yardımıyla ifade edilmesi ile yapılmıştır. Bu yöntemler Pavlov (1975, 1977), Allahverdiev ve Guseınov (1990) Allahverdiev (2004, 2005), Saltan (2002), Ongun (2004) tarafından kullanılmıştır.

Kendine eş olmayan fark operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili Allahverdiev (2004, 2005), Bairamov ve Coşkun (2004, 2005), Adıvar ve Bairamov (2003), Bairamov, Çakar ve Krall (2001) çalışmalar yapmışlardır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 : $V \neq \phi$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa V ye K üzerinde lineer uzay denir.

A) $(V,+)$ cebirsel yapısı değişmeli bir gruptur. Yani,

G1) $\forall x, y \in V$ için $x+y \in V$ dir. (Kapalılık özelliği)

G2) $\forall x, y, z \in V$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$ dir. (Birleşme özelliği)

G3) $\forall x \in V$ için $x+0=0+x=x \in V$ olacak şekilde bir tek $0 \in V$ vardır.

G4) $\forall x \in V$ için $x+(-x)=(-x)+x=0$ olacak şekilde bir tek $-x \in V$ vardır.

G5) $\forall x, y \in V$ için $x+y=y+x$ dir. (Değişme özelliği)

B) $x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1) $\alpha\ x \in V$ dir.

L2) $\alpha(x+y)=\alpha\ x+\alpha y$ dir.

L3) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta y$ dir.

L4) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ dir.

L5) $\forall x \in V$ için $1.V=V$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada $1, K$ cisminin birim elemanıdır.

$K=IR$ olması halinde V ye reel, $K=C$ olması halinde V ye kompleks lineer uzay denir. (Naimark,1968).

Tanım 2.2: Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.3: X, K cismi üzerinde bir lineer (vektör) uzay olsun.

$$\|\,.\,\| : X \to IR, \qquad x \to \|x\| \tag{2.1}$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$\text{N1)}\ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \tag{2.2}$$

N2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$

N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde bir norm denir ve $(X, \|\,.\,\|)$ ikilisine de bir normlu lineer (vektör) uzay denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.4 : X ve Y aynı bir K cismi üzerinde tanımlanmış iki lineer uzay olsun. $A : X \to Y$ operatörü (dönüşümü)

i) $A(x+y) = A(x) + A(y)$

ii) $A(\alpha\, x) = \alpha\, A(x)\,, \quad \alpha \in K$ (2.3)

koşullarını sağlıyorsa A ya lineer operatör (dönüşüm) denir. Lineer dönüşüme aynı zamanda homomorfizm de denir. $A : X \to Y$ dönüşümü (operatörü) 1-1 örten ise lineer izomorfizm denir. X e A operatörünün tanım kümesi denir ve *D(A)* ile gösterilir. *Y* ye *A* operatörünün değer kümesi denir ve Im*(A)* veya *R(A)* ile gösterilir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.5: $K = IR$ veya $K = C$ olmak üzere X bir vektör uzayı (lineer uzay) olsun.

$(.,.) : XxX \to K$ (2.4)

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar ise $(.,.)$ ye X üzerinde bir iç çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de iç çarpım uzayı (veya ön Hilbert uzayı) denir.

i) $\forall x \in X$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\forall x, y \in X$ için $(x,y) = \overline{(y,x)}$

iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için $(\alpha x, y) = \alpha (x,y)$

iv) $\forall x, y, z \in X$ için $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$ (2.5)

Tanım 2.6 : $(X, (\,.\,,\,.\,))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$\|x\| = (x,x)^{1/2}$ (2.6)

olarak tanımlanır. Bu norma göre $(X, (\,.\,,\,.\,))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur. (Naimark, 1968) .

Tanım 2.7 : Bir $(X,(.,.))$ iç çarpım uzayı $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $(X,(.,.))$içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.8 : $K = IR$ veya $K=C$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı olsun

$$f:X \to K$$

operatörüne fonksiyonel denir. Eğer f lineer ise f ye lineer fonksiyonel denir. Lineer fonksiyoneller, sınırlı ise yani,

$$|f(x)| \leq c\|x\| \tag{2.7}$$

olacak şekilde $c \geq 0$ reel sayısı varsa f ye sınırlı lineer fonksiyonel denir.(Naimark, 1968).

Tanım 2.9 : H Hilbert uzayında tanımlanan bir lineer A operatörü için her $x \in H$ olmak üzere

$$\|Ax\| \leq c\|x\| \tag{2.8}$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ sayısı varsa A ya sınırlı operatör denir. Bu c sayılarının en küçüğüne A sınırlı operatörünün normu denir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{2.9}$$

eşitliği yardımı ile norm hesaplanabilir. (Naimark, 1968).

Teorem 2.10 : Sınırlı her lineer A operatörü süreklidir. (Naimark,1968).

Tanım 2.11 : H Hilbert uzayı ise ve A, H de bir lineer operatör olmak üzere A nın tanım kümesi $D(A)$, H kompleks Hilbert uzayında yoğun, yani $\overline{D(A)} = H$ olsun. $f, g \in D(A)$ için

$$(Af, g) = (f, A^* g) \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlayan A^* operatörüne A nın adjoint (eş) operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine A^* ın tanım kümesi denir ve $D(A^*)$ ile gösterilir. H üzerinde dönüşüm yapan bir A operatörü için eğer $A^*=A$ ise A ya selfadjoint (kendine eş) operatör denir. (Naimark,1968).

Tanım 2.12 $A : H \to H$ olmak üzere her $x \in H$ için $(Ax, x) \geq 0$ ise A ya pozitif operatör denir. (Naimark,1968).

Tanım 2.13 : Tanım kümesi *D(A)* olan bir A operatörü için $f, g \in D(A)$ olmak üzere

$$(Af,g)=(f,Ag) \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermityen operatör denir. (Naimark,1968).

Tanım 2.14 : $A : D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ (yani *D(A),H* de yoğun) olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{2.12}$$

ise, yani $A \subset A^*$ ise A ya simetrik operatör denir. Adjoint operatör kapalı olduğundan $A \subset A^*$ bağıntısı simetrik A operatörnün kapanabilir olduğunu ifade eder. (Naimark,1968).

Tanım 2.15 : *D(U),* $U : H \to H$ operatörünün tanım kümesi olmak üzere her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y) \tag{2.13}$$

ise U ya izometrik operatör denir. (Naimark,1968).

Tanım 2.16 : Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi H Hilbert uzayı ise U ya üniter operatör denir. H üzerinde, U tersi alınabilir bir operatör olmak üzere $U^* = U^{-1}$ veya $UU^*=U^*U=I$ ise U ya ortogonal veya üniter operatör denir.(Naimark, 1968).

Tanım 2.17 : $A : H \to H$ lineer operatörü için $f \in D(A)$ olmak üzere $\tilde{A}f = Af$ ve $D(\tilde{A}) \supset D(A)$ ise $\tilde{A}$ operatörüne A operatörünün genişlemesi denir. A ya ise $\tilde{A}$ operatörünün kısıtlaması denir. (Naimark, 1968).

Sonuç 2.18 : Bir A operatörünün maksimal simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul A operatörünün diğer simetrik genişlemelerinin bulunamamasıdır. (Naimark,1968).

Her selfadjoint (kendine eş) A operatörü maksimal simetrik operatörüdür. Tersi doğru değildir.

Tanım 2.19 : $A: H \to H$ bir simetrik operatör ve λ keyfi bir kompleks sayı olmak üzere R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$ sırasıyla, $(A-\lambda I)$ *ve* $(A-\overline{\lambda} I)$ operatörlerinin değer kümesi olmak üzere,

$$\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \Theta R_\lambda \quad \text{ve } \mathcal{N}_\lambda = \mathcal{H} \Theta R_{\bar{\lambda}} \tag{2.14}$$

uzaylarına A operatörünün defekt uzayları denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.21 : $\operatorname{Im}\lambda > 0$ için $m = \dim \mathcal{N}_\lambda$ ve $n = \dim \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ olmak üzere (m,n) ikilisine A operatörünün indis defekti adı verilir. (Naimark, 1968).

Sonuç 2.22 : Bir kapalı simetrik operatörünün kendine eş (self-adjoint) olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün indis defektinin (0,0) olmasıdır. (Naimark, 1968).

Tanım 2.23 : $A: H \to H$ lineer operatörünün *D(A)* tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere her $f \in D(A)$ için

$$\operatorname{Im}(Af, f) \geq 0 \tag{2.15}$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir. Her $f \in D(A)$ için

$$\operatorname{Im}(Af, f) \leq 0 \tag{2.16}$$

ise, A operatörüne akretif operatör denir. (Kuzhel,1996).

Tanım 2.24 : Bir disipatif operatörün diğer disipatif genişlemeleri yoksa maksimal disipatif adını alır. (Kuzhel,1996).

Teorem 2.25 : Her disipatif operatör maksimal bir disipatif genişlemeye sahiptir. (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991) **.**

Tanım 2.26 : B, H Hilbert uzayında sınırlı bir lineer operatör ve A, $K \subset H$ da bir lineer operatör olsun.

$P: H \to K$

bir izdüşüm operatörü olmak üzere, her $n \in IN$ için

$$A^n = PB^n \big|_K \tag{2.17}$$

ise B ye A nın dilatasyonu denir. Bu ifade aşağıdaki ifadelere eşdeğerdir.

i) Her $x, y \in K$ ve her $n \in IN$ için

$$\left(A^n x, y\right) = \left(B^n x, y\right)$$

dir.

ii) $$\left(A - \lambda I\right)^{-1} = P\left(B - \lambda I\right)^{-1} \big|_K \tag{2.18}$$

dır. (Kuzhel, 1996).

Tanım 2.27 : Terimleri reel veya kompleks sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty, \ \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty \tag{2.19}$$

şeklindeki $f = \{x_n\}_1^{\infty}$ ve $g = \{y_n\}_1^{\infty}$ dizilerinin uzayı ℓ^2 ile gösterilir. Buradaki $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sayılarına f vektörünün bileşenleri denir. ℓ^2 uzayındaki iç çarpım

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlanır. (Akhiezer ve Glazman,1963).

Tanım 2.28 : Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{U(t) : t \in IR\} U(t) : H \to H$ operatörler ailesine üniter operatörler grubu adı verilir.

i) $U(0)=I$, (I birim operatör)

ii) Her $t, s \in IR$ için $$U(t+s) = U(t).U(s) \tag{2.21}$$

(Weidmann,1980).

Teorem 2.29 : H Hilbert uzayında kendine eş A operatörünün spektral ailesi $E(\lambda)$ olsun. A operatörü için

$IRxIR \ni (\lambda, t) \to e^{it\lambda} \in C$ olmak üzere,

$$IR \ni t \to U(t) = \int_{IR} e^{it\lambda} dE(\lambda) = e^{itA} \tag{2.22}$$

şeklinde ifade edilen $U(t)$ üniter operatörler grubu oluşturulur. (Lax and Philips,1967).

Teorem 2.30 : $\{U(t) : t \in IR\}$, H Hilbert uzayında güçlü sürekli üniter grup olsun. Her $t \in IR$ için

$$U_t = U(t) = e^{itA} \tag{2.23}$$

üniter grubu ile, H da kendine eş A operatörü birebir olarak belirlenir. A operatörüne *U(t)* grubunun üreteci adı verilir. (Weidmann,1980).

Tanım 2.31 : $V : H \to H$ üniter operatör olmak üzere, $\widetilde{A} = VAV^*$ ise A ve $\widetilde{A}$ operatörüne üniter eşdeğerdir denir. (Weidmann,1980).

Tanım 2.32 : H Hilbert uzayında A lineer bir operatör olsun. Eğer $\|A\| \leq 1$ ise A ya H da büzen bir operatör denir. (Naimark, 1968).

Tanım 2.33 : *A, H* Hilbert uzayında bir operatör ve *K, H* nın alt uzayı olsun. Her x$\in K$ için, $Ax \in K$ ise K ya invaryant alt uzay denir.

$U_t = e^{itA}$ üniter grubu yardımıyla Z_t yarıgrubu oluşturulabilir. (Nagy ve Foias,1970).

Teorem 2.34 : U_t grubunun K invaryant alt uzayı üzerine kısıtlaması ile elde edilen Z_t operatörler ailesi

$$B = \lim_{t \to +0} (it)^{-1} \{Z_t - I\} \tag{2.24}$$

disipatif üretecine sahip, güçlü sürekli, tamamen üniter olmayan bir yarı gruptur ve $t \geq 0$ için

$$Z_t = P_K U_t \big|_K \tag{2.25}$$

şeklinde ifade edilir. Burada P_K, K uzayı üzerinde bir dik izdüşüm operatörüdür. (Pavlov,1996).

Tanım 2.35 : Kendine eş olmayan $A: H \to H$ operatörü, sıfır olmayan hiç bir alt uzayda kendine eş operatör üretmiyorsa, basit (simple) olarak adlandırılır. (Kuzhel,1996).

Teorem 2.36: : Kendine eş ve kompakt olan $A: H \to H$ operatörünün özvektörleri, H Hilbert uzayında ortonormal baz oluşur. (Naimark,1968).

Tanım 2.37 : Her sınırlı kümeyi kompakt kümeye dönüştüren operatöre kompakt operatör denir. (Naimark, 1968) .

Tanım 2.38 : Kompleks düzlemde $D = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$ açık disk olsun.

$$\|f\|_p = \begin{cases} \sup\limits_{0<r<1} \left[\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{it}\right) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty \\ \sup\limits_{\lambda \in D} \left| f(\lambda) \right| & , \ p = \infty \end{cases} \tag{2.26}$$

sonlu normu ile ifade edilen, D üzerindeki holomorfik f fonksiyonlarının sınıfına $H^P(0 < P \le \infty)$ Hardy sınıfı adı verilir. (Lax ve Philips, 1967).

Teorem 2.39 (Paley-Wiener) : f bir holomorfik fonksiyon ve

$$\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x+iy) \right|^2 dx = c < \infty \tag{2.27}$$

olsun. Bu durumda, z üst yarı düzlemde bir nokta olmak üzere, bir $F \in L_2(0,\infty)$ mevcuttur öyle ki

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{itz} dt \tag{2.28}$$

ve

$$\int_0^{\infty} |F(t)|^2 dt = c \tag{2.29}$$

dir. (Lax ve Phillips, 1967).

Tanım 2.40 : *(a,b)* aralığında tanımlı f fonksiyonunun *(k-1)* nci mertebeden türevi mutlak sürekli olan ve $f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \in L_2[a,b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W_2^k(a,b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.41 : H_1 ve H_2 Hilbert uzayları olsun. *A,* H_1 uzayında ve *S,* H_2 uzayında iki operatör olmak üzere *A* operatörü, *S* operatörüne üniter eşdeğer ise *S* operatörüne *A* operatörünün model operatörü denir.

3. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN JAKOBİ MATRİSİ İLE OLUŞTURULAN FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Bu bölümde sonsuz Jakobi matrisi ile oluşturulan ve spektral parametrenin aralığın sağ uç noktasında verilmesi durumunda ortaya konulan sınır değer problemine uygun olarak tanımlanan özel Hilbert uzayında sınır değer problemi ile aynı özdeğerlere sahip lineer disipatif operatör oluşturulmuştur. Daha sonra ise bu operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

Elde edilen bu disipatif operatörün kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Kendine eş operatörün saçılma teorisi uygulanarak disipatif operatörün karakteristik fonksiyonu bulunmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri incelenerek disipatif operatörün ve sınır değer probleminin tamlık teoremleri ispatlanmıştır.

3.1.Simetrik Fark Operatörünün Özellikleri ve Sınır Değer Problemi

$a_n \neq 0$ ve $\operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} b_n = 0$ (n$\in IN = \{0,1,2,...\}$) olmak üzere sonsuz bir Jakobi matrisi

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

$y_0, y_1, y_2,...$ kompleks sayılarından oluşan her y = { y_n } $(n \in IN)$ dizisi için bileşenleri $(\ell y)_n$ olan ℓy dizisi $w_n > 0$ (n$\in IN$) olmak üzere

$$(\ell y)_0 := \frac{1}{w_o}(Jy)_0 = \frac{1}{w_o}(b_0 y_0 + a_0 y_1),$$

$$(\ell y)_n := \frac{1}{w_n}(Jy)_n = \frac{1}{w_n}(a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}), \quad n \geq 1$$

biçiminde tanımlanır.

Keyfi $y=\{y_n\}$ ve $z=\{z_n\}$ $(n\in IN)$ dizileri için y ile z nin Wronskiyenleri

$$W_n(y,z)=\left[y,\bar{z}\right]_n=a_n\left(y_n z_{n+1}-y_{n+1}z_n\right)\quad(n\in IN)\tag{3.1.1}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.1.1: Her n$\in IN$ için

$$\sum_{j=0}^{n}\left\{w_j(\ell y)_j\bar{z}_j-w_j y_j\left(\ell\bar{z}\right)_j\right\}=-[y,z]_n\tag{3.1.2}$$

eşitliğine Green formülü denir.

