

**FİBER TAKVİYELİ TERMOELASTİK MALZEMELER İÇİN
MATEMATİKSEL BİR MODEL**

Benek HAMAMCI

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Melek USAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ISPARTA - 2006

**FİBER TAKVİYELİ TERMOELASTİK MALZEMELER İÇİN
MATEMATİKSEL BİR MODEL**

Benek HAMAMCI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

ISPARTA - 2006

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
1.1 Sürekli Ortam Modeli	10
1.2 Sürekli Ortam Hareketi	11
1.3 Şekil Değişirme.....	13
1.4 Hareket	23
1.4.1 Yay ve Hacim Elemanlarının Maddesel Türevi.....	26
1.4.2 Green-Gauss (Diverjans) Teoremi	29
1.5 Denge Denklemleri	33
1.5.1 Kütlenin Korunumu	34
1.5.2 Lineer Momentum Dengesi.....	35
1.5.3 Açısal Momentum Dengesi.....	38
1.5.4 Enerji Denkliği.....	40
1.5.5 Termodinamiğin İkinci Kanunu (Clausius_Dühen Eşitsizliği).....	43
1.6 Fiber Deformasyon Geometrisi ve Kinematığı	47
2. MATERYAL VE METOT	51
2.1 Materyal	51
2.1.1 Fiber Takviyeli Termoelastik Ortamların Termodinamiği	51
2.1.2 Bünye Aksiyomları	54
2.1.2.1 Nedensellik (Kozalite) Aksiyomu.....	55
2.1.2.2 Determinizm Aksiyomu	55
2.1.2.3 Eşbulunma Aksiyomu	56
2.1.2.4 Uygunluk Aksiyomu	56
2.1.2.5 Objektivite Aksiyomu	56
2.1.2.6 Maddesel Simetri Aksiyomu.....	58
2.1.2.7 Yöresellik Aksiyomu	59
2.2 Metot	70

3. BULGULAR	71
3.1 Anizotropik Ortamlarda Gerilme ve Bünye Denklemleri.....	71
3.1.2 Lineer Termoelastisitede Gerilmenin Bünye Denklemi	73
3.2 Anizotropik Ortamlarda Lineer Isı Vektörünün Tayini	79
4. SONUÇ	89
5. KAYNAKLAR	91
ÖZGEÇMİŞ	93

ÖZET

Tek fiber aileli termoelastik malzemenin lineer davranışını modern sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde sistematik olarak incelenmiştir. Mekaniğin denge kuralları ile tutarlı olan termodinamiğin birinci ve ikinci kanunlarının birleştirilmiş şekli, serbest enerji fonksiyonunun zamana göre maddesel türevi cinsinden ifade edilmiştir. Serbest enerji fonksiyonunun bağımsız değişkenleri; Green deformasyon tansörü, sıcaklık, sıcaklık gradyanı, fiber tansörü olarak belirlenmiştir. Maddesel ortamın normal olarak belli bir simetri grubu olduğu, fiber dağılımından kaynaklanan kuvvetli bir anizotropi gösterdiği varsayılmıştır. Ayrıca malzeme, fiber doğrultusundaki iki farklı yönü seçemeyeceğinden dolayı $A_K(\mathbf{X})$ vektör alanı yerine bunun dış çarpımları olan $Z_{KL}(\mathbf{X}) = A_K A_L$ şeklinde tanımlanan simetrik tansör alanı kullanılmıştır. Termodinamik kısıtlamaların neticesi olarak serbest enerji fonksiyonunun bir simetrik tansör ile bir vektöre bağlı olduğu, ısı vektörü fonksiyonunun ise bir simetrik tansör ile iki vektöre bağlı olduğu görülmüştür. Maddesel simetri aksiyomu kullanıldıktan sonra, uygulamalarda makul kabuller olarak görülen ortamın sıkışmazlığı ve fiber ailesinin uzamazlığını göz önüne alarak gerilme ve ısı vektörüne ait bünye denklemleri bulunmuştur.

Ortam fiber takviyesinden dolayı anizotrop özelli gösterdiği varsayılmış ve anizotrop ortamlar için bir yaklaşım ile gerilme ve ısı vektörünün lineer bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu yaklaşım çerçevesinde serbest enerji ve ısı vektörü fonksiyonu bağlı oldukları argümanlara göre bir kuvvet serisi açılımı ile temsil edilmiş ve bu seri açılımında dikkate alınan terimlerin türüne sayısı ortamın lineer mertebesini belirlemiştir. Dolayısıyla her iki yaklaşımda da mekanik etkileşimlerin lineer olduğu kabul edilmiştir. Son olarak uzaysal koordinatlarda elde edilen gerilmenin ve ısı vektörünün lineer bünye denklemleri, Cauchy hareket denklemi ve enerji denklemi ifadelerinde yerlerine yazılıp alan denklemleri bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Alan Denklemleri, Anizotropi, Bünye Denklemleri, Deformasyon, Gerilme, Isı Vektörü, Maddesel ve Uzaysal Koordinatlar, Sürekli Ortam.

ABSTRACT

In the frame of Modern Continuum Mechanics, linear behavior reinforced with a single family of inextensible fibers has been studied. Second law of thermodynamics, combined with the first law and consistent with mechanical balance laws, has been written in terms of the time rate of free energy function. Its arguments have been furnished with Green deformation tensor, its rate, heat and its gradient in the reference state. The material is supposed to be strongly anisotropic due to fiber distribution, with the matrix material being supposed to have any material symmetry. After the thermo dynamical constraints, we have shown that free energy function depends on a symmetric tensor and one vector and heat vector depend on two symmetric tensor and two vectors. Using the material symmetry axioms and considering incompressibility of medium and inextensibility of fiber family, these assumptions are fairly meaningful for the practical applications. Constitutive equations of stress and heat vectors have obtained.

Assuming that an anisotropic medium, linear constitutive equations of stress and heat vector has been obtained. In this perspective, free energy and heat vector function consistent with our own arguments have been represented with an expansion of power series. The kind and number of terms, in this series, determine the linearity degree for material. Consequently it is assumed that mechanical interactions are linear in both approximations. At last, linear constitutive equations in the spatial coordinates have been used. Cauchy movement equation and energy equation and field equations are obtained.

KEY WORDS: Field Equations, Anisotropy, Constitutive equations, Deformation, Stress, Heat Vector, Materials and Spatial Coordinates, Continuum Mechanics.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın yapılmasında yardım ve desteklerini esirgemeyen, çalışmamı titizlikle yöneten, fikir ve eleştirileri ile beni yönlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Melek USAL' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarımda karşılaştığım problem ve engellerde bilgi ve tecrübelerine başvurduğum değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa Reşit USAL' a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde büyük emekleri olan annem ve babama, kardeşlerime eşime ve mesai arkadaşlarıma şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca tezin yazılması esnasında yardımlarını esirgemeyen tüm mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Benek HAMAMCI

02.06.2006

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Ortalama yoğunluğun değişimi.....	11
Şekil 1.2. Maddesel ve uzaysal koordinatlar.....	12
Şekil 1.3. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme	15
Şekil 1.4. Maddesel türev	25
Şekil 1.5. Yay elemanındaki değişim.....	26
Şekil 1.6. Süreksizlik yüzeyi içeren bölge	31
Şekil 1.7. Hareketli süreksizlik yüzeyi.....	32
Şekil 1.8. Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi.....	47

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{A}(\mathbf{X})$	A – Fiber ailesinin deformasyondan önceki dağılımı
$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t)$	a – Fiber ailesinin deformasyondan sonraki dağılımı
\mathbf{a}	İvme
C_{KL}, C_{KL}^{-1}	Gren – Piola deformasyon tansörleri
c_{kl}, c_{kl}^{-1}	Cauchy – Finger deformasyon tansörleri
d_{kl}	Şekil Değiştirme (genleme) hızı tansörü
dL, dl	Deformasyondan önceki ve sonraki elemanter fiber uzunluğu
dS, ds	Deformasyondan önceki ve sonraki köşegen uzunluğu
$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$	Zamana göre hareketi takip eden türev
E_{KL}, e_{kl}	Maddesel (lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörü
\mathbf{f}	Birim kütle başına mekanik hacimsel kuvvet
$F_{kK} = x_{k,K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}$	Deformasyon gradyanı
h	Birim kütle başına ısı kaynağı
$I_i (i=1, 2, \dots, 6)$	İnvariant değerler
$\mathbf{I}_K, \mathbf{i}_k (K, k = 1, 2, 3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlardaki birim vektörler
$J = \det \underline{\underline{F}}$	Deformasyon gradyanına ait matrisin determinanı
M	Momentum
K	Kinetik enerji
L	Hız gradyanı tansörü
m	Kütle
\mathbf{n}	Dış birim normal vektör
p	Hidrostatik basınç
\mathbf{q}	Isı akısı vektörü
$\underline{\underline{S}}$	Maddesel koordinat sisteminin tam ortogonal transformasyon matrisi
$Q_K(\mathbf{X}) = X_{K,k} q_k$	Maddesel koordinat sisteminde ısı vektörü
\mathbf{R}, \mathbf{r}	Maddesel noktanın deformasyondan önceki ve sonraki konum vektörleri

t	Gerilme Tansörü
$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl}$	Maddesel koordinatlarda gerilme tansörü
$\mathbf{t}_{(n)}$	n yüzeyine tesir eden gerilme vektörü
u	Yer değiştirme vektörü
V, v	Deformasyondan önceki ve sonraki hacim
$v_{k,l} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l}$	Deformasyon hızı tansörü
w_{kl}	Spin veya çevri tansörü
δ_{KL}, δ_{kl}	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda kronecker delta
$\alpha_i, \beta_i, (i=1, 2, \dots)$	Denklemleri kısaltmak için kullanılan kısaltmalar
ε	Birim kütle başına iç enerji
$\varepsilon_{KLM}, \varepsilon_{klm}$	Maddesel ve uzaysal koordinatlarda permütasyon sembolü
η	Birim kütle başına entropi yoğunluğu
$\theta(\mathbf{X}, t)$	Bir t anında X maddesel noktasının mutlak sıcaklığı
λ_a	A fiber ailesinin uzama oranı
ρ, γ	Birim kütle başına entropi üretimi
ρ_0, ρ	Deformasyondan önceki ve sonraki kütle yoğunluğu
σ	Sürekli ortam içinde yer alan süreksizlik yüzeyi
$\Sigma \equiv \rho_0 \psi$	Gerilme potansiyeli
$X_K, x_k (K, k=1, 2, 3)$	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
X, x	Maddesel ve uzaysal koordinatlar
$\psi \equiv \varepsilon - \theta \eta$	Genelleştirilmiş serbest enerji yoğunluğu
∇	Gradyan operatörü
ψ	Birim kütle başına herhangi bir alan büyüklüğü
λ, Λ	Shifter (kaydırıcı)
Z(X)	Deformasyondan önceki fiber tansörü
z(X, t)	Deformasyondan sonraki fiber tansörü
$\Omega, \lambda, \gamma, \xi, D, B$	Malzeme tansörü
θ	Sıcaklık
T	Lineer sıcaklık artışı
T_0	Çevre sıcaklığı

ϵ	Lineer genleme tansörü
Γ_a	Fiber Germesi
c	Sabit şekil değiştirme altında özgül ısı
G	Sıcaklık gradyanı
D_K	Maddesel tasvir vektörü
H	Ortogonal transformasyon matrisi

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı fiber takviyeli termoelastik malzemelerin bünye denklemlerine ait matematiksel modelin oluşturulmasıdır. Sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilke ve aksiyomları, bu çalışmanın gerçekleşmesinde yol gösterici ve belirleyici olmuştur. Hazırlanan bu tez ile ilgili genel bilgiler aşağıda bir sistematik halinde verilmiştir (Şuhubi, 1994).

Elastik malzemeleri de kapsayan önemli bir malzeme sınıfı şekli termomekanik malzemelerdir. Termomekanik malzemeler için bağımsız bünye değişkenleri yalnız hareket ve sıcaklıktan ibarettir. Termoelastik malzemelerde ise bünye değişkenleri hareket, sıcaklık ve sıcaklık gradyanı şeklindedir. Bu bakımdan bünye teorisinde ele aldığımız ortamların tümünün bu tür malzemeden oluştuğu açıktır (Eringen 1980).

Bir malzemede elastik bölgede yapılan mekanik iş ile termodinamik özelliklerdeki değişimler arasında bir bağıntı bulunduğu deneysel yolla gösterilebileceği gibi teorik yollarda saptanabilir. Bunun için değişken büyüklükler olarak bir tarafta gerilme ile şekil değiştirme, diğer tarafta sıcaklıkla entropi alınır. Gerilme halindeki değişimin oluşturduğu sıcaklık değişimi termoelastik etki olarak bilinir (Şuhubi, 1994).

Fiber takviyeli termoelastik malzemelerin endüstride kullanıldığı alanlar her geçen gün artmaktadır. Bu tür malzemelerin nonlineer termomekanik davranışının bilinmesi yararlı olacaktır.

Mekanik, sistemlerin denge ve hareket şartlarını, sistemin tersinmezlik derecelerini, sistemin mikro ve makro davranışını inceleyen bir bilim dalıdır. Mekanik Kuantum Mekaniği ve Sürekli Ortamlar Mekaniği olarak ikiye ayrılır. Kuantum Mekaniği atomik ve atom altı parçaların davranışını inceler. Sürekli Ortamlar Mekaniği ise kütle dağılımı sürekli kabul edilen maddesel cisimlerin mekanik davranışını inceleyen bir bilim dalıdır (Usal 2001).

Bu bakımdan bünye teorisinde ele aldığımız ortamların tümünün bu tür malzemeden oluştuğu açıktır (Şuhubi, 1994).

Fiber ve matris malzemesi makroskobik olarak izotrop ise malzeme, tek aileli fiber dağılımı sonucunda yerel olarak enine izotrop duruma gelir. Bu da, malzeme içinde fiberler doğrultusunda tercihli bir yönün oluşması ve ortamın makroskobik düzeyde anizotrop hale gelmesi demektir. Malzeme, bu tercihli doğrultu etrafında dönmeye karşı duyarsız olmakla birlikte, bu doğrultuya dik eksenler etrafındaki dönmeye ise duyarlıdır, yani anizotrop yapı gibi davranış gösterir. Bu durumda, fiber doğrultusu, enine izotropinin eksenini oluşturur. Fiberler paralel doğru çizgiler boyunca bulunmadığı müddetçe enine izotropiyi belirleyen doğrultu, malzeme içinde hareket edildikçe noktadan noktaya değişir (Öntürk, 1993).

Kompozit malzemeler en genel anlamda doğal kompozitler ve yapay kompozitler olmak üzere ikiye ayrılır. Kompozitler yapısal olarak fiber takviyeli, tabakalı ve partikül takviyeli olarak üç alt sınıfta incelenmektedir. Doğal ve yapay kompozit malzemelerde fonksiyonel açıdan benzerlikler olmakla birlikte imalat yöntemleri ve kullanım maksatları açısından çok büyük farklılıklar vardır. Ağaç, kemik, adale ve diğer biyolojik dokular gibi doğal kompozitler insanoğlunun belli maksatlar doğrultusunda gerçekleştirmiş olduğu bir imalat ve fabrikasyon işleminin sonucu değildir. Son derece ince ve karmaşık alt sistemlere sahip olan bu yapılar bazen mikroskobik bazen de makroskobik ölçeklerde evrensel bir programa göre tayin edilmiş bir zaman ve zeminde belli bir dağılımda bir araya gelerek bilinen doğal yapı elemanlarını oluşturur. Yapay kompozitler ise üstün özelliklere sahip ve kullanım amacı belli olan bir malzeme oluşturmak için insanoğlunun beyin gücü ölçüsünde belli bir fabrikasyonun ürünü olarak ortaya çıkmaktadır. Yapay kompozitleri oluşturan bileşenlerin bütün fiziksel ve mekanik özellikleri önceden bilinmektedir. Doğal ve yapay kompozit yapı elemanlarının mikro düzeyde ele alınması mikro mekaniğin konusudur (Usal, 2001).

Kompozit malzeme, iki yada daha fazla sayıdaki aynı veya farklı gruptaki malzemelerin en iyi özelliklerini, yeni ve tek bir malzemedeki toplamak amacıyla, makro düzeyde birleştirilmesiyle oluşturulan malzemeler olarak adlandırılır. Bir

kompozit malzeme bünyesinde, çekirdek olarak adlandırılan takviye elemanı ve bunun etrafını çevreleyen matris malzemesinin bulunduğu bilinmektedir. Takviye elemanı olarak değişik morfolojiye sahip kısa ve uzun elyaflar, Whiskerler (kılcal kristaller), kırılmış veya parçacıklı seramikler kullanılmaktadır. Bunların temel fonksiyonu gelen yükü taşımak ve matrisin rijitlik ve dayanımını artırmaktır. Matrisin fonksiyonu ise elyaflara yük ve gerilim transferi sağlayabilmek için elyaf matrisi bir arada tutmak yanında çoğu takviye elemanları çok gevrek ve kırılğan olduğundan onların yüzeylerini dış ve çevresel etkilere karşı korumaktır. Kompozit malzeme üretilmesiyle genel olarak yüksek dayanım, yüksek rijitlik, yüksek yorulma dayanımı, mükemmel aşınma direnci, yüksek sıcaklık kapasitesi, iyi korozyon direnci, iyi termal ve ısı iletkenliği, düşük ağırlık, çekicilik ve estetik görünüm gibi özellikler sağlanabilir. Bütün bu özellikler aynı zamanda oluşmaz ve herhangi bir uygulama için böyle bir gereksinime ihtiyaç yoktur. Fakat yukarıda belirtilen bu özellikler için gerekli şartlar, uygun matris ve takviye elemanı çifti, üretim tekniği, optimizasyonu, bileşenlerin mukavemet özellikleri ve diğer faktörler göz önüne alınarak üretim yapılırsa istenilen özelliği elde etmek mümkündür (Şahin, 2000).

Kompozit malzemeler için kullanımda çok farklı fiber ve matris malzemeler bulunmaktadır. Mühendislikte önemli olan diğer bir nokta ise fiberlerin dayanımının yüksek ve maliyetinin düşük olmasıdır. Bor, cam, karbon grafit (farklı karbon içerikli), organik fiber aramid, seramik fiber silikon karpit ve alüminyum oksit fiberlere örnek olarak verilebilir. Termoplastik polimerler, termoset polimerler, metaller (alüminyum, titanyum ve bakır gibi) ve seramikler matris malzemelere örnek olarak verilebilir (Holzapfel, 2000).

Fiber takviyeli kompozit malzemeler endüstri mühendisliğinde ve tıp alanında değişik uygulamalarda kullanılır. Endüstride kemerlerin ve yüksek basınç tüplerinin sonlu elastik tepkisi, tekerleklerde kullanılan çelik takviyeli lastikler ve elektronik aletlerde kullanılan ufak bir silikon parçadaki çok kısmı elektronik devreler gibi bir çok uygulama alanı kompozit malzemelerle ilgilidir. Kalça eklemi dikme aleti ve hafif tekerlekli sandalye ise tıp alanındaki uygulamalardır (Holzapfel, 2000).

Çok sayıda malzeme matris malzeme ve tek veya daha çok fiber ailelerinden oluşmaktadır. Bu tip malzemeler kompozit malzemeler veya fiber takviyeli malzemeler olarak adlandırılırlar. Fiber takviyeli kompozitlerin dizaynındaki en önemli problem elde edilen malzemenin istenilen uygulama için en etkili şekilde olması açısından matris malzeme ile fiberlerin birleştirilmesidir. Mühendislik uygulamaları açısından kompozit malzemeler yüksek katılık ve dayanım, düşük ağırlık ve ısı yayılımı ve korozyona direnç gibi avantajları sağlamalıdır. Bununla birlikte kompozit malzemelerin kullandığı dezavantajı ise yüksek maliyetli olması ve uygulama açısından bakıldığında bu tip malzemelerin nasıl birleştirilecekleri konusundaki bilginin sınırlı olmasıdır (Holzapfel, 2000).

Bir fiber ailesi ile takviye edilmiş bir malzeme tek tercihli doğrultuya sahiptir. Bu tip kompozitlerin fiber doğrultusundaki katılığı, fiberlere dik doğrultulardan daha büyüktür ve fiberlerin bütün malzemede düzgün bir şekilde dağıldığı durum göz önüne alındığından tercihli doğrultuya göre enine izotropi söz konusudur. Tercihli doğrultuya dik doğrultu boyunca malzeme tepkisi izotropudur (Holzapfel, 2000).

Sürekli ortamlar mekaniği akışkanların (su, yağ, hava, vb.) ve katıların (kauçuk, metal, seramik, ahşap ve yaşayan doku gibi) içerir. Süreklilik gibi malzemenin makroskopik doğasını tanımlamada fenomenolojik yaklaşım tekniği kullanılır. Fenomenolojik yaklaşım matematiksel denklemler ile deneysel verileri uygun hale getirmeye uğraşır ve özellikle katı mekaniğinde başarılı olmuştur (Holzapfel, 2000). Sürekli ortamlar mekaniği, kütle dağılımı sürekli kabul edilebilen maddesel cisimlerin mekanik davranışını belirlemekle uğraşan bir bilim dalıdır. Maddesel bir cisim gerçekte ayrık parçacıklardan oluştuğu için sürekli model ancak bir matematik soyutlama olarak değerlendirilebilir. Bununla beraber sonlu bir hacimdeki parçacık sayısının sonlu kalmasına karşın, çok özel durumlar dışında (genellikle çok büyük olması), bu parçacıkların sayısını sonsuz kabul etmekle yapılan hatayı pek çok uygulamada (özellikle teknolojik) kabul edilebilir sınırların içine sokar. Ortamın makroskopik davranışı ile ilgilendiğimiz sürece sürekli model ile elde ettiğimiz sonuçlar, çoğu zaman aradığımız büyüklüklerin yerel çalkantılarının sistematik olarak düzgünleştirilmiş değerlerine karşı gelir ve pratik açıdan gereksinimlerimizi hemen hemen tümüyle karşılayabilen bilgileri bize sağlar. Ancak ortamı oluşturan

parçacıkların yapısı çok çeşitli türden etkileşmelere yol açtığı için ilke olarak sürekli ortamların genel mekanik davranışını, çeşitli alanlarla etkileşimini göz önüne almadan belirlemek mümkün değildir. Çağdaş sürekli ortamlar mekaniği bütün bu etkileşimleri en genel biçimiyle rasyonel bir çerçeveye içine sokabilme çabalarının bir ürünüdür (Şuhubi, 1994).

Elastik malzemeler endüstride en yaygın olarak kullanılan basit malzemelerdir. Bu malzemelerden bir kısmında sıcaklık sabit değildir ve bu tür malzemeler termoelastik malzemeler sınıfında yer almaktadır. Termoelastik malzemelerin termomekanik yükleme sonucundaki davranışı, gerilme ve ısı vektörü şeklindedir. Fiber takviyeli termoelastik malzemelerin endüstride kullanıldığı alanlar her geçen gün artmaktadır. Bu tür malzemelerin termomekanik davranışının bilinmesi yararlı olacaktır.

