İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

İsmail TULGA

Yüksek Lisans Tezi
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA 2006

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

İSMAİL TULGA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA, 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET

İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

İSMAİL TULGA

Bu tezde, ilk olarak integral denklemlerin tarihi gelişimi ve özellikleri verildikten sonra, R. P. KANWAL ve K. C. LİU (Kanwal ve Liu, 1989)'nın yaptıkları çalışma ile M. SEZER (Sezer, 1996)'in makalesi esas alınıp, bu çalışmalarda verilen metot lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerine uygulanmıştır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konu için gerekli temel kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunması için yöntem geliştirilmiştir.

Üçüncü bölümde ise yöntemi açıklayan lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemleri ile ilgili uygulamalar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Fredholm integral denklem sistemleri, İntegral denklemler, Taylor polinom ve serileri, Diferansiyel denklemler.

ABSTRACT

APPROXIMATE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATION SYSTEMS

İSMAİL TULGA

In the present thesis the historical development of integral equations are given firstly. Then the method which was studied in a paper of KANWAL and K. C. LİU (Kanwal and Liu, 1989) and a paper of M. SEZER (Sezer, 1996), is applied to the linear Fredholm integral equation systems with variable coefficients.

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter the basic concepts are given which are necessary for the subject.

In the second chapter, it is investigated a Taylor polynomial solutions of high order lineer Fredholm integral equation systems with variable coefficients which is given for integral equations.

In the final chapter, practice about the approximate solutions of linear Fredholm integral equation systems with variable coefficients are given.

KEY WORDS: Fredholm integral equation systems, Integral equations, Taylor polynomials and series, Differential equations.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Fizik ve mühendislik uygulamalarında zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemleriyle karşılaşılır. Bu tür denklemlere integral denklemler denir. Diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, bir fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir.

Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Buna göre yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.

Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara ne gerek vardır, ne de koşulabilirler. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır.

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların lineer bileşiminden oluşan integrodiferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler.

İntegral denklem sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan bu tip sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu çalışmadaki amaç, daha önce Volterra ve Fredholm integral denklemler için verilen Taylor polinom yöntemini lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Yöntem; sistemleri bir matris denkleme dönüştürmeye dayanmaktadır. Bu matris denklem bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelir. Böylece cebirsel sistemin çözümünden bulunan Taylor katsayıları kullanılarak verilen integral denklem sisteminin sonlu Taylor seri formunda yaklaşık çözümü elde edilmektedir.

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocalarım Yrd.Doç.Dr. Salih YALÇINBAŞ ile Yrd.Doç.Dr. Mevlüde YAKIT ONGUN'a, ayrıca bana daima destek olan eşim Şule TULGA'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran 2006
İsmail TULGA

SİMGELER DİZİNİ

Z	Tam sayılar
$\sum$	Toplam sembolü
$\frac{dy}{dx}$	y ’nin x ’e göre 1. mertebeden türevi
$\frac{d^n y}{dx^n}$	y ’nin x ’e göre n . mertebeden türevi
$\frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n}$	$K(x,t)$ fonksiyonunun x ’e göre n . mertebeden kısmi türevi
$\lvert T \rvert$	T ’ nin determinantı
$\int$	İntegral
$\int \cdots (n) \cdots \int$	Katlı integralde, (n) katlılık mertebesi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmakla birlikte, bu tanım yetersiz kalmaktadır. İntegral denklemlerin bütün türlerini kapsayacak teoriyi kurmak olanaksızdır. Bu nedenle, birbirinden ayrı nitelikteki integral denklemleri tek tek incelemek gerekmektedir. Böylece geniş bir araştırma sahası açılmış olmakta ve konu bu oranda dağınık bir inceleme tarzı göstermektedir.

İntegral denklemlerle ilk uğraşılar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı izlenmektedir. ABEL 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak **İntegral Denklem** deyimini Du Bois REYMOND'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında önerdiği anlaşılmaktadır (Bocher, 1913). İntegral denklemlerle ilgili F. G. Tricomi (Tricomi, 1955), I. G. Petrovsky (Petrovsky, 1953) ve V. W. Lovitt (Lovitt, 1924)'e ait kaynaklar mevcuttur.

Bilindiği gibi tabiat kanunları diferansiyel denklemler yardımı ile ifade edilebilirler. Bundan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli tabiat kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de büyük düşünür **Albert Einstein'**ın "Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü anlaşılabilir olmasıdır" sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir (Bayın, 2000).

İntegral denklemler ise bütün uzay üzerinden integral alınması gerektirdiklerinden global (evrensel) denklemlerdir. Bu da aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir. İntegral denklemler genel olarak çözülmesi çok daha zor denklemlerdir.
Diferansiyel denklemlerin önemli bir özelliği, tek başlarına bir problemi tanımlamaya yetmemeleridir. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. İlave şartlara gerek

yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yoldan denklemlere dahil edilmesi olarak yorumlanabileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olması da doğaldır. Bu çalışmada görülebileceği gibi diferansiyel denklemler temelde integral denklemler olarak da ifade edilebilirler.

Uygulamalı bilim dallarında bazı problemler tek bir denklem ile ifade edilemezler, ancak onun yerine birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların lineer birleşiminden oluşan integrodiferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilirler. Bu tip denklem sistemleri, bilhassa parçalı olanlar, birçok fizik ve mühendislik dalında ortaya çıkmaktadır. Örneğin, diferansiyel denklem sistemleri; Elastikiyet teorisi (Ezechias, 1988), Dinamik (Kant, Varaiya & Arora, 1990), Akışkanlar mekaniği (Agarwal & Bhargava, Balaji, 1990), Devre problemleri (Zimmerman, 1996), Salınım problemleri (Pesterev., Bergman, 1997 ; Gürgöze., 1992), Kuantum dinamiği (Greenspan, 1998) gibi konularda, integral ve integrodiferansiyel denklem sistemleri ise Elektromanyetik teori (Bloom, 1980), Termoelastikiyet (Kopeikin, I.D. & Shiskin, V.P., 1984), Biyoloji (Holmaker, K., 1993), Mekanik (Yue, & Selvadurai, 1995, Abadzadeh & Pak, 1995), Dalgaların kırınımı (Büyükaksoy& Alkumru, 1995) gibi alanlarda ortaya çıkmaktadır.

Sistemlerin çözümü için şu ana kadar sunulmuş genel bir yöntem yoktur. Bu nedenle fizik ve mühendislik alanlarında önemli bir yeri olan sistemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasının faydalı olacağı düşünülmüştür.

Bu tez çalışmasındaki amaç, daha önce Volterra ve Fredholm integral denklemler için verilen Taylor polinom yöntemini (Sezer, 1992 ; Sezer, 1994) lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri için geliştirmek, uygulamak ve önemli özelliklerini ortaya çıkarmaktır. Yöntem; sistemleri bir matris denkleme dönüştürmeye dayanmaktadır. Bu matris denklem bilinmeyen Taylor katsayılarından oluşan bir lineer cebirsel sisteme karşılık gelir. Böylece cebirsel sistemin çözümünden bulunan Taylor katsayıları kullanılarak verilen Fredholm integral denklem sisteminin sonlu Taylor seri formunda yaklaşık çözümü elde edilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

2.1.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler temel kavramlar açısından öncelikle, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılır.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt \qquad (2.1.1)$$

yapısında bir integral denklemde, integral operatörünün $u(x)$ fonksiyonuna göre lineer olması halinde integral denklem de lineer integral denklem adını almaktadır.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u^n(t)dt \qquad (2.1.2)$$

integral denkleminde ise $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun *n.* kuvveti bulunduğundan lineer olmayan bir integral denklem olmaktadır. Bunun gibi, daha genel olarak

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \phi[x,t,u(t)]dt \qquad (2.1.3)$$

integral denklemi de lineer olmayan integral denklem olmaktadır. Bunların dışında birden çok sayıda değişkeni bulunan

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d K(x,y;t_1,t_2)u(t_1,t_2)dt_1 dt_2 \qquad (2.1.4)$$

şeklindeki integral denklemlerin de lineer olanı veya lineer olmayanı bulunmaktadır. Bu çalışmada genellikle lineer integral denklemler incelenecektir. Ele alınacak bir integral denklemin öncelikle lineer olup olmadığının saptanmasında yarar vardır (Aksoy, 1983).