Jakobi matrisinden operatöre geçmek için,

$$(y,z)=\sum_{n=0}^{\infty} w_n y_n \bar{z}_n$$

iç çarpımını sağlayan $\sum_{n=0}^{\infty} w_n|y_n|^2<\infty$ olacak şekilde bütün kompleks değerli $y=\{y_n\}$ dizilerinden oluşan $\ell_w^2(IN)$ $\left(w:=\{w_n\}\right)$ Hilbert uzayını kuralım. $\ell y\in\ell_w^{\,2}(IN)$ koşulunu sağlayan $\ell_w^{\,2}(IN)$ uzayındaki $y=\{y_n\}$ $(n\in IN)$ dizilerinin kümesini D ile gösterelim. D üzerinde $Ly=\ell y$ eşitliğini sağlayan maksimal L operatörünü tanımlayalım. Her $y,z\in D$ için $[y,z]_\infty=\lim_{n\to\infty}[y,z]_n$ limitinin varlığı ve sonlu olduğu $(3.1.2)$ formülünden elde edilir. Bundan dolayı $(3.1.2)$de $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$(Ly,z)-(y,Lz)=-[y,z]_\infty\tag{3.1.3}$$

elde eldir.

$\ell_w^{\,2}(IN)$ uzayında bileşenlerinin sonlu sayıdası sıfırdan farklı olan vektörlerin oluşturduğu lineer $D_o^{\,\prime}$ kümesini düşünelim. $D_o^{\,\prime}$ kümesinde L operatörünün kısıtlamasını $L_o^{\,\prime}$ ile gösterelim. $L_o^{\,\prime}$ operatörünün simetrik olduğu $(3.1.3)$ den görülür. L_o' operatörünün kapanışını L_o ile gösterelim. D_o, L_o operatörünün tanım bölgesi olup

$$\forall z \in D \text{ için } [y,z]_\infty = 0 \tag{3.1.4}$$

koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir. L_o kapalı simetrik operatör olup, onun indis defekti (0,0) veya (1,1)'dir. Bunun dışında $L = L_o^*$ dir.

L_o ve L operatörlerine sırasıyla minimal ve maksimal operatörler denir. $(0,0)$ indis defekti için L_o operatörü kendine eş operatördür. Yani $L_o{}^* = L_o = L$ dir.

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda \, \mathrm{w}_n y_n \qquad (\mathrm{n} = 1,2,...) \tag{3.1.5}$$

denkleminin

$$P_o(\lambda) = 1, \; P_1(\lambda) = \frac{\lambda \, \mathrm{w}_o - b_o}{a_o}, \; Q_0(\lambda) = 0, \; Q_1(\lambda) = \frac{1}{a_o} \tag{3.1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $P(\lambda) = \{P_n(\lambda)\}$ ve $Q(\lambda) = \{Q_n(\lambda)\}$ $(\mathrm{n} \in IN)$ olsun. Burada $P_n(\lambda)$ fonksiyonuna n ci dereceden birinci türden bir polinom ve $Q_n(\lambda)$ fonksiyonuna da $n-1$ci dereceden ikinci türden bir polinom denir.

$$P_n(\lambda) = a_n \lambda^{\mathrm{n}} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_o$$

$$Q_n(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + ... + b_1\lambda + b_o$$

$P_n(\lambda)$, $(Jy)_n = \lambda w_n y_n$ denkleminin bir çözümüdür. $n \geq 1$ için $(JQ)_n = \lambda \, \mathrm{w}_n Q_n$ dir, fakat $(JQ)_o = b_o Q_o + a_o Q_1 = b_o 0 + a_o \dfrac{1}{a_o} = 1 \neq 0 = \lambda \, Q_o$ olduğundan dolayı $Q(\lambda)$ bir çözüm değildir.

$n \in IN$ için $(Jy)_n = \lambda \, \mathrm{w}_n y_n$ denklemi $y_{-1} = 0$ sınır koşulu altında $(3.1.5)$ denklemine eşdeğerdir. $(3.1.5)$ denkleminin $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W_n(y,z) := a_n(y_n z_{n+1} - y_{n+1} z_n) = [y, \bar{z}]_n \quad ,(n \in IN)$$

şeklinde tanımlanır. $(3.1.5)$denkleminin çözümlerinin Wronskiyeni n ye bağlı değildir ve bu denklemin çözümlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul bu çözümlerin Wronskiyenin sıfırdan farklı olmasıdır. $(3.1.6)$ koşulundan

$$W_o(P,Q) = a_0 \begin{vmatrix} P_0 & Q_0 \\ P_1 & Q_1 \end{vmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \frac{1}{a_0} - \frac{\lambda \, \mathrm{w}_0 - b_0}{a_0} 0 \end{pmatrix} = 1$$

elde edilir ve Wronskiyenin değişmezliğinden $W_n(P,Q) = 1 \ (n \in IN)$ olduğu çıkarılır. Sonuç olarak $P(\lambda)$ ve $Q(\lambda)$ çözümleri $(3.1.5)$denkleminin bir temel çözüm sistemini oluşturur.

Kabul edelim ki L_o simetrik operatörünün indis defekti $(1,1)$ olsun ve ℓy ifadesi için de Weyl limit çember durumu sağlansın. (Stone, 1932; Welstead, 1982; Berezanskij, 1965; Shi and Chen, 2004).

L_o operatörünün indis defektinin $(1,1)$ olmasından dolayı, her $\lambda \in C$ için $P(\lambda)$ ve $Q(\lambda)$ çözümleri $\ell_w^2(IN)$ uzayına aittir.

$$u_0 = 1, \ \mathrm{u}_1 = -\frac{b_0}{a_0}, \ \mathrm{v}_0 = 0, \ \mathrm{v}_1 = \frac{1}{a_0} \tag{3.1.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan $\lambda = 0$ iken $(3.1.5)$ denkleminin çözümleri $u = \{u_n\}$ ve $v = \{v_n\}$ olacak şekilde $u = P(0)$ ve $v = Q(0)$ olsun. Dolayısıyla $u, v \in \ell_w^2(IN)$ dir. Buna ek olarak $u, v \in D$ ve

$$(Ju)_n = 0, \ (n \in IN), \ (Jv)_0 = 1, \ (Jv)_n = 0, \ n \geq 1 \tag{3.1.8}$$

dir.

Lemma 3.1.2. Keyfi $y = \{y_n\} \in D$ ve $z = \{z_n\} \in D$ vektörleri için

$$[y, z]_n = [y, u]_n [\bar{z}, v]_n - [y, v]_n [\bar{z}, u]_n \ , (n \in IN \cup \{\infty\}) \tag{3.1.9}$$

dir.

İspat: $(3.1.1)$ den ve $[u, v]_n = 1$ olduğundan

$$[y,u]_n\,[\bar{z},v]_n - [y,v]_n[\bar{z},u]_n$$

$$= a_n\left(y_n u_{n+1} - u_n y_{n+1}\right)a_n\left(\bar{z}_n v_{n+1} - v_n \bar{z}_{n+1}\right) - a_n\left(y_n v_{n+1} - v_n y_{n+1}\right)a_n\left(\bar{z}_n u_{n+1} - u_n \bar{z}_{n+1}\right)$$

$$= a_n^2(y_n u_{n+1}\bar{z}_n v_{n+1} - y_n u_{n+1} v_n \bar{z}_{n+1} - u_n y_{n+1}\bar{z}_n v_{n+1} + u_n y_{n+1} v_n \bar{z}_{n+1}$$

$$- y_n v_{n+1}\bar{z}_n u_{n+1} + y_n v_{n+1} u_n \bar{z}_{n+1} + v_n y_{n+1}\bar{z}_n u_{n+1} - v_n y_{n+1} u_n \bar{z}_{n+1})$$

$$= a_n^2(y_n v_{n+1} u_n \bar{z}_{n+1} - y_n u_{n+1} v_n \bar{z}_{n+1} + v_n y_{n+1}\bar{z}_n u_{n+1} - u_n y_{n+1}\bar{z}_n v_{n+1})$$

$$= y_n \bar{z}_{n+1} a_n^2\left(v_{n+1}u_n - v_n u_{n+1}\right) + y_{n+1}\bar{z}_n a_n^2\left(v_n u_{n+1} - u_n v_{n+1}\right)$$

$$= a_n\left(y_n \bar{z}_{n+1} - y_{n+1}\bar{z}_n\right)a_n\left(v_{n+1}u_n - v_n u_{n+1}\right)$$

$$= [y,z]_n[u,v]_n = [y,z]_n \quad (n \in IN \cup \{\infty\})$$

bulunur.

Teorem 3.1.3: L_o operatörünün tanım bölgesi olan D_o,

$$[y,u]_\infty = [y,v]_\infty = 0 \qquad (3.1.10)$$

sınır koşullarını sağlayan $y \in D$ vektörlerinden oluşmaktadır.

İspat: (3.1.4) koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerinin kümesi ile L_o operatörünün tanım bölgesi çakışır. Lemma 3.1.2 den dolayı (3.1.4) ifadesi

$$[y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty - [y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty = 0 \qquad (3.1.11)$$

ifadesine denktir. $[v,z]_\infty$ ve $[u,z]_\infty$ $(z \in D)$ keyfi sayılar olabildiğinden dolayı her $z \in D$ için (3.1.11) eşitliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul (3.1.10) eşitliklerinin sağlanabilmesi ile mümkündür. Böylece teorem ispatlanır.

$$(\ell y)_0 := \frac{1}{w_o}(Jy)_o = \frac{1}{w_o}(b_o y_o + a_o y_1)$$

$$(\ell y)_n := \frac{1}{w_n}(Jy)_n = \frac{1}{w_n}(a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}),\ n \geq 1 \tag{3.1.12}$$

fark ifadesi için aşağıdaki sınır değer problemini düşünelim.

$$(\ell y)_n = \lambda\, y_n, \qquad y \in D, \qquad n \geq 1, \tag{3.1.13}$$

$$y_o + hy_{-1} = 0, \qquad \operatorname{Im} h > 0, \tag{3.1.14}$$

$$\alpha_1 [y,v]_\infty - \alpha_2 [y,u]_\infty = \lambda(\ [\alpha'_1 [y,v]_\infty - \alpha'_2 [y,u]_\infty\ ) \tag{3.1.15}$$

Burada λ spektral parametre, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2 \in IR$ ve

$$\alpha := \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha_1 \\ \alpha'_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha'_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha'_2 > 0$$

dir. Aşağıdaki kabulleri yapalım.

$$M_\infty(y) := \alpha_1 [y,v]_\infty - \alpha_2 [y,u]_\infty,$$

$$M'_\infty(y) := \alpha'_1 [y,v]_\infty - \alpha'_2 [y,u]_\infty,$$

$$N_1^0(y) := y_{-1},$$

$$N_2^0(y) := y_0,$$

$$N_1^\infty(y) := [y,v]_\infty,$$

$$N_2^\infty(y) := [y,u]_\infty,$$

$$M_0(y) =: N_2^0(y) + hN_1^0(y).$$

Lemma 3.1.4:

Keyfi $y, z \in D$ için $M_\infty(\bar{z}) = \overline{M_\infty(z)},\ M'_\infty(\bar{z}) = \overline{M'_\infty(z)}$,

$N_1^0(\bar{z}) = \overline{N_1^0(z)}, N_2^0(\bar{z}) = \overline{N_2^0(z)}$ olmak üzere

$$\text{i)}\ [y,z]_\infty = \frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(y)\overline{M'_\infty(z)} - M'_\infty(y)\overline{M_\infty(z)}\right] \tag{3.1.16}$$

ii) $\left[y, z\right]_{-1} = N_1^0(y).N_2^0(\bar{z}) - N_1^0(\bar{z}).N_2^0(y)$ (3.1.17)

dir.

İspat: i) Yukarıda yaptığımız kabullerden

$$\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(y)\overline{M'_\infty(z)} - M'_\infty(y)\overline{M_\infty(z)}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}[(\alpha_1[y,v]_\infty - \alpha_2[y,u]_\infty)\left(\alpha'_1[\bar{z},v]_\infty - \alpha'_2[\bar{z},u]_\infty\right)$$

$$-\left(\alpha'_1[y,v]_\infty - \alpha'_2[y,u]_\infty\right)\left(\alpha_1[\bar{z},v]_\infty - \alpha_2[\bar{z},u]_\infty\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\alpha'_1\alpha_2\left([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty\right)\right.$$

$$\left.-\alpha_1\alpha'_2\left([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty\right)\right.$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha'_2\right)\left([y,v]_\infty[\bar{z},u]_\infty - [y,u]_\infty[\bar{z},v]_\infty\right)\right]$$

olduğu görülür. Lemma 3.1.2 den dolayı

$$\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(y)\overline{M'_\infty(z)} - M'_\infty(y)\overline{M_\infty(z)}\right] = \left[y, z\right]_\infty$$

elde edilir. Benzer şekilde

ii) $$\left[y, z\right]_{-1} = \begin{vmatrix} y_{-1} & \bar{z}_{-1} \\ y_0 & \bar{z}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_1^0(y) & N_1^0(\bar{z}) \\ N_2^0(y) & N_2^0(\bar{z}) \end{vmatrix}$$

$$= N_1^0(y)N_2^0(\bar{z}) - N_1^0(\bar{z})N_2^0(y)$$

olarak elde edilir.

3.2 Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör

$f^{(1)} \in \ell_w^2(IN),\ f^{(2)} \in C$ olmak üzere $\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}$ şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = \ell_w^2(IN) \oplus C$ şeklinde gösterelim.

Eğer $\alpha := \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha > 0$ kabul edilirse

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix},\ \hat{g} = \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix} \in H\ ,\ f^{(1)} = (f_n^{(1)}),\ g^{(1)} = (g_n^{(1)}),\ (n \in IN)$$

olmak üzere

$$\left(\hat{f}, \hat{g}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1)} \overline{g}_n^{(1)} w_n + \frac{1}{\alpha} f^{(2)} \overline{g}^{(2)} \tag{3.2.1}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Dolayısıyla verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış olur.

Verilen sınır değer problemine uygun

$$A_h : H \to H$$

operatörünü

$$D(A_h) = \left\{ \hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix} \in H : f^{(1)} \in D, M_0\left(f^{(1)}\right) = 0,\ f^{(2)} = M_\infty'\left(f^{(1)}\right) \right\}$$

(3.2.2)

$$A_h \hat{f} = \tilde{\ell}(\hat{f}) := \begin{pmatrix} \ell\left(f^{(1)}\right) \\ M_\infty\left(f^{(1)}\right) \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Lemma 3.2.1: $H=\ell_w^2(IN)\oplus C$ Hilbert uzayında (3.2.2) ve (3.2.3) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\left(A_h\hat{f},\hat{g}\right)-\left(\hat{f},A_h\hat{g}\right)=\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{-1}-\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{\infty}$$
$$+\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty\left(f^{(1)}\right)\overline{M'_\infty\left(g^{(1)}\right)}-M'_\infty\left(f^{(1)}\right)\overline{M_\infty\left(g^{(1)}\right)}\right] \tag{3.2.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (3.1.12) ve (3.2.1) den

$$\left(A_h\hat{f},\hat{g}\right)_N:=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{w_n}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)}+b_nf_n^{(1)}+a_nf_{n+1}^{(1)}\right)\overline{g_n^{(1)}}w_n+\frac{1}{\alpha}M_\infty(f^{(1)})\overline{M'_\infty}(g^{(1)})$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)}+b_nf_n^{(1)}+a_nf_{n+1}^{(1)}\right)\overline{g_n^{(1)}}+\frac{1}{\alpha}M_\infty(f^{(1)})\overline{M'_\infty}(g^{(1)})$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\left(a_{n-1}f_{n-1}^{(1)}\overline{g_n^1}+b_nf_n^{(1)}\overline{g_n^1}+a_nf_{n+1}^{(1)}\overline{g_n^1}\right)+\frac{1}{\alpha}M_\infty(f^{(1)})\overline{M'_\infty}(g^{(1)})$$

$$=a_{-1}f_{-1}^{(1)}\overline{g}_0^{(1)}+b_0f_0^{(1)}\overline{g}_0^{(1)}+a_0f_1^{(1)}\overline{g}_0^{(1)}+a_0f_0^{(1)}\overline{g}_1^{(1)}+b_1f_1^{(1)}\overline{g}_1^{(1)}+a_1f_2^{(1)}\overline{g}_1^{(1)}$$

$$+\ldots+a_{N-1}f_{N-1}^{(1)}\overline{g}_1^{(1)}+b_Nf_N^{(1)}\overline{g}_N^{(1)}+a_Nf_{N+1}^{(1)}\overline{g}_N^{(1)}+\frac{1}{\alpha}M_\infty(f^{(1)})\overline{M'_\infty}(g^{(1)})$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\left(\hat{f},A_h\hat{g}\right)_N:=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{w_n}\left(a_{n-1}\overline{g}_{n-1}^{(1)}+b_n\overline{g}_n^{(1)}+a_ng_{n+1}^{(1)}\right)f_n^{(1)}w_n+\frac{1}{\alpha}M'_\infty(f^{(1)})\overline{M_\infty}(g^{(1)})$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\left(a_{n-1}\overline{g}_{n-1}^{(1)}+b_n\overline{g}_n^{(1)}+a_ng_{n+1}^{(1)}\right)f_n^{(1)}+\frac{1}{\alpha}M'_\infty(f^{(1)})\overline{M_\infty}(g^{(1)})$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\left(a_{n-1}f_n^{(1)}\overline{g}_{n-1}^{(1)}+b_nf_n^{(1)}\overline{g}_n^{(1)}+a_nf_n^{(1)}g_{n+1}^{(1)}\right)+\frac{1}{\alpha}M'_\infty(f^{(1)})\overline{M_\infty}(g^{(1)})$$

$$= a_{-1} f_0^{(1)} \overline{g}_{-1}^{(1)} + b_0 f_0^{(1)} \overline{g}_0^{(1)} + a_0 f_0^{(1)} \overline{g}_1^{(1)} + a_0 f_1^{(1)} \overline{g}_0^{(1)} +$$

$$b_1 f_1^{(1)} \overline{g}_1^{(1)} + a_1 f_1^{(1)} \overline{g}_2^{(1)}$$

$$+ ... + a_{N-1} f_N^{(1)} \overline{g}_{N-1}^{(1)} + b_N f_N^{(1)} \overline{g}_N^{(1)} + a_N f_N^{(1)} \overline{g}_{N+1}^{(1)} + \frac{1}{\alpha} M'_\infty (f^{(1)}) \overline{M_\infty} (g^{(1)}$$

olur. Buradan da

$$\left(A_h \hat{f}, \hat{g}\right)_N - \left(\hat{f}, A_h \hat{g}\right)_N = a_{-1} f_{-1}^{(1)} \overline{g}_0^{(1)} - a_{-1} f_0^{(1)} \overline{g}_{-1}^{(1)} + a_N f_{N+1}^{(1)} \overline{g}_N^{(1)} - a_N f_N^{(1)} \overline{g}_{N+1}^{(1)}$$

$$+ \frac{1}{\alpha} M_\infty (f^{(1)}) \overline{M'_\infty} (g^{(1)}) - \frac{1}{\alpha} M'_\infty (f^{(1)}) \overline{M_\infty} (g^{(1)})$$

$$= a_{-1} (f_{-1}^{(1)} \overline{g}_0^{(1)} - f_0^{(1)} \overline{g}_{-1}^{(1)}) - a_N \left(f_N^{(1)} \overline{g}_{N+1}^{(1)} - f_{N+1}^{(1)} \overline{g}_N^{(1)}\right)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} M_\infty (f^{(1)}) \overline{M'_\infty} (g^{(1)}) - \frac{1}{\alpha} M'_\infty (f^{(1)}) \overline{M_\infty} (g^{(1)}$$

$$= \left[f^{(1)}, g^{(1)}\right]_{-1} - \left[f^{1}, g^{(1)}\right]_N + \frac{1}{\alpha} M_\infty (f^{(1)}) \overline{M'_\infty} (g^{(1)}) - \frac{1}{\alpha} M'_\infty (f^{(1)}) \overline{M_\infty} (g^{(1)})$$

bulunur. Burada limite geçilirse $N \to \infty$ için

$$(A_h \hat{f}, \hat{g}) - (\hat{f}, A_h \hat{g})$$

$$= \left[f^{(1)}, g^{(1)}\right]_{-1} - \left[f^{(1)}, g^{(1)}\right]_\infty + \frac{1}{\alpha} \left[M_\infty \left(f^{(1)}\right) \overline{M'_\infty \left(g^{(1)}\right)} - M'_\infty \left(f^{(1)}\right) \overline{M_\infty \left(g^{(1)}\right)}\right]$$

bulunur.