Hemen hemen bütün mühendislik malzemeleri belirli ölçüde elastisite özelliğine sahiptir. Eğer şekil değiştirmeyi meydana getiren dış kuvvetler belirli bir limiti aşıyorsa, şekil değiştirme dış kuvvetlerin kaldırılmasıyla ortadan kalkar. Bir elastik cismin önemi homojen olması ve hacmi boyunca sürekli olarak dağılmış yani cisimden kesilen küçük bir parça cisme benzer fiziksel özelliklere sahip olmasıdır. Aynı zamanda cismin izotropik olduğu kabul edilir. Yapısal malzemeler yukarıda belirtilen kabullerin tamamını sağlamaz. Herhangi yapısal bir malzeme mikroskopla incelendiğinde çeşitli türlerde ve çeşitli oryantasyonlarda kristallerden meydana geldiği görülmektedir. Malzeme homojenlikten oldukça uzak olmasına rağmen deneyimler homojenlik ve izotropi kabullerine dayanan elastisite teorisi sonuçlarının büyük bir doğrulukla yapısal malzemelere uygulanabileceğini gösterir. Bunun sebebi, kristaller çok küçük ve genellikle bir santimetre küp içerisinde milyonlarca kristal olmasıdır. Tek kristallerin elastik özellikleri doğrultulara göre değişken, kristaller gelişi güzel dağılır ve büyük metal parçaların elastik özellikleri kristal özelliklerinin ortalanmasıyla temsil edilir. Cismin şeklini tanımayan geometrik boyutlar kristalin boyutlarıyla karşılaştırıldığında çok küçük olduğu sürece homojenlik kabulü büyük bir doğrulukla kullanılabilir ve kristaller rastgele bir şekilde yönlendirilmiş ise malzemedeki izotropik bir davranış sergiler (Timoshenko, 1970).

Son zamanlarda makalede yapılan çalışmada türlü malzeme üzerindeki termoelastik kuramsal formulasyonların anlaşılması yolundaki ilerlemelerde başarılı olunmuştur. Bu formulasyon basamak sayısı Eshelby gerilim denkleminde malzemelerinin davranışında kritik rol oynamış buda termal etkilerden dolayı oluşan ilk temel koşulları göstermiştir. Termal etkilerin burada birbirinin benzediği açıkça gösterilmiştir. Bu formulasyonla en iyi alan tekilleştirilmesi elde edilir ve gerçekten hatalardan kaynaklanan kuvvetleri, termomekanik formulasyonda hesaba katılmasını sağlar. Aynı zamanda bu tip bir formulasyon Schottky tarafından yapılan, ayrık sistem notasyonunu kullanarak termodinamik tabanlı nümerik düzenin planlanmasıdır (Lubarda, 2004).

Çeşitli malzemeler üzerinde termoelastisitenin matematiksel formulasyonu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmada hem gövde hem de hareketli ara yüzeylerde termal etkiler nedeniyle orijinal terimleri gösteren denklemde malzeme Eshelby gerilmesi kavramında kritik bir rol oynadığını açıkça ortaya konulmuştur. Termal etkiler yarı homojen olmayan etkiler olarak burada gösterilmiştir. Termoelastisite en eski çiftel alan teorisidir. Bununla beraber Hooke Elastisitesinin veya alternatif olarak fourier ısı iletim teorisi ilerleyen yüzyılların karışık sıcaklık deformasyonlarına bağlanmış olmaları tüm belirtileri bulmalarında yeni ufuklar açmıştır (Maugin ve Berezovski 1999).

Termomekaniğin genel çatısı altında konfigirasyon kuvvet balansının yeni bir formulasyonunu ortaya koymuşlardır. Sonuç için Gurtin tarafından önerilen yaklaşımı takip ederek, konfigirasyon çalışmasının değişmez gereksinimlerini kullanmışlardır. Daha genel çerçevede çalışmanın fikrini tanımlamak için Green ve Naghdi'nin düşüncelerin dikkate alarak termomekaniğin temel önermelerine başvurmuşlar ve sık sık kullanmışlardır (Kalpakides ve Dascalu 2002).

Bu makalede termal etkiler ve mekanik kuvvete bağlı nonpolar malzemelerin mekanik, termodinamik ve bünye denklemlerini birleştirmeye ve düzenlemeye çalışılmıştır. Bu yaklaşım süreklilik teorisidir. Öyleki bu teori ortak temel aksiyomlar altında tüm bilinen teoriler birleştirilmiş ve geliştirilmiş bir felsefedir ve bazıları ilk

defa karşımıza çıkarılmıştır. Birçok teoremdede diğer termo katıların mevcut bazı sınıfları verilmiştir. Basit katılar ve akışkanları tüm teorileri bu teorilerin özel durumları olmuştur (Eringen 1966).

Dört termodinamik potansiyel, iç enerji $u = u(\varepsilon_{ij}, s)$, Helmholtz serbest enerji $f = f(\varepsilon_{ij}, T)$, Gibbs enerji $g = g(\sigma_{ij}, s)$, entalpi $h = h(\sigma_{ij}, s)$ geliştirilmiş Hooke's kanunu Duhamel-Neumann kullanılarak birbirinden bağımsız olarak türetildi ve sıcaklık üzerindeki spesifik ısısının lineer bağımlılığı farazi alınmıştır. Dört olası bağımsız durum değişken çifti aracılığı ile bütün termodinamik potansiyelleri vurgulamak için sistematik prosedür sunulmuştur. Bir potansiyelden diğerine can sıkı hal değişimini yasaklanan bu yöntemde, değişkenlerin formal değişimleri gerilme – gerilme ve entropi – sıcaklık ilişkileri ters çevrilmesine dayanmaktadır. Genel sonuçlar izotermal, adyabatik, sabit gerilim ve sabit gerilme durumlarının altında tek eksenli yüklemeler uygulanmıştır. Termodinamik yol boyunca sıcaklık değişiminden ifadedeki adyabatik ve izotermal elastik sabitin etkileşimi gösterildi (Lunbarda 2004).

Kısım 1.1' de sürekli ortam modeli tanımlanmıştır. Geometrik ve kinematik temsilde maddesel noktaların başlangıç anında buldukları yer ve daha sonra işgal etmiş oldukları yerlerin tespiti için bir referans sistemine ihtiyaç vardır. Bu nedenle kısım 1.2' de sürekli ortamın hareketi ile koordinat sistemleri hakkında bilgi verilmiştir. Kısım 1.3' de maddesel ve uzaysal koordinatlarda yer vektörü, hareket deformasyonu temsili, deformasyon gradyanı, Green, Cauchy, Piola ve Finger deformasyon tansörleri, gerilmeyi oluşturan genleme (Strain) tansörü hakkında kısa bilgiler ve ilgili notasyon verilmiştir.

Kısım 1.4' de ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler ve daha genel olarak da şekil değiştirme karakteristiklerinin samanla değişim hızının nasıl ölçüleceği (maddesel türev) belirlenmeye çalışılmıştır. Süreksizlik yüzeyi tanımlanarak genleştirilmiş Green - Gauss (diverjans) teoremi verilmiştir.

Kısım 1.5' te denge denklemleri hem ortam için ve hemde süreksizlik yüzeyi üzerinde (veya ortam sınırında) geçerli olan hali ile birlikte verilmiş olup sırasıyla kütle korunumu, lineer momentum denkliği, açısal momentum denkliği, enerji dengesi ve entropi eşitsizliğinden oluşmaktadır.

Kısım 1.6' da ortamla birlikte hareket ettiği varsayılan fiberlerin, deformasyon sırasındaki mekanik davranışı, fiber dağılımını temsil eden fiber vektörünün deformasyondan önceki ve sonraki durumunu, fiber uzama hızı, fiber vektörünün zamana göre değişimi hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Kısım 2.1 de fiber takviyeli termoelastik ortamların termodinamiğinden bahsedilmektedir. Burada Termodinamiğin 1. ve 2. kanunlarının birleştirilmesinden elde edilen Clausius-Duhem eşitsizliği temel başlangıç noktası olarak dikkate alınmaktadır. Bu eşitsizlikte; entropi yoğunluğunun, iç enerjinin ve deformasyonun zamanla, sıcaklığın da uzaysal koordinatlara göre değişimi termodinamik prosesi temsil etmektedir. Bir termodinamik proseste iç enerji, entropi ve değişiminin kontrolü mümkün olamayacağından, (2.2) de verildiği tarzda bir Legendre transformasyonu uygulanarak, zamanla değişen terimler olan iç enerji ile entropi, serbest enerji ve sıcaklık alanının değişimi cinsinden yazılmıştır. Entropi üretiminin genel bir ifadesi olan (2.18) eşitsizliğinin kullanılabilmesi için gerilme potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekmektedir. Eringen (1980) ve Şuhubi (1994) tarafından tüm bünye fonksiyonları için geliştirilen bünye aksiyomları kullanılarak bu çalışmada ele alınan malzeme için gerilme potansiyelinin bağlı olduğu argümanlar (2.40) ifadesiyle ortaya konulmuştur. Bu kısımda ayrıca mekanik yüklemelerin etkisinde kalan tek fiber aileli termoelastik ortama ait maddesel ve uzaysal bünye denklemleri (2.54)-(2.59) denklemleriyle ortaya konulmuştur.

Kısım 3.1 de, anizotrop ortamlarda gerilme hesaplanmıştır. Bunun için gerilme, Σ dan türetildiğinden Σ doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılmıştır. Kısım 3.1.1' de ortamın referans konumu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmersiz doğal

durumda seçilip, bu konumdan itibaren küçük yer ve şekil- değiştirmeler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığını farz ederek gerilmenin lineer bünye denklemi elde edilmiştir.

Kısım 3.2' de gerilme potansiyeli için yapılan yaklaşım burada ısı vektörü için yapılmıştır. Daha sonra (3.59) ve (3.60) kısıtlamaları kullanılarak ısı vektörü (3.76) denklemiyle ortaya konulmuştur. Alan denklemlerine ulaşmak için gerilmenin r' ye göre türevi alınarak Cauchy hareket denkleminde yerine yazılarak (3.94) denklemiyle verilen alan denklemi bulunmuştur. İkinci alan denklemine ise enerjinin korunumu denkleminde gerilme, genleme hızı tansörü ve ısı vektörünün gradyanı yerlerine yazılarak (3.108) denklemiyle ulaşılmıştır.

1.1. Sürekli Ortam Modeli:

Bir maddesel cismin içinde alacağımız tamamen keyfi her hacim bu cismin kütesinin bir kısmını içeriyorsa bu cismin bir sürekli olarak nitelendirilir. Buna göre sürekli bir ortamın bir noktası etrafında keyfi, yani istediğimiz kadar küçük seçebileceğimiz bir Δv hacmini bir Δm kütlesi bulunacaktır. Bu nokta civarında ortalama yoğunluk,

$$\rho_{ort} = \frac{\Delta m}{\Delta v} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır (Şuhubi, 1994). Sürekli ortam varsayımına göre Δv ne kadar küçük olursa olsun içinde kütle bulunacağından yukarıdaki ifadenin $\Delta v \rightarrow 0$ için bir limit olacaktır. Dolayısıyla ortamın göz önüne alınan noktadaki yoğunluğu bu limit işleminin sonucu olarak,

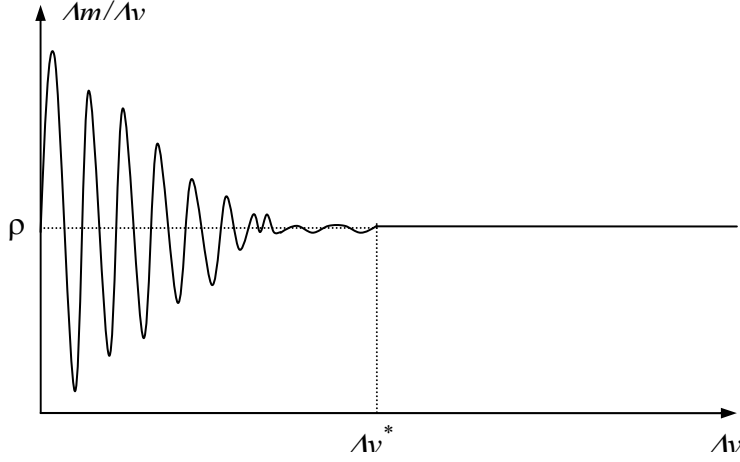
$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv} \quad (1.2)$$

bulunur. Atomistik ölçeğe indiğimizde madde büyük ölçüde boşluklu bir yapı sergiler. Buna göre bir noktada tanımlanan yoğunluğun statik olarak anlamlı bir ortalamaya karşı gelebilmesi için Δv hacminin Δv^* kritik değerinden büyük olabilmesi gerekir. $\Delta v < \Delta v^*$ için bir noktada yoğunluk, Δv 'ye bağlı olarak, büyük çalkantılar gösterir. (Şekil 1.1)

Sürekli ortam modeli, sonlu bir hacimdeki parçacık sayısını sonsuz almaya eşdeğerdir. Buna göre cismin içinde alınan bir V hacminde bulunan kütle miktarı,

$$M = \int_v \rho dv \quad (1.3)$$

integrali ile hesaplanır (Şuhubi, 1994).



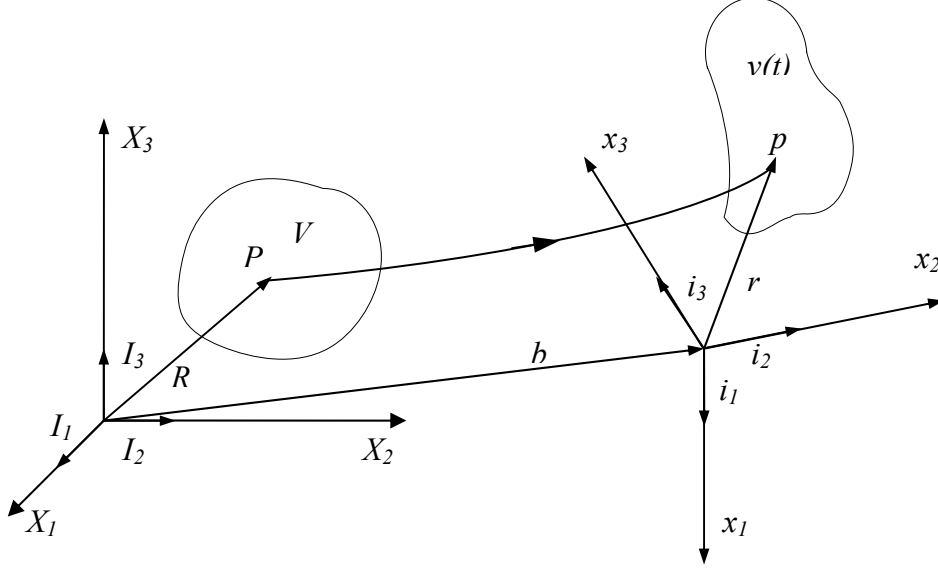
Şekil 1.1. Ortalama yoğunluğun değişimi (Şuhubi, 1994).

1.2. Sürekli Ortam Hareketi:

Bir sürekli ortamın hareketini belirtmek için bu ortamı oluşturan, sonsuz sayıdaki bütün parçacıkların zamanla buldukları uzaysal konumlarının belirtilmesi gerekir. Ortamın belli bir andaki konumunun tamamen bilindiği varsayılır. Bu konum referans konumu olarak adlandırılır ve oluştuğu hacimsel bölge V ile gösterilir. Ortamın referans konumunu belli kılmak için bir X_1, X_2, X_3 kartezyen koordinat takımı seçilir. Ortamın bir parçacığı, şimdi referans konumunda işgal ettiği P noktasının yerini tanımlayan \mathbf{R} yer vektörü, yada eşdeğer olarak $X_K (K = 1, 2, 3)$ koordinatlarıyla tamamen belirlenir. X_K koordinatlarına maddesel koordinatlar (Lagrange Koordinatları) adı verilir (Şuhubi, 1994).

Sürekli bir ortamın hareketini belirlemek için referans konumundaki herhangi bir P maddesel noktasının t anında uzayda bulunduğu konumu, yani p noktasının yerini, belirlemek için x_1, x_2, x_3 kartezyen koordinat takımı seçilir (Şekil 1.2). Bu koordinat takımında p uzaysal noktası \mathbf{r} yer vektörü, ya da $x_k (k = 1, 2, 3)$ koordinatlarıyla

belirlenir. Bu koordinatlara uzaysal koordinatlar (Euler koordinatları) adı verilir. Gerek duyulduğu takdirde maddesel ve uzaysal koordinatlar çakışık olarak seçilebilir.



Şekil 1.2. Maddesel ve uzaysal koordinatlar (Şuhubi, 1994).

Bir t anında her P parçacığının işgal ettiği p noktaları zamanla değişen bir $v(t)$ bölgesini oluşturur. Bu bölge ortamın t anındaki konumunu belirler. Buna göre sürekli ortamın hareketi, her P noktasına bir t anında hangi p noktasının karşı geldiğini gösteren bir dönüşüm olarak tanımlanır. Böyle bir dönüşüm,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t), \quad x_k = x_k(X_K, t) \quad (1.4)$$

Sürekli bağıntıları yardımıyla tanımlanır (Şuhubi, 1994). Tersini söylenmedikçe referans konumunun $t = 0$ anına karşı geldiği kabul edilir. Sürekli ortamın hareketini tanımlayan (1.4) dönüşümünün bir fiziksel harekete karşı gelebilmesi için sürekli olması gerekir. Ayrıca bu dönüşümün hacmi sonlu olan bir bölgeyi hacmi sıfır, ya da sonsuz bir bölgeye dönüştürmemesi için, dönüşümün jakobyeni sıfırdan ve sonsuzdan farklı olması gerekir. Yani,

$$J(\mathbf{X}, t) = \det(x_{k,K}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \neq 0, \infty \quad (1.5)$$

şartının sağlanması gerekir. Bir $J(\mathbf{X}, t)$ fonksiyonunu (1.5) in mutlak değeri,

$$j(\mathbf{X}, t) = |J(\mathbf{X}, t)| = |\det(x_{k,K})|, \quad 0 < j < \infty \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır. Temel varsayımımız uyarınca $J \neq 0$ olduğundan j ile J arasındaki fark çoğu zaman pratik bakımdan ortadan kalkar. Kapalı fonksiyon uyarınca (1.5) ya da (1.6) koşulu (1.4) dönüşümünün sürekli bir tersinin olacağını ifade eder. Bu ilke uyarınca (1.4) dönüşümünden,

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}, t), \quad X_K = X_K(x_k, t) \quad (1.7)$$

Yazılabilir (Şuhubi, 1994). Fiziksel olarak bu bağıntılar, seçilmiş, belli bir uzay noktasından çeşitli zamanlarda ortamın hangi parçacıklarının geçtiğini belirler ve $v(t)$ uzaysal bölgeler ailesini tek bir V maddesel bölgesine dönüştürür (Şuhubi, 1994).

1.3. Şekil Değiştirme

Referans konumunda verilen bir V bölgesini dolduran bir sürekli ortamın belli bir t , örneğin t_1 , anında $v(t)$ uzay bölgesine dönüştüğünü ve bu sürekli dönüşümün verilen,

$$x_k = x_k(X_K, t) \text{ veya } X_K = X_K(x_k, t) \quad (1.8)$$

hareket denklemlerinin t parametresinin t_1 değeriyle tamamen belirlenmiş olduğu varsayılır. Dolayısıyla başlangıçtaki, yani referans konumundaki herhangi bir

P parçacığı t_1 anında p uzay noktasına taşınmış olur. P ve p noktalarının yer vektörleri,

$$\mathbf{R} = X_K \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_{k,k} \quad (1.9)$$

ile verilir ve (1.8) bağıntıları yardımıyla birbirlerine bağlanır (Şekil 1.3). Bundan sonra Einstein toplama uyuşumundan yararlanılarak ve tekrarlanan iki indis üzerinde 1'den 3'e kadar toplama yapılacağı kabul edilir. Uzaysal ve maddesel koordinat takınılan arasındaki dönüşüm,

$$\mathbf{i}_k = \lambda_{kK} \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{I}_K = \Lambda_{Kk} \mathbf{i}_k \quad (1.10)$$

bağıntıları ile belirlenir. $\underline{\lambda}$ ve $\underline{\Lambda}$ katsayı matrisleri birbirinin tersidir ve,

$$\lambda_{kK} = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{I}_K, \quad \Lambda_{Kk} = \mathbf{I}_K \cdot \mathbf{i}_k \quad (1.11)$$

olarak tanımlanır. Her iki koordinat takımı da dik olduğundan bu dönüşüm ortogonaldir. Yani,

$$\underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\lambda}}^{-1} = \underline{\underline{\lambda}}^T \quad \text{veya} \quad \Lambda_{Kk} = \lambda_{kK} \quad (1.12)$$

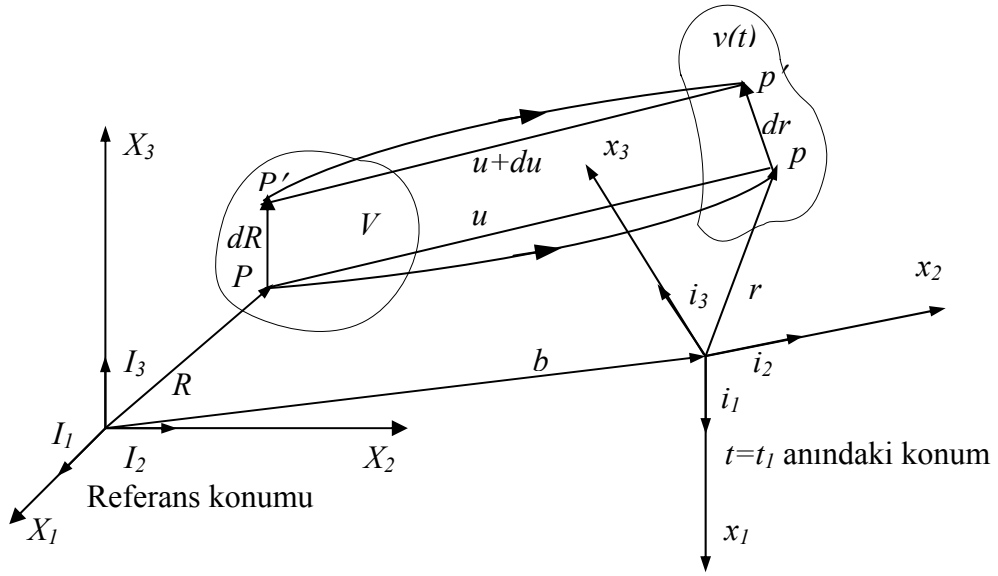
yazılabilir. Λ_{Kk} matrisi λ_{kK} matrisinin transpozu olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla bu katsayılar,

$$\lambda_{kK} \lambda_{lK} = \delta_{kl}, \quad \lambda_{kK} \lambda_{kL} = \delta_{KL} \quad (1.13)$$

bağıntılarını gerçeklemek zorundadır. Burada δ_{kl} ve δ_{KL} büyüklükleri Kronecker delta olarak adlandırılır ve birim matrisi temsil eder. Yani iki indis birbirine eşitse 1, farklı ise 0 değerini alırlar. λ matrisi yardımıyla uzaysal koordinat takımında tanımlanmış bir vektörü kendisine paralel kalarak maddesel koordinat takımına

kaydırabilir, ya da bu işlemin tersi yapabilir. Bu özellikler nedeniyle λ_{kk} katsayıları kaydırıcılar (Shifter) olarak adlandırılır.