2.1.2. Tekil ve Tekil Olmayan Lineer İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin sınıflandırılmasında $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekliliği önemlidir. İntegral işareti altında bulunan iki değişkenli $K(x,t)$ fonksiyonuna **çekirdek fonksiyon** denir. $K(x,t)$ fonksiyonu $a \le x \le b$, $a \le t \le b$ aralığında sürekli ise integral denklem Tekil (Singüler) olmayan bir integral denklemdir. Eğer $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse integral denklem Tekil (Singüler) integral denklem sınıfına girmektedir.

Örneğin $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$f(x) = \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} \tag{2.1.5}$$

şeklindeki bir integral denklem Tekil integral denklem sınıfına girmektedir. Ayrıca, integral sınırlarından en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfında olacaktır.

$$f(x) = \int_0^\infty \sin xt\, u(t)dt \tag{2.1.6}$$

ve

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} u(t)dt \tag{2.1.7}$$

denklemleri bu türe birer örnek teşkil etmektedir. Bunların ilkinde, $f(x)$ denklemin ikinci yanı ile tanımlanan fonksiyonu, $u(x)$ 'in Fourier Sinüs Transformasyonu, ikincisinde ise $u(x)$ 'in Laplace Transformasyonu olarak kullanılır (Aksoy, 1983).

2.1.3. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon olmak üzere

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1.8}$$

şeklindeki bir integral denkleme **I. cins integral denklem** denir. Bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\phi(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1.9}$$

şeklindeki bir integral denklem de yine I. cins integral denklemdir. Burada da $\phi(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır. Ancak bu denklemler

$$\phi(x) - f(x) = \psi(x)$$

olmak üzere

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1.10}$$

şeklinde ifade edilerek (2.1.8) yapısında yazılabilir.

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)u(t)dt \tag{2.1.11}$$

ve

$$e^x = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 t u(t)dt \tag{2.1.12}$$

gibi denklemler, I. cins integral denklemlere birer örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1.13}$$

veya

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.1.14}$$

şeklindeki integral denklemler ise **II. cins integral denklemler** sınıfına girmektedir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır.

$$u(x) = \int_0^x e^{x+t} u(t)dt \tag{2.1.15}$$

ve

$$u(x) = 1 + x + \int_0^2 \sin(x+t)u(t)dt \tag{2.1.16}$$

bu tür denklemlere birer örnektir.

Bu iki cins integral denklemden başka $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinen

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.1.17)$$

şeklindeki integral denklemlere ise **III. cins integral denklemler** denilir.

Örneğin

$$x.u(x) = 1 - e^{-x} + \int_0^1 x^2 t^2 u(t)dt \qquad (2.1.18)$$

denklemi III. cins bir integral denklemdir.

Özel olarak $\phi(x) \equiv 0$ ise (2.1.17) denklemi I. cins bir integral denkleme, $\phi(x) \equiv 1$ ise aynı denklem II. cins bir integral denkleme dönüşmektedir. Buradan I. ve II. cins integral denklemlerin, III. cins integral denklemlerin birer özel hali olduğu görülmektedir (Aksoy, 1983).

2.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler bir de bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun homojen olup olmadığına göre sınıflandırılabilir. II. cins integral denklemler için söz konusu böyle bir sınıflandırma (2.1.13) ile verilen

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt \qquad (2.1.19)$$

integral denklemi için yapılırsa, (2.1.19) denklemi **homojen integral denklem** olarak adlandırılır. Homojenliği bozan bir $f(x)$ fonksiyonu içeren (2.1.14) formundaki

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere ise **homojen olmayan integral denklemler** denir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

homojen integral denkleminin kolayca görülebildiği gibi $u(x) \equiv 0$ olan bir çözümü vardır. Buna **aşikar çözüm** veya **trivial çözüm** denir. Ancak bunun dışında çözümlerinin bulunup bulunmadığının veya hangi koşullar altında çözümün olabileceğinin araştırılması başlı başına bir konudur. Homojen integral denklemler daha genel bir yapıya sahip

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki bir integral denklemin $f(x) = 0$ halindeki özel bir durumu olarak göz önüne alınabilir (Aksoy, 1983).

2.1.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemler integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. Lineer ve homojen olup olmadıklarına bakmasızın

$$\phi(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt$$

gibi denklemlere **Volterra İntegral Denklemleri** denilmektedir (Aksoy, 1983). Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır. x değişkeninin $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek

$$\phi(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

şeklindeki denklemlere ise **Fredholm İntegral Denklemleri** denilmektedir (Aksoy, 1983). Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki tek fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır. Ancak bu iki denklem türünün incelenmesi, zaman zaman iç içe girmiş bir görünüm verebilmektedir.

2.2. İntegral Denklemlerle Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişkiler

Başlangıç koşullarıyla verilen, değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem, Volterra tipindeki bir integral denkleme dönüştürebildiği gibi, bir integral denklem de diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Dolayısıyla, bir integral denklem başlangıç koşulları için sağlanan diferansiyel denklemin bir sınır değer problemi olarak da göz önüne alınabilir.

2.2.1. Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.2.1)$$

lineer diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Ayrıca sayıları n tane olan

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$$

(2.2.2)

başlangıç koşullarının da verildiği kabul edilsin. (2.2.1) denklemine

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \tag{2.2.3}$$

dönüşümü uygulanırsa, bu ifade

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = u(x)$$

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) = \int_0^x u(t)dt$$

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(t)dt + c_{n-1}$$

şeklinde hesaplanarak, türevin mertebesi bir mertebe düşürülmüş olur. Benzer şekilde hareket edilerek

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}}\right) = \int_0^x \left[\int_0^x u(t)dt + c_{n-1}\right]dt$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(t)dt + c_{n-1}\int_0^x dt + c_{n-2}$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(t)dtdt + c_{n-1}x + c_{n-2}$$

elde edilir ve böyle devam edilirse

$$\frac{d^{n-3} y}{dx^{n-3}} = \int_0^x \int_0^x \int_0^x u(t)dtdtdt + \frac{1}{2!}c_{n-1}x^2 + c_{n-2}x + c_{n-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \cdots (n-1) \cdots \int_0^x u(t)dt \ldots dt + \frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2}$$
$$+ \frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3} + \ldots + c_1$$

olur. Bir kere daha integral alınırsa

$$y=\int_0^x\cdots(n)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt+\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_1x+c_0$$

bulunur. Burada da görüldüğü gibi sık sık çok katlı integrallerle işlem yapmak zorunda kalınacaktır. Bunu kısaca göstermek için

$$\int\cdots(n)\cdots\int$$

şeklindeki notasyonun kullanılması uygun bulunmuştur. İntegraller arasındaki (n) katlılık mertebesini göstermektedir.