Teorem 3.2.2. : A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

İspat : $\hat{y} = \{\hat{y}_n\} \in D(A_h)$ ve $\overline{D(A_h)} = H$ için (3.2.4) eşitliğinden

$$\left(A_h \hat{y}, \hat{y}\right) - \left(\hat{y}, A_h \hat{y}\right)$$

$$= \left[y^{(1)}, y^{(1)}\right]_{-1} - \left[y^{(1)}, y^{(1)}\right]_\infty + \frac{1}{\alpha} \left[M_\infty \left(y^{(1)}\right) \overline{M'_\infty \left(y^{(1)}\right)} - M'_\infty \left(y^{(1)}\right) \overline{M_\infty \left(y^{(1)}\right)}\right]$$

bulunur. (3.1.16) dan dolayı

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=[y^{(1)},y^{(1)}]_{-1}$$

olur. (3.1.17) den de

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=N_1^0(y^{(1)})N_2^0(\overline{y}^{(1)})-N_1^0(\overline{y}^{(1)})N_2^0(y^{(1)})$$

elde edilir ve $M_0(y)=0$ ise $N_2^0(y^{(1)})=-hN_1^0(y^{(1)})$ olacağından

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=N_1^0(y^{(1)})(-\overline{h}N_1^0(\overline{y}^{(1)})+N_1^0(\overline{y}^{(1)})hN_1^0(y^{(1)})$$

$$=\left(h-\overline{h}\right)\left(N_1^0(y^{(1)})N_1^0(\overline{y}^{(1)})\right)$$

$$=\left(h-\overline{h}\right)\left|N_1^0(y^{(1)})\right|^2$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_1^0(y^{(1)})\right|^2$$

bulunur. Buradan da

$$\mathrm{Im}\ \left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)=\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_1^0(y^{(1)})\right|^2\geq 0\ \ (\mathrm{Im}\,h>0)$$

olur. Yani A_h operatörü H de disipatiftir.

3.3 Hilbert Uzayında Sınır Değer Probleminin Ürettiği A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri

Her $\lambda\in C$ için (3.1.13) denkleminin

$$N_1^0(\phi(\lambda))=\phi_{-1}(\lambda)=-1\ , \tag{3.3.1}$$

$$N_2^0(\phi(\lambda)=y_0=h\,,$$

$$N_1^\infty(\chi(\lambda))=\alpha_2-\lambda\,\alpha_2'\quad , \tag{3.3.2}$$

$$N_2^\infty(\chi)(\lambda)=\alpha_1-\lambda\,\alpha_1'$$

koşullarını sağlayan çözümleri $\phi(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun. (3.1.17) den -1 noktasındaki Wronskiyeni olan $\Delta_{-1}(\lambda)$ için

$$\Delta_{-1}(\lambda) := [\chi(\lambda), \phi(\lambda)]_{-1} = -[\phi(\lambda), \chi(\lambda)]_{-1}$$

$$= -N_1^0(\phi(\lambda))N_2^0(\chi(\lambda)) + N_1^0(\chi(\lambda))N_2^0(\phi(\lambda))$$

$$= N_2^0(\chi(\lambda)) + hN_1^0(\chi(\lambda))$$

$$= M_0(\chi(\lambda))$$

dir. (3.1.16) den sonsuzdaki Wronskiyeni olan $\Delta_\infty(\lambda)$ için

$$\Delta_\infty(\lambda) := [\chi(\lambda), \phi(\lambda)]_\infty = -[\phi(\lambda), \chi(\lambda)]_\infty$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(\phi(\lambda))M'_\infty(\chi(\lambda)) - M'_\infty(\phi(\lambda))M_\infty(\chi(\lambda))\right]$$

olur. Buradan da α nın tanımına göre

$$\Delta_\infty(\lambda) = -\frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha_1 N_1^\infty(\phi(\lambda)) \right) - \alpha_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))\right)\left(\alpha'_1 N_1^\infty(\chi(\lambda))\right) - \alpha'_2 N_2^\infty(\chi(\lambda))\right]$$

$$-\left(\alpha'_1 N_1^\infty(\phi(\lambda))\right) - \alpha'_2 N_2^\infty((\phi(\lambda)))\left(\alpha_1 N_1^\infty(\chi(\lambda))\right) - \alpha_2 N_2^\infty(\chi(\lambda)) \;]$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[\alpha_1\alpha'_1 N_1^\infty(\phi(\lambda))N_1^\infty(\phi\chi(\lambda)) - \alpha_1\alpha'_2 N_2^\infty(\chi(\lambda))N_1^\infty(\phi(\lambda))\right.$$

$$-\alpha'_1\alpha_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))N_1^\infty(\chi(\lambda)) + \alpha_2\alpha'_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))N_2^\infty(\chi(\lambda))$$

$$-\alpha_1\alpha'_1 N_2^\infty(\phi(\lambda))N_1^\infty(\chi(\lambda)) + \alpha'_1\alpha_2 N_1^\infty(\phi(\lambda))N_2^\infty(\chi(\lambda))$$

$$\left.+\alpha_1\alpha'_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))N_1^\infty(\chi(\lambda)) + \alpha_2\alpha'_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))N_2^\infty(\chi(\lambda)) \;\right]$$

$$= \frac{-1}{\alpha}\left[\left(\alpha'_1\alpha_2 - \alpha'_2\alpha_1\right)\left(N_1^\infty(\phi(\lambda))N_2^\infty(\chi(\lambda))\right) - N_2^\infty(\phi(\lambda))N_1^\infty(\chi(\lambda))\right]$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\left[(-\alpha)\left(N_1^\infty(\phi)(\lambda)\right)\left(\alpha_1 + \lambda\alpha'_1\right) - N_2^\infty(\phi)(\lambda)\left(\alpha_2 + \lambda\alpha'_2\right)\right]$$

$$= \alpha_1 N_1^\infty(\phi(\lambda)) - \alpha_2 N_2^\infty(\phi(\lambda)) + \lambda\alpha'_1 N_1^\infty(\phi(\lambda)) - \lambda\alpha'_2 N_2^\infty(\phi(\lambda))$$

$$= \alpha_1 N_1^\infty(\phi(\lambda)) - \alpha_2 N_2^\infty(\phi(\lambda)) + \lambda\left(\alpha'_1 N_1^\infty(\phi(\lambda)) - \alpha'_2 N_2^\infty(\phi(\lambda)) \right)$$

$$= M_\infty(\phi(\lambda)) + \lambda M'_\infty(\phi(\lambda))$$

olarak hesaplanır.

Lemma 3.3.1: (3.1.13) – (3.1.15) sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerlerinden ibarettir.

$$(\Delta(\lambda) = \Delta_{-1}(\lambda) = \Delta_{\infty}(\lambda))$$

İspat: $\lambda_0, \Delta_{-1}(\lambda)$ nın bir sıfırı olduğunu kabul edelim. Öyleyse

$$\Delta_{-1}(\lambda_0) = \phi_{-1}(\lambda_0)\chi_0(\lambda_0) - \phi_0(\lambda_0)\chi_{-1}(\lambda_0) = 0 \qquad (3.3.3)$$

dır. $n = -1$ için $\Delta_{-1}(\lambda)$, $\phi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ vektörlerinin Wronskiyeni olduğundan (3.3.3) gereği $\phi(\lambda_0)$ ve $\chi(\lambda_0)$ çözümleri lineer bağımlı olur. Yani

$$\phi(\lambda_0) = k\chi(\lambda_0) \qquad (3.3.4)$$

olacak şekilde $k \neq 0$ sabit sayısı bulunur. (3.3.1) gereği $\phi(\lambda_0)$, (3.1.13) – (3.1.15) sınır değer probleminin $\lambda = \lambda_0$ için bir çözümü olur. Yani $\lambda = \lambda_0$ bir özdeğerdir.

Şimdi bunun tersinin de doğru olduğunu gösterelim. Yani $\lambda = \lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_{-1}(\lambda_0) = 0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0)$=0 olduğunu gösterelim. $\lambda = \lambda_0$ özdeğer için $\Delta_{-1}(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\Delta_{-1}(\lambda_0) \neq 0$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda_0) \neq 0$ ise $\phi(\lambda_0)$ ve $\chi_n(\lambda_0)$ vektörleri lineer bağımsız olur. Buna göre (3.1.13) denkleminin genel çözümünü

$$y(\lambda_0) = c_1(\lambda_0)\phi(\lambda_0) + c_2\chi(\lambda_0)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1.14) sınır koşulu gereği

$$y_0 + hy_{-1} = 0$$

eşitliği sağlanır. Buradan (3.1.14) koşulu dikkate alınırsa

$$c_1(\phi_o(\lambda_0) + h\phi_{-1}(\lambda_0)) + c_2(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_{-1}(\lambda_0)) = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $\phi(\lambda_0)$ çözüm vektörünün (3.1.14) sınır koşulunu sağladığı göz önüne alınırsa

$$c_2(\chi_0(\lambda_0) + h\chi_{-1}(\lambda_0)) = c_2\Delta_{-1}(\lambda_0) = 0$$

bulunur. Kabulümüz gereği $\Delta_{-1}(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olur. (3.1.14) koşulundan ve $c_2 = 0$ olmasından

$$c_1 \{ [\phi(\lambda_0), v]_\infty (\alpha_1 - \lambda \alpha_1') - [\phi(\lambda_0, u)]_\infty (\alpha_2 - \lambda \alpha_2') \}$$

$$= c_1 \Delta_\infty (\lambda_0) = 0$$

dır. Kabul gereği $\Delta_\infty(\lambda_0) \neq 0$ olduğundan $c_1 = 0$ olur. $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olduğundan sonuç olarak $y(\lambda_0) = 0$ olur. Bu λ_0 ın özdeğer olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

$\Delta_{-1}(\lambda)$ ve $\Delta_\infty(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını λ_n $(n = 0,1,...)$ şeklinde gösterirsek

$$\hat{\chi}_n = \begin{pmatrix} \chi(\lambda_n) \\ M'_\infty(\chi(\lambda_n)) \end{pmatrix} \in D(A_h)$$

vektörleri $A_h \hat{\chi}_n = \lambda_n \hat{\chi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\chi}_n$ ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 3.3.2: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemi

$$\ell(y_0) = \lambda_0 y_0,$$

$$M_\infty(y_0) - \lambda_0 M'_\infty(y_0) = 0,$$

$$M_0(y_0) = 0,$$

$$\ell(y_s) - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0,$$

$$M_\infty(y_s) - \lambda_0 M'_\infty(y_s) - M'_\infty(y_{s-1}) = 0,$$

$$M_0(y_s) = 0, \quad s = 1,2,...,n \tag{3.3.5}$$

şartlarını sağlıyorsa $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemine (3.1.13) – (3.1.15) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir.

Lemma 3.3.3: (3.1.13) – (3.1.15) sınır probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır.

Bunun dışında (3.1.13) – (3.1.15) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ özvektörler ve birleştirilmiş vektörler zinciri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ özvektörler ve birleştirilmiş vektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_\infty(y_k) \end{pmatrix}, \quad k = 0,1,2, \ldots, n \qquad (3.3.6)$$

formülü geçerlidir.

İspat: Eğer $\hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0$ ise $\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0$,

$M_\infty(y_0) - \lambda_0 M'_\infty(y_0) = 0$, $M_0(y_0) = 0$ eşitlikleri sağlanır. Yani (3.1.13) – (3.1.15) sınır değer probleminin özvektörü y_0 dır. Tersine olarak eğer (3.3.5.) şartları sağlanırsa buradan $\begin{pmatrix} y_0 \\ M'_\infty(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0$ dir. Yani $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür. Ayrıca, eğer, A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ özvektörler ve birleştirilmiş vektörler zinciri ise buradan $\hat{y}_k \in D(A_h)$ $(k = 0,1,2,...,n)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$, $A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + \hat{y}_{s-1}$, $s = 1,2,\ldots,n$ şartları ile birlikte (3.3.5) eşitliklerini elde ederiz. Burada $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ ler $\hat{y}_0, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir. Tersine, (3.1.13) – (3.1.15) problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ vektörleri için $\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_\infty(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h)$, k = 0,1,2,…., n ve $A_h \hat{y}_0, = \lambda_n \hat{y}_0$, $A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + y_{s-1}$, $s = 1,2, \ldots, n$ elde ederiz. Böylece lemma 3.3.3 ispatlanmış olur.

3.4. Disipatif Durumunda A_h Operatörünün Kendine Eş Dilatasyonu ve Karakteristik Fonksiyonu

Disipatif A_h operatörünün kendine eş dilatasyonunu kurmak için $H = \ell_w^{\,2}(IN) \oplus C$ uzayına giren $D_- = L^2(-\infty,0)$ ve çıkan $D_+ = L^2(0,\infty)$ alt uzaylarını ekleyelim ve $\mathcal{H} = L^2(-\infty,0) \oplus H \oplus L^2(0,\infty)$ ortogonal toplamını oluşturalım. Bu uzaya *"Esas Hilbert dilatasyon uzayı"* denir. $\mathcal{H}$ nin elemanlarını $w = <\varphi_-, \hat{y}, \varphi_+> \in \mathcal{H}$ şeklinde yazalım ve $\varphi_- \in W_2^{\,1}(-\infty,0)$ ve $\varphi_+ \in W_2^1(0,\infty)$, $\hat{y} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix} \in H$ dir. W_2^1 Sobolev uzayıdır. $\mathcal{H}$ uzayında $w \in D(\mathcal{L}_h)$ elemanlarının üzerinde

$$y_0 + h y_{-1} = \sqrt{a_{-1}}\,\beta\varphi_-(0),$$

$$y_0 + \overline{h}\, y_{-1} = \sqrt{a_{-1}}\,\beta\varphi_+(0),$$

$$y^{(2)} = M'_\infty(y^{(1)}) \tag{3.4.1}$$

ve $\beta^2 := 2\operatorname{Im} h,\ \ \beta > 0$ sınır koşullarını sağlayan

$$\mathcal{L}\langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle = \langle i\frac{d\varphi_-}{d\varepsilon}, \tilde{\ell}(\hat{y}), i\frac{d\varphi_+}{d\varepsilon} \rangle \tag{3.4.2}$$

diferensiyel ifadesi ile oluşturulan $\mathcal{L}_h$ operatörünü göz önüne alalım.

Teorem 3.4.1: $\mathcal{L}_h$ operatörü $\mathcal{H}$ uzayında kendine eş operatördür.