Deformasyonu temsil etmek için, şekil 1.3 de P parçacığına çok yakın olan başka bir P' parçacığı göz önüne alınır. P' nün P ye göre konumunu sonsuz küçük $d\mathbf{R}$ vektörüyle belirlenir. P' maddesel noktası hareketle t_1 anında p' uzay noktasına taşınmış olur. p' noktasının P nin görüntüsü olan p noktasına göre konumu da yine sonsuz küçük olan $d\mathbf{r}$ vektörüyle belirlenir.



Şekil 1.3. Sürekli ortamda belli bir andaki şekil değiştirme (Şuhubi, 1994).

Bu vektörler maddesel ve uzaysal koordinat eksenleri üzerindeki bileşenleri cinsinden,

$$d\mathbf{R} = dX_K \mathbf{I}_K, \quad d\mathbf{r} = dx_k \mathbf{i}_k \quad (1.14)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (1.8) bağıntısında zamanın sabit olduğunu göz önünde tutularak diferansiyeli alınırsa,

$$dx_k = x_{k,K} dX_K, \quad dX_K = X_{K,k} dx_k \quad (1.15)$$

ifadeleri elde edilir. Bir alt indisten önceki virgül o indisin belirttiği değişkene göre kısmi türevini gösterir, (1.15) deki $x_{k,K}$ ve $X_{K,k}$ ifadeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x_{k,K} = \frac{\partial x_k}{\partial X_K}, \quad X_{K,k} = \frac{\partial X_K}{\partial x_k} \quad (1.16)$$

Bir P parçacığında, örneğin t_1 anında, hesaplanmış $x_{k,K}$ büyüklüklerine o maddesel noktada ve o andaki şekil değiştirme gradyanı adı verilir ve boyutsuz $\underline{\underline{F}}$ matrisi ile gösterilir.

$$\underline{\underline{F}}(X, t_1) = [x_{k,K}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

$j = |\det \underline{\underline{F}}| \neq 0$ olduğundan $\underline{\underline{F}}$ matrisinin bir $\underline{\underline{F}}^{-1}$ tersi vardır. (1.8) bağıntılarını göz önüne alır ve belli bir anda kısmi türevin zincir kuralını uygularsak,

$$x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl}, \quad X_{K,k} x_{k,L} = \delta_{KL} \quad (1.18)$$

yazılabilir, buradan da,

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = [X_{K,k}] \quad (1.19)$$

ifadesi elde edilir. Bir matrisin tersini hesaplamak için her elemanın yerine kofaktörünü koyarak oluşturduğumuz matrisin transpozunu matrisin determinantına bölünmesi gerekir.

$$[X_{K,k}] = \frac{\text{Kofaktör}[x_{k,K}]}{J} \quad (1.20)$$

Bilindiği gibi bir determinantı hesaplariken bir satırdaki elemanları kofaktörleriyle çarpıp işaret kuralına uygun şekilde toplanır. Buna göre determinantın açılımı o satırdaki elemanlara göre birinci derecedendir ve determinantın bir elemanına göre türevini alırsak bu elemanın kofaktörünü elde ederiz. Bu sonuç,

$$\frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} = \text{Kofaktör}[x_{k,K}] = J X_{K,k} \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x_{k,K}} = j X_{K,k} \quad (1.21)$$

özdeşliğini verir. $d\mathbf{R}$ vektörünün boyu dS , $d\mathbf{r}$ vektörünün boyu ise ds ile gösterildiği takdirde,

$$dS^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = dX_K dX_K, \quad ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dx_k dx_k, \quad (1.22)$$

şeklinde ifade edilir. (1.15) bağıntılarını kullanarak yukarıdaki ifadeler,

$$dS^2 = x_{k,K} x_{k,L} dX_K dX_L = C_{KL} dX_K dX_L \quad (1.23)$$

$$dS^2 = X_{K,k} X_{K,l} dx_k dx_l = c_{kl} dx_k dx_l$$

şeklinde elde edilir. Burada t anında hesaplanmış bileşenleri,

$$C_{KL} = (\mathbf{X}, t) = x_{k,K} x_{k,L} \quad c_{kl}(\mathbf{x}, t) = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.24)$$

ile verilen ifadeler sırasıyla Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörleri veya matrisleri adını alır. Bu matrislerin simetrik olduğu ve,

$$C_{KL} = C_{LK}, \quad c_{kl} = c_{lk} \quad (1.25)$$

bağıntılarının sağlandığı görülmektedir. \mathbf{C} ve \mathbf{c} büyüklüklerini matrisin yanısıra tansör olarak ta nitelendirilmesinin nedeni sırasıyla maddesel ve uzaysal koordinatları dönüştürüp yeni koordinat takımlarına geçildiğinde bileşenlerinin

belirli bir kurala göre değişmesidir. X_K koordinat eksenleri yine dik X'_K koordinat eksenlerine dönüştürülsün. Bu dönüşüm $\underline{\underline{Q}}$ ortogonal matrisi yardımıyla gerçekleşir ve koordinat eksenleri arasında,

$$X'_K = Q_{KL} X_L, \quad X_K = Q_{LK} X'_L \quad (1.26)$$

ilişkileri yazılabilir. Buna göre \mathbf{C} tansörünün yeni koordinat takımındaki bileşenleri,

$$\begin{aligned} C'_{KL} &= \frac{\partial x_k}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X'_L} = \frac{\partial x_k}{\partial X_M} \frac{\partial X_M}{\partial X'_K} \frac{\partial x_k}{\partial X_N} \frac{\partial X_N}{\partial X'_L} \\ &= Q_{KM} Q_{LN} x_{k,M} x_{k,N} = Q_{KM} Q_{LN} C_{MN} \end{aligned} \quad (1.27)$$

şeklinde bulunur. Bu da \mathbf{C} nin ikinci mertebeye bir maddesel tansör olduğunu gösterir. Burada (1.26) bağıntısının $\underline{\underline{Q}}$ ortogonal bir matris olmasa da, yani koordinatları dik olmayan bir takıma dönüştürüldüğünde de $\underline{\underline{Q}}^T$ yerine $\underline{\underline{Q}}^{-1}$ matrisini alma koşuluyla geçerli kalacağına dikkat edilmeli. Benzer olarak uzaysal koordinatları,

$$x'_k = Q_{kl} x_l \quad (1.28)$$

ile dönüştürülürse \mathbf{c} ' nin ikinci mertebeye bir uzaysal tansör olduğunu gösteren,

$$c'_{kl} = Q_{km} Q_{ln} c_{mn} \quad (1.29)$$

ifadesi elde edilir. Buraya kadar verilen ifadeler matris notasyonu kullanılarak yazılırsa; $d\mathbf{X}$ ve $d\mathbf{x}$ sütun vektörleri,

$$[d\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{bmatrix}, \quad [d\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

şeklinde tanımlanır. (1.15) bağıntıları matris notasyonu ile,

$$d\underline{x} = \underline{F} d\underline{X}, \quad d\underline{X} = \underline{F}^{-1} d\underline{x} \quad (1.31)$$

yazılabilir. (1.22) ve (1.31) bağıntılarından,

$$d s^2 = d \underline{x}^T d \underline{x} = d \underline{X}^T \underline{F}^T \underline{F} d \underline{X}, \quad d S^2 = d \underline{X}^T d \underline{X} = d \underline{x}^T \underline{F}^{T^{-1}} \underline{F}^{-1} d \underline{x} \quad (1.32)$$

bulunur. (1.23) bağıntısı göz önünde tutulduğunda Green ve Cauchy şekil değiştirme tansörlerinin şekil değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}, \quad \underline{C}^{-1} = \underline{F}^{T^{-1}} \underline{F}^{-1} \quad (1.33)$$

şeklinde ifade edilebileceği görülür. Bazı durumlarda (1.33) ile verilen matrisler yerine terslerinin kullanılması gerekebilir. Bu matrisler ise,

$$\underline{c}^{-1} = \underline{F} \underline{F}^T, \quad \underline{C}^{-1} = \underline{F}^{-1} \underline{F}^{-T} \quad (1.34)$$

veya bileşenleri cinsinden,

$$c_{kl}^{-1} = x_{k,K} x_{l,K}, \quad C_{KL}^{-1} = X_{K,k} X_{L,k} \quad (1.35)$$

şeklinde ifade edilir, \mathbf{c}^{-1} ve \mathbf{C}^{-1} tansörleri sırasıyla Finger ve Piola şekil değiştirme tansörleri olarak bilinir. Hareket denklemleri $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ şeklinde verilmesi yerine P parçacığının \mathbf{u} yer değiştirme vektörüne bağlı olarak ifade edilir. Yer değiştirme vektörünü (Şekil 1.3),

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} + \mathbf{b} \quad (1.36)$$

olarak tanımlanır. \mathbf{u} vektörünü,

$$\mathbf{u} = u_k \mathbf{i}_k = U_K \mathbf{I}_K \quad (1.37)$$

şeklinde yazarak uzaysal ve maddesel bileşenleri belirlenir. (1.8) hareket denklemlerinden yararlanarak uzaysal ve maddesel yer vektörlerini $\mathbf{r} = \mathbf{r}(X_K, t)$ ve $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x_k, t)$ olarak ifade edilirse,

$$d\mathbf{r} = \mathbf{C}_K dX_K, \quad d\mathbf{R} = \mathbf{c}_k dx_k \quad (1.38)$$

yazılabilir. Burada \mathbf{C}_K ve \mathbf{c}_k vektörleri,

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial X_K} = x_{k,K} \mathbf{i}_k, \quad \mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_k} = X_{K,k} \mathbf{I}_K \quad (1.39)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu vektörler cinsinden şekil değiştirme tansörleri,

$$\mathbf{C}_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L, \quad \mathbf{c}_{kl} = \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l \quad (1.40)$$

olarak bulunur. (1.39)₁ bağıntısından,

$$\mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = x_{k,K} \mathbf{i}_k \cdot x_{l,L} \mathbf{i}_l = x_{k,K} x_{l,L} \delta_{kl} = x_{k,K} x_{k,L} \quad (1.41)$$

bulunur ve benzer şekilde (1.39)₂ bağıntısından da,

$$\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = X_{K,k} \mathbf{I}_K \cdot X_{L,l} \mathbf{I}_L = X_{K,k} X_{L,l} \delta_{KL} = X_{K,k} X_{K,l} \quad (1.42)$$

bağıntısı bulunur. \mathbf{C}_K ve \mathbf{c}_k vektörlerinin fiziksel anlamı tanımlardan açıkça görülmektedir. (1.39) ifadelerine benzer olarak,

$$\mathbf{c}_k^{-1} = x_{k,K} \mathbf{I}_K, \quad \mathbf{C}_K^{-1} = X_{K,k} \mathbf{i}_k \quad (1.43)$$

vektörleri tanımlanır. \mathbf{c}_k^{-1} vektörlerinin \mathbf{c}_k vektörlerine karşıt olduğu, yani,

$$\mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l = \delta_{kl} \quad (1.44)$$

bağıntısını sağladıkları görülür. (1.39) ve (1.43) bağıntılarından,

$$\mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l = x_{k,K} \mathbf{I}_K \cdot X_{L,l} \mathbf{I}_L = x_{k,K} X_{L,l} \delta_{KL} = x_{k,K} X_{K,l} = \delta_{kl} \quad (1.45)$$

bulunur. Benzer şekilde \mathbf{C}_K^{-1} vektörlerinin de \mathbf{C}_K vektörlerine karşıt olduğu ve

$$\mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L = \delta_{KL} \quad (1.46)$$

bağıntılarının sağlandığı gösterilebilir. (1.35) bağıntısı göz önünde tutulursa,

$$c_{kl}^{-1} = \mathbf{c}_k^{-1} \cdot \mathbf{c}_l^{-1}, \quad C_{KL}^{-1} = \mathbf{C}_K^{-1} \cdot \mathbf{C}_L^{-1} \quad (1.47)$$

yazılabilir, \mathbf{c}^{-1} ile \mathbf{c} ve \mathbf{C}^{-1} ile \mathbf{C} tansörleri birbirlerinin tersleri olduğu için,

$$c_{km}^{-1} c_{ml} = \delta_{kl}, \quad C_{KM} C_{ML}^{-1} = \delta_{KL} \quad (1.48)$$

bağıntılarının da geçerli olacağı açıktır. Cismin şekil değiştirmesinden söz edebilmek için parçacıkları arasındaki uzaklığın hareketi sırasında değişmesi gerekmektedir. Ortamın İki parçacığı arasındaki uzaklığın değişmesi için $ds \neq dS$ olması gerektiğinden ortamın bir noktasındaki şekil değiştirmenin Ölçümü olarak $ds^2 - dS^2$ büyüklüğü seçilir. (1.22) ve (1.23) bağıntıları yardımıyla,

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL} dX_K dX_L = 2e_{kl} dx_k dx_l \quad (1.49)$$

yazılabilir. Burada E_{KL} ve e_{kl} simetrik tansörleri,

$$E_{KL}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2} (C_{KL} - \delta_{KL}), \quad e_{kl}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\delta_{kl} - c_{kl}) \quad (1.50)$$

olarak tanımlanır ve sırasıyla maddesel (Lagrange) ve uzaysal (Euler) genleme tansörleri adını alır. Bir maddesel noktada \mathbf{E} tansörünün değerini bildiğimiz takdirde bu noktadan geçen sonsuz küçük dX_K maddesel vektörünün hareketi sırasında boyundaki değişim (1.49) bağıntısıyla belirlenir. Aynı boy değişimi bu parçacığın t anındaki yerinde \mathbf{e} tansörünün değeri yardımıyla da hesaplanabilir, (1.50) bağıntıları matris formunda,

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}), \quad \underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{c}}) \quad (1.51)$$

yazılabilir. (1.15) bağıntılarından (1.49) da yararlanılırsa maddesel ve uzaysal genleme tansörlerinin,

$$e_{kl} = E_{KL} X_{K,k} X_{L,l}, \quad E_{KL} = e_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (1.52)$$

eşitlikleriyle birbirlerine bağlandığı görülebilir. (1.36) ve (1.39) bağıntıları, \mathbf{b} vektörü koordinatlara bağlı olmadığı için yer değiştirme vektörü cinsinden,

$$\mathbf{C}_K = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_K} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial X_K} = \mathbf{I}_K + U_{L,K} \mathbf{I}_L = (\delta_{LK} + U_{L,K}) \mathbf{I}_L \quad (1.53)$$

$$\mathbf{c}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k - u_{l,k} \mathbf{i}_l = (\delta_{lk} - u_{l,k}) \mathbf{i}_l$$

sonucu elde edilir. Şekil değiştirme tansörleri için yer değiştirme gradyanlarına bağlı olarak,

$$C_{KL} = \mathbf{C}_K \cdot \mathbf{C}_L = (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{NL} + U_{N,L}) \delta_{MN}$$

$$= (\delta_{MK} + U_{M,K})(\delta_{ML} + U_{M,L}) = \delta_{KL} + U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K} + U_{M,L} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} c_{kl} &= \mathbf{c}_k \cdot \mathbf{c}_l = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{nl} - u_{n,l})\delta_{mn} = (\delta_{mk} - u_{m,k})(\delta_{ml} - u_{m,l}) \\ &= \delta_{kl} - u_{k,l} - u_{l,k} + u_{m,k}u_{m,l} \end{aligned}$$

sonuçları bulunur. Maddesel ve uzaysal genleme tansörleri de (1.50) tanımlan yer değiştirme gradyanı cinsinden,

$$E_{KL} = \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K} + U_{M,K}U_{M,L}) \quad (1.55)$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}u_{m,l})$$

şeklinde ifade edilir.

1.4. Hareket

Bu bölümde, ortamın hareketi sırasında parçacıklara ilişkin hız ve ivme gibi kinematik büyüklükler hesaplanacak ve daha genel olarak ta şekil değiştirme karakteristiklerinin zamanla değişim hızının nasıl ölçülebileceği belirlenmeye çalışılacak. Ortamın hareketini tanımlayan maddesel koordinatlarla uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm (1.4) bağıntısıyla aşağıdaki şekilde verilmişti.

$$x_k = x_k(X_K, t), \quad \mathbf{X} \in V \quad (1.56)$$

(1.56) bağıntısı V bölgesindeki belli bir \mathbf{X} parçacığı seçildiğinde t parametresine bağlı bir eğri gösterir. Sürekli ortamın hareketi sırasında \mathbf{X} parçacığının izlediği yolu gösteren bu eğriye göz önüne alınan parçacığın yörüngesi adı verilir, (1.56) bağıntısı tüm ortam parçacıklarının yörüngeler ailesini tanımlamaktadır. Bunun için ilk olarak

sürekli ortamın parçacıklarına bağlı bir fonksiyonun zamanla değişim hızını ölçmek gerekir.

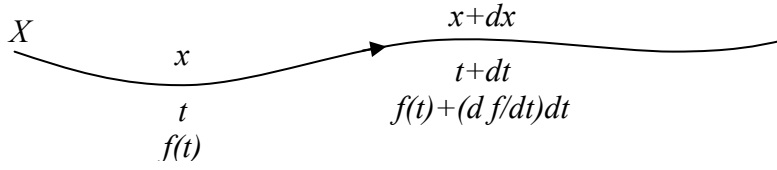
Sürekli ortama bağlı bir skaler, vektör ya da tansör değerli bir alan büyüklüğü $f(\mathbf{X}, t)$ şeklinde verilebilir. Maddesel gösterilimde böyle bir fonksiyon, ilgili alan büyüklüğünün bir parçacıkta aldığı değer bu parçacık yörüngesi üzerinde hareket ederken zamanla nasıl değiştiğini bize verir. (1.56) ifadesinin tersi f fonksiyonunda kullanılırsa,

$$f[\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t] = f(\mathbf{x}, t) \quad (1.57)$$

yazılabilir. $f(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu göz önüne alınan alan büyüklüğünün uzaysal gösterilimi adını alır. Maddesel ve uzaysal gösterilimde bu fonksiyon aynı sembolle göstermesine karşın birbirine karşı gelen maddesel ve uzaysal noktalarda sayısal değerleri eşit olmakla beraber $f(\mathbf{x}, t)$ ve $f(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonları tümüyle farklı fonksiyonlardır. Bir \mathbf{x} uzay noktasında $f(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu alan büyüklüğünün bu noktadan çeşitli zamanlarda geçen farklı parçacıklarda aldığı değerleri gösterir. Uzaysal gösterilimden maddesel gösterilime geçiş,

$$f(\mathbf{X}, t) = f[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t] \quad (1.58)$$

dönüşümü yardımıyla sağlanır. Bir alan büyüklüğünün sürekli ortamın bir parçacığını izlerken zamana göre değişim hızı maddesel türev olarak tanımlanır.



Şekil 1.4. Maddesel türev (Şuhubi, 1994).

Eğer maddesel gösterilim kullanılıyorsa maddesel türev X_K koordinatlarını sabit tutarak zamana göre hesaplanan türev olduğundan,

$$\frac{d f}{d t} \approx \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \approx \dot{f} \quad (1.59)$$

yazılabilir. Uzaysal gösterilim kullanıldığında (1.57) bağıntısını \mathbf{X} değişkenlerini sabit tutarak t değişkenine göre türetirsek zincir kuralına göre,

$$\dot{f} \approx \frac{d f}{d t} \approx \frac{\partial f[\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t]}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}=sbt} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=sbt} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=sbt} \quad (1.60)$$

elde edilir. Bir parçacığın $\mathbf{r}(\mathbf{R}, t)$ yer vektörüne bağlı olarak,

$$\mathbf{v} = \frac{d \mathbf{r}}{d t} = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t} = \frac{d x_k}{d t} \mathbf{i}_k = \frac{\partial x_k}{\partial t} \mathbf{i}_k \quad (1.61)$$

veya bileşenleri cinsinden,

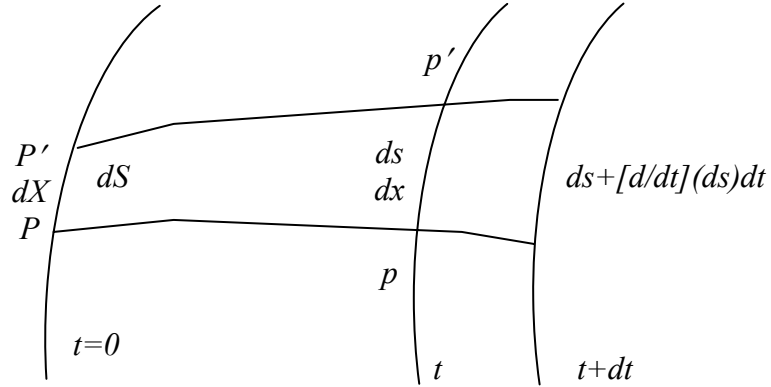
$$v_k(\mathbf{X}, t) = \frac{d x_k}{d t} = \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad \mathbf{v} = v_k \mathbf{i}_k \quad (1.62)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre uzaysal gösterimde f alanının (1.60) ile verilen maddesel türevi,

$$\dot{f} \approx \frac{df}{dt} \approx \frac{\partial f}{\partial t} + f_{\approx k} v_k \quad (1.63)$$

olur. (1.63) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim \mathbf{x} koordinatları sabit tutularak zamana göre alınmış türev olduğundan yerel değişme hızını gösterir, ikinci terim ise t anında \mathbf{x} noktasında bulunan parçacığın hareketinden kaynaklandığı için konvektif değişme hızı adını alır.

1.4.1. Yay ve Hacim Elemanlarının Maddesel Türevi



Şekil 1.5. Yay elemanındaki değişim (Şuhubi, 1994).