Probleme tekrar dönülür ve yukarıda bulunan ifadeler (2.2.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&u(x)+a_1(x)\int_0^x u(t)dt+c_{n-1}a_1(x)+a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt+c_{n-1}xa_2(x)+c_{n-2}a_2(x)\\
&+a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(t)dtdtdt+\frac{1}{2!}c_{n-1}x^2a_3(x)+c_{n-2}xa_3(x)+c_{n-3}a_3(x)\\
&+\ldots+a_{n-1}(x)\int_0^x\cdots(n-1)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-1}x^{n-2}a_{n-1}(x)\\
&+\frac{1}{(n-3)!}c_{n-2}x^{n-3}a_{n-1}(x)+\ldots+c_1a_{n-1}(x)\\
&+a_n(x)\int_0^x\cdots(n)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt+\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}a_n(x)\\
&+\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}a_n(x)+\ldots+c_1xa_n(x)+c_0a_n(x)=f(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade de

$$u(x)+a_1(x)\int_0^x u(t)dt+a_2(x)\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt+a_3(x)\int_0^x\int_0^x\int_0^x u(t)dtdtdt$$

$$+\ldots+a_{n-1}(x)\int_0^x\cdots(n-1)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt\;+a_n(x)\int_0^x\cdots(n)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt$$

$$=f(x)-c_{n-1}a_1(x)-c_{n-1}xa_2(x)-\ldots-\frac{1}{(n-1)!}c_{n-1}x^{n-1}a_n(x)$$

$$-\ldots-c_{n-2}a_2(x)-c_{n-2}xa_3(x)-\ldots-\frac{1}{(n-2)!}c_{n-2}x^{n-2}a_n(x)$$

$$-\ldots-c_1xa_{n-1}(x)-c_1a_n(x)-c_0a_n(x)$$

şeklinde düzenlenirse, eşitliğin sağ tarafı x 'in bir fonksiyonu olup bu $F(x)$ ile gösterilebilir. Burada

$$a_1(x)+xa_2(x)+\frac{x^2}{2!}a_3(x)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}a_n(x)=f_{n-1}(x)$$

$$a_2(x)+xa_3(x)+\ldots+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}a_n(x)=f_{n-2}(x)$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}(x)+a_n(x)=f_1(x)$$

$$a_n(x)=f_0(x)$$

şeklinde göstermek suretiyle

$$F(x)=f(x)-\{c_{n-1}f_{n-1}(x)+c_{n-2}f_{n-2}(x)+\ldots+c_1f_1(x)+c_0f_0(x)\}$$

olduğu görülür. Eşitliğin sol tarafı ise

$$\int_0^x\cdots(n)\cdots\int_0^x u(t)dt\ldots dt=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}u(t)dt \qquad (2.2.4)$$

ifadesi yardımıyla tek katlı integral olarak ifade edilebilir (Aksoy, 1983).

Teorem 2.2.1.

$$\int_0^x \cdots (n) \cdots \int_0^x u(t)dt \ldots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt \qquad (2.2.5)$$

bağıntısı yardımı ile çok katlı bir integral, tek katlı bir integral olarak ifade edilebilir.

İspat: (2.2.4) bağıntısı aşağıdaki gibi düzenlenip, sağ tarafı I_n ile gösterilsin ve bu ifade daha genel incelenmiş olması için alt sınırı da a olmak üzere

$$(n-1)! \int_a^x \cdots (n) \cdots \int_a^x u(t)dt \ldots dt = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t)dt$$

$$I_n(x) = \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t)dt \qquad (2.2.6)$$

olsun. Burada n pozitif bir tam sayı, a bir sabittir.

(2.2.12) ile verilen ve integral işareti altında türev almaya yarayan Leibnitz formülünden yararlanarak

$$F(x,t) = (x-t)^{n-1} u(t)$$

alınarak, türev alınırsa

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1)\int_a^x (x-t)^{n-2} u(t)dt + \left\{(x-t)^{n-1} u(t)\right\}\Big|_{t=x}$$

bulunur. Böylece $n > 0$ için

$$\frac{dI_n}{dx} = (n-1) I_{n-1} \qquad (2.2.7)$$

olur. Özel olarak $n=1$ ise, (2.2.6)'dan

$$\frac{dI_1}{dx}=\frac{d}{dx}\int_a^x u(t)dt=u(x) \tag{2.2.8}$$

bulunur. (2.2.7)'dan türev almaya devam edilirse

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 I_n}{dx^2}=(n-1)(n-2)I_{n-2}\\
&\frac{d^3 I_n}{dx^3}=(n-1)(n-2)(n-3)I_{n-3}\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{d^k I_n}{dx^k}=(n-1)(n-2)\ldots(n-k)I_{n-k} \quad , \quad (n>k)\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{d^{n-1} I_n}{dx^{n-1}}=(n-1)(n-2)\ldots 2.1.I_1=(n-1)!I_1
\end{aligned}\right\} \tag{2.2.9}$$

ifadeleri elde edilip $n.$ mertebeden türev

$$\frac{d^n I_n}{dx^n}=(n-1)!\frac{dI_n}{dx}=(n-1)!u(x) \tag{2.2.10}$$

olarak bulunur. Bunun böyle olduğu (2.2.8)'den kolayca görülür. $n\geq 1$ iken $I_n(a)=0$ olduğuna dikkat edilirse, (2.2.9) bağıntısından, $I_n(x)$'in ve onun ilk $(n-1)$ adet türevinin $x=a$ için sağlandığı sonucuna varılabilir. $I_n(a)=0$ olduğu (2.2.6) bağıntısından kolayca görülür.

Şimdi, yukarıdaki bağıntılardan, geriye doğru hareket edilerek, integral işlemleri yapılırsa (2.2.8)'den

$$I_1(x)=\int_a^x u(t)dt$$

elde edilir. Ayrıca

$$I_2(x) = \int_a^x I_2(x_2)\,dx_2 = \int_a^x \int_a^{x_2} u(t_1)\,dt_1\,dt_2$$

yazılabilecektir. Burada x_1, x_2 birer parametredir. İşlemlere bu şekilde devam edilirse

$$I_n(x) = (n-1)! \int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(t_1)\,dt_1\,dt_2\,dt_3 \dots dt_{n-1}\,dt_n$$

bulunur. İfadeyi düzenlemek için, her iki tarafı $(n-1)!$ ile bölüp, $\mathrm{I_n}$ yerine (2.2.6) bağıntısındaki eşiti yazılırsa

$$\int_a^x \int_a^{x_n} \int_a^{x_{n-1}} \dots \int_a^{x_3} \int_a^{x_2} u(t_1)\,dt_1\,dt_2\,dt_3 \dots dt_{n-1}\,dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} u(t)\,dt$$

elde edilir. Burada $x = x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = x_n$ kabul edilirse, gösterilmek istenilen

$$\int_0^x \cdots (n) \cdots \int_0^x u(t)\,dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)\,dt$$

bağıntısı bulunmuş olur.

Buna göre

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(t)\,dt + a_2(x) \int_0^x \int_0^x u(t)\,dt\,dt$$

$$+ \cdots + a_n(x) \int_0^x \cdots (n) \cdots \int_0^x u(t)\,dt \dots dt = F(x) \qquad (2.2.11)$$

ifadesi (2.2.4) yardımıyla

$$u(x) + a_1(x) \int_0^x u(t)\,dt + a_2(x) \int_0^x (x-t) u(t)\,dt + \cdots + a_n(x) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)\,dt = F(x)$$

şeklindeki ifade elde edilecektir. Bu ise belirli integral özelliklerinden faydalanılarak

$$u(x)+\int_0^x\left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)+a_3(x)\frac{(x-t)^2}{2!}+\cdots+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]u(t)dt=F(x)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içindeki ifade $K(x,t)$ fonksiyonu olarak göz önüne alınırsa

$$K(x,t)=a_1(x)+a_2(x)(x-t)+\cdots+a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olur. Bu çekirdek fonksiyon olup, yerine yazıldığında

$$u(x)+\int_0^x K(x,t)u(t)dt=F(x)$$

şeklindeki II. cins Volterra integral denklemi elde edilir. Böylece (2.2.3) ile verilen diferansiyel denklemi bir integral denkleme dönüşmüş olur.

Örnek 2.2.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{dy}{dx}+By=f(x)$$

(2.2.12)

$y(0)=c_0, y'(0)=c_1$ başlangıç koşullarıyla verilen diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi bir integral denkleme dönüşür.