İspat: Önce $\mathcal{L}_h$ operatörünün simetrik olduğunu ispatlayalım. $f, g \in D(\mathcal{L}_h)$ için $f = \langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle$ ve $g = \langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle$ olsun. Bu durumda

$$\left(\mathcal{L}_h f, g\right)_{\mathcal{H}} - \left(f, \mathcal{L}_h g\right)_{\mathcal{H}} = \left(\mathcal{L}\langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle, \langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle\right)$$

$$- \left(\langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle, \mathcal{L}\langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle\right)$$

$$=\left(\langle i\frac{d\varphi_-}{d\varepsilon},\tilde{\ell}(\hat{y}),i\frac{d\varphi_+}{d\varepsilon}\rangle,\langle\psi_-,\hat{z},\psi_+\rangle\right)$$

$$-\left(\langle\varphi_-,\hat{y},\varphi_+\rangle,\langle i\frac{d\psi_-}{d\varepsilon},\tilde{\ell}(\hat{z}),i\frac{d\psi_+}{d\varepsilon}\rangle\right)$$

bulunur. Buradan da $\mathcal{H}$ uzayının bileşenlerine geçerek

$$=\int_{-\infty}^{0}\left(i\frac{d\varphi_-}{d\varepsilon},\psi_-\right)d\varepsilon+\left(\tilde{\ell}(\hat{y}),\hat{z}\right)_H+\int_{0}^{\infty}\left(i\frac{d\varphi_+}{d\varepsilon},\psi_+\right)d\varepsilon$$

$$-\int_{-\infty}^{0}\left(\varphi_-,i\frac{d\psi_-}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon-\left(\hat{y},\tilde{\ell}(\hat{z})\right)_H-\int_{0}^{\infty}\left(\varphi_+,i\frac{d\psi_+}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

$$=\int_{-\infty}^{0}i\varphi_-'\overline{\psi}_-d\varepsilon+\left(\tilde{\ell}(\hat{y}),\hat{z}\right)_H+\int_{0}^{\infty}\varphi_+'\overline{\psi}_+d\varepsilon$$

$$-\int_{-\infty}^{0}i\psi_-'\overline{\varphi}_-d\varepsilon-\left(\hat{y},\tilde{\ell}(\hat{z})\right)_H-\int_{0}^{\infty}i\psi_+'\overline{\varphi}_+d\varepsilon$$

elde edilir. (3.2.4), (3.1.16) ve kısmî integrasyondan

$$\left(\mathcal{L}_h f,g\right)_{\mathcal{H}}-\left(f,\mathcal{L}_h g\right)_{\mathcal{H}}=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}-\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{\infty}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[M_\infty\left(y^{(1)}\right)\overline{M}'_\infty\left(z^{(1)}\right)-M'_\infty\left(y^{(1)}\right)\overline{M}_\infty\left(z^{(1)}\right)\right]$$

$$+i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0)-i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0)$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}+\frac{i}{\beta^2}\left[\left(y_0^{(1)}+hy_{-1}^{(1)}\right)\left(\overline{z_0^{(1)}+hz_{-1}^{(1)}}\right)-\left(y_0^{(1)}+\overline{h}y_{-1}^{(1)}\right)\left(\overline{z_0^{(1)}+\overline{h}z_{-1}^{(1)}}\right)\right]$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}+\frac{i}{\beta^2}\left[y_0^{(1)}\overline{z}_0^{(1)}+\overline{h}y_0^{(1)}\overline{z}_{-1}^{(1)}+hy_{-1}^{(1)}\overline{z}_0^{(1)}+h\overline{h}y_{-1}^{(1)}\overline{z}_{-1}^{(1)}-y_0^{(1)}\overline{z}_{-1}^{(1)}-hy_0^{(1)}\overline{z}_0^{(1)}-h\overline{h}y_{-1}^{(1)}\overline{z}_{-1}^{(1)}\right]$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}+\frac{i}{\beta^2}\left[\left(\overline{h}-h\right)y_0^{(1)}\overline{z}_{-1}^{(1)}-\left(\overline{h}-h\right)y_{-1}^{(1)}\overline{z}_0^{(1)}\right]$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}+\frac{i}{\beta^2}\left[\left(\overline{h}-h\right)\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_{-1}\right]$$

$$=[y^{(1)},z^{(1)}]_{-1}-[y^{(1)},z^{(1)}]_{-1}=0$$

olur. Yani $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} = 0$ olduğundan $\mathcal{L}_h$ simetrik bir operatördür. $\mathcal{L}_h$ operatörünün kendine eş olduğunu göstermek için $\mathcal{L}_h^* \subset \mathcal{L}_h$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$f = \langle \varphi_-, 0, \varphi_+ \rangle \in D(\mathcal{L}_h), \; g = \langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle \in D(\mathcal{L}_h^*)$$

alalım. $\varphi_\pm \in W_2^1, \varphi_\mp(0) = 0$ için $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ bilineer formunu alalım.

Kısmi integrasyon ile $\mathcal{L}_h^* g = \langle i\dfrac{d\psi}{d\varepsilon}, \hat{z}^*, \dfrac{d\psi_+}{d\varepsilon} \rangle$ elde edilir. Burada $\psi_{\pm} \in L^2(R_{\pm}), \hat{z}^* \in H$ dir. Benzer şekilde $f = \langle 0, \hat{y}, 0 \rangle \in D(\mathcal{L}_h)$ ise $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ de kısmi integrasyon ile $z^{(1)} \in D, z^{(2)} = M'_\infty(z^{(1)})$ için

$$\mathcal{L}_h^* g = \mathcal{L}_h^* \langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle = \langle i\frac{d\psi_-}{d\varepsilon}, \tilde{\ell}(\hat{z}), i\frac{d\psi_+}{d\varepsilon} \rangle \tag{3.4.3}$$

olur.

$\mathcal{L}_h$ operatörü için (3.4.2) de tanımlandığı şekilde her $f \in D(\mathcal{L}_h)$ için $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} = (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}}$ olur. (3.4.3) den dolayı $(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}}$ bilineer formundaki integral dışındaki terimlerinin toplamı sıfıra eşit olmalıdır. Yani ,

$$[y^{(1)}, z^{(1)}]_{-1} - [y^{(1)}, z^{(1)}]_\infty + \frac{1}{\alpha}\left[M_\infty(y^{(1)})M'_\infty(z^{(1)}) - M'_\infty(y^{(1)})M_\infty(z^{(1)})\right]$$

$$+ i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0) = 0$$

dır. (3.1.16) eşitliği yukarıda yazılıp düzenlenirse

$$[y^{(1)}, z^{(1)}]_{-1} = i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0)$$

dır. $\mathcal{L}_h$ nin sınır şartlarından y_{-1} ve y_0 çözersek

$$y_{-1} = \frac{\sqrt{a_{-1}}}{i\beta}(\varphi_+(0) - \varphi_-(0)),$$

$$y_0 = \sqrt{a_{-1}}\,(\beta\varphi_-(0) - \frac{h}{i\beta}(\varphi_+(0) - \varphi_-(0)))$$

bulunur ve buradan da

$$\left[z^{(1)}, y^{(1)}\right]_{-1} = i\varphi_{-}(0)\overline{\psi}_{-}(0) - i\varphi_{+}(0)\overline{\psi}_{+}(0)$$

elde edilir.

$$\left[y, z\right]_{-1} = a_{-1}(y_{-1}\bar{z}_{0} - y_{0}\bar{z}_{-1})$$

eşitliğinden

$$\frac{1}{i\beta}(\varphi_{+}(0) - \varphi_{-}(0))\,\bar{z}_{0} - \left[\beta\varphi_{-}(0) - \frac{h}{i\beta}(\varphi_{+}(0) - \varphi_{-}(0))\right]\bar{z}_{-1}$$

$$= i\varphi_{-}(0)\overline{\psi}_{-}(0) - i\varphi_{+}(0)\overline{\psi}_{+}(0) \tag{3.4.4}$$

dır. Yukarıdaki denklemden $\varphi_{-}(0)$ ın katsayılarını eşitlersek

$$\frac{i\beta^{2} - h}{\beta}\bar{z}_{-1} + \frac{1}{\beta}\bar{z}_{0} = \psi_{-}(0)$$

veya

$$z_{0} + hz_{-1} = \beta\psi_{-}(0) \tag{3.4.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\varphi_{+}(0)$ ın katsayılarını eşitlersek

$$z_{0} + \bar{h}z_{-1} = \beta\psi_{+}(0) \tag{3.4.6}$$

bulunur. Sonuç olarak $D(\mathcal{L}_h^{*}) \subset D(\mathcal{L}_h)$ olduğu görülür. Böylece $\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_h^{*}$ dır.

3.5. $\mathcal{L}_h$ Operatörünün Oluşturduğu Üniter Grup

$\mathcal{L}_h$ operatörünün, A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu gösterelim. Stone teoremine göre $\mathcal{L}_h$ kendine eş operatörü $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $U_t = \exp(i\mathcal{L}_h t), t \in IR_{+} = (0, \infty)$ üniter grubu oluşturabilmektedir. $P : \mathcal{H} \to H$ ve $P_1 : H \to \mathcal{H}$ dönüşümlerini $P : \langle \varphi_{-}, \hat{y}, \varphi_{+} \rangle \to \hat{y}$ ve $P_1 : y \to \langle 0, \hat{y}, 0 \rangle$ biçiminde ifade edelim. Üniter grup yardımıyla

$Z_t := PU_tP_1, t \geq 0$ için $\{Z_t\}$ operatörler ailesi H da tamamen üniter olmayan büzülmelerin güçlü sürekli bir yarı grubudur. Bu yarı grubun B_h ile gösterilen üreteci

$$B_h\hat{y} = \lim_{t\to+0}(it)^{-1}(Z_t\hat{y} - \hat{y})$$

eşitliği ile gösterilebilir. B_h üretecinin tanım bölgesi, bu limitin mevcut olduğu bütün $\hat{y}$ vektörlerini içerir. B_h operatörü disipatiftir ve $\mathcal{L}_h$ operatörüne B_h ın *kendine eş dilatasyonu* denir. (Kuzhel, 1996; Nagy and Foiaş, 1970).

Teoerm 3.5.1: $\mathcal{L}_h$ operatörü A_h operatörünün kendine eş dilatasyonudur.

İspat: $B_h = A_h$ olduğunu gösterirsek, $\mathcal{L}_h$ operatörünün A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu göstermiş oluruz. Bunu yapmak için ilk olarak

$$P(\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1}P_1\hat{y} = (A_h - \lambda I)^{-1}P_1\hat{y} \;\; , \hat{y} \in H, \operatorname{Im}\lambda < 0 \tag{3.5.1}$$

eşitliğini doğrulayalım (Kuzhel 1996, Nagy and Foiaş 1970). Bunun için

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1}P_1\hat{y} = g = \langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle$$

ifadesini göz önüne alalım. Buradan

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I)g = P_1\hat{y}$$

veya

$$(\mathcal{L}_h - \lambda I)\langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle = (0, \hat{y}, 0)$$

$$\langle i\frac{d\psi_-}{d\varepsilon}, \tilde{\ell}(\hat{z}), i\frac{d\psi_+}{d\varepsilon}\rangle - \lambda\langle \psi_-, \hat{z}, \psi_+ \rangle = \langle 0, \hat{y}, 0\rangle$$

olur. Bu eşitliği bileşenler şeklinde yazarsak

$$\frac{d\psi_-}{d\varepsilon} - \lambda\psi_- = 0 \Rightarrow \psi_-(\varepsilon) = \psi_-(0)e^{-i\lambda\varepsilon},$$

$$\frac{d\psi_+}{d\varepsilon} - \lambda\psi_+ = 0 \Rightarrow \psi_+(\varepsilon) = \psi_+(0)e^{-i\lambda\varepsilon}$$

elde edilir. $g \in D(\mathcal{L}_h)$ olduğundan $\psi_- \in \mathcal{L}^2(-\infty,0)$ ve $\psi_-(0)=0$ dır. Sonuç olarak $\hat{z}, z_0 + hz_{-1}=0$ sınır koşulunu sağlar. Böylece $\hat{z} \in D(A_h)$ olur.

$$\tilde{\ell}(\hat{z}) - \lambda\,\hat{z} = \hat{y} \Rightarrow L\hat{z} - \lambda\,\hat{z} = \hat{y}$$

denklemi için ise $\operatorname{Im}\lambda < 0$ için λ noktası, disipatif operatörünün bir özdeğeri olamaz. $\beta\psi_+(0) = (z_0 + \bar{h}z_{-1})$ formülünden $\psi_+(0)$ bulunur. Böylece $\hat{y} \in H$ ve $\operatorname{Im}\lambda < 0$ için

$$(A_h - \lambda\, I)\hat{z} = \hat{y} \Rightarrow \hat{z} = (A_h - \lambda\, I)^{-1} y + z_\lambda$$

bir çözümdür ve burada z_λ,

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_{n+1}y_{n+1} - \lambda\, \mathrm{w}_n y_n = 0$$

denkleminin (3.4.1) sınır koşullarını sağlayan bir çözümüdür.

Ancak $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olduğundan z_λ disipatif A_h operatörünün bir özvektörüdür. Bu ise mümkün değildir. Çünkü disipatif operatörlerin özdeğerleri üst yarı düzlemdedir. Dolayısı ile $z_\lambda \equiv 0$ bulunur. Buradan

$\hat{z} = (A_h - \lambda I)^{-1}\hat{y}$ dir. P dönüşümünün uygulanmasıyla (3.5.1) ifadesi elde edilir. Yani

$$(A_h - \lambda I)^{-1} = P(\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} P_1 = iP\int_0^\infty U_t e^{-i\lambda t} dt P_1$$

$$= -i\int_0^\infty Z_t e^{-i\lambda t} dt = (B_h - \lambda I)^{-1}, \ \operatorname{Im}\lambda < 0$$

bulunur. Böylece $B_h = A_h$ olduğu görülür ve teorem ispatlanır.

3.6 Dilatasyonun Saçılma Teorisi ve Disipatif Operatörün Fonksiyonel Modeli

$\{u_t\}$ üniter grubunun en önemli özelliği Lax – Philips saçılma teorisinin uygulanmasına imkan vermesidir. Yani bu grup aşağıdaki özellikleri sağlayan giren $D_- = \langle \mathrm{L}^2(-\infty,0),0,0\rangle$ ve çıkan $D_+ = \langle 0,0,L^2(0,\infty)\rangle$ alt uzaylarına sahiptir.

1) $U_t D_- \subset D_-,\ t \le 0$ ve $U_t D_+ \subset D_+,\ t \ge 0$

2) $\bigcap\limits_{t\le 0} U_t D_- = \bigcap\limits_{t\ge 0} U_t D_+ = \{0\}$

3) $\bigcup\limits_{t\le 0} U_t D_- = \bigcup\limits_{t\ge 0} U_t D_+ = \mathcal{H}$

4) $D_- \perp D_+$

Bu özellikler ispatlanabilir. 4) özelliğinin doğruluğu açıktır. 1) özelliğini ispatlamak için D+ alt uzayı için $R_\lambda = (\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1}$ ifadesini oluşturalım. $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olmak üzere, yarı düzlemdeki her λ ve $f = \langle 0,0,\varphi_+(s)\rangle \in D_+$ için,

$$R_\lambda f = \langle 0,0,-ie^{i\lambda\varepsilon}\int_0^\infty e^{i\lambda\varepsilon}\varphi_+(s)ds\rangle$$

olur. Buradan $R_\lambda f \in D_+$ olduğu görülür. Bu durumda $g \perp D_+$ için $\operatorname{Im}\lambda < 0$ olmak üzere

$$0 = (R_\lambda f, g)_{\mathcal{H}} = \left((\mathcal{L}_h - \lambda I)^{-1} f, g\right)_{\mathcal{H}} = \left(-i\int_0^\infty e^{i(\mathcal{L}_h - \lambda I)t} f dt, g\right)_{\mathcal{H}}$$

$$= \left(-i\int_0^\infty e^{i\mathcal{L}_h t} e^{-i\lambda t} f dt, g\right)_{\mathcal{H}} = -i\int_0^\infty e^{-i\lambda t}\left(U_t f, g\right)_{\mathcal{H}} dt$$

bulunur. Buradan da her $t \ge 0$ için $\left(U_t f, g\right)_{\mathcal{H}} = 0$ olduğu görülür. Böylece $U_t f \in D_+$ dir. Yani $t \ge 0$ için $U_t f \subset D_+$ dir. (D_- alt uzayı için de ispatlar benzer şekilde yapılır) Böylece 1) özelliğini ispatlanmış oldu. 2) özelliğini ispatlamak için $p^+ : \mathcal{H} \to L^2(0,\infty)$ ve $p_1^+ : L^2(0,\infty) \to D_+$ dönüşümlerini $p^+ : \langle \psi_-, \hat{y}, \psi_+\rangle \to \varphi_+,\ P_1^+ := \varphi \to \langle 0,0,\varphi\rangle$ olarak tanımlayalım.

$U_t^+ := p^+ U_t P_1^+,\ (t \ge 0)$ izometriler yarı grubunun $L^2(0,\infty)$ da tek taraflı bir öteleme olduğunu dikkate alalım. Hakikaten,

$$V_t\varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon - t),\ \varepsilon > t \text{ ve } V_t\varphi(\varepsilon) = 0,\ 0 \le \varepsilon \le t$$

şeklinde ifade edilen $L^2(0,\infty)$ üzerindeki V_t tek taraflı öteleme yarı grubunun üretecinin $\varphi(0)=0$ sınır koşuluna sahip $i\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)$ diferansiyel operatörü olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan, $t \geq 0$ olmak üzere U_t^+ izometriler yarıgrubunun üreteci olan S operatörü

$$S\varphi = p^+ \mathcal{L}_h p_1^+ \varphi = p^+ \mathcal{L}_h < 0,0,\varphi\rangle = p^+ \langle 0,0, i\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\rangle = i\frac{d\varphi}{d\varepsilon}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\varphi \in W_2^1(0,\infty)$ ve $\varphi(0)=0$ dır. Fakat bir yarıgrubun üreteci tek türlü belirlenebileceğinden dolayı $U_t^+ = V_t$ olmalıdır ve böylece

$$\bigcap_{t\geq 0} U_t D_+ = \langle 0,0, \bigcap_{t\geq 0} V_t L^2(0,\infty)\rangle = \{0\}$$

bulunur ve 2) özelliği ispatlanmış olur.