Referans konumunda bir P maddesel noktasından geçen sonsuz küçük bir dS yay elemanı ve bu elemanın t anındaki ds görüntüsü göz önüne alınırsa (Şekil 1.5), t anına sonsuz yakın $t + dt$ anında bu elemandaki değişim maddesel türevin tanımına göre $ds + (\dot{ds})dt$ olur. ds yay elemanının maddesel türevini belirlemek amacıyla önce p noktasını p' noktasına birleştiren $d\mathbf{x}$ vektörünün maddesel türevi hesaplanmaya çalışılacak. Bu vektör referans konumundaki $d\mathbf{X}$ elemanter

vektörünün hareket altında t anındaki görüntüsü olduğundan türetmenin zincir kuralından uygun şekilde yararlanılarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (d x_k) &= \frac{d}{dt} (x_{k,K} d X_K) = \frac{\partial}{\partial t} (x_{k,K}) d X_K = \frac{\partial}{\partial X_K} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right) d X_K \\ &= v_{k,K} d X_K = v_{k,K} X_{K,l} d x_l = v_{k,l} d x_l \end{aligned} \quad (1.64)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$(d \dot{x}_k) = v_{k,l} d x_l \quad (1.65)$$

yazılabilir. (1.64) de üçüncü ve beşinci ifadelerde $d X_K$ bileşenlerinin katsayılarını eşitlersek şekil değiştirme gradyanının maddesel türevi,

$$\frac{d}{dt} (x_{k,K}) = (\dot{x}_{k,K}) = v_{k,K} = v_{k,l} x_{l,K} \quad (1.66)$$

olarak bulunur. Hız gradyanı tansörü,

$$\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}, \quad L_{kl} = v_{l,k} \quad (1.67)$$

ile tanımlanırsa, (1.65) ve (1.66) bağıntıları,

$$(d \underline{\dot{x}}) = \underline{\underline{L}}^T d \underline{x}, \quad \underline{\underline{\dot{F}}} = \underline{\underline{L}}^T \underline{\underline{F}} \quad (1.68)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Hız gradyanı tansörünün simetrik ve antisimetrik kısımlarından oluşan iki yeni tansörü,

$$d_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} + v_{l,k}) = d_{lk}, \quad w_{kl} = \frac{1}{2}(v_{k,l} - v_{l,k}) = -w_{lk} \quad (1.69)$$

veya,

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}}), \quad \underline{\underline{w}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{L}}^T - \underline{\underline{L}}), \quad \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{d}} + \underline{\underline{w}} \quad (1.70)$$

bağıntılarıyla tanımlanır, \mathbf{d} tansörüne şekil değiştirme hızı (bazen de genleme hızı) tansörü, \mathbf{w} tansörüne ise spin veya çevri tansörü adı verilir. (1.21) bağıntısından yararlanarak önce,

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial x_{k,K}} \frac{d}{dt}(x_{k,K}) = J X_{k,K} v_{k,l} x_{l,k} = J v_{k,k} \quad (1.71)$$

şeklinde jakobyenin maddesel türevi elde edilir. Bir ortamın hacim elemanının değişme hızı, $dv = jdV$ olduğundan türetme ile,

$$\frac{d}{dt}(dv) = \frac{dj}{dt} dV \quad (1.72)$$

yazılabilir. Jakobyenin maddesel türevinden faydalanılarak,

$$\frac{d}{dt}(dv) = j v_{k,k} dV = v_{k,k} dv = \nabla \cdot \mathbf{v} dv \quad (1.73)$$

bulunur. Referans konumunda V hacmi hareketle t anında $v(t)$ hacmine dönüşürse $v(t)$ hacim integralinin maddesel türevi aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi(\mathbf{x}, t) d v &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi(\mathbf{X}, t) j d V = \int_V \frac{\partial}{\partial t} [j \Phi(\mathbf{X}, t)] d V \\ &= \int_{v(t)} (j \phi) j^{-1} d v = \int_{v(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \phi v_{k,k} \right) d v \end{aligned} \quad (1.74)$$

Maddesel türevin tanımından faydalanarak (1.74) ifadesi,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi d v = \int_{v(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\phi v_k)_{,k} \right] d v \quad (1.75)$$

şeklinde yazılabilir, t ye göre kısmi türevi x değişkenleri sabit tutularak alındığı için (1.75) bağıntısında sağ taraftaki ilk terimde türev ile integral operatörünün yeri değiştirilebilir. Son terim de Green- Gauss integral teoremi kullanılarak $v(t)$ hacmini içine alan $S(t)$ kapalı yüzeyi üzerindeki bir integrale dönüştürülürse,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi d v = \frac{\partial}{\partial t} \int_{v(t)} \phi d v + \int_{S(t)} \phi v_n d a \quad (1.76)$$

elde edilir. $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ ortam hızının yüzeye dik bileşenidir, ϕv_n büyüklüğüne ϕ alanının yüzey boyunca akısı adı verilir ve ortam hareketiyle bu fiziksel alanın $S(t)$ yüzeyinin bir tarafından öteki tarafına bu yüzeyin birim alanı başına birim zamanda aktarılan kısmını gösterir.

1.4.2. Green - Gauss (Diverjans) Teoremi

Doğa yasalarından sürekli ortamların hareketini yöneten denklemlerin çıkartılmasına olanak sağlayan bazı integral teoremlerinin genelleştirilmesi gerekir. Bilindiği gibi bir ∂v kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v hacminde tanımlanmış vektör ya da tansör değerli sürekli bir fonksiyon için Green - Gauss veya diverjans teoremi olarak bilinen teorem

bu alanın diverjansının hacim içindeki integralini normal bileşeninin yüzey üzerindeki integraline dönüştürür.

$$\int_v \nabla \cdot \phi \, d v = \int_{\partial v} \mathbf{n} \cdot \phi \, d a \quad (1.77)$$

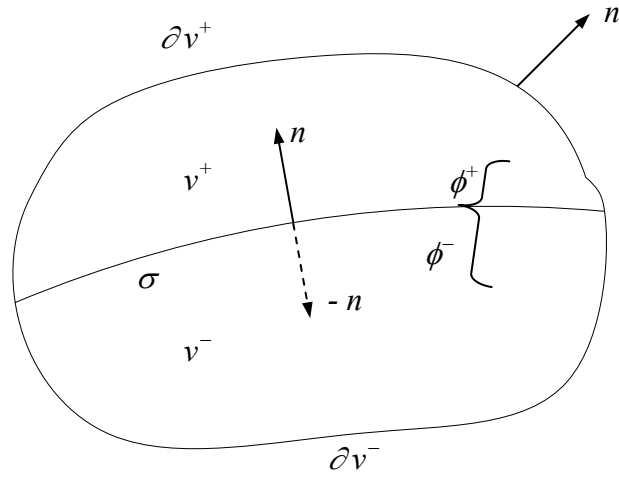
\mathbf{n} yüzeyin birim dış normalidir, ϕ bir vektör alanı olduğu takdirde yukarıdaki skaler denklemin anlamı açıktır, ϕ ikinci mertebe bir tansör alanı ise (1.77) vektör değerlidir ve,

$$\nabla \cdot \phi = \phi_{kl,k} \mathbf{i}_l, \quad \mathbf{n} \cdot \phi = n_k \phi_{kl} \mathbf{i}_l \quad (1.78)$$

olarak tanımlanır. Şimdi v bölgesinde hareketli de olabilen bir σ yüzeyi üzerinde ϕ tansör alanının süreksizlik göstermesi halinde diverjans teoreminin genelleştirilmiş şeklini elde etmeye çalışacağız. v hacmini iki parçaya ayıran σ yüzeyinin dış normalini keyfi olarak yönlendirelim. Ve v bölgesini σ yüzeyinin dış normalinin yöneldiği tarafta kalan parçasını v^+ , öteki parçasını ise v^- ile gösterelim. $v = v^+ \cup v^-$ olduğu açıktır, σ yüzeyi ϕ alanı için bir süreksizlik yüzeyi ise bu alan σ üzerindeki bir noktada, bu noktaya v^+ ya da v^- bölgeleri içinden yaklaşıldığına göre farklı değerler alır. Bu değerler sırasıyla ϕ^+ ve ϕ^- ile gösterilir (Şekil 1.6), ϕ tansör alanının σ üzerindeki süreksizliğini ölçen sıçraması,

$$[[\phi]] = \phi^+ - \phi^- \quad (1.79)$$

olarak tanımlanır.



Şekil 1.6. Süreksizlik yüzeyi içeren bölge (Şuhubi, 1994).

Doğal olarak bu büyüklük σ yüzeyinin koordinatlarının bir fonksiyonudur. ϕ alanı $v^+ \cup \sigma$ kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^+ ve $v^- \cup \sigma$ kapalı yüzeyi ile sınırlanmış v^- bölgelerinde süreklidir, Dolayısıyla bu bölgelerde Green - Gauss teoremi (1.77) sekliyle uygulanabilir, σ yüzeyinin bu anlamda dış normalinin v^+ için $-\mathbf{n}$ olduğuna dikkat edilirse,

$$\int_{v^+} \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v^+} \mathbf{n} \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \phi^+ \, da \quad (1.80)$$

$$\int_{v^-} \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v^-} \mathbf{n} \cdot \phi \, da + \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \phi^- \, da$$

yazılabilir. Bu iki ifade taraf tarafa toplanırsa genelleştirilmiş Green - Gauss teoremi,

$$\int_v \nabla \cdot \phi \, dv = \int_{\partial v} \mathbf{n} \cdot \phi \, da - \int_{\sigma} \mathbf{n} \cdot [[\phi]] \, da \quad (1.81)$$

şeklinde elde edilir. Sürekli alanlar için σ yüzeyi üzerinde $[[\phi]] = 0$ olacağı için (1.81) denklemi (1.77) denklemine indirgenir. $v(t)$ bölgesinin sürekli ortamda bir

maddesel bölge olduğu kabul edilirse ve er süreksizlik yüzeyinin de verilen bir \mathbf{u} hızı ile hareket ettiği varsayılır (Şekil 1.7). Amaç (1.75) denklemini ϕ tansör alanının σ üzerinde süreksizlik gösterdiği hale genelleştirmektir. Bunun için kısmi türev operatörünü integralin içine sokarak (1.76) denklemini σ alanının içinde sürekli v^+ ve v^- bölgelerine ayrı ayrı uygulanırsa (Şekil 1.7),

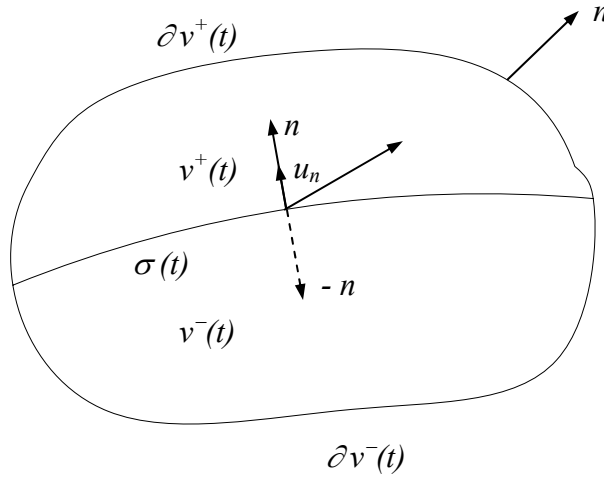
$$\frac{d}{dt} \int_{v^+(t)} \phi dv = \int_{v^+(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{v^+(t)} \phi v_n da - \int_{\sigma(t)} \phi^+ u_n da, \quad (1.82)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{v^-(t)} \phi dv = \int_{v^-(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{v^-(t)} \phi v_n da - \int_{\sigma(t)} \phi^- u_n da$$

elde edilir. Bu denklem taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv = \int_{v(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_{\partial v(t)} \phi v_n da - \int_{\sigma(t)} u_n [[\phi]] da, \quad (1.83)$$

sonucu elde edilir.



Şekil 1.7. Hareketli süreksizlik yüzeyi (Şuhubi, 1994).

$v_n = n_k v_k$ olduğuna dikkat edilerek süreksizlik yüzeyi içeren bir bölgede diverjans teoremini ifade eden (1.81) denklemi kullanılırsa,

$$\int_{\partial v(t)} \phi v_n da = \int_{\partial v(t)} n_k v_k \phi da = \int_{v(t)} (v_k \phi)_{,k} dv + \int_{\sigma(t)} n_k [[v_k \phi]] da \quad (1.84)$$

yazılabilir. Bu ifade (1.83) bağıntısına yerleştirilir $v(t)$ ve $\sigma(t)$ bölgeleri üzerindeki integraller bir araya toplanır ve $\sigma(t)$ yüzeyinin u_n normal hızının süreksizlik gösteremeyeceğine dikkat edilirse sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v(t)} \phi dv &= \int_{\partial v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + (\phi v_k)_{,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} [[U\phi]] da \\ &= \int_{\partial v(t)} \left(\frac{d\phi}{dt} + \phi v_{k,k} \right) dv - \int_{\sigma(t)} [[U\phi]] da \end{aligned} \quad (1.85)$$

elde edilir. Burada $\sigma(0)$ yüzeyi üzerinde tanımlanan,

$$U = u_n - v_n = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \quad (1.86)$$

büyükliğüne yer değiştirme hızı adı verilir ve $\sigma(t)$ yüzeyinin sürekli ortama göre bağıl normal hızını gösterir. $[[u_n]] = 0$ olduğundan,

$$[[U]] = -[[v_n]] \quad (1.87)$$

bağıntısı geçerlidir.

1.5. Denge Denklemleri

Bu kısımda bütün sürekli ortamların mekanik davranışını yöneten temel ilkelerden söz edilecek. Klasik fiziğin çerçevesinde bu ilkeler bir maddesel cisim kütleinin

hareketinden etkilenmemesinden ve sürekli bir ortamın Newton'un üç yasasına uyarak etkileşen çok sayıda paçacıkla modellenmesinden kaynaklanır. Sürekli ortamlar mekaniğinde, ortamın fiziksel özelliklerine bağlı olmaksızın geçerli olan termomekanik davranışı yöneten denklemler, global ve yerel denge denklemleri olarak adlandırılır. Termomekanik denge denklemleri yazılırken, denklemler önce global olarak yazılmış sonra da genelleştirilmiş Green-Gauss ve Stokes teoremleri yardımıyla elde edilen denklemler yerelleştirilmiştir.

1.5.1. Kütleinin Korunumu

Kütleinin korunumu, bir maddesel hacmin toplam kütleinin hareketi sırasında değişmediğini ifade eder. Matematiksel olarak bu ilke; $\rho(x,t)$ yoğunluk fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \, dv = 0 \quad (1.88)$$

(1.85) denkleminde ϕ yerine yoğunluk fonksiyonu ρ alınırsa,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(x,t) \, dv = \int_{V(t)} [\dot{\rho} + \rho v_{k,k}] \, dv - \int_{\sigma(t)} [[U\rho]] \, da = 0 \quad (1.89)$$

maddesel türevin tanımından ρ için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\dot{\rho} \equiv \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v_k \quad (1.90)$$

(1.89) denkleminde integral altındaki ifadelerin sürekli olduğu kabul edilirse, integrandların sıfır olması gerekir. Buna göre süreklilik denkleminin yerel formu için;

$$V(t) \text{ içinde } \frac{d\rho}{dt} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (1.91)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } [[U \rho]] = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Kütlelin korunumu bir parçacığı içine alan bir elemanter maddesel hacim için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho_0(\mathbf{X}) dV(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}, t) dv(\mathbf{x}, t) \quad (1.92)$$

$dv = J dV$ olduğuna göre (1.92) denklemi,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \quad (1.93)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde; $\rho_0(\mathbf{X})$; referans konumundaki ortamın bilinen yoğunluğudur. $J(\mathbf{x}, t)$; jakobyendir. (1.85) denklemde $\phi \equiv \rho\psi$ alınarak ve kütlelin korunumundan yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{v(t)} \rho \psi dv = \int_{v(t)} \rho \frac{d\phi}{dt} dv - \int_{\sigma(t)} U \rho [[\psi]] da \quad (1.94)$$

burada ψ birim kütle başına herhangi bir alan büyüklüğüdür.

1.5.2. Linear Momentum Dengesi

Bu ilke, herhangi bir maddesel cismin toplam lineer momentumunun zamana göre değişme hızının, bu cismin üzerine etkiyen toplam kuvvete eşit olduğunu ifade eder. Sürekli ortamın bir $dm = \rho dv$ elemanter parçacığın hızı v ise elemanter momentum $v dm$ ve t anındaki momentum aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{P}(t) = \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \quad (1.95)$$

Lineer momentum denkleğine göre,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (1.96)$$

eşitliği geçerlidir.

Bu çalışmada sürekli ortam olarak düşünülen, termoelastik davranış gösteren bir malzeme ele alınmıştır. Böyle bir malzemeye etkiyen dış kuvvetlerin toplamını gösteren \mathbf{F} aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{F} = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \mathbf{t}_{(n)} dA \quad (1.97)$$

şeklindedir (Şuhubi, 1994). $\mathbf{t}_{(n)}$ herhangi bir noktada yönelimi \mathbf{n} normal vektörüyle belirlenmiş bir alan elemanına etkiyen gerilme vektörü olup aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{t}_{(n)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \quad \text{veya} \quad t_{(n),k} = n_l t_{lk} \quad (1.98)$$

Bu durumda lineer momentum denkliği ;

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} dA \quad (1.99)$$

şeklinde yazılır. Lineer momentum denkleğinin k bileşeni;

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_k dV = \int_{V(t)} \rho f_k dV + \int_{\partial V(t)} n_l t_{lk} dA \quad (1.100)$$

olarak ifade edilir.(1.100) denkleminin sol tarafındaki ifade (1.94) denkleminde yerine φ alınarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho v_k dv = \int_{V(t)} \rho \frac{dv_k}{dt} dv - \int_{\sigma(t)} U \rho [[v_k]] da \quad (1.101)$$

(1.100) denkleminin sağ tarafında yer alan yüzey integrali terimi Green - Gauss teoreminden faydalanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{\partial V(t)} n_l t_{lk} da = \int_{V(t)} t_{lk,l} dv + \int_{\sigma(t)} n_l [[t_{lk}]] da \quad (1.102)$$

(1.101) ve (1.102) İfadeleri (1.100) denkleminde yerine yazılıp, eşitliğin sağ tarafındaki İfadeler sol tarafa geçirilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{V(t)} [\rho \dot{v}_k t_{lk,l} - \rho f_k] dv - \int_{\sigma(t)} [[n_l t_{lk} + \rho v_k U]] da = 0 \quad (1.103)$$

(1.103) eşitliğinin sağlanabilmesi için integrandların sıfıra eşit olması gerekir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$V(t) \text{ içinde; } \quad \rho \dot{v}_k = t_{lk,l} + \rho f_k \quad (1.104)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \quad [[n_l t_{lk} + \rho v_k U]] = 0$$

(1.104)₁ denklemindeki \dot{v} terimi ivme olarak adlandırılır ve maddesel türevin tanımından aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (1.105)$$

1.5.3. Açısal Momentumun Dengesi

Bu korunum yasası, herhangi bir maddesel cismin sabit bir noktaya göre açısal momentumunun zamana göre değişme hızının, cisme etkiyen dış kuvvetlerin aynı noktaya göre toplam momentine eşit olduğunu ifade eder. t anında ortamın bir elemanter parçacığının sabit O noktasına göre yer vektörü \mathbf{r} ise, aynı noktaya göre açısal momentumu veya momentumun momenti aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$H_0 = \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV \quad (1.106)$$

O noktasına göre dış kuvvetlerin toplam momenti \mathbf{M}_0 açısal momentumun ilkesinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{M}_0 = \frac{d \mathbf{H}_0}{dt} \quad (1.107)$$

Bu çalışmada ele alınan malzeme için, dış kuvvetlerin dağılımına göre \mathbf{M}_0 aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{M}_0 = \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)} dA \quad (1.108)$$

(1.108) denklemindeki $\mathbf{t}_{(n)}$ terimi (1.98) denklemleriyle verilen ifadenin aynısıdır. Bu durumda (1.107) ve (1.108) ifadelerinden aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \int_{\partial V(t)} \mathbf{r} \times \mathbf{t}_{(n)} dA \quad (1.109)$$

(1.109) denkleminin sol tarafındaki ifade, (1.94) denkleminde φ terimi yerine $\mathbf{x} \times \mathbf{v}$ alınarak, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} d v = \int_{V(t)} \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) d v - \int_{\partial(t)} \rho U [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] d a \quad (1.110)$$

(1.109) denkleminin sağ tarafında yer alan $\partial V(t)$ yüzey integrali Green -Gauss integral teoremi yardımıyla hacim integraline dönüştürülüp gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_{\partial V(t)} n_r (\varepsilon_{klp} x_l t_{rp} i_k) d a = \int_{V(t)} (\varepsilon_{krp} t_{rp} + \varepsilon_{klp} x_l t_{rp,r}) i_k d v + \int_{\sigma(t)} n_r [\varepsilon_{klp} x_l t_{rp}] i_k d a \quad (1.111)$$

(1.110) ve (1.111) denklemleri, (1.109) denkleminde yerine yazılır, sağ taraftaki ifadeler sol tarafa geçirilirse, (k) bileşeni cinsinden aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{klp} r_l (\rho \dot{v}_p - \rho f_p - t_{rp,r}) d v - \int_{V(t)} \varepsilon_{kpr} t_{rp} d v - \int_{\sigma(t)} \varepsilon_{klp} x_l [n_r t_{rp} + \rho v_p] d a = 0 \quad (1.112)$$

(1.112) denklemindeki birinci ve üçüncü integraller lineer momentumun yerel denklemini gösteren (1.104) denklemini gereğince sıfırdır. Dolayısıyla (1.113) denklemini aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_{V(t)} \varepsilon_{kpr} t_{rp} d v = 0 \quad (1.113)$$

(1.113) denkleminde açılmal momentumun yerel denge denklemini aşağıdaki gibi yazılır.

$$V(t) \text{ içinde; } \varepsilon_{kpr} t_{rp} = 0 \quad (1.114)$$

(1.114) denklemindeki permütasyon tansörü ε_{krp} antisimetrik olduğundan eşitliğin sağlanması için gerilme tansörünün simetrik olması gerekir. Bu simetrik ifade aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ve simetrik özelliğinden dolayı ileride görüleceği üzere bünye denklemlerinin bulunmasını kolaylaştıracaktır (Eringen 1980).

$$t_{rp} = t_{pr} \quad (1.115)$$

(1.112) denkleminden sıçrama şartı olarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$\sigma(t) \quad \text{üzerinde} \quad \varepsilon_{klp} x_l \left[n_r t_{rp} + \rho U v_p \right] = 0 \quad (1.116)$$

(1.116) denklemi, (1.104)₂ denklemi ile verilen lineer momentumun korunumundaki sıçrama şartı ile aynı olduğundan, denge denklemlerine ilave bir katkı getirmez.