$\frac{d^2y}{dx^2}=u(x)$ denirse, buna göre bu ifade

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = u(x)$$

şeklinde yazabilir. Bu ifadenin her iki tarafının 0 ’dan x ’e belirli integrali alınırsa

$$\int_0^x dy' = \int_0^x u(t)dt$$

$$y'\Big|_0^x = \frac{dy}{dx} = \int_0^x u(t)dt$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \int_0^x u(t)dt + c_1$$

ifadesi bulunur. Buradan da bu ifadenin tekrar belirli integralini alınırsa

$$\int_0^x dy = \int_0^x\int_0^x u(t)dtdt + c_1\int_0^x dt$$

$$y\Big|_0^x = \int_0^x\int_0^x u(t)dtdt + c_1 x\Big|_0^x$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x\int_0^x u(t)dtdt + c_1 x$$

$$y(x) = \int_0^x\int_0^x u(t)dtdt + c_1 x + c_0$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.2.4) bağıntısı gereğince $\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt = \int_0^x (x-t)u(t)dt$ yazılabileceğinden bulunan $y(x)$ ve $y'(x)$ ifadelerini (2.2.12)’de yerine yazılırsa

$$u(x) + A\left[\int_0^x u(x)dx + c_1\right] + B\left[\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt + c_1 x + c_0\right] = f(x)$$

$$u(x) + A\int_0^x u(t)dt + c_1 A + B\int_0^x (x-t)u(t)dt + (c_1 x + c_0)B = f(x)$$

bulunur. Bu ifade de

$$u(x) + \int_0^x \left[A + (x-t)B\right]u(t)dt = f(x) - \left[c_1 A + c_0 B + c_1 Bx\right]$$

şeklinde düzenlenir ve

$$K(x,t) = A + (x-t)B$$
$$F(x) = f(x) - \{c_1 A + c_0 B + c_1 x B\}$$

ile gösterilirse, (2.2.12) diferansiyel denklemi

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

şeklinde bir Volterra integral denklemine dönüştüğü görülür.

Örnek 2.2.2. Aşağıda verilen diferansiyel denklem ve başlangıç şartları ele alınsın.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu y = f(x)$$
$$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

(2.3.4) formülü kullanılarak bu sistem

$$y(x) = \mu \int_0^x (x-t)y(t)dt + 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

integral denklemine dönüşür.

Örnek 2.2.3.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mu y = f(x)$$
$$y(0) = 0 \ , \ y'(\ell) = 0$$

diferansiyel denklemi ve sınır şartları ele alınsın. Bu denklemin $(0,x)$ aralığında integrali alınırsa

$$\frac{dy}{dx} = -\mu\int_0^x y(t)dt + c$$

bulunur. Burada c bir integral sabiti olup $y'(0)$ değerini gösterir. İkinci bir integral alma işlemi

$$y(x) = \mu\int_0^x (x-t)y(t)dt + cx$$

ifadesini verir, dikkat edilirse $y(0) = 0$ şartının kullanıldığı görülmektedir. c değeri ise ikinci sınır şartını sağlayacak şekilde belirlenmesi gerektiğinden

$$-\frac{\mu}{\ell}\int_0^\ell (x-t)y(t)dt = c$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak da

$$y(x) = -\mu\int_0^x (x-t)y(t)dt - \frac{x\mu}{\ell}\int_0^\ell (\ell-t)y(t)dt$$

veya

$$y(x) = \mu\int_0^\ell \frac{t}{\ell}(\ell-t)y(t)dt + \mu\frac{x}{\ell}\int_0^\ell (\ell-t)y(t)dt$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde

$$y(x) = \mu\int_0^\ell K(x,t)y(t)dt$$

şeklinde yazılırsa

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\ell}(\ell-x), & t<x\\ \dfrac{x}{\ell}(\ell-t), & t>x\end{cases}$$

olur. Bu da II. cins Fredholm integral denklemidir.

2.2.2. İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

Bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bunun için **Leibnitz Formülü**'nün uygulanması yeterlidir. Bu formül, integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirir.

Leibnitz formülü

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)}F(x,t)dt=\int_{A(x)}^{B(x)}\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt+F(x,B(x))\frac{dB(x)}{dx}-F(x,A(x))\frac{dA(x)}{dx} \tag{2.2.13}$$

olup, burada $A(x)$ ve $B(x)$'in sabitler olması halinde

$$\frac{dA(x)}{dx}=0\ ,\quad \frac{dB(x)}{dx}=0$$

olacağından formül

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)}F(x,t)dt=\int_{A(x)}^{B(x)}\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt$$

olarak kullanılır (Aksoy, 1983).

Örnek 2.2.4.

$$u(x) - \int_0^x u(t)\tan t dt = \sin x \qquad (2.2.14)$$

integral denklemi verilsin, başlangıç koşulunun $x = 0$ için $u(x) = 0$ olduğu bilindiğine göre bu integral denklem bir diferansiyel denkleme aşağıdaki gibi dönüştürülür.

Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\tan t dt = \frac{d(\sin x)}{dx}$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\tan t dt = \cos x$$

elde edilir. Bu ifadeye Leibnitz Formülü uygulandığında

$$\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\tan t dt = \int_0^x 0 dt + u(x)\tan x = u(x)\tan x$$

bulunacağından (2.2.14) integral denkleminin

$$u'(x) - u(x)\tan x = \cos x$$

şeklindeki birinci mertebeden bir lineer diferansiyel denkleme dönüştüğü görülür.

2.3. İntegral Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri

2.3.1. Fredholm İntegral Denklemlerin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümü

Bu kısımda, Taylor seri çözümlerine sahip I. ve II. cins lineer Fredholm integral denklemlerinin yaklaşık çözümleri incelenmiştir. Bu denklemlerin çözümü için kullanılan yöntem, R. P. Kanwal ve K. C. Liu tarafından sunulan yöntemin bir genellemesidir. Bu yöntemle ilk olarak integral denklemin her iki tarafının n defa türevi alınır ve sonra sonuç denkleminde bilinmeyen fonksiyonun Taylor seri açılımında yerine konulur. Burada lineer cebirsel sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunur. Elde edilen çözüm, bir Taylor seri yaklaşımı olup bu Taylor seri açılımının katsayıları bir lineer cebirsel sistemin çözümleridir. Katsayılar çekirdeğe bağlı matris denklemi yardımıyla hesaplanır. Yöntem, bazı lineer Fredholm integral denklemlere uygulanarak aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt=0 \qquad (2.3.1)$$

ve

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt \qquad (2.3.2)$$

denklemlerini göz önüne alalım. Bu denklemlerdeki a ve b sabitleri $(a \le x,t \le b)$, integralin sınırlarıdır. Her iki denklemde de y bilinmeyen bir fonksiyon, $f(x)$ ve $K(x,t)$ bilinen fonksiyonlardır. $\lambda \neq 0$ reel veya kompleks bir parametredir. Eğer çekirdek fonksiyonlar $K(x,t)=K(t,x)$ şeklinde birbirine eşit ise simetriktir.

Bununla beraber, (2.3.1) ve (2.3.2) denklemlerindeki a ve b integral sınırlarından biri veya her ikisi sonsuz, ya da $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu verilen aralıkta sürekli değilse integral denklem Tekildir (Singülerdir). Eğer (2.3.2) denkleminde $f(x)=0$ ise integral denklem homojendir.