Lax – Philips saçılma teorisinin uygulanabilmesi için, spektral gösterim yardımıyla saçılma matrisi tanımlayalım. Bu yolla D_- ve D_+ alt uzayları için 3) özelliğini ispatlayalım. 3) özelliğini ispatlamak için önce aşağıdaki lemmayı ispatlayım.

Lemma 3.6.1: A_h operatörü tamamen kendine eş olmayandır (basittir).

İspat: Tersini kabul edelim yani A_h operatörü basit olmasın. O halde $H' \subset H$ invaryant alt uzayı vardır ve bu alt uzay üzerinde A_h operatörünün kısıtlaması olan A_h' operatörü kendine eştir. (H' alt uzayı $V_t = \exp(iA_h), V_t^* = \exp(-iA_h^*), t > 0$, $V_t^{*-1} = V_t$ izometrilerinin yarı grubuna göre invaryanttır.) H' alt uzayının $\{0\}$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Bunun için, $\hat{f} \in H' \bigcap D(A_h) = D(A_h')$ ise $\hat{f} \in D(A_h'^*)$ ve

$$0 = \frac{d}{dt}\left\| e^{iA_h' t}\hat{f}\right\|_H^2 = \frac{d}{dt}(e^{iA_h' t}\hat{f}, e^{iA_h' t}\hat{f})_H$$

$$= i\left(A_h' e^{iA_h' t}\hat{f}, e^{iA_h' t}\hat{f}\right)_H - i\left(e^{iA_h' t}\hat{f}, A_h' e^{iA_h' t}\hat{f}\right)_H$$

dir. (3.2.4) özelliğini kullanarak ve $\hat{g} = e^{iA_h^{\prime}t}\hat{f}$ alınarak,

$$0 = i\left(A_h^{\prime}\hat{g}, \hat{g}\right)_H - \left(\hat{g}, A_h^{\prime}\hat{g}\right)_H$$

$$= [g^{(1)}, g^{(1)}]_{-1} - \left[g^{(1)}, g^{(1)}\right]_{\infty} + \frac{1}{\alpha}\left[M_{\infty}(g^{(1)})\overline{M_{\infty}^{\prime}(g^{(1)})} - M_{\infty}^{\prime}(g^{(1)})\overline{M_{\infty}(g^{(1)})}\right]$$

$$= 2\operatorname{Im} h\left|N_1^0(g^{(1)})\right|^2$$

$$= \beta^2\left|e^{iA_h^{\prime}t}\hat{f}^{(1)}(-1)\right|$$

olur. $\hat{f} \in D(A_h^{\prime})$ olduğundan $A_h^{\prime}$ operatörü yukarıdaki koşulu sağlar. Ayrıca bu koşulu $A_h^{\prime}$ operatörünün özvektörleride sağlamalıdır. Böylece $H^{\prime}$ de yer alan $A_h^{\prime}$ operatörünün özvektörleri olan A_h operatörünün $\hat{y}(\lambda)$ özvektörleri için $y_{-1} = 0$ dır. (3.1.14) koşulundan $y_0 = 0$ ve $\hat{y}(\lambda) = 0$ dır. Böylece $A_h^{\prime}$ kendine eş operatörünün özvektörlerinin açılımı teoreminden $H^{\prime} = \{0\}$'dır. Yani A_h operatörü basittir ve böylece lemma ispatlanmış olur.

Aşağıdaki şekilde olan

$$\mathcal{H}_{-} = \overline{\bigcup_{t \geq 0} U_t D_{-}} \text{ ve } \mathcal{H}_{+} = \overline{\bigcup_{t \leq 0} U_t D_{+}}$$

uzaylarını oluşturalım.

Lemma 3.6.2 $\mathcal{H}_{-} + \mathcal{H}_{+} = \mathcal{H}$ eşitliği sağlanır.

İspat : $D_{\pm}$ alt uzayının 1) özelliğini düşünelim. $H_t^{\prime}$, H nin bir alt uzayı olmak üzere, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}\Theta\left(\mathcal{H}_{-} + \mathcal{H}_{+}\right)$ alt uzayı $\{U_t\}$ üniter grubuna göre invaryantır ve $\mathcal{H}^{\prime} = \langle 0, H^{\prime}, 0\rangle$ biçiminde ifade edilir. Böylece, eğer $\mathcal{H}^1$ alt uzayı $\left(\text{ve } H^{\prime}\right)$ sıfırdan farklı olsaydı, bu alt uzaya kısıtlanmış $\{U_t^{\prime}\}$ üniter grubu $\{U_t\}$ grubunun üniter parçası olacaktı ve bundan dolayı A_h operatörünün $A_h^{\prime}$ kısıtlaması H de $H^{\prime}$ kendine eş bir operatör olacaktı. Ancak A_h operatörünün basitliğinden dolayı (Lemma 3.6.1) $H' = \{0\}$'dır. Yani $\mathcal{H} = \{0\}$ dir. Böylece Lemma ispatlanır.

Lax – Philips saçılma teorisinde saçılma matrisi (fonksiyonu) spektral gösterim teorisi yoluyla tanımlanmıştır. Biz bu yapıyı oluşturmakla birlikte D_- ve D_+ alt uzayları için 3) özelliğini de ispatlayacağız.

$(\ell y)_n = \lambda y_n \ \ (n \in IN)$ denkleminin

$$\theta_{-1}(\lambda) = \frac{\alpha_1'}{\alpha}, \quad \theta_0(\lambda) = \frac{\alpha_2'}{\alpha}, \mathrm{N}_1^\infty(\chi) = \alpha_2 - \alpha_2'\lambda, \mathrm{N}_2^\infty(\chi) = \alpha_1 - \alpha_1'\lambda \text{ koşullarını}$$

sağlayan çözümleri $\theta(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun.

$$\eta(\lambda) := \frac{\chi_0(\lambda)}{\chi_{-1}(\lambda)} \quad , \tag{3.6.1}$$

$$S_h(\lambda) := \frac{\eta_h(\lambda)}{\eta_{\bar{h}}(\lambda)} = \frac{\eta(\lambda) + h}{\eta(\lambda) + \bar{h}} \tag{3.6.2}$$

kabullerini yapalım. (3.6.1) deki $\eta(\lambda)$ fonksiyonu, reel eksen üzerindeki kutupları sayılabilir sayıda olan C kompleks düzleminde meromorfik bir fonksiyondur. Hatta, $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını göstermek mümkündür.

$$\operatorname{Im}\lambda \ \ \operatorname{Im}\eta(\lambda) < 0 \ \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

ve $\eta(\lambda)$ nın reel eksendeki kutupları hariç her $\lambda \in C$ için $\overline{\eta(\lambda)} = \eta(\bar{\lambda})$ dir.

$$U_\lambda^-(\varepsilon, \varsigma) = \langle e^{-i\lambda\varepsilon}, \beta\{(\eta(\lambda) + h)\chi_{-1}(\lambda)\}^{-1}\hat{\chi}(\lambda), \bar{S}_h(\lambda)e^{-i\lambda\varsigma}\rangle \tag{3.6.3}$$

alalım. Burada $\varsigma \in (0, \infty), \varepsilon \in (-\infty, 0), \hat{\chi}(\lambda) = \begin{pmatrix} \chi(\lambda) \\ \alpha \end{pmatrix}$ dır. λ nın reel değerleri için $U_\lambda^-(\varepsilon, \varsigma)$ vektörleri $\mathcal{H}$ uzayına ait değildir.

Lemma 3.6.3: $U_\lambda^-(\varepsilon, \varsigma)$ vektörleri $\mathcal{L}U = \lambda U$ denklemini ve L_λ operatörü için verilen (3.4.1) sınır koşullarını sağlar.

İspat: $U_\lambda^-(\varepsilon,\varsigma)$ vektörünün $\mathcal{L}U=\lambda U$ denklemini sağladığı görülebilir. Şimdi de (3.4.1) sınır koşullarının sağlandığını görelim.

$$M'_\infty(\chi)=\left(\ \alpha_1'[\chi(\lambda),v]_\infty-\alpha_2'[\chi(\lambda),v]_\infty\ \right)$$

$$=\left(\ \alpha_1'(\alpha_2-\alpha_2'\lambda)-\alpha_2'(\alpha_1-\alpha_1'\lambda)\ \right)$$

$$=\left(\ \alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1-\lambda(\alpha_1'\alpha_2'-\alpha_2'\alpha_1')\ \right)=\alpha\,,$$

$$y_0+hy_{-1}=\beta\frac{1}{\eta(\lambda)+h}\left(\frac{\chi_0(\lambda)}{\chi_{-1}(\lambda)}+h\frac{\chi_{-1}(\lambda)}{\chi_{-1}(\lambda)}\right)$$

$$=\beta\frac{1}{\eta(\lambda)+h}(\eta(\lambda)+h)=\beta$$

olur. Benzer şekilde

$$y_0+\overline{h}y_{-1}=\beta\overline{S}_h(\lambda)$$

bulunur. Burada U_λ^- ler $\mathcal{L}_h$ operatörünün sürekli spektrumunun özfonksiyonlarıdır.

$U_\lambda^-(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri yardımıyla $f=\langle\varphi_-,\hat{y},\varphi\rangle$ elemanları üzerinde $F_-:f\to\tilde{f}_-(\lambda)$ dönüşümünü

$$(F_-f)(\lambda):=\tilde{f}_-(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f,U_\lambda^-\right)_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada , $\varphi_+(\varepsilon),\varphi_-(\varsigma)$ kompakt dayanıklı fonksiyonlardır ve $y=\{y_n\}$ $(n\in IN)$ dizisi sonlu sayıda terimleri sıfırdan farklı olan bir dizidir.

Lemma 3.6.4: F_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(IR)$ uzayına dönüştürür. Her $f,g\in H_-$ elemanlar için Parseval eşitliği ve ters dönüşüm formülleri geçerlidir. Yani

$$(f,g)_{\mathcal{H}}=\left(\tilde{f}_-,\tilde{g}_-\right)_{L^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}_-(\lambda)\overline{\tilde{g}_-(\lambda)}d\lambda$$

ve

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_+(\lambda) U_\lambda^+ d\lambda$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $\tilde{f}_-(\lambda) = (F_- f)(\lambda)$ ve $\tilde{g}_-(\lambda) = (F_- g)(\lambda)$ dır.

İspat: $f, g \in D_-$ için $f = \langle \varphi_-, 0, 0 \rangle$, $g = \langle \psi_-, 0, 0 \rangle$, olmak üzere, Paley- Wiener teoremi ile

$$\tilde{f}\,(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(f, U_\lambda^- \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \varphi_-(\varepsilon) e^{i\lambda\varepsilon} d\varepsilon \in H_-^2$$

dir. Fourier integralleri için Parseval eşitliği kullanılarak,

$$(f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{0} (\varphi_-(\varepsilon), \psi_-(\varepsilon)) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{0} \tilde{f}_-(\lambda) \tilde{g}_-(\lambda) d\lambda = (F_- f, F_- g)_{L^2}$$

bulunur. Burada $H_\pm^2$, üst ve alt yarı düzlemlere genişletebilen vektör değerli analitik fonksiyonları içeren $L^2(IR)$ uzayındaki Hardy sınıflarını göstermektedir.

Şimdi Parseral eşitliğini tüm H_- uzayına genişletelim. Bunun için D_- ye ait olan düzgün ve kompakt dayanağa sahip fonksiyonlardan elde edilen H_- de yoğun olan vektörler kümesini H_-^ι ile gösterelim. Bu vektörler için

$$f \in H_-^\iota : f = U_t f_0, \; f_0 = < \varphi_-, \, 0, 0 \rangle \in C_0^\infty(-\infty, 0)$$

olur. Burada $T = T_f, f$ ye bağlı olmayan negatif bir sayıdır. Bu durumda, eğer $f, g \in H_-^\iota$ ise $T > T_f$ ve $T > T_g$ için $U_{-T} f, U_{-T} g \in D_-$ dir ve bu vektörlerin birinci bileşenleri $C_0^\infty(-\infty, 0)$ uzayındadır. Böylece $U_t (t \in IR)$ operatörleri üniter olduğundan

$$F_- U_t f = \left(U_t f, U_\lambda^- \right)_{\mathcal{H}} = e^{i\lambda t} \left(f, U_\lambda^- \right)_{\mathcal{H}} = e^{i\lambda t} F_- f$$

dir ve bu eşitlik yardımıyla

$$\begin{aligned} (f, g)_{\mathcal{H}} &= (U_{-T} f, U_{-t} g)_{\mathcal{H}} = (F_- U_{-T} f, F_- U_{-T} g)_{L^2} \\ &= \left(e^{-i\lambda t} F_- f, e^{-i\lambda t} F_{-g} \right)_{L^2} = (F_- f, F_- g)_{L^2} \qquad (3.6.4) \end{aligned}$$

elde edilir.

H'_- uzayı H_- de yoğun olduğundan (3.6.4) deki ifadenin kapanışı alınarak H_- uzayında Parseval eşitliği elde edilmiş olur. Parseval eşitliğindeki tüm integrallerin, sonlu aralıklar üzerinde limitleri alınarak, ters dönüşüm formülü elde edilir. Sonuç olarak

$$F_- H_- = \overline{\bigcup_{t\geq 0} F_- U_t D_-} = \overline{\bigcup_{t\geq 0} e^{i\lambda t} H_-^2} = L^2(IR)$$

olur. Yani F_- dönüşümü H_- uzayını $L^2(IR)$ uzayına dönüştürür ve lemma ispatlanır.

Şimdi de

$$U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma) = < S_h(\lambda)e^{-i\lambda\varepsilon}, \beta\left\{(\eta(\lambda)+\overline{h})\chi_{-1}(\lambda)\right\}^{-1} \hat{\chi}(\lambda), e^{-i\lambda\varepsilon} >$$

vektörler kümesini oluşturalım. Burada λ nın reel değeri için $U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri H_+ uzayına ait değildir. Fakat $U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri $\mathcal{L}U = \lambda U \ (\lambda \in IR)$ denklemini ve $\mathcal{L}_h$ operatörü için verilen sınır koşullarını sağlar. $U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri yardımıyla $F_+ : f \to \tilde{f}_+(\lambda)$ dönüşümünü $f = \langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle$ vektörleri üzerinde

$$(F_+ f)(\lambda) := \tilde{f}_+(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(f, U_\lambda^+\right)_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\varphi_-(\varepsilon), \varphi_+(\varsigma)$ fonksiyonları kompakt dayanıklı fonksiyonlardır ve $y = \{y_n\} \ (n \in IN)$ dizisi sonlu sayıda terimleri sıfır olmayan bir dizidir.

Lemma 3.6.5: F_+ dönüşümü H_+ uzayını izometrik olarak $L^2(IR)$ uzayına dönüştürür ve her $f, g \in H_+$ elemanları için Parseval eşitliği ve ters dönüşüm formülleri geçerlidir. Yani

$$(f,g)_{\mathcal{H}} = \left(\tilde{f}_+, \tilde{g}_+\right)_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_+(\lambda)\overline{\tilde{g}_+(\lambda)}d\lambda,$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_+(\lambda) U_\lambda^+ d\lambda$$

dır. Burada $\tilde{f}_+(\lambda) = (F_+ f)(\lambda)$ ve $\tilde{g}_+(\lambda) = (F_+ g)(\lambda)$ dır.

Bu lemma, lemma 3.6.4 e benzer şekilde ispatlanır.

(3.6.2) eşitliğine göre $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \in IR$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ olduğundan. U_λ^+ ve U_λ^- vektörleri kullanılarak,

$$U_\lambda^- = \overline{S}_h(\lambda)\, U_\lambda^+ \quad (\lambda \in IR) \tag{3.6.5}$$

eşitliği yazılabilir.

Lemma 3.6.4 ve 3.6.5 den dolayı $H_- = H_+$ olduğu görülür. Lemma 3.6.2 den dolayı $H = H_- = H_+$ elde edilir. Dolayısıyla giren ve çıkan alt uzaylar için 3) özelliği ispatlanmış oldu.

Bu durumda, F_- dönüşümü $\mathcal{H}$ uzayını izometrik olarak $L^2(IR)$ uzayına dönüştürür. U_t operatörünü $e^{i\lambda t}$ çarpma operatörüne ve D_- alt uzayını H_-^2 uzayına dönüştürür. Diğer bir değişle F_- dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun giren spektral gösterimidir. Benzer şekilde F_+ dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun çıkan spektral gösterimidir. (3.6.5) ifadesinden, bir $f \in \mathcal{H}$ elemanın F_+ gösteriminden F_- gösterimine geçişi, $S_h(\lambda)$ fonksiyonu ile çarpım olarak gösterilir, yani

$$\tilde{f}_-(\lambda) = S_h(\lambda)\tilde{f}_+(\lambda)$$

sonucu elde edilir. Lax ve Philipsin saçılma teorisine göre D_- ve D_+ alt uzaylarına göre $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisi (fonksiyonu), $f \in \mathcal{H}$ vektörünün F_- gösterimine karşılık gelen F_+ gösterimini elde etmek için çarpılması gereken katsayılarıdır. Böylece $\overline{S_h}(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisidir.

Yukarıda yapılan işlemler, aşağıdaki teoremin ispatıdır.

Teorem 3.6.6: $\overline{S}_h(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun (kendine eş $\mathcal{L}_h$ operatörü için) saçılma matrisidir.