1.5.4. Enerji Denkliği

Bu ilke; herhangi bir maddesel cismin, toplam kinetik enerjisi ile toplam iç - enerjisinin toplamının zamana göre değişme hızının, cisme etkiyen dış kuvvetlerin gücü ile birim zamanda cisme giren yada cisimden çıkan tüm enerjilerin toplamına eşit olduğunu ifade eder. Enerji denkliği matematiksel olarak aşağıdaki eşitlikle verilir.

$$\frac{d}{dt}(K + E) = W + Q + \sum_a U_a \quad (1.117)$$

Burada toplam kinetik enerji K, elemanter parçacıkların $dm|\mathbf{v}^2|/2 = \rho|\mathbf{v}^2|dv/2$ elemanter kinetik enerjilerinin toplamıdır,

$$K = \frac{1}{2} \int_{V(t)} \rho |\mathbf{v}|^2 dv \quad (1.118)$$

W cisme etkiyen kuvvetlerin birim zamandaki toplam işi veya gücüdür. Dolayısıyla W büyüklüğü,

$$W = \int_{\partial v(t)} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_{(n)} da + \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} dv \quad (1.119)$$

olarak tanımlanır. Q birim zamanda cisme giren, ya da cisimden çıkan ısı enerjisidir. Q iki türlü oluşur. Uygun bir etkileşim mekanizmasıyla, örneğin kimyasal, nükleer reaksiyonlarla ya da elektrik akımıyla cismin içinde ısı enerjisi üretilir veya cisimden ısı enerjisi çekilebilir. Böyle bir enerji birim zamanda cismin birim kütlesi başına h büyüklüğü ile belirlenebilir. Radyasyon ve ısı iletimi yoluyla da cismin yüzeyinden cisme giren veya cisimden çıkan ısı enerjisi ise \mathbf{q} ısı akısı vektörü ile belirlenir. Bu vektör doğrultusuna dik olan bir birim alandan birim zamanda geçen ısı enerjisini gösterir. Buna göre,

$$Q = \int_{\partial v(t)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_{V(t)} \rho h dv \quad (1.120)$$

yazılabilir. Gerçekten cismin $\partial v(t)$ yüzeyinde bir alan elemanından cisme giren ya da cisimden çıkan ısı enerjisi buradaki ısı akısı vektörünün alan elemanının normali doğrultusundaki bileşeni ile ölçülür. Zira \mathbf{q} vektörünün yüzeye teğet olan bileşeni cismin yüzeyini yalayıp geçen, dolayısıyla cismin enerji bilançosuna katkıda bulunmayan bir ısı enerjisine karşı gelir. Toplam ısı enerjisi (1.120) ifadesi ile tanımlandığında, \mathbf{n} yüzeyin birim dış normalini gösterdiği takdirde $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} > 0$ olduğunda bu durumun cismin içinden dışına doğru bir enerji akısına karşı geleceğine dikkat edilmelidir. U_a büyüklükleri çeşitli etkileşimler nedeniyle cismin birim zamandaki enerji bilançosuna katkıda bulunan elektromagnetik, kimyasal gibi başka kaynaklı enerjileri gösterir ve bu çalışma çerçevesinde bu tür etkileşimler göz önüne alınmayacaktır. E iç enerji ise, gözlemler ve deneyler cisme etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı işin, ısı enerjisinin v.s. yalnız cismin kinetik enerjisini değiştirmeye harcanmadığını açıkça göstermektedir. Bu farkın, cismin iç enerjisini değiştirmekte kullanıldığı kabul edilecek. İç enerji varlığı, kabaca, cismin parçacıkları arasında

çeşitli etkileşimlerden kaynaklanan iç kuvvetlerin yaptığı işe bağlanabilir. Cismin sıcaklığının değişimi iç enerji değişiminin en belirgin göstergesini oluşturur. Cismin iç enerjisi genellikle birim kütlesi başına ε iç enerji yoğunluğu yardımıyla belirlenebilir.

$$E = \int_{V(t)} \rho \varepsilon dV \quad (1.121)$$

dolayısıyla bu verilen ifadeler (1.117) enerji denkleminde yerine yazılırsa enerji denkliği aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dV = \int_{V(t)} [\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho h] dV + \int_{\partial V(t)} (\mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (1.122)$$

(1.94) denkleminde φ terimi yerine $\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ alınır ve (1.122) denkleminin sol tarafındaki ifade,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) dV = \int_{V(t)} (\dot{\varepsilon} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) dV - \int_{\sigma(t)} \rho U \left[\left[\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right] \right] dA \quad (1.123)$$

şeklinde elde edilir. (1.123) denklemindeki $\dot{\varepsilon}$ ve $\dot{\mathbf{v}}$ terimleri iç enerji ve hızın maddesel türevlerini göstermektedir. (1.122) denkleminin sağ tarafındaki $\partial V(t)$ üzerindeki yüzey integrali Green - Gauss teoremi yardımıyla hacim integraline dönüştürülerek gerekli işlemler yapılırsa;

$$\int_{\partial V(t)} n_k (t_{kl} v_l - q_k) dA = \int_{V(t)} (t_{kl,k} v_l + t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k}) dV + \int_{\sigma(t)} n_k \left[[t_{kl} v_l - q_k] \right] dA \quad (1.124)$$

ifadesi ortaya çıkar. (1.123) ve (1.124) denklemleri (1.122) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade bulunur.

$$\int_{V(t)} \left[\rho \dot{\varepsilon} - t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} - \rho h + v_l (\rho \dot{v}_l - t_{kl,k} - \rho f_l) \right] dv - \quad (1.125)$$

$$\int_{\sigma(t)} \left[\rho U \left[\left[\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right] \right] + n_k \left[\left[t_{kl} v_l - q_k \right] \right] \right] da = 0$$

(1.125) denkleminde (1.104)₁ ifadesiyle verilen lineer momentumun korunumu dikkate alınarak gerekli sadeleştirme yapıldığında ;

$$\int_{V(t)} \left[(\rho \dot{\varepsilon} - t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} - \rho h) \right] dv - \quad (1.126)$$

$$\int_{\sigma(t)} \left[\rho U \left[\left[\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right] \right] + n_k \left[\left[t_{kl} v_l - q_k \right] \right] \right] da = 0$$

ifadesine ulaşılır ve gerekli yerelleştirme işlemleri sonucunda,

$$V(t) \text{ içinde } \rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} + q_{k,k} + \rho h \quad (1.127)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \left[\left[\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right] \right] + n_k \left[\left[t_{kl} v_l - q_k \right] \right] da = 0$$

denklemleri elde edilir.

1.5.5. Termodinamiğin ikinci Kanunu (Clausius - Duhem Eşitsizliği)

Entropi eşitsizliği veya Clausius - Duhem eşitsizliği de denilen bu kanuna göre, serbest cisim içindeki entropinin zamana göre artışı, cisme hacim kaynaklarından ve yüzeyden giren entropiden daha büyüktür veya en az ona eşittir. Termodinamiğin ikinci kanunu, matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \eta dv - \left[\int_{V(t)} \rho \frac{h}{\theta} dv - \int_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) da \right] \equiv \Gamma \geq 0 \quad (1.128)$$

(1.128) denkleminin sol tarafındaki ilk terim, (1.94) denkleminde φ yerine (η) yazılarak

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \eta dv = \int_{V(t)} \rho \dot{\eta} dv - \int_{\sigma(t)} \rho U(\eta) da \quad (1.129)$$

şeklinde elde edilir. (1.128) denkleminde son integral terimi Green-Gauss teoreminden faydalanarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$\int_{\partial V(t)} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{q}}{\theta} da = \int_{V(t)} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) dv + \int_{\sigma(t)} \mathbf{n} \cdot \left[\left[\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] \right] da \quad (1.130)$$

(1.129) ve (1.130) denklemleri (1.128) eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_{V(t)} \left[\rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \right] dv - \int_{\sigma(t)} \left[\rho U \llbracket \eta \rrbracket - \mathbf{n} \cdot \left[\left[\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right] \right] \right] da \geq 0 \quad (1.131)$$

(1.131) denkleminin yerleştirilmesi sonucunda,

$$V(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (1.132)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde } \rho U \llbracket \eta \rrbracket - \left[\left[\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\theta} \right] \right] \leq 0$$

Bu kısımda ifade edilen denge denklemleri aşağıdaki gibi özetlenerek maddeler halinde yazılabilir.

1-Kütlenin Korunumu

$$V(t) \text{ içinde; } \dot{\rho} + \rho v_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } [[U \rho]] = 0$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{J(\mathbf{x}, t)} \quad (1.133)$$

2-Linear Momentumun Korunumu

$$V(t) \text{ içinde; } \rho \dot{v}_p = \rho f_p - t_{rp,r} \quad (1.134)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } [[n_i t_{ik} + \rho v_k U]] = 0$$

3-Açısal Momentumun Korunumu

$$V(t) \text{ içinde; } \varepsilon_{krp} t_{rp} = 0 \quad , \quad t_{rp} = t_{rp} \quad (1.135)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \varepsilon_{klp} x_l [[n_r t_{rp} + \rho U v_p]] = 0$$

4-Enerjinin Korunumu

$$V(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \quad (1.136)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U \left[\left[\varepsilon + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right] \right] + n_k [[t_{kl} v_l - q_k]] = 0$$

5-Entropi Eşitsizliği

$$V(t) \text{ içinde; } \rho \dot{\eta} - \rho \frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \equiv \rho \gamma \geq 0 \quad (1.137)$$

$$\sigma(t) \text{ üzerinde; } \rho U [[\eta]] - \left[\left[\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}}{\theta} \right] \right] \leq 0$$

Sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilkeleri olan kütle korunumu, lineer momentumun korunumu, açısal momentumun korunumu, enerji korunumu ve entropi eşitsizliği kullanılarak 5 adet denklem elde edilir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_k)_{,k} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \dot{v}_p = \rho f_p + t_{pr,r} \quad (3)$$

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{kl} v_{l,k} - q_{k,k} + \rho h \quad (1) \quad (1.138)$$

Bu denklemde \mathbf{f} ve h gibi dış kuvvetlerin bilindiği kabul edilmiştir. Bu denklemlere karşılık aşağıda belirtilen 16 tane bilinmeyen vardır.

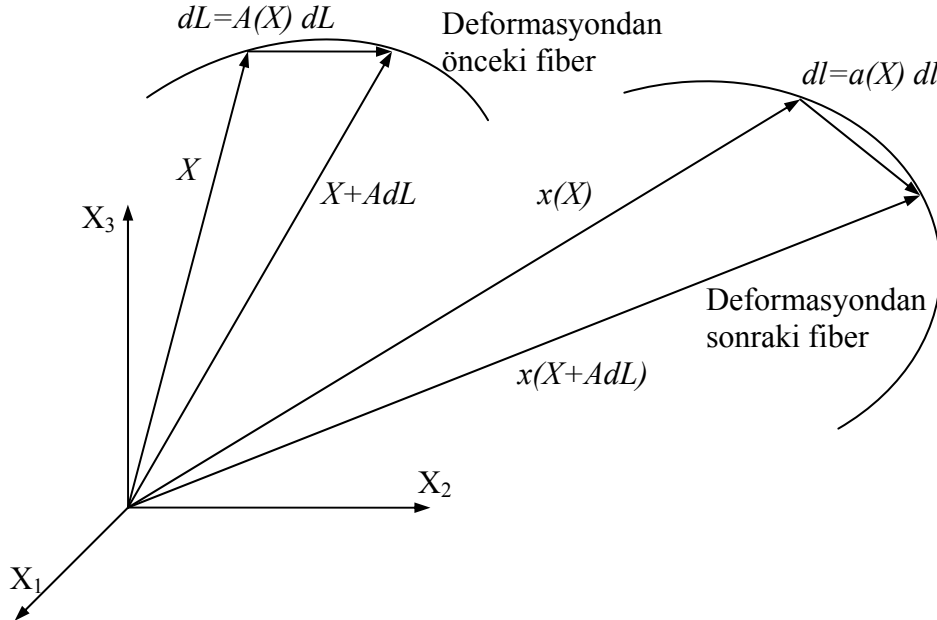
$$\rho(1), v_k(3), t_{kl}(6), q_k(3), \theta(1), \eta(1), \varepsilon(1) \quad (1.139)$$

Elde edilen denklemler, yukarıda verilen bilinmeyenlerin belirlenmesi için yeterli değildir. Denklemler sayısı ile bilinmeyen arasındaki fark (11) bünye denklemleri kullanılarak kapatılır.

1.6. Fiber Deformasyon Geometrisi ve Kinematığı

Kompozit ortam olan ele alınan malzemenin her \mathbf{X} noktasından A ile gösterilen fiber ailesinden bir elemanın geçtiği düşünölmüştür. Bu fiber elemanı ele alınan malzeme boyunca $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ ile gösterilen bir vektör alanı oluşturur. A ailesine ait bir fiber ailesinin parametrik denkleminde o fiber eğrisine ait birim teğet vektörün nasıl bulunacağı, eğrilerin diferansiyel geometrisinden bilinmektedir. Bu durumda A ailesine ait fiber dağılımı geometrik olarak bilinirse, $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ vektör alanı da bu dağılımdan bulunur (Spencer, 1972). Malzemenin deformasyonu sırasında, fiber ailesinin ortamla birlikte taşındığı kabul edilerek, fiber deformasyonuna ait geometrik bağıntılar aşağıdaki gibi yazılabilir.

Deformasyondan önce $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ olan fiber vektörü, deformasyondan sonra $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ fiber vektörüne dönüşür, (Şekil 1.8). Fiber vektörünün dönüşümü ortamla birlikte sürüklenme şeklinde olduğuna göre, şekil (1.8) deki geometriden görüldüğü gibi A -fiber ailesi için aşağıda verilen bağıntılar geçerlidir (Spencer, 1980).



Şekil 1.18 Deformasyondan önce ve sonra fiber eğrisi (Usal, 1994).

$$\mathbf{a}(\mathbf{x})dl = \mathbf{x}(\mathbf{X} + \mathbf{A}dL) - \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (1.140)$$

\mathbf{a} birim vektörünün bileşenleri cinsinden ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$a_k dl = x_k(\mathbf{X} + \mathbf{A}dl) - x_k(\mathbf{X}) \quad (1.141)$$

(1.141) bağıntısının sağ tarafı \mathbf{X} noktası civarında Taylor serisine açılıp yüksek mertebeden terimler ihmal edilirse, aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$a_k dl = x_{k,K} A_K dL \quad \text{veya} \quad a_k \frac{dl}{dL} = x_{k,K} A_K \quad (1.142)$$

\mathbf{A} ailesine ait fiber uzama oranı olan λ_a aşağıdaki gibi tanımlanır (Spencer, 1970).

$$\lambda_a \equiv \left(\frac{dl}{dL} \right)_a \quad (1.143)$$

Bu ifade (1.142) denkleminde yerine yazılırsa;

$$a_k = \lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K, \quad \underline{\mathbf{a}} = \lambda_a^{-1} \underline{\underline{\mathbf{F}}}\underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad (1.144)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı, \mathbf{A} fiber ailesine ait deformasyon geometrisini veren ifadedir.

$|\mathbf{A}| = |\mathbf{a}| = 1$ olduğundan $A_K A_K$ ve $a_k a_k$ terimleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A_K A_K = |\mathbf{A}|^2 = 1, \quad a_k a_k = |\mathbf{a}|^2 = 1 \quad (1.145)$$

(1.144) bağıntısı (1.145) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$a_k a_k = (\lambda_a^{-1} x_{k,K} A_K) (\lambda_a^{-1} x_{k,L} A_L) \quad (1.146)$$

$$1 = \lambda_a^{-2} x_{k,K} x_{k,L} A_K A_L = \lambda_a^{-2} C_{KL} A_K A_L$$

ifadesi elde edilir. Buradan da aşağıdaki ifade yazılabilir,

$$\lambda_a^2 = C_{KL} A_K A_L \quad \lambda_a^2 = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{C}} \underline{\underline{A}} \quad (1.147)$$

Fiber kinematiği, fiber uzama oranı λ_a nın ve fiber vektör \mathbf{a} 'nın zamanla değişimlerinin deformasyonu takiben türevleri alınarak belirlenir. (1.147) ifadesinin türevi alınır;

$$2\lambda_a \dot{\lambda}_a = \dot{C}_{KL} A_K A_L = \overline{\dot{x}_{k,K} x_{k,L}} A_K A_L \quad (1.148)$$

olarak bulunur. Bu bağıntıdaki \dot{C}_{KL} terimi,

$$\overline{\dot{x}_{k,K} x_{k,L}} = v_{k,l} x_{l,K} x_{k,L} + x_{k,K} v_{k,l} x_{l,L} \quad (1.149)$$

şeklinde ifade edilebilir, (1.149) ifadesi (1.148) da yerine yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa $\dot{\lambda}_a$ yı veren ifade aşağıdaki gibi bulunur.

$$\dot{\lambda}_a = \lambda_a v_{k,l} a_k a_l \quad (1.150)$$

(1.144) ifadesinin türevini alıp gerekli kısaltmalar yapıldığında ise

$$\dot{a}_k = -\lambda_a^{-1} \dot{\lambda}_a a_k + v_{k,l} a_l \quad (1.151)$$

ifadesi elde edilir.

Kroneckerdelta' nın tanımından yararlanarak $v_{k,j}$ aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$v_{k,j} = \delta_{ki} v_{i,j} \quad (1.152)$$

(1.150) ve (1.152) bağıntıları (1.151) denkleminde yerine yazılırsa, \dot{a}_k en son haliyle aşağıdaki gibi gözükür.

$$\dot{a}_k = (\delta_{ki} - a_k a_i) v_{i,j} \dot{a}_j \quad (1.153)$$

Bu kısımda, A fiber ailesinin deformasyonunu ve kinematığını veren bağıntılar tamamlanmış oldu. Fiber ailesinin hareket ve deformasyonu, daha ilerideki bölümlerde verilecek olan bünye denklemlerinde yeni terimler ortaya çıkaracaktır.

2. MATERYAL VE METOT

2.1. Materyal

Bu çalışmada, tek fiber aileli termoelastik ortamlar için matematiksel bir model geliştirilmiştir. Materyal olarak, fiber takviyeli termoelastik bir ortam ele alınmış ve mekanik yüklemeler sonucunda böyle bir ortamda oluşan gerilme ve ısı vektörünün tansörünün hesabını sağlayan bünye ve alan denklemleri ortaya konmuştur.

2.1.1. Fiber Takviyeli Termoelastik Ortamların Termodinamiği

Kısım 1.5' de söz edilen denge denklemler herhangi fiziksel ortam için geçerli olan denklemlerdir. Bu bölümde termodinamiğin birinci ve ikinci kanunu birleştirilip, bünye aksiyomları da kullanılarak gerilme, entropi yoğunluğu, iç enerji ve ısı akısı yoğunluğu saptanacaktır. Bu bölümde termodinamiğin kısıtlamaları kullanılarak ortamın fiziksel ve topolojik özellikleri de kullanılarak bünye denklemlerine ait genel formüller çıkarılıp daha sonra bünye aksiyomları kullanılarak formüller somutlaştırılacaktır.

(1.127) ifadesinden ısı kaynağı terimi çekilip (1.132) ifadesinde yerine yazdığımızda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\rho\gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta}(\dot{\varepsilon} - \theta\dot{\eta}) + \frac{1}{\theta}t_{kl}v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k} \geq 0 \quad (2.1)$$

Bu ifadedeki entropi yoğunluğunun maddesel türevi termodinamik bir proses içerisinde kontrol edilemeyeceğinden, bu türevi kontrol edilebilen büyüklük olan θ cinsinden yazmak için aşağıdaki gibi tanımlanan bir Legendre transformasyonu kullanılır.

$$\psi = \varepsilon - \theta\eta \quad (2.2)$$

(2.2) ifadesi genelleştirilmiş Helmholtz serbest enerji yoğunluğu adını alır ve termodinamik bakımdan enerjinin kullanılabilir kısmını temsil eder. İleride belirtileceği gibi serbest enerji yoğunluğunun hangi büyüklüklere bağlı olduğunu malzemenin bünyesi belirleyecektir. (2.2) ifadesindeki ε 'nin maddesel türevi (2.1) ifadesinde yerine yazılırsa entropi eşitsizliği (termodinamiğin ikinci kanunu) aşağıdaki şekli alır. (Şuhubi 1994)

$$\rho \gamma \equiv -\frac{\rho}{\theta}(\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) + \frac{1}{\theta}t_{kl}v_{l,k} + \frac{1}{\theta^2}q_k\theta_{,k} \geq 0 \quad (2.3)$$

θ pozitif değerli olduğundan (2.3) eşitsizliği θ ile çarpılır ve gerekli sadeleşmeler yapıldığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho(\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) + t_{kl}v_{l,k} + \frac{1}{\theta}q_k\theta_{,k} \geq 0 \quad (2.4)$$

(2.4) eşitsizliğinde yer alan gerilme tansörü mekanik yüklerden kaynaklanmaktadır ve (1.135)₁ denkleminde simetrik olduğu belirlenmiştir. Hız gradyanı tansörü ise (1.70) ifadesiyle simetrik bir tansörle, antisimetrik bir tansörün çarpımı sıfır olduğundan hız gradyanı tansörünün antisimetrik kısmını ihmal ederek (2.4) eşitsizliğindeki ikinci terim aşağıdaki gibi yazılır.

$$t_{kl}v_{l,k} = t_{kl}d_{lk} \quad (2.5)$$

(2.5) ifadesi (2.4) ifadesinin yerine yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$-\rho(\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta) + t_{kl}d_{lk} + \frac{1}{\theta}q_k\theta_{,k} \geq 0 \quad (2.6)$$

(1.24) denklemi ile verilen Green deformasyon tansörünün maddesel türevi alınır, d_{kl} cinsinden aşağıdaki gibi yazılır.

$$\dot{C}_{KL} = 2d_{kl} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.7)$$

(2.7) ifadesinden d_{kl} simetrik şekil değıştirme hızı tansörü \dot{C}_{KL} cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir.

$$d_{lk} = d_{kl} = \frac{1}{2} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} \quad (2.8)$$

(2.6) eşitsizliğinde, ρ yerine (1.93) ifadesini, d_{kl} yerine (2.8) ifadesini yazar ve J ile çarpılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\rho_0 (\dot{\psi} + \dot{\theta} \eta) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} + \frac{1}{\theta} J q_k \theta_k \geq 0 \quad (2.9)$$

ψ 'ye bağlı gerilme potansiyeli aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Sigma = \rho_0 \psi \quad (2.10)$$

Bu ifade (2.9) da yerine yazılırsa eşitsizlik aşağıdaki gibi olur.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta\right) + \frac{1}{2} J t_{kl} \dot{C}_{KL} X_{K,k} X_{L,l} + \frac{1}{\theta} J q_k \theta_k \geq 0 \quad (2.11)$$

(2.11) içinde yer alan argümanların maddesel koordinatları ile uzaysal koordinatlar arasındaki dönüşüm formülleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_{KL} \equiv J X_{K,k} X_{L,l} t_{kl} \quad (2.12)$$

$$Q_K \equiv J X_{K,k} q_k \quad (2.13)$$

$$\theta_{,K} \equiv x_{k,K} \theta_k \quad (2.14)$$

(2.12)-(2.14) tanımlarından aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$t_{kl} = J^{-1} x_{k,K} x_{l,L} T_{KL} \quad (2.15)$$

$$q_k = J^{-1} x_{k,K} Q_K \quad (2.16)$$

$$\theta_{,k} = X_{K,k} Q_K \quad (2.17)$$

(2.11) eşitsizliğinde (2.12),(2.14) ve (2.16) ifadeleri kullanılarak (2.11) eşitsizliği maddesel koordinatlarda aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$-\left(\dot{\Sigma} + \rho_0 \dot{\theta} \eta\right) + \frac{1}{2} T_{KL} \dot{C}_{KL} + \frac{1}{\theta} \theta_{,k} Q_K \geq 0 \quad (2.18)$$

Bu eşitsizlik entropi üretiminin genel bir ifadesidir. Bu eşitsizliğin kullanılabilmesi için Σ gerilme potansiyelinin hangi bağımsız değişkenlere bağlı olduğunun ve ne şekilde bağlı olduğunun bilinmesi gerekir. Buna göre Σ 'nin argümanlarını seçmek, formal olarak belli bir malzeme seçmek demektir.

Bu çalışmada tek fiberli termoelastik davranış gösteren bir maddesel cisim seçilmiştir. Seçilen bu malzemeye göre Σ 'nin argümanları ve bağlı olduğu değişkenler Eringenin (1980) ve Şuhubi'nin (1994) daha genel ve sistematik bir yaklaşım izleyerek tüm bünye fonksiyonları için geliştirdikleri bünye aksiyomları kullanılarak bulunacaktır.

2.1.2 Bünye Aksiyomları

Şimdiye kadar elde ettiğimiz ve sürekli ortamlarda geçerli olan denge denklemleri ortamın davranışını belirlememize yetmeyecektir. Bir malzemenin davranışını bilebilmemiz için o malzemeyi başka malzemelerden ayıran özellikleri denkleminizin içine almamız gerekir. Bir malzemenin fiziksel olarak geçerli bütün

davranışlarında etkili olacak tüm özelliklerini yansıtıcı genellikte ilişkilere çoğu zaman gerek yoktur. Malzemenin incelenmek istenen davranışını belirleyen, daha sade ilişkiler yeterli olacaktır. Çeşitli alan büyüklükleri arasında geçerli olan ve göz önüne alınan malzemelerin yapısal özelliklerinden kaynaklanan bağıntılara bünye bağıntıları veya bünye denklemleri adı verilir. Termoelastik malzemelerin bünye teorileri üzerinde çalışırken yedi adet aksiyomu işleme katacağız. Bu denklemlerin cisimlerin gözlenen ve de incelenmesi arzu edilen özelliklerini yansıtacak şekilde rasyonel ve sistematik olarak üretilmesi ile uğraşan teori de bünye teorisi adını alır. Her aksiyomda olduğu gibi bünye aksiyomları da doğadan elde edilen ilkel izlenimlere ve rasyonel bir dönüşüm sistemine uyumlu bazı önermelerdir (Hamamcı, 2004).