2.3.2. Materyal ve Metot

(2.3.2) ile verilen Fredholm integral denklemini göz önüne alınsın ve

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}y^{(n)}(c)(x-c)^{n}\ ,\ \ a\leq c\leq b \tag{2.3.3}$$

formunda bir Taylor seri çözümünü aransın. (2.3.2) denkleminin x 'e göre n defa türevi alınıp

$$y^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+\lambda\int_{a}^{b}\frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^{n}}y(t)dt$$

ve x yerine c değerini konulduğunda

$$y^{(n)}(c)=f^{(n)}(c)+\lambda\int_{a}^{b}\left.\frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^{n}}\right|_{x=c}y(t)dt \tag{2.3.4}$$

elde edilir. Sonra $y(t),\ t=c$ 'de Taylor serisine açılırsa

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}y^{(m)}(c)(t-c)^{m} \tag{2.3.5}$$

elde edilir ve bu (2.3.4)'de yerine konulduğunda

$$y^{(n)}(c)=f^{(n)}(c)+\lambda\int_{a}^{b}\left.\frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^{n}}\right|_{x=c}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}y^{(m)}(c)(t-c)^{m}dt$$

elde edilir. Bu düzenlendiğinde

$$y^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} T_{nm} y^{(m)}(c), \quad (n,m = 0,1,2,...,N) \qquad (2.3.6)$$

elde edilir. (2.3.6)'daki

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \left. \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=c} (t-c)^m \, dt \qquad (2.3.7)$$

formundadır. Böylece Taylor katsayıları ile sonsuz (2.3.6) bağıntıları bir sonsuz lineer cebirsel sistem oluştururlar. (2.3.6) sistemi, uygun bir yerde kesilerek yaklaşık çözülebilir $(n,m = 0,1,2,...,N)$. Bu taktirde, $\mathbf{TY} = \mathbf{F}$ matris denklemi elde edilir.

$$\mathbf{TY} = \mathbf{F} \qquad (2.3.8)$$

matris denklemindeki matrisler

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y^{(0)}(\mathrm{c}) \\ y^{(1)}(\mathrm{c}) \\ \vdots \\ y^{(N)}(\mathrm{c}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda \mathrm{T}_{00} - 1 & \lambda T_{01} & \dots & \lambda T_{0N} \\ \lambda T_{10} & \lambda T_{11} - 1 & \dots & \lambda T_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda T_{N0} & \lambda T_{N1} & \dots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -f^{(0)}(\mathrm{c}) \\ -f^{(1)}(\mathrm{c}) \\ \vdots \\ -f^{(N)}(\mathrm{c}) \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(2.3.1) integral denkleminin çözümü için (2.3.8) matris denklemini kullanılabilir. Bu yüzden $\mathbf{T}$ matrisi

$$\mathbf{T} = \lambda \cdot [T_{nm}] - \mathbf{I}, \quad (\mathrm{n,m} = 0,1,2,\dots,\mathrm{N}) \qquad (2.3.9)$$

olup eğer $|\mathbf{T}| \neq 0$ ise (2.3.8) denklem

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{F} \qquad (2.3.10)$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.10) yardımı ile $y^{(n)}(\mathrm{c})$, $\left(n = 0,1,2,...,N\right)$ bilinmeyen katsayılar belirlenir ve bu değerler (2.3.3) ’de yerine konulursa

$$y(\mathrm{x}) \cong \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(\mathrm{c})((x-c))^{n} \tag{2.3.11}$$

Taylor seri çözümü elde edilir (Sezer, 1992).

Örnek 2.3.1. $y(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt^2 + x^2 t) y(\mathrm{t}) dt$ şeklindeki homojen olmayan Fredholm integral denkleminin çözümü aransın.

Burada, $K(\mathrm{x},\mathrm{t}) = xt^2 + x^2 t$, $f\left(x\right) = x, a = 0, b = 1$ olup $c = 0$ ve $N = 2$ alınırsa $f^{(n)}\left(0\right)$ ve $\mathrm{T_{nm}}$ değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$f(\mathrm{x}) = x \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(\mathrm{x}) = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(\mathrm{x}) = 0 \Rightarrow f''(0) = 0$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \left. \frac{\partial^{(n)} K(\mathrm{x},\mathrm{t})}{\partial x^n} \right|_{x=c} (\mathrm{t} - \mathrm{c})^m \, dt$$

$$T_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2 t)}{\partial x^{(0)}} \right|_{x=0} (t-0)^0 \, dt = \int_0^1 (xt^2 + x^2 t)\Big|_{x=0} dt = \int_0^1 0 \, dt = 0$$

$$T_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2 t)}{\partial x^{(0)}} \right|_{x=0} (t-0)^1 \, dy = \int_0^1 (xt^2 + x^2 t)\Big|_{x=0} t dt = \int_0^1 0.t \, dt = 0$$

$$T_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^{(0)} (xt^2 + x^2 t)}{\partial x^{(0)}} \right|_{x=0} (t-0)^2 \, dy = \int_0^1 (xt^2 + x^2 t)\Big|_{x=0} t^2 dt = \int_0^1 0.t^2 \, dt = 0$$

$$T_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^{(1)} (xt^2 + x^2 t)}{\partial x^{(1)}} \right|_{x=0} (t-0)^0 \, dt = \int_0^1 (t^2 + 2xt)\Big|_{x=0} dt = \int_0^1 \mathrm{t}^2 \, dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$T_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \left. \frac{\partial^{(1)} (xt^2 + x^2 t)}{\partial x^{(1)}} \right|_{x=0} (t-0)^1 \, dt = \int_0^1 (t^2 + 2xt)\Big|_{x=0} t dt = \int_0^1 \mathrm{t}^2.\mathrm{t} \, dt = \left. \frac{t^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$T_{12}=\frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^{(1)}(xt^2+x^2t)}{\partial x^{(1)}}\bigg|_{x=0}(t-0)^2\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1 (t^2+2xt)\big|_{x=0}t^2dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{t}^2.\mathrm{t}^2\;dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1=\frac{1}{10}$$

$$T_{20}=\frac{1}{0!}\int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt^2+x^2t)}{\partial x^{(2)}}\bigg|_{x=0}(t-0)^0\,dt=\int_0^1 (2t)\big|_{x=0}dt=\int_0^1 \mathrm{t}^2\;dt=t^2\Big|_0^1=1$$

$$T_{21}=\frac{1}{1!}\int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt^2+x^2t)}{\partial x^{(2)}}\bigg|_{x=0}(t-0)^1\,dt=\int_0^1 (2t)\big|_{x=0}tdt=\int_0^1 2\mathrm{t}^2\;dt=\frac{2t^3}{3}\bigg|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$T_{22}=\frac{1}{2!}\int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt^2+x^2t)}{\partial x^{(2)}}\bigg|_{x=0}(t-0)^2\,dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 (2t)\big|_{x=0}t^2dt=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 2\mathrm{t}^3\;dt$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t^4}{4}\bigg|_0^1=\frac{1}{4}$$

olup

$$\begin{array}{lll} T_{00}=0 & T_{01}=0 & T_{02}=0 \\ T_{10}=\dfrac{1}{3} & T_{11}=\dfrac{1}{4} & T_{12}=\dfrac{1}{10} \\ T_{20}=1 & T_{21}=\dfrac{2}{3} & T_{22}=\dfrac{1}{4} \end{array}$$

ve

$$f(0)=0 \quad f'(0)=1 \quad f''(0)=0$$

değerleri belirlenir.

Bu değerleri $\mathbf{TY}=\mathbf{F}$ (2.3.8)'de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} \lambda.0-1 & \lambda.0 & \lambda \\ \lambda.\frac{1}{3} & \lambda.\frac{1}{4}-1 & \lambda.\frac{1}{10} \\ \lambda.1 & \lambda.\frac{2}{3} & \lambda.\frac{1}{4}-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \lambda \\ \frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{4}-1 & \frac{\lambda}{10} \\ \lambda & \frac{2\lambda}{3} & \frac{\lambda}{4}-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir.

Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} y^{(0)}(0) &= 0 \\ \frac{\lambda}{3} y^{(0)}(0) + \left(\frac{\lambda}{4}-1\right) y^{(1)}(0) + \frac{\lambda}{10} y^{(2)}(0) &= -1 \\ \lambda . y^{(0)}(0) + \frac{2\lambda}{3} . y^{(1)}(0) + \left(\frac{\lambda}{4}-1\right) y^{(2)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y^{(0)}(0) = 0$ ve $y^{(1)}(0) = y_1$, $y^{(2)}(0) = y_2$ değerleri denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\lambda-4}{4} \cdot y_1 + \frac{\lambda}{10} \cdot y_2 &= -1 \\ \frac{2\lambda}{3} \cdot y_1 + \frac{\lambda-4}{4} \cdot y_2 &= 0 \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$y_1 = \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4-\lambda}{4} y_2$$

$$\frac{\lambda-4}{4} \cdot \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4-\lambda}{4} y_2 + \frac{\lambda}{10} \cdot y_2 = -1$$

$$y_2 \left(\frac{-3(\lambda-4)^2}{32\lambda} + \frac{\lambda}{10} \right) = -1$$

$$y_2 = \frac{-320\lambda}{2\lambda^2 + 240\lambda - 480} = \frac{-160\lambda}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

$$y_1 = \frac{-160\lambda}{\lambda^2 + 120\lambda - 240} \cdot \frac{3}{2\lambda} \cdot \frac{4-\lambda}{4} = \frac{60\lambda - 240}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

elde edilir. Bu değerler (2.3.11)'de yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!} y^{(n)}(0)(x-0)^n$$

$$y(x) = y^{(0)}(0) + y^{(1)}(0).x + \frac{1}{2}.y^{(2)}(0).x^2$$

$$y(x) = \frac{\left[(60\lambda - 240).x - 80\lambda.x^2\right]}{\lambda^2 + 120\lambda - 240}$$

elde edilir. Bu elde edilen tam sonuçtur.

2.3.3. Volterra İntegral Denklemlerin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümü

Bu kısımda da, Volterra integral denklemler için aynı Taylor seri çözüm yöntemi incelenmiştir.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t).y(t)dt \qquad (2.3.12)$$

Volterra integral denklemini göz önüne alınsın.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}y^{(k)}(c).(x-c)^{k},\ a\le \mathrm{c}\le \mathrm{x} \tag{2.3.13}$$

şeklindeki $x=c$ noktasında ki Taylor serisi çözümünü arayalım.

2.3.4. Materyal ve Metot

(2.3.12) denkleminin (2.3.13) şeklinde bir çözümünü elde etmek için ilk olarak x'e göre n defa türev alınırsa

$$y^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+\lambda.I^{(n)}(x) \tag{2.3.14}$$

olur. Buradaki

$$I^{(n)}(x)=\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{a}^{x}K(x,t).y(t)dt \tag{2.3.15}$$

dır. $n=0$ için

$$I^{(0)}(x)=I(x)=\int_{a}^{x}K(x,t)\,y(t)dt$$

olur. n defa integralin diferansiyelinin alınması ile ilgili Leibnitz kuralı $I(x)$ integraline uygulanırsa, $n\ge 1$ için

$$I^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\left[h_{i}(x).y(x)\right]^{(n-i-1)}+\int_{a}^{x}\frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^{n}}y(t)dt \tag{2.3.16}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki

$$h_{i}(x)=\left.\frac{\partial^{(i)}K(x,t)}{\partial x^{i}}\right|_{t=x} \tag{2.3.17}$$

dır. Fonksiyonların çarpımının diferansiyeli ile ilgili Leibnitz kuralından $\left[h_i(\mathrm{x}).\mathrm{y}(\mathrm{x})\right]^{(\mathrm{n-i-1})}$'i hesaplanıp (2.3.16) denkleminde yerine konursa, böylece (2.3.15) denklemi

$$I^{(\mathrm{n})}(x)=\sum_{m=0}^{n\text{-}1}\sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n\text{ - i - }1}{m}h_i^{(n-m-1)}(x)y^{(m)}(x)+\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}}\frac{\partial^{\mathrm{n}}K(x,t)}{\partial x^n}\cdot y(\mathrm{t})\mathrm{dt}m \qquad (2.3.18)$$

elde edilir. (2.3.18) denkleminde

$$\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-m-1}(\ldots)=\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n\text{-}1}}\sum_{\mathrm{m=0}}^{n-m-1}(\ldots)$$

olduğuna dikkat edilmelidir.

İlk olarak (2.3.14) denkleminde $x=0$ yazılıp sonra buradan (2.3.18) denkleminde ve sonra $t=c$ noktasındaki $y(t)$ Taylor açılımı yani

$$y(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\cdot y^{(m)}(c).(t-c)^m$$

ifadesi yerine yazılırsa

$$y^{(\mathrm{n})}(\mathrm{c})=f^{(n)}(c)+\lambda\sum_{m=0}^{\mathrm{n\text{-}1}}\sum_{i=0}^{n-m-1}\binom{n\text{ - i - }1}{m}h_i^{(n-m-i-1)}(c)y^{(\mathrm{m})}(c)$$
$$+\lambda\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}}\left.\frac{\partial^{\mathrm{n}}K(x,t)}{\partial x^n}\right|_{x=c}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\cdot y^{(m)}(c).(t-c)^m\mathrm{dt}$$

veya kısaca

$$y^{(n)}(c)=f^{(n)}(c)+\lambda\left\{\sum_{m=0}^{n-1}(H_{nm}+T_{nm})y^{(m)}(c)+\sum_{m=n}^{\infty}T_{nm}.y^{(m)}(c)\right\} \qquad (2.3.19)$$

elde edilir. (2.3.19)'daki

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c) \tag{2.3.20}$$

ve

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \left. \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=c} (t-c)^m \, dt \tag{2.3.21}$$

şeklinde tanımlanırlar.

(2.3.19)'da $n = 0$ için

$$\sum_{m=0}^{n-1} (H_{nm} + T_{nm}) y^{(m)}(c) = 0 \quad ,\left(\; n = 1,2,\ldots \; ; \; m = 1,2,\ldots,n\text{-}1 \; (n > m) \right)$$

olur. (2.3.20)'de $n \le m$ için

$$H_{nm} = 0$$

elde edilir.

(2.3.18) bağıntısından sonsuz lineer denklem elde edilir. $y(x)$'in N .dereceden bir Taylor polinomuna yaklaştığı kabul edilirse, $n, m = 0,1,2,...,N$ koyulabilir. Sonra (2.3.18) denklemi bilinmeyen $y^{(0)}(\mathrm{c}), \mathrm{y}^{(1)}(\mathrm{c}), \ldots, \mathrm{y}^{(\mathrm{N})}(\mathrm{c})$ katsayıları için $(N+1)$ bilinmeyenli, $(N+1)$ denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi ortaya çıkar. Bu sistem standart metotlarla nümerik olarak çözülebilir ya da bu sistem

$$\mathbf{TY} = \mathbf{F} \tag{2.3.22}$$

şeklindeki matris denklemi haline getirilir ve $|\mathbf{T}| \neq 0$ ise (2.3.21) matris denklem

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{F} \tag{2.3.23}$$

şeklinde yazılır.

(2.3.22)'deki $\mathbf{T}, \mathbf{Y}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda.T_{00} - 1 & \lambda.T_{01} & \dots & \lambda.T_{0N} \\ \lambda.(H_{10} + T_{10}) & \lambda.T_{11} - 1 & \dots & \lambda.T_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(H_{N0} + T_{N0}) & \lambda(H_{N1} + T_{N1}) & \dots & \lambda T_{NN} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y^{(0)}(c) & y^{(1)}(c) & \dots & y^{(N)}(c) \end{bmatrix}^t$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f^{(0)}(c) & f^{(1)}(c) & \dots & f^{(N)}(c) \end{bmatrix}^t$$

şeklindedirler. Böylece $y^{(n)}(c)$, $(n = 0,1,...,N)$ katsayıları (2.3.23) denklemiyle tek bir şekilde belirlenir. Bu yüzden (2.3.12) integral denkleminin çözümü tektir. Bu çözüm,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} y^{(n)}(c).(x-c)^n \tag{2.3.24}$$

Taylor polinomudur.