Tanım 3.6.7: $S_h(\lambda)$ fonksiyonu C_+ üst yarı düzlemde analitik olsun. Eğer, $\lambda \in C_+$ için $|S_h(\lambda)| \leq 1$ ve hemen hemen her $\lambda \in IR$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ ise $S_h(\lambda)$ fonksiyonu C_+ üst yazı düzlemde iç fonksiyondur denir.

$S_h(\lambda)$ fonksiyonu üst yazı düzlemdeki keyfi sabit olmayan iç fonksiyon olsun. $K = H_+^2 \Theta S_h H_+^2$ tanımlayalım. $K \neq \{0\}$ uzayı H_+^2 uzayının bir alt uzayıdır. $\varphi = \varphi(\lambda) \in K$ için $Z_t \varphi = P[e^{i\lambda t}\varphi]$ formülüne göre K daki Z_t $(t \geq 0)$ operatörlerinin yarıgrubunu alalım. Burada P, H_+^2 dan K ya tanımlı izdüşüm operatörüdür. $\{Z_t\}$ yarı grubunun üretecini $T\varphi = \lim\limits_{t \to +0} (it)^{-1}(Z_t\varphi - \varphi)$ ile gösterelim burada T, tüm $\varphi \in K$ fonksiyonlarını içeren , tanım bölgesi $D(T)$ olan disipatif operatördür. T ye *model disipatif* operatör denir. (Bu tanım Lax ve Philipsin tanımıdır. Bu model operatör Nagy ve Foiaş tarafından oluşturulan model disipatif operatörünün özel bir durumudur). Temel kabule göre $S_h(\lambda)$, T operatörünün karakteristik fonksiyonudur.

$\mathcal{H} = D_- \oplus K \oplus D_+$ olmak üzere $K = \langle 0, H, 0 \rangle$ olsun. F_- dönüşümü altında, F_- üniter dönüşümünün özelliğinden aşağıdakiler geçerlidir.

$$\mathcal{H} \to L_2(IR) \qquad , f \to \tilde{f}_-(\lambda) = (F_- g)(\lambda) \qquad (3.6.6)$$

$$D_- \to H_-^2 \qquad , D_+ \to S_h H_+^2$$

$$K \to H_+^2 \Theta S_h H_+^2 \qquad , V_t f \to \left(F_- U_t F_-^{-1} \tilde{f}_-\right)(\lambda) = e^{i\lambda t} \hat{f}_-(\lambda)$$

Bu formüller A_h operatörünün, karakteristik fonksiyonu $S_h(\lambda)$ olan disipatif model operatöre üniter eşdeğer olduğunu gösterir. Üniter eşdeğer disipatif operatörlerin karakteristik fonksiyonları aynı olduğundan (Sz-Nagy ve Foiaş) aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.6.8: A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu (3.6.2) formülünde tanımlanan $S_h(\lambda)$ fonksiyonudur.

3.7. Disipatif Fark Operatörünün Spektral Analizi

A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu bizi bu operatörünün spektral özellikleri hakkında tamlık bilgisine götürür. Örneğin $S_h(\lambda)=s(\lambda)B(\lambda)$ çarpımındaki $s(\lambda)$ singüler çarpanın yokluğu $\ell_w^2(IN)$ uzayında A_h operatörünün öz vektörler ve asosye vektörler sisteminin tamlığını garanti eder. Burada $B(\lambda)$ Blaschke çarpanıdır.

Teorem 3.7.1: $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere tüm h değerleri için ($h = h_0$ değeri hariç) A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu olan $S_h(\lambda)$, Blaschke çarpanıdır ve A_h operatörünün spektrumu purely (sırf) ayrıktır ve açık üst yarı düzleme aittir. $h \neq h_0$ için A_h operatörü sonlu katlılığa sahip ve sonsuzda limit noktası olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerlerden oluşmuştur. $h \neq h_0$ için A_h operatörünün öz vektörler ve asosye vektörler sistemi H uzayında tamdır.

İspat: (3.6.2) eşitliğinden açıktır ki $S_h(\lambda)$ üst yarı düzlemede bir iç fonksiyondur. Ayrıca tüm λ kompleks düzlemi için $S_h(\lambda)$ meroformiktir. Böylece,

$$S_h(\lambda) = e^{i\lambda c} B(\lambda), \; c = c(h) > 0, \tag{3.7.1}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $B_h(\lambda)$ Blaschke çarpanıdır. (3.7.1) eşitliğinden

$$|S_h(\lambda)| \le \left|e^{i\lambda c}\right| \, |B_h(\lambda)| \le e^{-c(h)\operatorname{Im}\lambda}, \operatorname{Im}\lambda \ge 0 \tag{3.7.2}$$

elde edilir. Üstelik $S_h(\lambda)$ e göre $\eta(\lambda)$ ifade edilerek, (3.6.2) eşitliğinden

$$\eta(\lambda) = \frac{\bar{h} S_h(\lambda) - h}{S_h(\lambda) - 1} \tag{3.7.3}$$

yazılabilir.

Eğer $h\left(\operatorname{Im} h>0\right)$ değeri için $c(h)>0$ ise, $\lim\limits_{t\to+\infty} S_h(it)=0$ olduğu (3.7.2) den ve $\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(it)=h$ olduğu (3.7.3) den görülür. $\eta(\lambda)$ değeri h den bağımsız olduğundan $c(h)$, $h\neq h_0$ tek noktası hariç olmak üzere, sıfırdan farklıdır. (ve ayrıca $h_0=\lim\limits_{t\to+\infty}\eta(it)$ dir). Böylece teorem ispatlanır.

Lemma 3.6.1 e göre (3.1.13)-(3.1.15) sınır değer probleminin özdeğerleri ile A_h operatörünün özdeğerleri çakışır. Hatta (3.1.13)-(3.1.15) sınır değer probleminin özvektörleri ve asosye vektörleri için (3.3.6) formülü vardır. Bu durum aşağıda verilen teorem ile de yorumlanabilir.

Teorem 3.7.2: (3.1.13)-(3.1.15) sınır değer probleminin spektrumu, sırf ayrıktır ve açık üst yarı düzleme aittir. $\operatorname{Im} h>0$ olmak üzere $h=h_0$ değeri hariç tüm h değerleri için (3.1.13)-(3.1.15) sınır değer problemi $\left(h\neq h_0\right)$ sonlu katlılığa sahip, sonsuzda limiti olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerleri vardır. Bu problemin $\left(h\neq h_0 \text{ için }\right)$ öz vektörler ve asosye vektörler sistemi $\ell_w^2(IN)$ uzayında tamdır.

4. SINIR KOŞULLARINDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN STURM–LİOUVİLLE FARK OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde spektral parametrenin aralığın sol uç noktasında verilmesi durumunda ortaya konulan Sturm–Liouville fark sınır değer problemine uygun olarak tanımlanan özel Hilbert uzayında sınır değer problemi ile aynı özdeğerlere sahip lineer disipatif operatör oluşturulmuştur. Daha sonra bu dsipatif operatörün spektral özellikleri incelenmiştir.

Elde edilen bu disipatif lineer operatörün kendine eş dilatasyonu kurulmuştur. Saçılma teorisi uygulanarak disipatif operatörün karakteristik fonksiyonu bulunmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri incelenerek disipatif operatörün ve Sturm–Liouville fark operatörünün tamlık teoremleri ispatlanmıştır.

4.1. Sturm–Liouville Fark Operatörünün Özellikleri ve Sınır Değer Problemi

$n \in Z := \{0, \pm 1, \pm 2, ...,\}$ olmak üzere y_n kompleks sayılarının dizisi $y = \{y_n\}$ olsun. Bileşenleri $(\ell y)_n$ olan ly dizisi için

$$(\ell y)_n := -a_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n - a_n y_{n+1} = \lambda w_n y_n \tag{4.1.1}$$

ikinci mertebeden fark denklemini (Sturm – Liouville fark denklemini) ele alalım. Burada λ bir spektral parametre, $w_n > 0, a_n \neq 0$ ve $a_n, b_n \in IR := (-\infty, +\infty)$, $n \in Z$ olsun.

Eğer $p_n = a_n, q_n = b_n - a_n - a_{n-1}$ ve $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ ifadeleri (4.1.1) denkleminde yazılırsa Sturm – Liouville biçiminde

$$-\Delta(p_{n-1} \Delta y_{n-1}) + q_n y_n = \lambda w_n y_n \quad (n \in \mathrm{Z}) \tag{4.1.2}$$

fark denklemi elde edilir. $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ dizileri için

$$[y, z]_n := a_n (y_n \bar{z}_{n+1} - y_{n+1} \bar{z}_n) \tag{4.1.3}$$

biçiminde tanımlanan bileşenleri $[y, z]_n$ olan dizi $[y, z]$ olsun.

Tanım 4.1.1 : Her $m,n \in Z$ ve $n < m$ için

$$\sum_{j=n}^{m}\left\{w_j(\ell y)_j \overline{z}_j - w_j y_j (\ell \overline{z})_j\right\} = [y,z]_m - [y,z]_{n-1} \tag{4.1.4}$$

eşitliğine Green formülü adı verilir.

Keyfi $y = \{y_n\}$ dizisi için $(\ell y)_n = w_n^{-1}(\ell y)_n$ biçiminde tanımlanan bileşenleri $(\ell y)_n$ olan diziyi ℓy ile gösterelim.

$$(y,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n y_n \overline{z}_n$$

iç çarpımını oluşturup $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n |y_n|^2 < \infty$ koşulunu sağlayan bütün kompleks değerli y dizilerinin oluşturduğu $\ell_w^2(Z)$ $(\mathrm{w} := \{\mathrm{w}_\mathrm{n}\},\ \ \mathrm{n} \in \mathrm{Z})$ Hilbert uzayını kuralım.

$\ell y \in \ell_w^2(Z)$ olacak şekilde $y \in \ell_w^2(Z)$ vektörlerinin kümesini D ile gösterelim. $Ly = \ell y$ konularak D de bir L maksimal operatörü tanımlayalım. $y,z \in D$ vektörleri için

$$[y,z]_{\infty} = \lim_{n\to\infty}[y,z]_n \quad \text{ve} \quad [y,z]_{-\infty} = \lim_{n\to-\infty}[y,z]_n$$

limitlerinin varlığı ve sonlu olduğu (4.1.4) formülünden elde edilir. Bundan dolayı, $n \to -\infty$ ve $n \to \infty$ için (4.1.4) formülünde limite geçilirse, $y,z \in D$ için

$$(Ly,z) - (y,Lz) = [y,z]_{\infty} - [y,z]_{-\infty} \tag{4.1.5}$$

elde edilir.

Sonlu sayıdaki terimi sıfırdan farklı olan $y = \{y_n\}$ dizilerinin kümesi üzerinde $L_0' y = Ly$ ile tanımlı L_0' simetrik operatörünün kapanışını L_0 ile gösterelim. L_0 oparetörü simetriktir ve $L_0^* = L$ dir. (Berezanskij, 1965).

L_0 ın indis defektinin hesaplanması, yarı doğru üzerindeki indis defektlerin hesaplanmasına indirgenebilir. Aslında $\ell_w^2(Z)$, $\ell_w^2(IN_-)$ $(IN_- = \{-1,-2,-3,...,\})$ ve $\ell_w^2(IN_+)$ $(IN_+ = \{0,1,2,3,...,\})$ uzaylarının ortogonal toplamıdır. $\ell_w^2(IN_-)$ ve $\ell_w^2(IN_+)$

uzaylarında ℓ ile üretilen minimal (maksimal) operatörler $L_0^-(L_-)$ ve $L_0^+(L_+)$ olsun ve $D_0^{\mp}(D_{\mp})$, $L_0^{\mp}(L_{\mp})$ operatörlerinin tanım kümesi olsun. $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ için L_0 ın defekt sayısı $def\, L_0 := \dim\{(L_0 - \lambda I)D(L_0)\}^{\perp}$ için $defL_0 = defL_0^- + defL_0^+$ eşitliği sağlanır. Bu ise $k = 0,1,2$ olmak üzere L_0 ın indis defektinin (k,k) biçiminde olduğunu gerektirir. (0,0) indis defekti için L_0 operatörü kendine eştir. Yani $L_0^* = L_0 = L$ dir.

Kabül edelim ki simetrik L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olsun. $\pm\infty$ da Weyl limit çember durumlarını garanti eden yeterli koşullar vardır. (Atkinson, 1964; Berezanskij, 1965; Clark, 1996; Welstead,1982).

L_0 ın tanım kümesi

$$[y,z]_{\infty} - [y,z]_{-\infty} = 0 \qquad (z\in D) \tag{4.1.6}$$

koşulunu sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir.

$$P_{-1}^{(1)}(\lambda) = 0,\ P_0^{(1)}(\lambda) = 1,\ P_{-1}^{(2)}(\lambda) = -\frac{1}{a_{-1}},\ P_0^{(2)}(\lambda) = 0 \tag{4.1.7}$$

koşullarını sağlayan (4.1.1) denkleminin çözümlerini $P^{(1)}(\lambda) = \{P_n^{(1)}(\lambda)\}$ ve $P^{(2)}(\lambda) = \{P_n^{(2)}(\lambda)\}$ $(n \in Z)$ ile gösterelim. (4.1.1) denkleminin $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $W_n(y,z) = [y,\bar{z}]_n$ olacak şekilde $W_n(y,z) = a_n(y_n z_{n+1} - y_{n+1} z_n)$ biçiminde tanımlanır. Bu çözümler n ye bağlı değildir ve bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul Wronskiyeninin sıfırdan farklı olmasıdır. (4.1.7) koşulundan $W_n(P^{(1)}, P^{(2)}) = 1$ $(n \in Z)$ olduğu elde edilir. $P^{(1)}(\lambda)$ ve $P^{(2)}(\lambda)$, (4.1.1) denkleminin çözümlerinin temel sistemini oluşturur ve her $\lambda \in C$ için $P^{(1)}(\lambda)$, $P^{(2)}(\lambda) \in \ell_w^2(Z)$ dır.

$u = P^{(1)}(0)$ ve $v = P^{(2)}(0)$ olsun. $u = \{u_n\}$ *ve* $v = \{v_n\}$ reel sayılar dizisi ve $[u,v]_n = 1$ $(n \in Z)$ olduğundan (4.1.3) denkleminin tabanı olduğu görülür.

Lemma 4.1.2.: Keyfi $y = \{y_n\}$ ve $z = \{z_n\} \in D$ vektörleri için

$$[y,z]_n = [y,u]_n [\bar{z},v]_n - [y,v]_n [\bar{z},u]_n, \quad (n \in Z \cup \{-\infty, +\infty\}) \tag{4.1.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Lemma 3.1.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.3 : L_0 operatörünün tanım bölgesi D_0 ,

$$[y,u]_{-\infty} = [y,v]_{-\infty} = [y,u]_{\infty} = [y,v]_{\infty} = 0 \tag{4.1.9}$$

sınır koşullarını sağlayan $y \in D$ vektörlerini içerir.

İspat : Lemma 4.1.2 den (4.1.6) denklemi

$$[y,u]_{\infty}[\bar{z},v]_{\infty} - [y,v]_{\infty}[\bar{z},u]_{\infty} - [y,u]_{-\infty}[\bar{z},v]_{-\infty} - [y,v]_{-\infty}[\bar{z},u]_{-\infty} = 0 \tag{4.1.10}$$

denklemine denktir. Üstelik $[\bar{z},u]_{-\infty}$, $[\bar{z},v]_{-\infty}$, $[\bar{z},u]_{\infty}$ ve $[\bar{z},v]_{\infty}$ keyfi olabilir. Bundan dolayı, her $z \in D$ için (4.1.10) denkleminin mümkün olması için gerek ve yeter koşul (4.1.9) koşullarının sağlanmasıdır. Böylece teorem ispatlanır.

$\ell(y)$ fark ifadesi için aşağıdaki sınır değer problemini düşünelim.

$$\ell(y) = \lambda y, \; y \in D \quad (n \in Z), \tag{4.1.11}$$

$$\alpha_1[y,v]_{-\infty} - \alpha_2[y,u]_{-\infty} = \lambda\left(\alpha_1'[y,v]_{-\infty} - \alpha_2'[y,u]_{-\infty}\right), \tag{4.1.12}$$

$$[y,v]_{\infty} - h[y,u]_{\infty} = 0 \quad \operatorname{Im} h > 0. \tag{4.1.13}$$

Burada λ , kompleks spektral parametre, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1', \alpha_2' \in IR$ ve

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 > 0$$

dir.

Aşağıdaki kabulleri yapalım.

$$M_{-\infty}(y) := \alpha_1[y,v]_{-\infty} - \alpha_2[y,u]_{-\infty},$$

$$M'_{-\infty}(y) := \alpha'_1[y,v]_{-\infty} - \alpha'_2[y,u]_{-\infty},$$

$$N_1^{\infty}(y) = [y,v]_{\infty},$$

$$N_2^{\infty}(y) := [y,u]_{\infty},$$

$$N_1^{-\infty}(y) := [y,v]_{-\infty},$$

$$N_2^{-\infty}(y) := [y,u]_{-\infty},$$

$$M_{\infty}(y) = N_1^{\infty}(y) - hN_2^{\infty}(y).$$

Lemma 4.1.4: Keyfi $y, z \in D$ için $M_{-\infty}(\bar{z}) = \overline{M_{-\infty}(z)}$, $M'_{-\infty}(\bar{z}) = \overline{M'_{-\infty}(z)}$

$N_1^{\infty}(\bar{z}) = \overline{N_1^{\infty}(z)}, N_2^{\infty}(\bar{z}) = \overline{N_2^{\infty}(z)}$ olmak üzere

i) $$[y,z]_{-\infty} = \frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}(y)\overline{M'_{-\infty}(z)} - \overline{M}'_{-\infty}(y)\overline{M_{-\infty}(z)}\right] \tag{4.1.14}$$

ii) $$[y,z]_{\infty} = N_1^{\infty}(y).N_2^{\infty}(\bar{z}) - N_1^{\infty}(\bar{z}).N_2^{\infty}(y) \tag{4.1.15}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspatı lemma 3.1.4'deki ipata benzer şekilde yapılır.