2.1.2.1 Nedensellik (Kozalite) Aksiyonu.

Bu aksiyom yalnız termal etkileşimlerin göz önüne alındığı ortamlarda gözlemlenebilir yada ölçülebilir kabul edeceğimiz hareket $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ile sıcaklık $\theta(\mathbf{X}, t)$ alanlarının bağımsız bünye değişkenler olarak seçilmesi gerektiğini ve verilmiş kabul edilecek dış kuvvetlerle ısı kaynağı dışında denklik denklemlerine ve entropi eşitsizliğine giren öteki alanların bağımlı bünye değişkenleri olduğunu ifade eder. Başka bir deyişle bağımlı bünye değişkenleri, bağımsız bünye değişkenleri olan hareket ve sıcaklığın neden olduğu, yani bu değişkenlerden türeyen büyüklüklerdir.

2.1.2.2 Determinizm Aksiyonu.

Bu aksiyom bir sürekli ortamın belli bir parçacığındaki bağımlı bünye değişkenlerinin, ya da bundan sonra kullanmayı tercih edeceğimiz deyimle sadece bünye değişkenlerinin, ortamın bütün parçacıklarındaki hareket ve sıcaklığın ortamın tüm geçmişinde aldıkları değerler ile belirleneceğini ifade eder. Yani cismin belli bir anda belli bir noktadaki davranışı bütün parçacıklarının o andan önceki tüm zamanlardaki hareket ve sıcaklıklarının bilinmesiyle kestirilebilmelidir. Buna göre \mathbf{X} maddesel noktanın t anındaki gerilme potansiyeli,

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t'), \theta(\mathbf{X}', t'), \mathbf{X}] \quad X \in V \quad -\infty < t' \leq t \quad (2.19)$$

şeklinde olur. Malzemenin hafızası olmadığından

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X}] \quad (2.20)$$

şeklini alır.

2.1.2.3 Eşbulunma Aksiyonu.

Bu aksiyom bir malzemenin bünye denklemlerini geliştirirken başlangıçta bütün denklemlerin aynı bağımsız bünye değişkenlerini içermesi gerektiğini ifade eder.

2.1.2.4 Uygunluk Aksiyonu.

Bu aksiyom her türlü bünye denkleminin sürekli ortamlar mekaniğinin temel ilkelerine, yani kütle korunumuna, lineer ve açıl momentumun denklğine, enerji denklğine ve her bağımsız termodinamik süreç altında entropi eşitsizliğine uyumlu olması gerektiğini ifade eder.

2.1.2.5 Objektivite Aksiyonu.

Bu aksiyom bünye denklemlerinin uzaysal koordinat takımının her hangi bir rijid hareketi altında form-invaryant kalması gerektiğini, başka bir deyişle bünye fonksiyonlarının biçiminin objektif olarak eşdeğer hareketler altında değişmeden kaldığını ifade eder. Dolayısıyla birbirlerine göre rijid hareket eden koordinat takımlarına yerleşmiş gözlemcilerin ortamın bu bünye denklemlerine göre gözlemledikleri ya da ölçtükleri davranışlarının birbirinin aynısı olması gerekir.

Burada $\underline{\underline{H}}(t)$ uygun bir ortogonal transformasyon matrisi ($\underline{\underline{H}}\underline{\underline{H}}^T = \underline{\underline{H}}^T\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{I}}$), $\det \underline{\underline{H}} = +1$, $\underline{\underline{I}}$ = birim matris, $\underline{\underline{b}}(t)$ = Öteleme matris, \bar{t} ise zaman orjininin t den

sabit bir a kayması ile elde edilen zaman dilimidir. Objektif olarak eşdeğer $\bar{\mathbf{x}}$ ve \mathbf{x} hareketli,

$$\bar{\mathbf{x}}(X', \bar{t}) = \underline{\underline{H}}(t) \underline{\underline{x}}(X', t) + \underline{\underline{b}}(t), \quad \bar{t} = t - a \quad (2.21)$$

bağıntısı ile tanımlanmaktadır. Skaler değerli gerilme potansiyeli,

$$\Sigma[\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{\mathbf{t}}), \bar{\theta}(\mathbf{X}', \bar{\mathbf{t}}) \mathbf{X}] = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t); \mathbf{X}] \quad \text{veya} \quad (2.22)$$

$$\Sigma[\underline{\underline{H}}(t) \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{t}}) + \underline{\underline{b}}(t), \bar{\theta}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{t}}) \mathbf{X}] = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t); \mathbf{X}]$$

bağıntısı şeklinde olmak zorundadır.

A. Uzaysal koordinatların ötelenmesi

Bu durum için $\underline{\underline{H}}(t) = \underline{\underline{I}}$, $\mathbf{b}(t) = -\mathbf{x}(X, t)$ alınır. Bu değerler (2.21) de yerine yazılırsa,

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}) = \mathbf{x}(\mathbf{X}', t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.23) denklemini (2.22) de yerine yazarsak gerilme potansiyeli aşağıdaki şekilde olur.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[\mathbf{x}(\mathbf{X}', t) - \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X}] \quad (2.24)$$

B. Uzaysal koordinatların rijid dönmesi

Bu durum için $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}}$, $a = 0$, $\underline{\underline{H}}(t)$: keyfi olarak alınır. Bu değerler (2.21) de yerine yazılırsa,

$$\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}', \bar{t}) = \underline{\underline{H}}(t) \mathbf{x}(X', t) \quad (2.25)$$

elde edilir. (2.25) denklemini (2.22) ifadesinde yerine yazılırsa gerilme potansiyeli aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma \left[\underline{\underline{H}}(t) \mathbf{x}(\mathbf{X}', t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X} \right] \quad (2.26)$$

2.1.2.6 Maddesel Simetri Aksiyomu

Bir sürekli ortamın bir parçasına bağlı fiziksel özellikler o maddesel noktadan geçen doğrultulara bağlı değilse ve bu özellik ortamın bütün parçacıkları için geçerli ise ortam izotropdur. Fiziksel özellikler doğrultuya göre değişiyorsa anizotropdur. Ortamın fiziksel özellikleri parçacıktan parçacığa değişmiyorsa ortam homojendir, değişiyorsa heterojendir. Bu durumda bünye denklemleri, maddesel koordinat sisteminin $\underline{\underline{B}}$ kadar ötelenmesi ve $\underline{\underline{H}}$ ortogonal transformasyonuna göre form invarianttır.

$$\underline{\underline{X}}' = \underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{B}} \quad (2.27)$$

Bu ifade (2.24) ifadesinde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma \left[\underline{\underline{x}}(\underline{\underline{H}} \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{B}}) - \underline{\underline{x}}(\mathbf{X}, t), \theta(\mathbf{X}', t), \mathbf{X} \right] \quad (2.28)$$

2.1.2.7 Yöresellik aksiyomu

\mathbf{X} noktasındaki bağımlı bünye değişkenlerinin $(\mathbf{t}, \mathbf{q}, \varepsilon, \eta)$ değerinin ancak o parçacığın yakın yöresindeki bağımsız bünye değişkenlerinden (\mathbf{x}, θ) etkileneceğini ifade eder. Bir bakıma ortamı oluşturan parçacıklar arasındaki etkileşimlerin kısa erişimli olduğu anlamına gelir. Matematiksel bir yapı kazanabilmesi için ortamın \mathbf{X} noktası civarındaki hareketi Taylor serisinde açarsak,

$$x_k(X_K', t) = x_k(X_K, t) + x_{k,K}(X_K, t)(X_K' - X_K) + \frac{1}{2} x_{k,KL}(X_K, t)(X_K' - X_K)(X_L' - X_L) + \dots \quad (2.29)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde sıcaklık içinde \mathbf{X} civarında Taylor serisini açarsak,

$$\theta(X'_K, t) = \theta(X_K, t) + \theta_{,K}(X_K, t)(X'_K - X_K) + \frac{1}{2}\theta_{,KL}(X_K, t)(X'_K - X_K)(X'_L - X_L) + \dots \quad (2.30)$$

şeklinde olur. (2.29) ve (2.30) ifadesinde yöresellik aksiyomu nedeniyle sağ taraftaki ilk iki terim kullanılır. (2.29) ifadesinin ilk iki teriminin alınmasıyla oluşan malzemeye basit termomekanik malzemeler denir (Eringen, 1980). Yöresellik aksiyomuna göre Σ nın argümanlarına olan bağımlılığı X'_K ve X_K arasındaki mesafe arttıkça hızla sönümlenmektedir.

$$x_k(X'_K, t) - x_k(X_K, t) = x_{k,K}(X_K, t)(X'_K - X_K) \quad (2.31)$$

$$\theta(X'_K, t) = \theta(X_K, t) + \theta_{,K}(X'_K - X_K)$$

Buna göre gerilme potansiyeli indeks notasyonu ile yazılırsa,

$$\Sigma(X, t) = \Sigma[x_{k,K}(X_K, t), G_K(X_K, t), D_K, X_K, \theta(X_K, t)] \quad (2.32)$$

şeklini alır. Bu ifadede

$$G_K = \theta_{,K} I_K \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlanır.

(2.32) ifadesindeki D_K vektörü, (2.31)₁ ifadesindeki $(X'_K - X_K)$ şeklindeki terimleri temsil eden vektördür. D_K vektörü, malzemenin anizotrop özelliklerin bünye aksiyomlarından kaynaklandığını göstermektedir. Buradan görüldüğü gibi objektivite aksiyomu ortamın anizotropisini temsil etme imkanını ortaya çıkarmaktadır. Bu

çalışmada seçilen malzeme homojen ve fiber takviyeli olması nedeniyle güçlü bir anizotropi özelliği göstermektedir. Tek fiber ailesi için D_K vektörü aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Öntürk, 1993; Usal, 1994).

$$D_K \equiv A_K(X_K) \quad (2.34)$$

Bu çalışmada göz önüne alınan malzemenin için maddesel tasvir vektörü olan D_K vektörü, (2.34) ifadesiyle yapılan tanımlamadan da görülebileceği gibi, kısım (1.6) da bahsedilen $A_K(X_K)$ fiber vektörünü temsil etmektedir. Malzeme fiber takviyesi ile kompozit hale geldiğine göre fiber dağılımı ile yönlü bir ortam özelliği kazanmıştır.

Objektivite aksiyomu, (2.32) ifadesine bir kısıtlama daha getirir. Bu kısıtlamaya göre gerilme potansiyeli, deforme olmuş malzemenin rijit hareketleri altında invaryant kalmalıdır. Bu durumda, uzaysal koordinat sisteminin zamana bağlı transformasyonları altında, Σ 'nin invaryant kalması gerekir. Cauchy teoremine göre bu şartın sağlanması ve Σ 'nin ilk argümanının tek değerli bir fonksiyonu olabilmesi için $\mathbf{x}_{,K} = x_{k,K} \mathbf{i}_k$ ya olan bağımlılığı, $\mathbf{x}_{,K}$ vektörlerinin aşağıda belirtildiği gibi ikişer ikişer skaler ve üçlü karışık çarpımlarına bağımlılığı şeklinde olması demektir (Şuhubi, 1994).

$$\mathbf{x}_{,K} \cdot \mathbf{x}_{,L} = C_{KL} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{x}_{,K} \cdot \mathbf{x}_{,L} \times \mathbf{x}_{,M} \quad (2.36)$$

(2.32) ifadesindeki diğer argümanlar, maddesel koordinatlarda ifade edildiğinden Cauchy teoremi bu argümanlar için söz konusu değildir ve bu argümanlar aynen yerinde kalır. (2.35) ifadesi Green deformasyon tansörünün tanımını ve (1.24) ifadesi ile verilmiştir (Şuhubi, 1994). (2.36) ifadesi ise deformasyon gradyanının determinantını tanımlamakta olup (1.6) ve (1.93) denklemlerinde gösterildiği gibi aşağıdaki gibi ifade edilir (Şuhubi, 1994).

$$J \equiv \det(X) = \frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}, t)} = \frac{1}{3!} \varepsilon_{KLM} \varepsilon_{klm} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} \quad (2.37)$$

(1.24)₁ , (2.34) ve (2.37) ifadesinden faydalanarak (2.32) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Sigma(\mathbf{X}, t) = \Sigma[C_{KL}(\mathbf{X}, t), \rho^{-1}(\mathbf{X}, t), G_K(\mathbf{X}, t), A_K(X_K), X_K, \theta(X, t)] \quad (2.38)$$

Tutarlılık aksiyomuna göre, daha önce kütle korunumu yasasını

$$J = \frac{\rho_0}{\rho(\mathbf{X}, t)} = \sqrt{\det C_{KL}} \text{ şeklinde belirtmiştir, (2.38) ifadesinde de } C_{KL} \text{ nin mevcut}$$

olması nedeniyle ρ^{-1} değişkenler listesinden çıkartılabilir.

Ayrıca malzeme, fiber doğrultusundaki iki farklı yönü seçemeyeceğinden dolayı $A_K(\mathbf{X})$ vektör alanı yerine bunun dış çarpımları olan ve;

$$\mathbf{Z}(\mathbf{X}) = Z_{KL}(\mathbf{X}) \mathbf{I}_K \mathbf{I}_L = \mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{A}(\mathbf{X}) = A_K A_L \mathbf{I}_K \mathbf{I}_L \quad (2.39)$$

şeklinde tanımlanan simetrik tansör alanı kullanılır.

Bu durumda mekanik bir yüklemeye maruz, tek fiber aileli termoelastik bir ortamın gerilme potansiyelinin hangi argümanlara bağlı olduğu aşağıdaki denklem ile ortaya çıkmıştır.

$$\Sigma(X_K, t) = \Sigma[C_{KL}(X_K, t), G_K(X_K, t), Z_{KL}(X_K), X_K, \theta(X_K, t)] \quad (2.40)$$

(2.18) eşitliğinde bağımsız değişkenlerinin değişiminin bir lineer kombinezonu olarak ifade edebilmek için Σ 'nın (2.40) ifadesiyle belirtilen argümanların maddesel türevinin bilinmesi gerekir. Malzemelerin homojen olduğu kabul edilerek (2.38) ifadesine verilen Σ 'nın bağlı olduğu argümanlardan \mathbf{X} kaldırılır. Z_{KL} fiber tansörü

zamana bağılı olmadığı için (2.40) ifadesinin maddesel türevini alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\dot{\Sigma} = \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \dot{C}_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_{,K}} \dot{G} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (2.41)$$

Bu ifadeyi (2.18) eşitliğinde yerine yazarsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{2} (T_{KL} - 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}}) \dot{C}_{KL} - \rho_0 (\eta + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \frac{\partial \Sigma}{\partial G_K} \dot{G}_K + \frac{1}{\theta} G_K Q_K \geq 0 \quad (2.42)$$

(2.42) eşitsizliğindeki argümanları θ ' yı $\dot{\theta}$ şeklinde, C_{KL} 'yi \dot{C}_{KL} şeklinde G_K 'yü \dot{G}_K şeklinde keyfi olarak değiştirebileceğimizden (2.42) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $\dot{\theta}$ ' nın \dot{C}_{KL} ' nın \dot{G}_K ' nın katsayıları sıfır olacaktır. G_K ' nın katsayısı sıfır olamaz çünkü G_K , Σ ' nın argümanlarında mevcut olduğu için G_K keyfi bir şekilde değiştirilemez.

\dot{C}_{KL} ' nın $\dot{\theta}$ ' nın ve \dot{G}_K ' nın katsayıları sıfıra eşitlenecek aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$T_{KL} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.43)$$

$$\eta = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial G_K} = 0 \quad (2.45)$$

elde edilir.

(2.45) ifadesinden gerilme potansiyelinin G_K ya bağlı olmadığı görülmektedir. Buna göre gerilme potansiyelinin bağlı olduğu argümanlar

$$\Sigma = \Sigma[C_{KL}, Z_{KL}, \theta] \quad (2.46)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu durumda (2.42) eşitsizliği aşağıdaki hale indirgenir.

$$\frac{1}{\theta} G_K Q_K \geq 0 \quad (2.47)$$

(2.47) ifadesi ısı vektörü için Clausius - Duhem eşitsizliğini verir ve ısı vektörünün hangi argümana bağlı olduğu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$Q_K = Q_K(C_{KI}, Z_{KL}, G_K, \theta) \quad (2.48)$$

(2.47) eşitsizliği, (2.48) ifadesi dikkate alınarak,

$$G_K Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, G_K, \theta, X_K) \geq 0 \quad \text{veya} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{C}, \mathbf{Z}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{G} \geq 0 \quad (2.49)$$

şeklinde yazılır. (2.49) eşitsizliğinde $G_K = 0$ $Q_K = 0$ ise

$$Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, 0, \theta, X_K) = 0 \quad (2.50)$$

şeklinde yazılabilir.

Diğer taraftan bünye denklemlerinden olan iç enerji (ε); (2.2) ve (2.10) ve (2.44) ifadelerinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} \Sigma + \theta \eta \quad (2.51)$$

Bu ifade $\frac{1}{\rho_0}$ parantezine alınırsa

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} (\Sigma + \rho_0 \theta \eta) \quad (2.52)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede η terimi yerine (2.44) ifadesi yerine yazılırsa, iç enerji aşağıdaki formda ortaya çıkar.

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} \left(\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \right) \quad (2.53)$$

Mekanik yüklemelerin etkisinde kalan tek fiber ailesi ile anizotrop hale getirilmiş olan termoelastik bir ortama ait, maddesel ve uzaysal koordinatlardaki bünye denklemlerinin topluca bir arada gözükmelerini sağlamak için yukarıda elde edilen denklemler aşağıda tekrar yazılmıştır.

$$\Sigma = \Sigma(C_{KL}, Z_{KL}, \theta) \quad (2.54)$$

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \quad (2.55)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} \left(\Sigma - \frac{\partial \Sigma}{\partial \theta} \theta \right) \quad (2.56)$$

$$Q_K = Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, G_K, \theta) \quad (2.57)$$

$$G_K Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, G_K, \theta, X_K) \geq 0 \quad (2.58)$$

$$Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, 0, \theta, X_K) = 0 \quad (2.59)$$

$$T_{KL} = 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.60)$$

$$t_{kl} = 2 J^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.61)$$

Bu aşamada, incelenen malzemenin uymak zorunda kaldığı maddesel simetri kısıtlamalarından bahsetmek uygun olacaktır. \mathfrak{S} , tercihli doğrultulara karşılık gelen bir maddesel koordinat takımını yeni bir maddesel koordinat takımına dönüştüren ve yapının fiziksel özelliklerini invariant bırakan ortogonal matrislerden oluşmuş sonlu bir grup olsun. Bu gruba incelenen kristal yapının simetri grubu denir ve ortogonal grubun bir alt grubunu oluşturur, dolayısıyla $\mathfrak{S} \subseteq O(3)$ yazılabilir. Simetri grubu tam ortogonal gruba eşitse malzeme izotropdur. \mathfrak{S} simetri grubunun üyesi olan ve sonlu sayıda $\underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S}$ matrislerinden oluşmuş bir simetri grubu dikkate alındığında, bünye fonksiyonlarının aşağıdaki koordinat dönüşümleri altında şeklen değişmez kalması gerektiği görülmektedir (Şuhubi, 1994).

$$X'_K = S_{KL} X_L, \quad X_L = S_{LK}^T X'_K = S_{KL} X'_K, \quad \underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^T, \quad \forall \underline{\underline{S}} \in \mathfrak{S} \quad (2.62)$$

(2.62) ile verilen maddesel simetri kısıtlaması $\Sigma = \Sigma(C_{KL}, Z_{KL}, \theta)$ ve $Q_K = Q_K(C_{KL}, Z_{KL}, G_K, \theta)$ bünye fonksiyonlarını aşağıdaki gibi ifade etmeyi gerektirir (Erdem, Usal ve Usal 2005).

$$\Sigma' = \Sigma \Rightarrow \Sigma(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{Z}}', \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Z}}, \theta) \quad (2.63)$$

$$\underline{\underline{Q}}' = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}} \Rightarrow \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{C}}', \underline{\underline{Z}}', \underline{\underline{G}}', \theta) = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Z}}, \underline{\underline{G}}, \theta) \quad (2.64)$$

Bu bünye fonksiyonellerinin argümanları ise (2.62) ile verilen dönüşüm dikkate alınarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$C'_{KL} = S_{KM} S_{LN} C_{MN} \Rightarrow \underline{\underline{C'}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T \quad (2.65)$$

$$Z'_{KL} = S_{KM} S_{LN} Z_{MN} \Rightarrow \underline{\underline{Z'}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{S}}^T \quad (2.66)$$

$$G'_K = S_{KM} G_K \Rightarrow \underline{\underline{G'}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{G}} \quad (2.67)$$

(2.65-2.67) de verilen ifadeler (2.63) ve (2.64) bünye fonksiyonellerinde yerine yazıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\Sigma(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{S}}^T, \theta) = \Sigma(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Z}}, \theta) \quad (2.68)$$

$$\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{S}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{S}}^T, \underline{\underline{S}} \underline{\underline{G}}, \theta) = \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Z}}, \underline{\underline{G}}, \theta) \quad (2.69)$$

Bu çalışmada incelenen malzeme fiber takviyesi ile anizotrop bir özellik kazanmıştır. Bu sebepten anizotropik yapıyı temsil etmek için bünye fonksiyonellerinin seri açılımı yapılacaktır.

Bu işlemlerin detaylarına girmeden önce, fiber ailesinin uzamazlığı ve ortamın sıkışmazlığı dikkate alındığında gerilmenin bünye denkleminin aldığı formları açığa çıkarmak uygun görülmektedir. Gerek fiberlerin uzamazlığı ve gerekse de ortamın sıkışmazlığı Spencer (1972), Şuhubi (1994) ve birçok araştırmacı tarafından makul kabuller olarak görülmektedir. Bu kabuller bünye denklemleri üzerine bazı kısıtlamalar getirmekle birlikte pratikteki uygulamalar açısından önemli bir yaklaşım ve basitleştirme sağlanmıştır.

Gerime genel denkleminin Kirchhoff şekli Şuhubi (1994) tarafından,

$$T_{KL}(\underline{F}, \underline{X}) = \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \quad (2.70)$$

Şekilde verilmekte ve bu bağıntı Cauchy gerilme tansörü ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilmektedir.

$$t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial x_{k,K}} x_{l,K} \quad (2.71)$$

Fiber ailesi uzamaz alındığı zaman, referans konumunda fiberlerin doğrultusu \mathbf{A} birim vektör alanı ile verildiğine göre ortamın herhangi bir noktasından geçen fiber doğrultusunda germe 1 olmalıdır. Bu durumda germe ve Green şekil değiştirme tansörü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\lambda_{(a)}^2 = C_{KL} A_K A_L = 1 \quad (2.72)$$

ortam sıkışmaz olduğu takdirde ise,

$$J=1 \text{ veya } \det \underline{\underline{C}} = III = 1 \quad (2.73)$$

şartı sağlanmalıdır.