(2.3.21) integralinin değerini hesaplamak genelde zordur. Bu yüzden $c = a$ seçilmesi uygun olur. Böylece T_{nm} değerleri (2.3.19) denkleminin bir rekürans bağıntısına indirgenir ve aşağıdaki gibi kolayca hesaplanır.

$$\begin{aligned} y^{(0)}(a) &= f^{(0)}(a) \\ y^{(n)}(a) &= f^{(n)}(a) + \lambda \sum_{m=0}^{n-1} H_{nm}.y^{(m)}(a) \;,\; (\mathrm{n} = 1,2,..., \mathrm{N}) \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

Bu bağıntıdan bilinmeyen katsayılar kolayca ard arda hesaplanır. Ek olarak $n \to \infty$ olduğunda Taylor seri çözümü elde edilir (Sezer, 1994).

Örnek 2.3.2.

$$y(x) = 1 + x + \lambda \int_0^x (x-t).y(t).dt \tag{2.3.26}$$

lineer Volterra integral denkleminin 5. dereceden bir Taylor polinomu ile $y(x)$'in yaklaşık bir fonksiyonu bulunmak istensin. Burada

$$f(x) = 1 + x \quad , \quad \mathrm{K}(x,t) = x - t \quad , \quad a = 0 \text{ olup } \quad N = 5 \quad , \quad c = a = 0$$

seçilirse, ilk olarak H_{nm} ve T_{nm} değerleri

$$h_i(x) = \left. \frac{\partial^{(i)} K(x,t)}{\partial x^i} \right|_{t=x}$$

$$H_{nm} = \sum_{i=0}^{n-m-1} \binom{n-i-1}{m} h_i^{(n-m-i-1)}(c)$$

$$T_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^c \left. \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=c} (t-c)^m \, dt \quad , \quad (n, m = 0,1,\ldots,5)$$

ifadeleri yardımı ile

$$\begin{array}{lllll} H_{10} = 0 & H_{11} = 0 & H_{12} = 0 & H_{13} = 0 & H_{14} = 0 \\ H_{20} = 1 & H_{21} = 0 & H_{22} = 0 & H_{23} = 0 & H_{24} = 0 \\ H_{30} = 0 & H_{31} = 0 & H_{32} = 0 & H_{33} = 0 & H_{34} = 0 \\ H_{40} = 0 & H_{41} = 0 & H_{42} = 1 & H_{43} = 0 & H_{44} = 0 \\ H_{50} = 0 & H_{51} = 0 & H_{52} = 0 & H_{53} = 1 & H_{54} = 0 \end{array} \tag{2.3.27}$$

ve

$$T_{nm} = 0 \quad , \quad (n, m = 0,1,2,\ldots,5) \tag{2.3.28}$$

olarak bulunur.

Sonra $f(x)=1+x$ fonksiyonu ve türevlerinden

$$f(0)=1,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=0,\ f^{(4)}(0)=0,\ f^{(5)}(0)=0 \qquad (2.3.29)$$

değerleri elde edilir.

Daha sonra (2.3.27), (2.3.28), (2.3.29) değerleri (2.3.22) matris denkleminde yerine konulursa

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(0)}(0) \\ y^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ y^{(3)}(0) \\ y^{(4)}(0) \\ y^{(5)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$-y^{(0)}(0)=-1 \Rightarrow y^{(0)}(0)=1$$
$$-y^{(1)}(0)=-1 \Rightarrow y^{(1)}(0)=1$$
$$\lambda.y^{(0)}(0)-y^{(2)}(0)=0 \Rightarrow y^{(2)}(0)=\lambda$$
$$\lambda.y^{(1)}(0)-y^{(3)}(0)=0 \Rightarrow y^{(3)}(0)=\lambda$$
$$\lambda.y^{(2)}(0)-y^{(4)}(0)=0 \Rightarrow y^{(4)}(0)=\lambda^2$$
$$\lambda.y^{(3)}(0)-y^{(5)}(0)=0 \Rightarrow y^{(5)}(0)=\lambda^2$$

olur. Buradan da

$$y^{(0)}(0)=y^{(1)}(0)=1\ ,\ y^{(2)}(0)=y^{(3)}(0)=\lambda\ ,\ y^{(3)}(0)=y^{(5)}(0)=\lambda^2$$

değerleri elde edilir. Bu değerler (2.3.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$y(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{1}{n!} y^{(n)}(0).x^n$$

$$y(x) = \frac{1}{0!} y^{(0)}(0).x^0 + \frac{1}{1!} y^{(1)}(0).x^1 + \frac{1}{2!} y^{(2)}(0).x^2 + \frac{1}{3!} y^{(3)}(0).x^3 + \frac{1}{4!} y^{(4)}(0).x^4 + \frac{1}{5!} y^{(5)}(0).x^5$$

$$y(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}\lambda.x^2 + \frac{1}{3!}\lambda x^3 + \frac{1}{4!}\lambda^2.x^4 + \frac{1}{5!}\lambda^2.x^5$$

$$y(x) = 1 + x + \lambda\left[\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3\right] + \lambda^2\left[\frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5\right]$$

bulunur. Burada $\lambda = 1$ ve yeterince büyük bir n alındığında tam çözüm olan $y(x) = e^x$ 'in elde edileceği görülmektedir. Aynı sonuçlar (2.3.25) bağıntısı ile de kolayca bulunur.

3. LİNEER DEĞİŞKEN KATSAYILI FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ

Lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemleri ile fizik, mühendislik ve matematiğin birçok dalında karşılaşılır. Bu tip denklem sistemlerinin analitik çözümlerini bulmak genelde zordur. Bu nedenle yaklaşık çözüm yöntemlerine gerek duyulmaktadır.

Bu bölümde, lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümlerinin nasıl bulunacağı araştırılmıştır.

3.1. Lineer Değişken Katsayılı Fredholm İntegral Denklem Sistemlerinin Taylor Serisi Yardımıyla Yaklaşık Çözümü

Bu kısımda, Taylor yöntemi geliştirilerek s bilinmeyenli

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}(x)y_1(x)+a_{12}(x)y_2(x)+\ldots+a_{1s}(x)y_S(x)= \\
f_1(x)+\int_a^b\left\{K_{11}(x,t)y_1(t)+K_{12}(x,t)y_2(t)+\ldots+K_{1s}(x,t)y_S(t)\right\}dt \\
a_{21}(x)y_1(x)+a_{22}(x)y_2(x)+\ldots+a_{2s}(x)y_S(x)= \\
f_2(x)+\int_a^b\left\{K_{21}(x,t)y_1(t)+K_{22}(x,t)y_2(t)+\ldots+K_{2s}(x,t)y_S(t)\right\}dt \\
\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{s1}(x)y_1(x)+a_{s2}(x)y_2(x)+\ldots+a_{ss}(x)y_s(x)= \\
f_s(x)+\int_a^b\left\{K_{s1}(x,t)y_1(t)+K_{s2}(x,t)y_2(t)+\ldots+K_{ss}(x,t)y_s(t)\right\}dt
\end{array}\right\} \qquad (3.1.1.a)$$

ya da kısaca

$$\sum_{j=1}^{s}a_{mj}(x)y_j(x)=f_m(x)+\int_a^b\sum_{j=1}^{s}K_{mj}(x,t)y_j(t)dt$$

formunda verilen Fredholm integral denklem sistemine uygulanmıştır. (3.1.1) denklem sistemindeki $K_{mj}(x,t)$ çekirdek fonksiyonları; $a_{mj}(x)$ katsayı fonksiyonları ve $f_m(x)$ bilinen fonksiyonlar olup $a \le x, c \le b$ aralığında $n.$ mertebeden türevlenebilir fonksiyonlardır.

3.1.1. Materyal ve Metod

(3.1.1) denklem sisteminin

$$y_m(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y_m^{(n)}(x)}{n!}(x-c)^n \quad , \quad m = 1,2,...,s \tag{3.1.2}$$

formunda $x = c$ noktasında $N.$ dereceden bir sonlu Taylor polinom çözümü araştırılacaktır.