4.2 Verilmiş Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör:

$f^{(1)} \in \ell_w^2(Z)$, $f^{(2)} \in C$ olmak üzere $\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}$

şeklinde iki bileşenli elemanların lineer uzayını $H = \ell_w^2(Z) \oplus C$ şeklinde gösterelim.

Eğer $\alpha = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & \alpha_1 \\ \alpha'_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$ olmak üzere $\alpha > 0$ kabul edilirse

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}, \ \hat{g} = \begin{pmatrix} g^{(1)} \\ g^{(2)} \end{pmatrix} \in H$$

olmak üzere

$$\left(\hat{f},\hat{g}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(1)}\overline{g}_n^{(1)}w_n+\frac{1}{\alpha}f^{(2)}\overline{g}^{(2)} \tag{4.2.1}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur. Dolayısıyla verilmiş sınır değer problemine uygun Hilbert uzayı tanımlanmış oldu.

Verilen sınır değer problemine uygun

$$A_h : H \to H$$

operatörünü

$$D(A_h)=\left\{\hat{f}=\begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \end{pmatrix}\in H : f^{(1)}\in D, M_{\infty}\left(f^{(1)}\right)=0,\ f^{(2)}=M'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\right\} \tag{4.2.2}$$

$$A_h\,\hat{f}=\tilde{\ell}(\hat{f}):=\begin{pmatrix} \ell\left(f^{(1)}\right) \\ M_{-\infty}\left(f^{(1)}\right) \end{pmatrix} \tag{4.2.3}$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Lemma 4.2.1: $H=\ell_w^2(IN)\oplus C$ Hilbert uzayında (4.2.2) ve (4.2.3) eşitlikleri ile tanımlı A_h operatörü için

$$\begin{aligned}\left(A_h\,\hat{f},\hat{g}\right)-\left(\hat{f},A_h\,\hat{g}\right)&=\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{\infty}-\left[f^{(1)},g^{(1)}\right]_{-\infty}\\&+\frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{M'_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}-M'_{-\infty}\left(f^{(1)}\right)\overline{M_{-\infty}\left(g^{(1)}\right)}\right]\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspatı lemma 3.2.1 deki ispata benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.2 : A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

İspat : $\hat{y}=\{\hat{y}_n\}\in D(A_h)\ ve\ \overline{D(A_h)}$ $=$ H için (4.2.4) eşitliğinden

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right) \quad =$$

$$\left[y^{(1)},y^{(1)}\right]_{\infty}-\left[y^{(1)},y^{(1)}\right]_{-\infty}+\frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{M'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}-M'_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)\overline{M_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)}\right]$$

bulunur. (4.1.14) den dolayı

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=[y^{(1)},y^{(1)}]_{\infty}$$

$$=N_1^{\infty}(y^{(1)})N_2^{\infty}(\overline{y}^{(1)})-N_1^{\infty}(\overline{y}^{(1)})N_2^{\infty}(y^{(1)})$$

olur. $M_{\infty}(y^{(1)})=0$ koşulu sağlanacağından

$N_1^{\infty}(y^{(1)})=hN_2^{\infty}(y^{(1)})$ bulunur ve buradan da

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=hN_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)N_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}-\overline{h}N_2^{\infty}\overline{(y^{(1)})}N_2^{\infty}\left(y^{(1)}\right)$$

$$=\left(h-\overline{h}\right)\left(N_2^{\infty}(y^{(1)})N_2^{\infty}(\overline{y}^{(1)})\right)$$

$$=2i\,\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_2^{\infty}(y^{(1)})\right|^2$$

olur. Buradan da

$$\mathrm{Im}\ \left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)=\mathrm{Im}\,\mathrm{h}\left|N_2^{\infty}(y^{(1)})\right|^2\geq 0 \quad (\mathrm{Im}\,h>0)$$

dır. Yani A_h operatörü H de disipatiftir.

4.3. Hilbert Uzayında Sınır Değer Probleminin Ürettiği A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri

Her $\lambda\in C$ için (4.1.1) denkleminin

$$N_1^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),u\right]_{\infty}=1,$$

$$N_2^{\infty}\left(\chi(\lambda)\right)=\left[\chi(\lambda),v\right]_{\infty}=h,$$

$$N_1^{-\infty}(\phi(\lambda)) = \alpha_2 - \lambda\alpha_2',$$
$$N_2^{-\infty}(\phi(\lambda)) = \alpha_1 - \lambda\alpha_1' \qquad (4.3.1)$$

koşullarını sağlayan çözümleri $\phi(\lambda)$ ve $\chi(\lambda)$ olsun. (4.1.14) den $-\infty$ daki Wronskiyeni olan $\Delta_{-\infty}(\lambda)$,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{-\infty}(\lambda) = M_{-\infty}(\chi(\lambda)) - \lambda M'_{-\infty}(\chi(\lambda))$$

dir. (4.1.15) den $+\infty$ daki Wronskiyeni olan $\Delta_{\infty}(\lambda)$,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{\infty}(\lambda) := -M_{\infty}(\phi(\lambda))$$

olarak hesaplanır.

Lemma 4.3.1: (4.1.11) – (4.1.13) Sınır değer probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerlerinden ibarettir.

$$(\Delta(\lambda) = \Delta_{-\infty}(\lambda) = \Delta_{\infty}(\lambda))$$

İspat: Lemma 3.3.1 deki ispata benzer şekilde yapılır.

$\Delta_{-\infty}(\lambda)$ ve $\Delta_{\infty}(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırlarını λ_n $(n = 0,1,2,...)$ şeklinde gösterirsek

$$\hat{\phi}_n = \begin{pmatrix} \phi(\lambda_n) \\ M'_{-\infty}(\phi(\lambda_n)) \end{pmatrix} \in D(A_h)$$

vektörleri $A_h\hat{\phi}_n = \lambda_n\hat{\phi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\phi}_n$ ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 4.3.2: Eğer λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ sistemi

$$\ell(y)_0 = \lambda_0 y_0 ,$$

$$M_{-\infty}(y_0) - \lambda_0 M'_{-\infty}(y_0) = 0,$$

$$M_{\infty}(y_0) = 0,$$

$$\ell(y_s)_n - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0,$$

$$M_{-\infty}(y_s) - \lambda_0 M'_{-\infty}(y_s) - M'_{-\infty}(y_{s-1}) = 0,$$

$$M_{\infty}(y_s) = 0, \ s = 1,2,...,n. \tag{4.3.2}$$

şartlarını sağlıyorsa $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemine (4.1.11) – (4.1.13) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir.

Lemma 4.3.3: (4.1.11) – (4.1.13) sınır probleminin özdeğerleri ve A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani, (4.1.11) – (4.1.13) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler ve birleştirilmiş vektörler zinciri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ özvektörler ve birleştirilmiş vektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ M'_{-\infty}(y_k) \end{pmatrix}, \ k = 0,1,2, \dots, n \tag{4.3.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspatı lemma 3.3.3 dekine benzer şekilde yapılır.

4.4. Disipatif Durumunda A_h Operatörünün Kendine Eş Dilatasyonu ve Karakteristik Fonksiyonu:

A_h operatörünün kendine eş dilatasyonunu kurmak için $H = \ell_w^2(Z) \oplus C$ uzayına giren $D_- = L^2(-\infty,0)$ ve çıkan $D_+ = L^2(0,\infty)$ alt uzaylarını ekleyelim ve $\mathcal{H} = L^2(-\infty,0) \oplus H \oplus L^2(0,\infty)$ ortogonal toplamını oluşturalım. Bu uzaya "Esas Hilbert dilatasyon uzayı" denir. $\mathcal{H}$ nin elemanlarını $w = \langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle \in \mathcal{H}$ şeklinde yazalım ve $\varphi_- \in W_2^1(-\infty,0)$ ve $\varphi_+ \in W_2^1(0,\infty)$ olmak üzere

$\hat{y}=\begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{pmatrix}\in H, y^{(1)}\in D, y^{(2)}=M'_{-\infty}(y^{(1)})$ olsun. Burada W_2^1 Sobolev uzayıdır. $\mathcal{H}$ uzayında $w\in D(\mathcal{L}_h)$ elemanlarının üzerinde

$$[y,u]_\infty - h[y,v]_\infty = \gamma\varphi_-(0), \tag{4.4.1}$$

$$[y,u]_\infty - \bar{h}[y,v]_\infty = \gamma\varphi_+(0),$$

$$y^{(2)} = M'_{-\infty}(y^{(1)}),$$

($\gamma^2 := 2\operatorname{Im} h,\ \gamma>0$) sınır koşullarını sağlayan ve

$$\mathcal{L}\langle\varphi_-, \hat{y}, \varphi_+\rangle = \langle i\frac{d\varphi_-}{d\varepsilon}, \tilde{\ell}(\hat{y}), i\frac{d\varphi_+}{d\varepsilon}\rangle \tag{4.4.2}$$

ifadesi ile oluşturulan $\mathcal{L}_h$ operatörünü düşünelim.

Teorem 4.4.1: $\mathcal{L}_h$ operatörü $\mathcal{H}$ uzayında kendine eş operatördür.

İspat: Önce $\mathcal{L}_h$ operatörünün simetrik olduğunu gösterelim. $f.g\in D(\mathcal{L}_h)$ için

$f=\langle\varphi_-, \hat{y}, \varphi_+\rangle$ ve $g=\langle\psi_-, \hat{z}, \psi_+\rangle$ olsun. (4.1.14), (4.2.4) ve kısmî integrasyondan

$$(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}} = [y^{(1)}, z^{(1)}]_\infty - [y^{(1)}, z^{(1)}]_{-\infty}$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[M_{-\infty}(y^{(1)})\overline{M'_{-\infty}}(z^{(1)}) - M'_{-\infty}(y^{(1)})M_{-\infty}(z^{(1)})\right]$$

$$+i\varphi_-(0)\overline{\psi}_-(0) - i\varphi_+(0)\overline{\psi}_+(0)$$

bulunur. Buradan da (4.1.4) koşulları ve (4.1.14) eşitliği göz önüne alınırsa

$$(\mathcal{L}_h f, g)_{\mathcal{H}} - (f, \mathcal{L}_h g)_{\mathcal{H}}$$

$$= [y^{(1)}, z^{(1)}]_\infty + \frac{i}{\gamma^2}\left([y^{(1)},u]_\infty - h[y^{(1)},v]_\infty\right)\left(\overline{[z^{(1)},u]_\infty - h[z^{(1)},v]_\infty}\right)$$

$$-\frac{i}{\gamma^2}\left(\left[y^{(1)},u\right]_\infty-\bar{h}\left[y^{(1)},v\right]_\infty\right)\left(\overline{\left[z^{(1)},u\right]_\infty-\bar{h}\left[z^{(1)},v\right]_\infty}\right)$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_\infty+\frac{i}{\gamma^2}\{\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},u\right]_\infty-\bar{h}\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},v\right]_\infty$$

$$-h\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},u\right]_\infty+h\bar{h}\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},v\right]\}$$

$$-\frac{i}{\gamma^2}\{\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},u\right]_\infty-h\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},v\right]_\infty$$

$$-\bar{h}\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},u\right]_\infty+h\bar{h}\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[\bar{z}^{(1)},v\right]\}$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_\infty+\frac{i}{\gamma^2}\{\left(h-\bar{h}\right)\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[z^{(1)},v\right]_\infty-\left(h-\bar{h}\right)\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[z^{(1)},u\right]_\infty\}$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_\infty+\frac{i}{\gamma^2}\left(h-\bar{h}\right)\{\left[y^{(1)},u\right]_\infty\left[z^{(1)},v\right]_\infty-\left[y^{(1)},v\right]_\infty\left[z^{(1)},u\right]_\infty\}$$

$$=\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_\infty+\frac{i}{2\operatorname{Im}h}2i\operatorname{Im}h\left[y^{(1)},z^{(1)}\right]_\infty=0$$

olur. Yani $\left(\mathcal{L}_h f,g\right)_{\mathcal{H}}-\left(f,\mathcal{L}_h g\right)_{\mathcal{H}}=0$ olduğundan $\mathcal{L}_h$ simetrik bir operatördür. $\mathcal{L}_h$ operatörünün kendine eş olduğunu göstermek için $\mathcal{L}_{\hbar}^{*}\subset\mathcal{L}_h$ olduğunu göstermek yeterlidir. $f=\langle\varphi_-,0,\varphi_+\rangle\in D\left(\mathcal{L}_h\right)$, $g=\langle\varphi_-,\hat{z},\varphi_+\rangle\in D\left(\mathcal{L}_h^*\right)$ alalım. $\varphi_\pm\in W_2^1,\varphi_\mp(0)=0$ için $\left(\mathcal{L}_h f,g\right)_{\mathcal{H}}$ bilineer formunu alalım. Kısmi integrasyon ile $\mathcal{L}_h^* g=\langle i\frac{d\psi}{d\varepsilon},\hat{z}^*,\frac{d\psi_+}{d\varepsilon}\rangle$ elde edilir. Burada $\psi_\pm\in L^2(R_\pm),\hat{z}^*\in H$ dir. Benzer şekilde $f=\langle 0,\hat{y},0\rangle\in D\left(\mathcal{L}_h\right)$ ise $\left(\mathcal{L}_h f,g\right)_{\mathcal{H}}$ de kısmi integrasyon ile $z^{(1)}\in D,z^{(2)}=M'_{-\infty}\left(z^{(1)}\right)$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_h^* g=\mathcal{L}_h^*\langle\psi_-,\hat{z},\psi_+\rangle=\langle i\frac{d\psi_-}{d\varepsilon},\tilde{\ell}(\hat{z}),i\frac{d\psi_+}{d\varepsilon}\rangle \tag{4.4.3}$$

dir. (4.4.3) de tanımlandığı şekilde her $f\in D\left(\mathcal{L}_h\right)$ için $\left(\mathcal{L}_{\hbar}f,g\right)_{\mathcal{H}}=\left(f,\mathcal{L}_{\hbar}g\right)_{\mathcal{H}}$ olur. (4.4.3) den dolayı $\left(\mathcal{L}_{\hbar}f,g\right)_{\mathcal{H}}$ bilineer formundaki integral dışındaki terimlerinin toplamı sıfıra eşit olmalıdır. Yani,

$$\left[y^{(1)}, z^{(1)}\right]_{\infty} - \left[y^{(1)}, z^{(1)}\right]_{-\infty} + \frac{1}{\gamma}\left[M_{-\infty}\left(y^{(1)}\right)M'_{-\infty}\left(z^{(1)}\right) - M'_{-\infty}(y^{(1)})M_{-\infty}\left(z^{(1)}\right)\right]$$

$$+ i\varphi_{-}(0)\overline{\psi}_{-}(0) - i\varphi_{+}(0)\overline{\psi}_{+}(0) = 0$$

olur. (4.1.14) eşitliği yukarıda yazılıp düzenlenirse

$$[y^{(1)}, z^{(1)}]_{\infty} = i\varphi_{-}(0)\overline{\psi}_{-}(0) - i\varphi_{+}(0)\overline{\psi}_{+}(0) \tag{4.4.4}$$

bulunur. $\mathcal{L}_h$ nin sınır şartlarından $\left[y^{(1)}, u\right]_{\infty}$ ve $[y^{(1)}, v]_{\infty}$ yi çözersek

$$\left[y^{(1)}, u\right]_{\infty} = \frac{1}{i\gamma}(\varphi_{+}(0) - \varphi_{-}(0))$$

$$\left[y^{(1)}, v\right]_{\infty} = \gamma\varphi_{-}(0) - \frac{h}{i\gamma}(\varphi_{-}(0) - \varphi_{+}(0))$$

elde edilir. (4.1.14) ve (4.4.4) eşitliklerinden

$$\left[\gamma\varphi_{-}(0) - \frac{h}{i\gamma}(\varphi_{-}(0) - \varphi_{+}(0))\right]\left[\overline{z}^{(1)}, v\right]_{\infty} + \frac{1}{\mathrm{i}\gamma}((\varphi_{-}(0) - \varphi_{+}(0)))\left[\overline{z}^{(1)}, u\right]_{\infty}$$

$$= i\varphi_{+}(0)\overline{\psi}_{+}(0) - i\varphi_{-}(0)\overline{\psi}_{-}(0) \tag{4.4.5}$$

olur. Yukarıdaki denklemde $\varphi_{-}(0)$ ın katsayılarını eşitlersek

$$\frac{i\gamma^2 - h}{\gamma}\left[\overline{z}^{(1)}, v\right]_{\infty} + \frac{1}{i\alpha}\left[\overline{z}^{(1)}, u\right]_{\infty} = \psi_{-}(0)$$

veya

$$\left[\overline{z}^{(1)}, u\right]_{\infty} - h\left[\overline{z}^{(1)}, v\right]_{\infty} = \gamma\psi_{-}(0) \tag{4.4.6}$$

olur. Benzer şekilde $\psi_{+}(0)$ ın katsayılarını eşitlersek

$$\left[z^{(1)}, u\right]_{\infty} - \overline{h}\left[z^{(1)}, v\right]_{\infty} = \gamma\psi_{+}(0) \tag{4.4.7}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $D\left(\mathcal{L}_h^{*}\right) \subset D\left(\mathcal{L}_h\right)$ dir. Böylece $\mathcal{L}_h = \mathcal{L}_h^{*}$ dir.