Buna göre, (2.71) denkleminde Σ yerine kendisine eş değer olan ve fakat sözü edilen kısıtlamaları içeren aşağıdaki fonksiyon alınabilir,

$$\Sigma - p(\mathbf{x}, t)(J-1) + \frac{1}{2} \Gamma_a(\mathbf{x}, t)(C_{KL} A_K A_L - 1) \quad (2.74)$$

Bu ifadede p ve $\frac{1}{2} \Gamma_a$ uzay ve zaman değişkenlerinin keyfi fonksiyonları Lagrange çarpanları adını alır. (2.74) fonksiyonun $x_{k,K}$ ya göre türevi alınıp (2.71) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + \Gamma_a a_k a_l + 2 x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.75)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade, fiber ailesi uzamaz ve ortam sıkışmaz kabul edildiğinde gerilme tansörünün uzaysal koordinatlardaki formudur. (2.75) ifadesinin maddesel koordinatlardaki formu ise aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$T_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + \Gamma_a A_K A_L + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.76)$$

(2.39) tanım gereğince (2.76) ve (2.75) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$T_{KL} = -p C_{KL}^{-1} + \Gamma_a Z_{KL} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.77)$$

$$t_{kl} = -p \delta_{kl} + \Gamma_a Z_{kl} + 2 x_{k,K} x_{l,L} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \quad (2.78)$$

(2.77) ve (2.78) denklemleriyle uzaysal ve maddesel formda verilen gerilme tansörünün açıkça ortaya konulması için p , Γ_a ve $\frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}}$ 'nin hesaplanması gerekir.

p ve Γ_a Lagrange çarpanları, alan denklemlerinden ve sınır şartlarından hesaplanır. Son terim hesaplanması için argümanları belli olan Σ 'nın C_{KL} ye göre türevi alınmalıdır. Öncelikle ortamın izotrop yada anizotrop olduğu belirlenmesi gerekir. Bu çalışmada tek fiber aileli termoelastik ortamın anizotrop olduğu kabul edilmiştir. Ortam anizotrop olduğundan Σ 'nın argümanları Taylor serisine açılacaktır.

2.2. Metot

Bu çalışmada tüm ortamlar için geçerli olan genel balans denklemleri, Termodinamiğin ikinci prensibi (Clausius-Duhem eşitsizliği), bünye teorisinin aksiyomları ve özellikle objektivite, maddesel simetri aksiyomları ve malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar bünye denklemlerinin ortaya konulmasında bir yöntem olarak kullanılmıştır.

Ele alınan malzemenin fiber takviyesinden dolayı anizotrop bir ortam olduğu düşünülmüştür. Anizotrop bir ortamda bünye fonksiyonlarının (gerilme potansiyeli), ısı vektörü formunun elde edilmesi için yaklaşık teorilerden faydalanılacaktır. Yaklaşık teoriler elde etmede en sistematik yaklaşım; ortamın referans konumunu doğal durumu olarak seçmek ve bu durumda strain tansörü $\underline{E} = 0$, $\underline{G} = 0$ ve $\underline{Z} = 0$ olduğu için, gerilme potansiyelini ve ısı vektörü doğal durum etrafında genleme tansörünün, fiber tansörünün ve sıcaklık gradyanının bileşenleri cinsinden bir Taylor serisine açmaktır. Lastik gibi bazı elastomerler dışındaki katı cisimlerin çoğu ancak çok küçük genlemeler için elastik davranış gösterdiklerinden böyle bir serinin ilk birkaç mertebeden terimi ile yetinmek genellikle yeterli olur.

Seri açılımıyla ortaya konulan gerilme potansiyeli ve ısı vektörü ortaya konulmuş olur. Ortamın referans konumu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmesiz doğal durumda seçilip, bu konumdan itibaren küçük yer ve şekil - değiştirmeler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığını farzedilmiştir. Küçük sıcaklık değişiminden kastımız, $\theta = T_0 + T$, $T_0 > 0$, $|T| \ll T_0$ şeklindedir. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı ortamın lineerlik durumuna göre belirlenmiştir. Gerilme potansiyelinin deformasyon tansörüne göre türevi alınıp, gerilme denkleminde yerine yazılarak gerilmenin lineer bünye denklemi elde edilmiştir. Gerilmenin ve ısı vektörünün lineer bünye denklemleri lineer momentum ve enerjinin korunumu denklemlerinde yerlerine yazılarak alan denklemleri elde edilmiştir.

3. Bulgular

3.1. Anizotropik Ortamlarda Gerilmenin Bünye Denklemleri

Bu çalışmada ele alınan malzemenin tek fiber ailesi ile takviye edilmiş olmasından dolayı anizotropik özelliği taşıdığı bilinmektedir. Anizotrop ortamlarda, argümanları belli olan bünye fonksiyonu olarak ortaya çıkan gerilme potansiyelinin ve ısı vektörünün belirlenmesi yaklaşık teorilerle yapılabilir. Yaklaşık teoriler elde etmenin en sistematik yolu referans konumunu doğal durum olarak seçilip gerilme potansiyeli ve ısı vektörünü bu doğal durum etrafında, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açmaktır (Erdem, Usal ve Usal, 2005).

\mathbf{C} tansörü, \mathbf{E} tansörü cinsinden $C_{KL} = \delta_{KL} + 2E_{KL}$ şeklinde ifade edilebildiğinden aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$\Sigma = \Sigma(E_{KL}, Z_{KL}, \theta) \quad (3.1)$$

$$2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} = \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \quad (3.2)$$

E_{KL} ve Z_{KL} maddesel koordinatlara bağlı olduğundan, koordinat dönüşümlerinden bu terimler etkilenir. (3.1) fonksiyon \mathbf{E}, \mathbf{Z} cinsinden analitik kabul edilerek $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{Z} = \mathbf{0}$, civarında bir Taylor serisine açılırsa aşağıdaki ifade elde edilir. Bu açılımda mekanik etkileşimlerin lineer olduğu kabul edilmiştir. Dolayısıyla birinci ve ikinci mertebeden terimler alınmıştır.

$$\begin{aligned} \Sigma(E_{KL}, Z_{KL}, \theta, \mathbf{X}) = & \Sigma_0 + \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \Big|_0 E_{KL} + \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{SN}} \Big|_0 Z_{SN} + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial E_{MN}} \Big|_0 E_{KL} E_{MN} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial Z_{SN} \partial Z_{ML}} \Big|_0 Z_{SN} Z_{ML} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial Z_{SN}} \Big|_0 E_{KL} Z_{SN} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) seri açılımındaki kısmi türevler, \mathbf{X} parçacığına ve sabit θ bağlı birer katsayı olduklarından,

$$\begin{aligned} \Sigma(E_{KL}, Z_{SN}, \theta) = & \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) + \Sigma_{KL}(\theta, \mathbf{X})E_{KL} + \lambda_{SN}(\theta, \mathbf{X})Z_{SN} + \\ & \frac{1}{2}\Sigma_{KLMN}(\theta, \mathbf{X})E_{KL}E_{MN} + \frac{1}{2}\lambda_{SNML}(\theta, \mathbf{X})Z_{SN}Z_{ML} + \\ & \Omega_{KLSN}(\theta, \mathbf{X})E_{KL}Z_{SN} + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

ifadesi yazılabilir. Ortam homojen olduğunda (3.4) ifadesindeki katsayı fonksiyonlarının \mathbf{X} 'e olan bağımlılığı kalkar. (3.3) ve (3.4) ifadelerinden bu katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Sigma_0 = \Sigma(\underline{0}, \underline{0}) \quad (3.5)$$

$$\Sigma_{KL} \equiv \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{KL}} \right|_0 \quad (3.6)$$

$$\lambda_{SN} \equiv \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{SN}} \right|_0 \quad (3.7)$$

$$\Sigma_{KLMN} \equiv \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial E_{MN}} \right|_0 \quad (3.8)$$

$$\lambda_{SNML} \equiv \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial Z_{SN} \partial Z_{ML}} \right|_0 \quad (3.9)$$

$$\Omega_{KLSN} \equiv \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial E_{KL} \partial Z_{SN}} \right|_0 \quad (3.10)$$

\mathbf{E} tansörünün simetrisi ve (3.5)-(3.10) ifadelerindeki tanımlarda türevlerin sıraya bağlı olmaması nedeniyle, bu katsayılar aşağıda verilen simetri özelliklerini taşır.

$$\Sigma_{KL} = \Sigma_{LK} \quad (3.11)$$

$$\lambda_{SN} = \lambda_{NS} \quad (3.12)$$

$$\Sigma_{KLMN} = \Sigma_{LKMN} = \Sigma_{KLN M} = \Sigma_{MNKL} \quad (3.13)$$

$$\lambda_{SNML} = \lambda_{NSML} = \lambda_{SNLM} = \lambda_{MLSN} \quad (3.14)$$

$$\Omega_{KLSN} = \Omega_{LKS N} = \Omega_{KLNS} = \Omega_{SNKL} \quad (3.15)$$

3.1.1. Linear Termoelastisitede Gerilmenin Bünye Denklemi:

Ortamın referans konumunu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmesiz doğal durumda seçilim ve bu konumdan itibaren küçük yer ve şekil - değiştirmeler ve de küçük sıcak değişimleriyle ayrıldığını farzedelim. Küçük sıcaklık değişiminden kastımız,

$$\theta = T_0 + T, \quad T_0 > 0, \quad |T| \ll T_0 \quad \text{şeklindedir.}$$

Sürekli ortamlar mekaniğinde lineer teori için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir (şuhubi, 1994).

$$E_{KL} \cong \tilde{E}_{KL} \equiv \frac{1}{2} (U_{K,L} + U_{L,K}) \quad (3.16)$$

$$e_{kl} \cong \tilde{e}_{kl} = \epsilon_{kl} \equiv \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.17)$$

$$\epsilon_{kl} \cong \lambda_{kK} \lambda_{lL} \tilde{E}_{KL} \quad (3.18)$$

$$\tilde{E}_{KL} \cong \lambda_{kK} \lambda_{lL} \tilde{e}_{kl} \quad (3.19)$$

$$x_{k,K} = \lambda_{kK} + u_{k,K} \quad (3.20)$$

$$X_{K,k} = \Lambda_{Kk} - U_{K,k} \quad (3.21)$$

$$x_{k,K} x_{l,L} = \lambda_{kK} \lambda_{lL} \quad (3.22)$$

$$X_{K,k} X_{L,l} = \lambda_{kK} \lambda_{lL} \quad (3.23)$$

$$E_{KL} \cong \tilde{E}_{KL} \equiv \lambda_{kK} \lambda_{lL} \tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} \lambda_{kK} \lambda_{lL} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (3.24)$$

$$x_{p,p} x_{r,r} A_K A_L = x_{p,p} x_{r,r} X_{K,k} X_{L,l} a_k a_l \lambda_a^2 = \lambda_{pP} \lambda_{rR} \lambda_{kK} \lambda_{lL} z_{kl} \quad \lambda_a = 1 \text{ için} \quad (3.25)$$

Kısım (2.1) de sıkışmaz ve uzamaz fiber aileli ortamlar için elastik gerilmenin uzaysal formunu veren (2.78) denkleminde, (3.2) bağıntısı yerine yazılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + \Gamma_a Z_{pr} + x_{p,p} x_{r,r} \frac{\partial \Sigma}{\partial E_{PR}} \quad (3.26)$$

(3.16)-(3.25) denklemlerinden (3.26) ve (3.1) denklemlerini aşağıdaki şekle dönüştürebiliriz.

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + \Gamma_a Z_{pr} + \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{pr}} \quad (3.27)$$

Lineer teoride Σ 'nin bağlı olduğu argümanlar uzaysal formda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Sigma = \Sigma(\epsilon_{kl}, Z_{kl}, \theta, \mathbf{X}) \quad (3.28)$$

(3.28) fonksiyon ϵ , \mathbf{Z} cinsinden analitik kabul edilerek $\epsilon = \mathbf{0}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, civarında bir Taylor serisine açılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \Sigma(\epsilon_{kl}, Z_{sn}, \theta, \mathbf{X}) = & \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) + \frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{kl}} \bigg|_0 \epsilon_{kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial Z_{sn}} \bigg|_0 Z_{sn} + \\ & \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{mn}} \bigg|_0 \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial Z_{sn} \partial Z_{ml}} \bigg|_0 Z_{sn} Z_{ml} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \epsilon_{kl} \partial Z_{sn}} \bigg|_0 \epsilon_{kl} Z_{sn} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.29) açılımındaki kısmi türevler \mathbf{X} parçacığına ve değişken θ sıcaklığının fonksiyonları olacaktır. (3.29) ifadesi aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\begin{aligned} \Sigma(\epsilon_{kl}, Z_{sn}, \theta) = & \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) + \Sigma_{kl}(\theta, \mathbf{X}) \epsilon_{kl} + \lambda_{sn}(\theta, \mathbf{X}) Z_{sn} + \frac{1}{2} \Sigma_{klmn}(\theta, \mathbf{X}) \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \\ & \frac{1}{2} \lambda_{snml}(\theta, \mathbf{X}) Z_{sn} Z_{ml} + \Omega_{klsn}(\theta, \mathbf{X}) \epsilon_{kl} Z_{sn} + \dots \end{aligned} \quad (3.30)$$

(3.30) denklemindeki $\Sigma_{kl}, \lambda_{sn}, \Sigma_{klmn}, \lambda_{snml}, \Omega_{klsn}$ uzaysal malzeme tansörleri, $\Sigma_{KL}, \lambda_{SN}, \Sigma_{KLMN}, \lambda_{SNML}, \Omega_{KLSN}$ tansörleri ile aynı simetri özelliklerini taşır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Sigma_{kl} = \lambda_{kK} \lambda_{lL} \Sigma_{KL} \quad (3.31)$$

$$\lambda_{sn} = \lambda_{sS} \lambda_{nN} \lambda_{SN} \quad (3.32)$$

$$\Sigma_{klmn} \equiv \lambda_{kK} \lambda_{lL} \lambda_{mM} \lambda_{nN} \Sigma_{KLMN} \quad (3.33)$$

$$\lambda_{snml} \equiv \lambda_{sS} \lambda_{nN} \lambda_{mM} \lambda_{lL} \lambda_{SNML} \quad (3.34)$$

$$\Omega_{klsn} \equiv \lambda_{kK} \lambda_{lL} \lambda_{sS} \lambda_{nN} \Omega_{KLSN} \quad (3.35)$$

Gerçek bir lineer teoriye ulaşmak için (3.30) ifadesi sonsuz küçük genleme tansörü ϵ ile sıcaklık değişimi T cinsinden en fazla kuadratik bir ifade olmalıdır. Bu amaçla (3.30) ifadesindeki θ ya bağlı olan katsayıları sırasıyla alacak olursak:

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) = \Sigma_0(T_0 + T, \mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})\psi_0(T_0, \mathbf{X}) + \rho_0(\mathbf{X}) \left. \frac{\partial \psi_0(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} T + \\ \frac{1}{2} \rho_0(\mathbf{X}) \left. \frac{\partial^2 \psi_0(T, \mathbf{X})}{\partial T^2} \right|_{T=T_0} T^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.36)$$

(3.36) ifadesindeki kısmi türevler aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\left. \frac{\partial \psi_0(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} \equiv -\eta_0(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.37)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \psi_0(T, \mathbf{X})}{\partial T^2} \right|_{T=T_0} \equiv -\frac{1}{T_0} C(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.38)$$

(3.37) ve (3.38) ifadeleri (3.36) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \Sigma_0(\theta, \mathbf{X}) = \Sigma_0(T_0 + T, \mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})\psi_0(T_0, \mathbf{X}) - \rho_0(\mathbf{X})\eta_0(T_0, \mathbf{X})T \\ - \frac{1}{2} \rho_0(\mathbf{X}) \frac{1}{T_0} C(T_0, \mathbf{X}) T^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.39)$$

ifadesi elde edilir. Σ_{kl} katsayısı ise,

$$\Sigma_{kl}(\theta, \mathbf{X}) = \Sigma_{kl}(T_0 + T, \mathbf{X}) = \Sigma_{kl}(T_0, \mathbf{X}) + \left. \frac{\partial \Sigma_{kl}(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} T + \dots \quad (3.40)$$

$$\Sigma_{kl}(\theta, \mathbf{X}) = \gamma_{kl}(T_0, \mathbf{X}) - \beta_{kl}(T_0, \mathbf{X})T + \dots \quad (3.41)$$

Şeklinde ifade edilebilir. (3.41) ifadesindeki katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\gamma_{kl}(T_0, \mathbf{X}) \equiv \Sigma_{kl}(T_0, \mathbf{X}) = \gamma_{lk}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.42)$$

$$\beta_{kl}(T_0, \mathbf{X}) \equiv - \left. \frac{\partial \Sigma_{kl}(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} = \beta_{lk}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.43)$$

λ_{sn} katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\lambda_{sn}(\theta, \mathbf{X}) = \lambda_{sn}(T_0 + T, \mathbf{X}) = \lambda_{sn}(T_0, \mathbf{X}) + \left. \frac{\partial \lambda_{sn}(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} T + \dots \quad (3.44)$$

$$\lambda_{sn}(\theta, \mathbf{X}) = \Lambda_{sn}(T_0, \mathbf{X}) - \xi_{sn}(T_0, \mathbf{X})T + \dots \quad (3.45)$$

(3.45) ifadesindeki katsayılar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Lambda_{sn}(T_0, \mathbf{X}) \equiv \lambda_{sn}(T_0, \mathbf{X}) = \Lambda_{ns}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.46)$$

$$\xi_{sn}(T_0, \mathbf{X}) \equiv - \left. \frac{\partial \lambda_{sn}(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_{T=T_0} = \xi_{ns}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.47)$$

(3.30) denklemdeki Σ_{klmn} katsayısı;

Σ_{klmn} , Ω_{klsn} ve λ_{snml} katsayıları ise,

$$\Sigma_{klmn}(\theta, \mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0 + T, \mathbf{X}) = \Sigma_{klmn}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.48)$$

Şeklinde ifade edilir. Ω_{klsn} katsayısı ise

$$\Omega_{klsn}(\theta, \mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0 + T, \mathbf{X}) = \Omega_{klsn}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.49)$$

olarak ifade edilir ve λ_{snml} katsayısında

$$\lambda_{snml}(\theta, \mathbf{X}) = \lambda_{snml}(T_0 + T, \mathbf{X}) = \lambda_{snml}(T_0, \mathbf{X}) \quad (3.50)$$

aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Bu ifadelerdeki $\psi_0(T_0, \mathbf{X})$, $\eta_0(T_0, \mathbf{X})$ ve $c(T_0, \mathbf{X})$ skaler; $\gamma_{kl}(T_0, \mathbf{X})$, $\beta_{kl}(T_0, \mathbf{X})$, $\Lambda_{sn}(T_0, \mathbf{X})$, $\xi_{sn}(T_0, \mathbf{X})$, $\Sigma_{klmn}(T_0, \mathbf{X})$, $\Omega_{klsn}(T_0, \mathbf{X})$ ve $\lambda_{snml}(T_0, \mathbf{X})$ tansörel malzeme sabitleridir ve bu katsayılar ortamın başlangıçta T_0 mutlak sıcaklığında verilmiş olup heterojen malzemelerde ortamın parçacıklarına bağlıdır. Homojen ortamlarda ise \mathbf{X} e bağıllığı ortadan kalkar.

Notasyonda kolaylık sağlamak için bundan böyle katsayıların (T_0, \mathbf{X}) argümanlarını göstermekten kaçınacağız.

(3.37)-(3.50) ifadeleri (3.30) de yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \Sigma(\epsilon_{kl}, Z_{sn}, T_0 + T, \mathbf{X}) = & \rho_0 \psi_0 - \rho_0 \eta_0 T - \frac{\rho_0 c}{2T_0} T^2 + \gamma_{kl} \epsilon_{kl} - \beta_{kl} T \epsilon_{kl} + \Lambda_{sn} Z_{sn} - \\ & \xi_{sn} T Z_{sn} + \frac{1}{2} \Sigma_{klmn} \epsilon_{kl} \epsilon_{mn} + \frac{1}{2} \lambda_{snml} Z_{sn} Z_{ml} + \Omega_{klsn} \epsilon_{kl} Z_{sn} + \dots \end{aligned} \quad (3.51)$$

Buradan,

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \epsilon_{pr}} = \gamma_{pr} - \beta_{pr} T + \Sigma_{prmn} \epsilon_{mn} + \Omega_{prsn} Z_{sn} \quad (3.52)$$

(3.52) ifadesi (3.27) de yerine yazılırsa gerilme için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + \Gamma_a Z_{pr} + \gamma_{pr} - \beta_{pr} T + \Sigma_{prmn} \epsilon_{mn} + \Omega_{prsn} Z_{sn} \quad (3.53)$$

Artık $\epsilon = \mathbf{0}, T = 0$ ile tanımlayacağımız doğal durumda gerilme tansörünün sıfır olacağını göz önünde tutarsak $\gamma_{pr} = 0$ olur. Bu durumda (3.53) denklemi,

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + \Gamma_a Z_{pr} - \beta_{pr} T + \Sigma_{prmn} \epsilon_{mn} + \Omega_{prsn} Z_{sn} \quad (3.54)$$

(3.54) ifadesindeki Σ_{prmn} katsayısı,

$$\Sigma_{prmn} = \Sigma_{prnm} \quad (3.55)$$

şeklindeki simetri özelliği nedeni ile bu denklemdeki aşağıdaki terim,

$$\Sigma_{prmn} \tilde{\epsilon}_{mn} = \Sigma_{prnm} u_{m,n} \quad (3.56)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.54) bünye denklemi, yer değiştirme gradyanının bileşeni cinsinden aşağıdaki hale dönüşmüş olur.

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + T_a z_{pr} - \beta_{pr} T + \Sigma_{prmn} u_{m,n} + \Omega_{prsn} z_{sn} \quad (3.57)$$

(3.57) denklemi tek fiber aileli termoelastik bir anizotrop ortamda, ortamın sıkışmaz ve fiber ailesinin uzamaz kabul edildiği durumda gerilmenin lineer bünye denklemidir. (3.57) ifadesine dikkat edilirse sağ taraftaki birinci ve ikinci terimlerin ortamın sıkışmazlığından ve fiber ailesinin uzamazlığından kaynaklanan terimler olduğu görülmektedir. Üçüncü terim sıcaklık etkilerinden kaynaklanan etkiyi, dördüncü terim genleme tansörünün gerilmeye olan katkılarını ifade etmektedir. Beşinci terim fiber tansörünün gerilmeye olan katkısını göstermektedir. Eğer ortamın fibersiz olduğu kabul edilirse (3.57) ifadesi sıkışmazlıktan kaynaklanan, sıcaklığın ve genleme tansörünün elastik gerilmeye olan katkılarını gösteren birinci, üçüncü ve dördüncü terimleri içerecek hale indirgenir. Buna göre, (3.57) ifadesindeki terimler bu çalışmada söz konusu kabuller altında ortaya çıkmış olup özel hallerde bilinen klasik ifadelerle indirgenmektedir. Bu da, oluşturduğumuz modelin güvenilirliğini sağlamakta olduğu kanaatimizi desteklemektedir.

Bundan sonraki kısımda anizotrop ortamlarda ısı vektörü elde edilecektir.

3.2. Anizotropik Ortamlarda Lineer Isı Vektörünün Tayini

Kısım 3.1 de gerileme potansiyeli için yapılan yaklaşım, burada ısı vektörü için yapılmıştır. Buna göre ısı vektörü; doğal durum olarak seçilen referans konumu etrafında, bağlı olduğu argümanların bileşenleri cinsinden bir kuvvet serisine açılarak bulunabilir. Kısım 2.1 de ısı vektörünün bağlı olduğu argümanlar, entropi eşitsizliği ve bu eşitsizliğin ortaya çıkardığı kısıtlama aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$Q_R = Q_R(\underline{E}, \underline{Z}, \underline{G}, \theta, \underline{X}) \quad (3.58)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{E}, \mathbf{Z}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) \cdot \mathbf{G} \geq 0 \quad (3.59)$$

$$Q_R = Q_R(\mathbf{E}, \mathbf{Z}, \mathbf{0}, \theta, \mathbf{X}) = 0 \quad (3.60)$$

(3.58) fonksiyonu $\mathbf{E} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ civarında,

$$Q_R = Q_R(\theta, \mathbf{X}) + \left. \frac{\partial Q_R}{\partial G_L} \right|_0 G_L + \left. \frac{\partial Q_R}{\partial E_{LM}} \right|_0 E_{LM} + \left. \frac{\partial Q_R}{\partial Z_{LM}} \right|_0 Z_{LM} + \dots \quad (3.61)$$

şeklinde Taylor serisine açılabilir. Lineer teoride \mathbf{E} yerine $\tilde{\mathbf{E}}$ alınabildiğinden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Q_R = Q_R(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{Z}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) = B_R(\theta, \mathbf{X}) + B_{RL}(\theta, \mathbf{X})G_L + B_{RLM}(\theta, \mathbf{X})\tilde{E}_{LM} + D_{RLM}(\theta, \mathbf{X})Z_{LM} + \dots \quad (3.62)$$

(3.62) denkleminde aşağıdaki tanımlamalar kullanılmıştır.

$$Q_R(\theta, \mathbf{X}) \equiv B_R(\theta, \mathbf{X}) \quad (3.63)$$

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial G_L} \right|_0 \quad (3.64)$$

$$B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial E_{LM}} \right|_0 \quad (3.65)$$

$$D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \equiv \left. \frac{\partial Q_R}{\partial Z_{LM}} \right|_0 \quad (3.66)$$

$\tilde{\mathbf{E}}$ ve \mathbf{Z} tansörlerinin simetrisi nedeniyle aşağıdaki simetri şartları geçerlidir.

$$B_{RLM} = B_{RML} \quad (3.67)$$

$$D_{RLM} = D_{RML} \quad (3.68)$$

(3.60) kısıtlaması nedeniyle $\mathbf{G} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ olduğuna göre (3.62) bağıntısından aşağıdaki ifade yazılır.

$$\underline{0} = B_R(\theta, \mathbf{X}) + B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) \tilde{E}_{LM} + D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) Z_{LM} + \dots \quad (3.69)$$

(3.69) ifadesi keyfi her deformasyon ölçüsü için sıfır olduğundan bu denklemdeki katsayılar sıfır olmalıdır. O halde;

$$B_R(\theta, \mathbf{X}) = B_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) = D_{RLM}(\theta, \mathbf{X}) = 0 \quad (3.70)$$

(3.62) denkleminde, (3.70) bağıntısındaki katsayıların bağlı oldukları terimler sıfır olacağından (3.62) denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_R = Q_R(\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{Z}, \mathbf{G}, \theta, \mathbf{X}) = B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) G_L = B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) \theta_L \quad (3.71)$$

(3.71) ifadesi (3.59) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) \theta_{,L} \theta_{,R} \geq 0 \quad \text{veya} \quad (3.72)$$

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) G_L G_K \geq 0$$

elde edilir. O halde $B_{RL}(\theta, \mathbf{X})$ tansörü her sıcaklık gradyanı için;

$$B_{RL} \theta_{,R} \theta_{,L} \geq 0 \quad \text{veya} \quad B_{(RL)} \theta_{,R} \theta_{,L} \geq 0 \quad (3.73)$$

koşulunu sağlamalıdır. B_{RL} tansörü ısı iletim katsayıları tansörü adını alır. (3.73) eşitsizliği bu tansörün simetrik kısmının pozitif tanımlı olduğunu ifade eder.

Lineer teori için B_{RL} katsayısı Σ_{PR} katsayısına benzer şekilde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$B_{RL}(\theta, \mathbf{X}) = B_{RL}(T_0 + T, \mathbf{X}) = B_{RL}(T_0, \mathbf{X}) + \left. \frac{\partial B_{RL}(T, \mathbf{X})}{\partial T} \right|_0 T + \dots \quad (3.74)$$

Ayrıca $\theta_{,L}$ katsayısı ise

$$\theta_{,R} = (T_0 + T)_{,R} = T_{,R} \quad (3.75)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.74) ifadesi (3.71) eşitsizliğinde yerine yazıldığında, (3.74) ifadesindeki son terim $(T)(T_{,L})$ şeklinde nonlinear terim oluşturacağından ihmal edilmesi gerekir. Bu durumda ısı iletimi vektörü aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_R = B_{RL}(T_0, \mathbf{X}) T_{,L} \quad (3.76)$$

Isı vektörünün uzaysal formu kısım (2.1) de aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$q_r = J^{-1} x_{r,R} Q_R \quad (3.77)$$

Ortam sıkışmaz kabul edildiğinde bu ifadelerdeki $J^{-1} = 1$ dir. Buna göre

$$q_r = x_{r,R} Q_R \quad (3.78)$$

yazılır. (3.76) denklemi (3.78) denkleminde yerine yazılırsa (3.16)-(3.25) ifadeleri kullanılarak uzaysal ısı vektörü alanının lineer bünye denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

$$q_r = \lambda_{rR} \lambda_{lL} B_{RL} T_{,l} \quad (3.79)$$

(3.79) ifadesi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$q_r = B_{rl} (T_0, \mathbf{X}) T_{,l} \quad (3.80)$$

(3.80) denklemindeki B_{rl} uzaysal malzeme tansörü B_{RL} tansörü ile aynı simetri özelliklerini taşır ve (3.79) denkleminde aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$B_{rl} \equiv \lambda_{rR} \lambda_{lL} B_{RL} \quad (3.81)$$

(3.80) denkleminde Fourier ısı-iletim yasası olup lineer ısı iletimini belirtir ve vektörel formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\mathbf{q} = \mathbf{B} \nabla T \quad (3.82)$$

Alan denklemlerinin elde edilmesine geçmeden önce (3.57) denklemindeki β_{pr} tansörünün anlamına bir göz atalım. Önce Σ_{prmn} tansörünün tersi olan ve bu tansörle aynı simetri özelliğine sahip olan Σ_{prmn}^{-1} tansörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\Sigma_{prmn} \Sigma_{mnl}^{-1} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{pk} \delta_{rl} + \delta_{pl} \delta_{rk}), \quad \Sigma_{prmn}^{-1} = \Sigma_{rpmn}^{-1} = \Sigma_{mnp r}^{-1} = \Sigma_{prnm}^{-1} \quad (3.83)$$

Fiziksel olarak ölçülmesi oldukça kolay olan termal genişleme katsayılarının oluşturduğu α_{pr} tansörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\alpha_{pr} = \Sigma_{prmn}^{-1} \beta_{mn} = \alpha_{rp} \quad (3.84)$$

(3.84) denkleminin tersini bulabilmek için Σ_{qypr} tansörü ile eşitliğin her iki tarafı çarpılır. Bu durumda

$$\beta_{qy} = \Sigma_{qypr} \alpha_{pr} \quad (3.85)$$

(3.85) ifadesi uygun indis değişimi ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\beta_{pr} = \Sigma_{prmn} \alpha_{mn} \quad (3.86)$$

(3.86) ifadesi, (3.57) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$t_{pr} = -p \delta_{pr} + \Gamma_a z_{pr} + \Omega_{prsn} z_{sn} + \Sigma_{prmn} (u_{m,n} - \alpha_{mn} T) \quad (3.87)$$

Kısım.1 de (1.134)₁ ifadesi ile verilen Cauchy hareket denklemi, (1.135)₁ ifadeside göz önünde bulundurularak uygun indis değişimi ile aşağıdaki gibi yazılır.

$$\rho \dot{v}_p = t_{pr,r} + \rho f_p \quad (3.88)$$

Kütlenin korunumundan: $\rho = \rho_0 J^{-1}$ ve sıkışmazlıktan $J^{-1} = 1$ olduğunu dikkate alarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\rho = \rho_0 \quad (3.89)$$

Ayrıca;

$$v_p \cong \dot{u} = \frac{\partial u_p}{\partial t} + u_{p,k} u_k \cong \frac{\partial u_p}{\partial t} \quad (3.90)$$

şeklindedir. (Şuhubi, 1994). Buna göre (3.88) ifadesindeki $\rho \dot{v}_p$ terimi (3.89) ve (3.90) ifadelerinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho \dot{v}_p = \rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} \quad (3.91)$$

Bu durumda çok küçük hareketler yapan sıkışmaz, termoelastik bütün ortamlarda hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = \rho_0 f_p + t_{pr,r} \quad (3.92)$$

(3.92) denkleminde $t_{pr,r}$ terimi (3.57) denkleminde ortamın homojen ve izotermal olduğu göz önünde bulundurarak,

$$t_{pr,r} = -p_{,p} + (\Gamma_a)_{,r} z_{pr} + \Gamma_a z_{pr,r} + \Sigma_{prmn} (u_{m,nr} - \alpha_{mn} T_{,r}) + \Omega_{prsn} z_{sn,r} \quad (3.93)$$

şeklinde ifade edilir. (3.93) denklemini (3.92) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} = \Sigma_{prmn} (u_{m,nr} - \alpha_{mn} T_{,r}) + \rho_0 f_p - p_{,p} + (\Gamma_a)_{,r} z_{pr} + \Gamma_a z_{pr,r} + \Omega_{prsn} z_{sn,r} \quad (3.94)$$

(3.94) ifadesi ile u_k, p, Γ_a bilinmeyenlerini ihtiva eden alan denklemi bulunmuş olur. Bu alan denkleminin probleme uygun olarak verilen ilk ve sınır şartları altındaki çözümü, göz önüne alınacak sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturur. (1.136) ve (2.5) denklemlerinden enerjinin korunumu uygun indis değişikliği ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\rho \dot{\varepsilon} = t_{pr} d_{pr} - q_{r,r} + \rho h \quad (3.95)$$

Lineerleştirilmiş genleme hızı tansörünü aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$d_{pr} = \frac{\partial E_{PR}}{\partial t} X_{P,r} X_{R,r} \quad (3.96)$$

(1.52) ifadesi (3.96) denkleminde yerine yazarsak gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

$$d_{pr} = \frac{\partial \varepsilon_{pr}}{\partial t}, \quad \varepsilon_{pr} = \tilde{\varepsilon}_{pr} \quad \text{ise} \quad d_{pr} = \frac{\partial (u_{p,r})}{\partial t} \quad (3.97)$$

Lineer teoride iç enerjinin maddesel türevi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\dot{\varepsilon} \approx \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \quad (3.98)$$

$$(2.56) \text{ ve } (2.55) \text{ ile verilen iç enerji ve entropi denklemleri } \theta = T_0 + T \text{ ve } \frac{\partial T}{\partial \theta} = 1$$

olduğundan aşağıdaki gibi yazılır.

$$\varepsilon = \frac{1}{\rho_0} \left[\Sigma - (T_0 + T) \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{\rho_0} \left[\Sigma - (T_0 + T) \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \right] \quad (3.99)$$

$$\eta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Sigma}{\partial T} \quad (3.100)$$

(3.100) denklemini (3.99) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varepsilon = \frac{\Sigma}{\rho_0} + (T_0 + T)\eta \quad (3.101)$$

(3.51) denkleminde verilen Σ 'nin T ye göre türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\eta = \eta_0 + \frac{cT}{T_0} + \frac{\beta_{kl}}{\rho_0} u_{k,l} + \frac{\xi_{sn}}{\rho_0} Z_{sn} \quad (3.102)$$

(3.102) ifadesi (3.101) denkleminde yerine yazılırsa iç enerji aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + c\left(T + \frac{T^2}{2T_0}\right) + \frac{T_0 \beta_{kl}}{\rho_0} u_{k,l} + \frac{1}{2\rho_0} \Sigma_{klmn} u_{k,l} u_{m,n} + \frac{1}{2\rho_0} (2\Lambda_{sn} + 2\xi_{sn} T + \lambda_{snml} Z_{ml} + 2\Omega_{klsn} u_{k,l}) Z_{sn} \quad (3.103)$$

(3.103) ifadesinin maddesel türevi alınır aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c\left(1 + \frac{T}{T_0}\right) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \frac{\beta_{kl}}{\rho_0} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \Sigma_{klmn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} u_{m,n} + \frac{1}{\rho_0} \Omega_{klsn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} Z_{sn} \quad (3.104)$$

Sıkışmaz ortamlar için $\rho = \rho_0$ olduğundan,

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho_0 \dot{\varepsilon} = \rho_0 c\left(1 + \frac{T}{T_0}\right) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_{kl} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} + \Sigma_{klmn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} u_{m,n} + \Omega_{klsn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} Z_{sn} \quad (3.105)$$

$q_{r,r}$ terimi (3.80) denkleminde aşağıdaki gibi elde edilir.

$$q_{r,r} = B_{rl} T_{,lr} \quad (3.106)$$

(3.105), (3.87), (3.97) ve (3.106) ifadeleri (3.95) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki alan denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \rho_0 c \left(1 + \frac{T}{T_0}\right) \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_{kl} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} + \Sigma_{klmn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} u_{m,n} + \Omega_{klsn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} Z_{sn} = \\ \left[-p \delta_{pr} + \Gamma_a z_{pr} + \Omega_{prsn} z_{sn} + \Sigma_{prmn} (u_{m,n} - \alpha_{mn} T) \right] \frac{\partial (u_{p,r})}{\partial t} - \beta_{kl} T_{,lk} + \rho_0 h \end{aligned} \quad (3.107)$$

Lineer teoride $u_{k,l}$ ve T cinsinden ikinci mertebeden terimler ihmal edileceğinden (3.107) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_{kl} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} + \Omega_{klsn} \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} Z_{sn} = \left[-p \delta_{pr} + \Gamma_a z_{pr} + \Omega_{prsn} z_{sn} \right] \frac{\partial (u_{p,r})}{\partial t} - \\ \beta_{kl} T_{,lk} + \rho_0 h \end{aligned} \quad (3.108)$$

(3.108) ifadesinde $p \rightarrow k$ ve $r \rightarrow l$ şeklinde indis değişikliği yapıлып ortak terimlerin parantezleri alınırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(T_0 \beta_{kl} + p \delta_{kl} - \Gamma_a z_{kl}) \frac{\partial u_{k,l}}{\partial t} = -\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \beta_{kl} T_{,lk} + \rho_0 h \quad (3.109)$$

(3.109) denklemi lineer, homojen, sıkışmaz, tek fiber aileli termoelastik ortamlar için ısı iletim denklemdir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, tek fiber aileli termoelastik anizotrop bir ortamın lineer davranışını modellemek için modern sürekli ortamlar mekaniği kapsamında bir yol izlenmiştir. Bu modellemeyi gerçekleştirirken; Genel Termodinamik Balans Denklemleri, Clausius-Duhem eşitsizliği, Bünye Teorisi aksiyomlarından özellikle Objektivite ve Maddesel Simetri aksiyomları ile malzemenin simetri grubuna ilişkin kavramlar, bünye fonksiyonlarının ve alan denklemlerinin bulunması ele aldığımız malzemenin mekanik davranışının modellenmesinin temellerini oluşturmuştur. Bu tür bir malzeme için bünye fonksiyonları, argümanları Green Deformasyon tansörü, Fiber dağılım tansörü ve sıcaklık olarak ortaya çıkan gerilme potansiyeli ile; argümanları Green Deformasyon tansörü, Fiber dağılım tansörü, sıcaklık gradyanı ve sıcaklık olarak ortaya çıkan ısı vektörü fonksiyonu olarak belirlenmiştir. Bu bünye fonksiyonları vasıtasıyla ele alınan malzemede termomekanik yükleme ile oluşan gerilme tansörü ve ısı vektörü elde edilmektedir. Gerilme tansörü argümanları belli olan bir serbest enerji fonksiyonundan türetilmiş, ısı vektörü ise bir potansiyelden türemediği için argümanlarının bir analitik fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Fiber ailesinin uzamazlığı ve ortamın sıkışmazlığı birçok mühendislik malzemesinin yapısına uyduğundan fiber ailesi uzamaz ortam ise sıkışmaz kabul edilmiştir. Ayrıca malzeme, fiber doğrultusundaki iki farklı yönü seçemeyeceğinden dolayı $A_K(\mathbf{X})$ vektör alanı yerine bunun dış çarpımları olan $Z_{KL}(\mathbf{X}) = A_K A_L$ şeklinde tanımlanan simetrik tansör alanı kullanılmıştır.

Ortam fiber takviyesinden dolayı ortamın anizotrop bir yapıda olduğu düşünülmüş, gerilmenin ve ısı vektörünün anizotrop ortamlarda lineer bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu işlemler yapılırken serbest enerji fonksiyonu ile ısı vektörü fonksiyonunun analitik olduğu varsayılarak bağlı oldukları argümanları cinsinden Taylor serisine açılmıştır. Seri açılımında alınan terimlerin türü ve sayısı belirlenirken mekanik etkileşimlerin lineer kabul edilmesi durumuna göre belirlenmiştir. Gerilme serbest enerji fonksiyonundan türetildiği için kısım (3.1) de serbest enerji fonksiyonu Taylor serisine açılmıştır. Kısım (3.1.1) de ortamın referans konumunu bir T_0 üniform sıcaklığında ve gerilmesiz doğal durumda seçerek ve bu

konumdan itibaren küçük yer ve şekil değiştirmeler ve de küçük sıcaklık değişimleri ile ayrıldığına farz ederek lineer termoelastisite için gerilme denklemi (3.57) denklemi ile elde edilmiştir. (3.57) denkleminde malzemenin fiber yapısından kaynaklanan yeni terimler ortaya çıkmıştır. Eğer ortam fibersiz ve sıkışabilir kabul edilirse (3.57) denklemi Şuhubi [] tarafından verilen (8.3.6) denklemine indirgenmiş olur.

Isı vektörü argümanları belli olan bir fonkiyonu olduğundan kısım (3.2) de Taylor seri açılım ısı vektörü fonksiyonu için yapılmıştır. Kısım (3.1) de yapılan kabuller burada da dikkate alınarak tek fiber aileli termoelastik anizotrop ortamlar için ısı vektörünün lineer bünye denklemi maddesel formda (3.76), uzaysal formda (3.80) denklemleri ile ortaya konulmuştur.

Alan denklemlerine ulaşmak için termal genleşme katsayılarının oluşturduğu α_{pr} tansörü cinsinden ifade edilen (3.87) denklemiyle verilen gerilme denklemi (1.134)₁ ifadesi ile verilen Cauchy hareket denkleminde yerine yazılmış, (3.94) denklemi ile verilen hareket denklemi elde edilmiştir. Enerjinin korunum denklemi olan (3.95) denkleminde yer alan büyüklükler yerlerine yazılarak da (3.108) ifadesi ile verilen ısı iletim denklemi elde edilmiştir.

(3.94) ve (3.108) ifadeleri ile u_k, p, Γ_a bilinmeyenlerini ihtiva eden alan denklemleri bulunmuş olur. Bu alan denklemlerinin probleme uygun olarak verilen ilk ve sınır şartları altındaki çözümü, göz önüne alınacak sınır değer probleminin matematiksel yapısını oluşturur.

(3.94) ve (3.108) alan denklemlerinin bilinmeyenleri $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, p ve Γ_a şeklindedir. p ve Γ_a Lagrange çarpanları, alan denklemlerinden ve sınır şartlarından hesaplanır. \mathbf{u} tayin edildikten sonra (3.57) den gerilme dağılımı tayin edilmiş olur. Gerilme dağılımı tansör alanı olarak bulunduktan sonra da istenilen kesitteki gerilme vektörünü $\mathbf{t}_{(\mathbf{n})r} = n_p t_{pr}$ ifadesinden rahatça hesaplama imkânı ortaya çıkmıştır.

Burada deformasyondan sonraki $a_k(\mathbf{X}, t)$ fiber dağılımının, uzamaz-fiberler için

deformasyondan önceki fiber-dağılımı cinsinden (1.144) ile $a_k = x_{k,K} A_K(\mathbf{X})$ olarak verildiğini hatırlamak gerekir.

KAYNAKLAR

Erdem, A. Ü., Usal, M.R., Usal, M.,2005. Keyfi Fiber Takviyeli Viskoelastik Piezoelektrik bir Cismin Elektro-Termomekanik Davranışı İçin matematiksel bir Model, Gazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 20, 3, 305-319 , Ankara.

Erdem, A. Ü., Usal, M., Usal, M.R., 2005. İzotropik Matris malzemesi Olan Fiber Takviyeli Dielektrik Viskoelastik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışı İçin Matematiksel bir Model, Gazi Üniversitesi, Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi, 20, 3, 321-334, Ankara.

Eringen, A.C., 1967. Mechanics of Continua. John Wiley and Sons. Inc, 502 p, New York.

Eringen, A.C., 1980. Mechanics of Continua. Robert E. Krieger Pub. Co., Huntington, 590 p, New York.

Hamamcı, B., 2004. Bünye Teorisi. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Semineri, 28 s, Isparta.

Holzapfel, A.G., 2000. Nonlinear Solid Mechanics. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 455p.

Kabul A., 2004. Fiber Takviyeli Hiperelastik Malzemeler için Matematiksel Bir Model. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 103 s, Isparta.

Kalpakides K.V., Dascalu C., 2002. On the Configurational Force Balance in Thermoelasticity. 458, 3023-3039.

Lubarda V.A., 2004. On Thermodynamic Potentials in Linear Thermoelasticity. 41, 7377-7398.

Mavgin A.G., Berezovski A., 1999. Material Formulation of Finite-Strain Thermoelasticity and Applications. 22, 421-449.

Öntürk N., 1993. İki Fiber Ailesi ile Takviyeli Viskoelastik Kompozit Ortamlarda Bünye Denklemlerinin Modellenmesi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 180 s, Ankara.

Şahin Y., 2000. Kompozit Malzemelere Giriş. Gazi Üniversitesi, 327s, Ankara.

Şuhubi, S.E., 1994. Sürekli Ortamlar Mekaniği Giriş. İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayını, 243s, İstanbul.

Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., 1970. Theory of Elasticity, Mcgraw Hill, 567p.

Usal, M.R., 1994. Fiber Takviyeli Elastik Dielektrik Ortamların Elektro-Termomekanik Davranışına ait Matematiksel Bir Model, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi-Fen Bilimleri Enstitüsü, 108 s., Kayseri.

Usal M., 2001. Biyolojik Bir Konstrüksiyon Elemanı için Matematiksel Modelleme. Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 232s, Isparta.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Benek HAMAMCI
Doğum Yeri : Ordu
Doğum Yılı : 1978
Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1992-1996 Sinop Anadolu Lisesi
Lisans 1997-2001 Süleyman Demirel Üniversitesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

2004-..... Araştırma Görevlisi (Süleyman Demirel Üniversitesi)