4.5. $\mathcal{L}_h$ Operatörünün Oluşturduğu Üniter Grup:

$\mathcal{L}_h$ operatörünün, A_h operatörünün kendine eş dilatasyonu olduğunu gösterelim. Bunun için Stone teoremine göre $\mathcal{L}_h$ kendine eş operatörünün $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında $U_t = \exp(i\mathcal{L}_h t), t \in IR_+(0,\infty)$ üniter grubunu oluşturalım. $P : \mathcal{H} \to H$ ve $P_1 : H \to \mathcal{H}$ dönüşümlerini $P : \langle \varphi_-, \hat{y}, \varphi_+ \rangle \to \hat{y}$ ve $P_1 : y \to \langle 0, \hat{y}, 0 \rangle$ biçiminde ifade edelim. U_t üniter grubu yardımıyla $Z_t := PU_t P_1,\ t \ge 0$ olmak üzere $\{Z_t\}$ operatörler ailesi H de tamamen üniter olmayan büzülmelerin güçlü sürekli bir yarı grubudur. Bu yarı grubun üreteci olan B_h operatör için

$$B_h \hat{y} = \lim_{t \to +0} (it)^{-1} (Z_t \hat{y} - \hat{y})$$

olur. B_h üretecinin tanım bölgesi, bu limitin mevcut olduğu bütün $\hat{y}$ vektörlerini içerir. B_h operatörü disipatiftir ve $\mathcal{L}_h$ operatörüne B_h ın *kendine eş dilatasyonu*dur.

Teoerm 4.5.1: $\mathcal{L}_h$ operatörü A_h operatörünün kendine eş dilatasyonudur.

İspat: İspatı Teorem 3.5.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

$\{U_t\}$ üniter grubunun en önemli özelliği Lax – Philips saçılma teorisinin uygulanabilir olmasından dolayı saçılma matrisi spektral gösterim teorisi yoluyla tanımlanmıştır. Biz bunları oluşturalım.

$(\ell y)_n = \lambda y_n \ (n \in Z)$ denkleminin

$$[\theta(\lambda), v]_{+\infty} = \frac{\alpha_2'}{\alpha},\ [\theta(\lambda), u]_{+\infty} = \frac{\alpha_1'}{\alpha},$$

$$[\phi(\lambda), v]_{-\infty} = \alpha_2 - \alpha_2'\lambda,\quad [\phi(\lambda), u]_{-\infty} = \alpha_1 - \alpha_1'\lambda$$

koşullarını sağlayan çözümleri $\theta(\lambda)$ ve $\phi(\lambda)$ olsun ve aşağıdaki kabullerini yapalım.

$$\eta(\lambda):=\frac{[\theta(\lambda),v]_\infty}{[\theta(\lambda),u]_\infty},\qquad w(\lambda):=\frac{[\theta(\lambda),u]_\infty}{[\phi(\lambda),u]_\infty},\hat{\phi}(\lambda)=\begin{pmatrix}\phi(\lambda)\\ \alpha\end{pmatrix}\quad, \tag{4.5.1}$$

$$S_h=\frac{\eta(\lambda)+h}{\eta(\lambda)+\bar{h}}\quad . \tag{4.5.2}$$

(4.5.1) deki $\eta(\lambda)$ fonksiyonu, reel eksen üzerindeki kutupları sayılabilir sayıda olan C kompleks düzleminde meromorfik bir fonksiyondur. Hatta, $\eta(\lambda)$ fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını göstermek mümkündür.

$$\operatorname{Im}\lambda\ \operatorname{Im}\eta(\lambda)<0,\quad \operatorname{Im}\lambda\neq 0$$

ve $\eta(\lambda)$ nın reel eksendeki kutupları hariç her $\lambda\in C$ için $\overline{\eta(\lambda)}=\eta(\bar{\lambda})$ dir.

$$U_\lambda^-(\varepsilon,\varsigma)=\langle e^{-i\lambda\varepsilon},\alpha\, w(\lambda)\{(\eta(\lambda)+h)[\theta(\lambda),u]_\infty\}^{-1}\hat{\phi}(\lambda),\bar{S}_h(\lambda)e^{-i\lambda\varsigma}\rangle \tag{4.5.3}$$

ve

$$U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)=\langle S_h(\lambda)e^{-i\lambda\varepsilon},\alpha\, w(\lambda)\{(\eta(\lambda)+\bar{h})[\theta(\lambda),u]_\infty\}^{-1}\hat{\phi}(\lambda),e^{-i\lambda\varsigma}\rangle \tag{4.5.4}$$

vektörlerini tanımlayalım. Burada $\varsigma\in(0,\infty)$, $\varepsilon\in(-\infty,0)$ dir. λ nın reel değeri için $U_\lambda^-(\varepsilon,\varsigma)$ ve $U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri $\mathcal{H}$ uzayına ait değildir. Burada U_λ^- ve U_λ^+ lar $\mathcal{L}_h$ ın sürekli spektrumunun öz fonksiyonlarıdır.

Lemma 4.5.2: $U_\lambda(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri $\mathcal{L}U=\lambda U$ denklemini ve $\mathcal{L}_h$ operatörü için verilen sınır koşullarını sağlar.

İspat: Lemma 3.6.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

$U_\lambda^-(\varepsilon,\varsigma)$ ve $U_\lambda^+(\varepsilon,\varsigma)$ vektörleri yardımıyla $g=\langle\varphi_-,\hat{y},\varphi_+\rangle$ elemanları üzerinde $G_-:g\to\hat{g}_-(\lambda)$ ve $G_+:g\to\hat{g}_+(\lambda)$ dönüşümlerini

$$(G_-g)(\lambda):=\hat{g}_-(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(g,U_\lambda^-\right)_{\mathcal{H}},$$

$$(G_+g)(\lambda):=\hat{g}_+(\lambda):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(g,U_\lambda^+\right)_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada , $\varphi_+(\varepsilon), \varphi_-(\varsigma)$ kompakt dayanıklı fonksiyonlardır ve $y^{(1)}$ sonlu sayıda terimi sıfırdan farklı olan bir dizidir.

G_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(IR)$ uzayına dönüştürür. Ayrıca lemma 3.6.4 ve lemma 3.6.5 dekine benzer Parseval eşitliği ve ters dönüşün formülleri geçerlidir. (4.5.2) eşitliğine göre $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda \in IR$ için $|S_h(\lambda)| = 1$ olduğundan. U_λ^+ ve U_λ^- vektörleri kullanılarak,

$$U_\lambda^- = \overline{S}_h(\lambda) U_\lambda^+ , \; (\lambda \in IR) \tag{4.5.5}$$

eşitliği yazılabilir. Lemma 3.6.4 ve 3.6.5 den $H_- = H_+$ olduğu görülür. Bu durumda, G_- dönüşümü H_- uzayını izometrik olarak $L^2(Z)$ uzayına dönüştürürken U_t operatörünü $e^{i\lambda t}$ çarpma operatörüne ve D_- alt uzayını H_-^2 operatörüne dönüştürür. Diğer bir değişle G_- dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun giren spektral gösterimidir. Benzer şekilde G_+ dönüşümü $\{U_t\}$ grubunun çıkan spektral gösterimidir. (4.5.5) ifadesinden, bir $g \in \mathcal{H}$ elemanın G_+ gösteriminden G_- gösterimine geçişi, $S_h(\lambda)$ fonksiyonları ile çarpım olarak

$$\hat{g}_-(\lambda) = S_h(\lambda)\hat{g}_+(\lambda)$$

şeklinde gerçeklenir. Lax ve Philips'in saçılma teorisine göre D_- ve D_+ alt uzaylarına göre $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisi (fonksiyonu), $g \in \mathcal{H}$ vektörünün G_- gösterimine karşılık gelen G_+ gösterimini elde etmek için çarpılması gereken katsayılarıdır. Böylece $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun saçılma matrisidir.

Bu yapılanlar aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

Teorem 4.5.3: $S_h(\lambda)$ fonksiyonu $\{U_t\}$ grubunun (kendine eş $\mathcal{L}_h$ operatörü için) saçılma matrisidir. $K = \langle 0, H, 0 \rangle$ olmak üzere $\mathcal{H} = D_- \oplus K \oplus D_+$ şeklinde ifade edilebilir. G_- dönüşümü altında, G_- üniter dönüşümünün özelliğinden aşağıdakiler geçerlidir.

$$
\begin{array}{ll}
\mathcal{H} \to L_2(IR) & , g \to \hat{g}_-(\lambda) = (G_- g)(\lambda) \\
D_- \to H_-^2 & , D_+ \to S_h H_+^2 \\
K \to H_+^2 \Theta S_h H_+^2 & , U_t g \to \left(G_- U_t G_-^{-1} \hat{g}_-\right)(\lambda) = e^{i\lambda t} \hat{g}_-(\lambda)
\end{array}
\tag{4.5.6}
$$

Bu formüller A_h operatörünün, karakteristik fonksiyonu $S_h(\lambda)$ olan disipatif model operatöre üniter eşdeğer olduğunu gösterir. Üniter eşdeğer disipatif operatörlerin karakteristik fonksiyonları aynı olduğundan aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.5.4: A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu (4.5.2) formülünde tanımlanan $S_h(\lambda)$ fonksiyonudur.

Teorem 3.7.1 ve Teorem 3.7.2 ye benzer şekilde şu teoremler ispatlanabilir.

Teorem 4.5.5: $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere tüm h değerleri için ($h = h_0$ değeri hariç) A_h disipatif operatörünün karakteristik fonksiyonu olan $S_h(\lambda)$, Blaschke çarpanıdır ve A_h operatörünün spektrumu purely (sırf) ayrık olup açık üst yarı düzleme aittir. $h \neq h_0$ için A_h operatörü sonlu katlılığa sahip ve sonsuzda limite sahip olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerlerden oluşmaktadır. $h \neq h_0$ için A_h operatörünün özvektörler ve asosye vektörler sistemi H uzayında tamdır.

Teorem 4.5.6: (4.1.11)-(4.1.13) sınır değer probleminin spektrumu, sırf ayrıktır ve açık üst yarı düzleme aittir. $\operatorname{Im} h > 0$ olmak üzere $h = h_0$ değeri hariç tüm h değerleri için (4.1.11)-(4.1.13) sınır değer problemi $(h \neq h_0)$ sonlu katlılığa sahip, sonsuzda limiti olan sayılabilir sayıda izole edilmiş özdeğerleri vardır, $(h \neq h_0$ için $)$ (4.1.11) –(4.1.13) problemin özvektörler ve asosye vektörler sistemi $\ell_w^2(Z)$ uzayında tamdır.

5.KAYNAKLAR

Adıvar, M., and Bairamov, E., 2003. Difference equations of secand order with spectral singularities, J. Math. Anal. Appl. 277, no:2, 714-721.

Akhiezer, N.I., 1965. The Classical Moment Problem and Some Related Questions, London and New York.

Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Space, New York.

Allahverdiev, B.P., 2005. A Nonselfadjoint Sturm-Liouville Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions, Math . Nach. 278, No 7-8, 743-755.

Allahverdiev, B.P., 2006 A Disspative singular Sturm-Liouville Problem Problem with a Spectral Parameter in the Boundary Conditions, J. Math. Anal. Appl. 20, 75-92

Allahverdiev, B.P., 2004. Dissipative Second-Order Difference Operators with General Boundary Conditions, Journal of Difference Equations and Applications, Vol. 10, No.1, 1-16.

Allahverdiev, B.P., 2005. Extensions, Dilations and Functional Models of Infinite Jacobi Matrix, Czechoslovak Math. Journal, 55 (130), 593-609.

Allahverdiev, B.P., and Guseinov, G, Sh., 1990. On the Spectral Theory of Dissipative Difference Operators of Second Order, Math. USSR Sbornik, 66, no:1, 107 – 125.

Altınışık, N., 1998. Sınır Şartlarında Özdeğer Parametre Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Samsun.

Atkinson, F.V., 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, Acad. Pres Inc., New York.

Bairamov, E., and Coşkun, C., 2005. The structure of the spectrum of a system of difference equations, Applıed Mathematıcs Letters 18 (4), 387-394.

Bairamov, E., and Coşkun, C., 2004. Jost solutions and spectrum of the system of difference equations, Aplıed Mathematıcs Letters 17 (9), 1039-1045.

Bairamov, E., Çakar, O., and Krall A.M., 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi Matrices with Spectral Singulatities, Mathematıche Nachrıchten 229, 5-14.

Berezanskij, Yu.M., 1965. Expansion in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Naukova Dumka, Kiev, English transl. Amer. Math Soc., 1968.

Clark, S.L., 1996. A Spectral Analysis for Self-Adjoint Operators Generated a Class of Second Order Difference Eguations, J.Math. Anal. Appl. 197, 267-285.

Fulton, C.T., 1977. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalues parameter Contained in the Boundary Conditions Proc. Royal Soc. Edinburg, 77A, 293-308.

Gorbachuk, M.L. and Gorbachuk, V.I., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev, 1984; English transl. Kluwer,Dordrecht.

Hinton, Don B., 1979. an Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Quart. J. Math. Oxford (2), 30, 33-42.

Kelley, W.G., 1991. Difference Equations, Academie Pres, Boston.

Krall, A.M., Bairamov, E., and Çakar, O., 2001. Spectral Anallysis of Non-Selfadjoint Discrete Schrödinger Operators with Spectral Singularities, Mathematısche Nachrıchten 231, 89-104.

Kuzhel, A.V., 1996. Characteristics Functions and Models of Nonselfadjoint Operators, Kluwer Academic Publisher, Boston, London.

Lax, P.D. and Philips, R.S., 1967. Scattering Theory, Academic Pres, New York.

Maksudov, F.G., Allahverdiev, B.P. and Bairamov, E.M., 1991. On the Spectral Theory of a Nonselfadjoint Operator Generated by an Infinite Jacobi Matrix, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 316, no.2, 292-296.

Maksudov, F.G., Allahverdiev, B.P. and Bairamov, E.M., 1993 On the Spectral Theory of a Nonselfadjoint Operator Generated by an Infinite Jacobi Matrix with Matrix Elements, Doğa-Turkish J. Math, 17,no.2, 179-194.

Maksudov, F.G., and Allahverdiev, B.P., 1993. On the Spectral Theory of Nonselfadjoint Second-Order Difference Operators with Matrix Coefficients, Russian Acad. Sci Dokl. Math. Vol.47, No. 1, 146-149.

Mickens, R.E., 1990. Difference Equations: Theory and Applications Van Nostrand Reinhold, New York.

Nagy, B. and Foiaş, C., 1970. Analyse Hormonigue des Operateurs de L'space de Hilbert, Mason, Paris and Akad. Kiado, Budapest: English transl., North-Holland, Amsterdam, and Akad. Kiado, Budapest.

Naimark, M.A., 1968. Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka Moskow, 1969 English transl., of 1st ed. Vols. 1, 2, Ungar, New York.

Ongun, M.Y., 2004. Sınır Koşullarında Spektral Parametre Bulunduran İkinci Mertebeden Adı Differensiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemi, Doktora Tezi, Isparta.

Pavlov, B.S., 1975. Self –adjoint Dilation of a Dissipative Schrödinger Operator and Eigenfunction Expansion, Funct. Anal. Appl.,vol. 98,172-173

Pavlov, B.S.,1977. Self –Adjoint Dilation of a Dissipative Schrödinger Operator and its Resolution in Terms of Eigenfunctions, Math. USSR Sbornik, vol.31, no. 4, 457-478.

Saltan, S., 2002. Kendine Eş Olmayan Matris Potansiyele Sahip Schrödinger Operatörünün Spektral Analizi, Doktora Tezi, Isparta.

Shkalikov, A.A., 1983. Boundary-Value Problems For Ordinary Differential Equations with a Parameter in the Boundary Conditions, Funct. Anal. Applic., Vol.16, 324-326.

Shi, Y., and Chen, I., 1999. Spectral Theory of Second-Order Vector Difference Equations, Journal of Math. Anal. And Appl. 239, 195-212.

Shi, Y., and Chen, J., 2004. The Limit Circle and Limit Point Criteria for Second-Order Linear Difference Equations, Computers and Math with Appl. 47, 967-976.

Stone, M.M., 1932. Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Vol.15. Amer. Math. Soc. Coll. Pub.

Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition, Math. Z. 133, 301-312.

Weidmann, J., 1980. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Springer Verlag, New York.

Welstead, S, T., 1982. Selfadjoint Extensions of Jacobi Matrices of Limit – Circle Type, J. Math. Anal. Appl., 89, 315-326.

Welstead, S, T., 1982. Boundary Conditions at Infinity for Difference Equations of Limit – Circle Type, J. Math. Anal. Appl. 89, 442-461.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Aytekin ERYILMAZ
Doğum Yeri	: Eğirdir
Doğum Yılı	: 1969
Medeni Hali	: Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise	: 1983 – 1986 Gönen Öğretmen Lisesi
Lisans	: 1986 – 1992 ODTÜ Eğitim Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	: 1993 – 1996 SDÜ Fen Bilimleri Enstitüsü
Yabancı Dil	: İngilizce

İş Deneyimi :

1992 – 1993	Bingöl Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
1994 – 1998	Isparta İmam-Hatip Lisesi	Matematik Öğretmeni
1998 – 2000	Isparta Yaşar Ulucan İ.Ö.O.	Matematik Öğretmeni
2000 - …	Isparta S.D. Fen Lisesi	Matematik Öğretmeni