(3.1.1.a) Fredholm integral denklem sisteminin (3.1.2) şeklinde bir çözümünü elde etmek için ilk olarak (3.1.1.a) sistemi

$$E_m(x) = f_m(x) + F_m(x)$$

veya

$$E_m(x) = I_m(x) \quad , \quad m = 1,2,...,s \tag{3.1.1.b}$$

formunda yazılsın. Buradaki

$$E_m(x) = \sum_{j=1}^{s} a_{mj}(x) y_j(x) \quad , \qquad m = 1,2,...,s$$

$$I_m(x) = f_m(x) + \int_a^b \sum_{j=1}^{s} K_{mj}(x,t) y_j(t) dt \quad , \qquad m = 1,2,...,s$$

şeklindedir. Burada $E_m(x)$, (3.1.1.b) denkleminin 1. kısmı $I_m(x)$ ise (3.1.1.b) denkleminin 2. kısmı (ya da integral kısmı) olarak adlandırılabilir. (3.1.1.b) sisteminin her iki tarafının x'e göre n defa türevi alınırsa

$$E_m^{(n)}(x) = f_m^{(n)}(x) + F_m^{(n)}(x)$$

veya

$$E_m^{(n)}(x) = I_m^{(n)}(x) \quad , \quad m = 1,2,...,s \qquad (3.1.3)$$

olur. Buradaki $E_m^{(n)}(x)$ ve $I_m^{(n)}(x)$ ifadeleri aşağıdaki gibi incelenebilir.

3.1.2. I. Kısmın Matris Gösterimi

$E_m^{(n)}(x)$ ifadesi açık olarak

$$E_m^{(n)}(x) = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{mj}(x) y_j(x)\right]^{(n)} \quad , \quad m = 1,2,...,s \quad ; \quad n = 0,1,2,...,N \qquad (3.1.4)$$

şeklinde yazılabilir.

İki fonksiyonun çarpımının $n.$ mertebeden türevini veren

$$[P(x)y(x)]_{x=c}^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} P^{(n-i)}(c) y^{(i)}(c)$$

Leibnitz formülü yardımı ile (3.1.4) sistemi

$$E_m^{(n)}(x) = \left[\sum_{j=1}^{s} a_{mj}(x) y_j(x)\right]_{x=c}^{(n)} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_{mj}^{(n-i)}(c) y_j^{(i)}(c) \qquad (3.1.5)$$

olarak elde edilir. Buradan $y_j^{(0)}(c), y_j^{(1)}(c), ..., y_j^{(N)}(c)$; $(j = 1,2,...,s)$ $(N+1)$ bilinmeyen katsayılı lineer denklem sistemi elde edilir. Burada $a_{mj}^{(i)}(c)$, $x = c$ noktasındaki $a_{mj}(x)$ bilinmeyen fonksiyonlarının i. türevlerini gösterir $(m, j = 1,2,...,s)$.

(2.1.5)'in matris formu

$$\mathbf{E} = \mathbf{WY} \tag{3.1.6}$$

şeklinde olup buradaki $\mathbf{W}$ ve $\mathbf{Y}$ matrisleri

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(N)} \\ y_2^{(0)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_2^{(N)} \\ \vdots \\ y_s^{(0)} \\ y_s^{(1)} \\ \vdots \\ y_s^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y_1} \\ \mathbf{Y_2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y_s} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_{11}} & \mathbf{W_{12}} & \cdots & \mathbf{W_{1s}} \\ \mathbf{W_{21}} & \mathbf{W_{22}} & \cdots & \mathbf{W_{2s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W_{s1}} & \mathbf{W_{s2}} & \cdots & \mathbf{W_{ss}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\mathbf{W}$ matrisinin içindeki $\mathbf{W_{nm}}$ $(n, m = 1,2,...,s)$ matrisleri de

$$\mathbf{W_{11}}=\begin{bmatrix}(W_{11})_{00} & (W_{11})_{01} & \cdots & (W_{11})_{0s}\\ (W_{11})_{10} & (W_{11})_{11} & \cdots & (W_{11})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{11})_{s0} & (W_{11})_{s1} & \cdots & (W_{11})_{ss}\end{bmatrix},\cdots\cdots\cdots,\mathbf{W_{1s}}=\begin{bmatrix}(W_{1s})_{00} & (W_{1s})_{01} & \cdots & (W_{1s})_{0s}\\ (W_{1s})_{10} & (W_{1s})_{11} & \cdots & (W_{1s})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{1s})_{s0} & (W_{1s})_{s1} & \cdots & (W_{1s})_{ss}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W_{21}}=\begin{bmatrix}(W_{21})_{00} & (W_{21})_{01} & \cdots & (W_{21})_{0s}\\ (W_{21})_{10} & (W_{21})_{11} & \cdots & (W_{21})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{21})_{s0} & (W_{21})_{s1} & \cdots & (W_{21})_{ss}\end{bmatrix},\cdots\cdots\cdots,\mathbf{W_{2s}}=\begin{bmatrix}(W_{2s})_{00} & (W_{2s})_{01} & \cdots & (W_{2s})_{0s}\\ (W_{2s})_{10} & (W_{2s})_{11} & \cdots & (W_{2s})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{2s})_{s0} & (W_{2s})_{s1} & \cdots & (W_{2s})_{ss}\end{bmatrix} \qquad (3.1.7)$$

$$\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{W_{s1}}=\begin{bmatrix}(W_{s1})_{00} & (W_{s1})_{01} & \cdots & (W_{s1})_{0s}\\ (W_{s1})_{10} & (W_{s1})_{11} & \cdots & (W_{s1})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{s1})_{s0} & (W_{s1})_{s1} & \cdots & (W_{s1})_{ss}\end{bmatrix},\cdots\cdots\cdots,\mathbf{W_{ss}}=\begin{bmatrix}(W_{ss})_{00} & (W_{ss})_{01} & \cdots & (W_{ss})_{0s}\\ (W_{ss})_{10} & (W_{ss})_{11} & \cdots & (W_{ss})_{1s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (W_{ss})_{s0} & (W_{ss})_{s1} & \cdots & (W_{ss})_{ss}\end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.1.7)'deki $(W_{nm})_{ij}$, $(n,m=1,2,...,s;\ i,j=0,1,2,...,N)$ değerleri

$$\begin{gathered}(W_{11})_{ij}=\binom{i}{j}a_{11}^{(i-j)}(c),\ (W_{12})_{ij}=\binom{i}{j}a_{12}^{(i-j)}(c),\ \cdots,\ (W_{1s})_{ij}=\binom{i}{j}a_{1s}^{(i-j)}(c)\\ (W_{21})_{ij}=\binom{i}{j}a_{21}^{(i-j)}(c),\ (W_{22})_{ij}=\binom{i}{j}a_{22}^{(i-j)}(c),\ \cdots,\ (W_{2s})_{ij}=\binom{i}{j}a_{21s}^{(i-j)}(c)\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots\\ (W_{s1})_{ij}=\binom{i}{j}a_{s1}^{(i-j)}(c),\ (W_{s2})_{ij}=\binom{i}{j}a_{s2}^{(i-j)}(c),\ \cdots,\ (W_{ss})_{ij}=\binom{i}{j}a_{ss}^{(i-j)}(c)\end{gathered} \qquad (3.1.8)$$

şeklinde tanımlanabilir. (3.1.8) sisteminde $l<0$ için $a_{ij}^{(l)}(c)=0$, $i,j=0,1,2,3,...,s$ ve $j>i$ için $\binom{i}{j}=0$ 'dır. $(i,j\in Z)$ Bu yüzden (3.1.8) sisteminde $n<m,(n=0,1,2,...,N-1;m=n+1,n+2,...,N)$ ise $(W_{nm})_{ij}=0$ olur.

Böylece $\mathbf{W}$ matrisi açık olarak

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} (W_{11})_{00} & (W_{11})_{01} & \cdots & (W_{11})_{0s} & \cdots & (W_{1s})_{00} & (W_{1s})_{01} & \cdots & (W_{1s})_{0s} \\ (W_{11})_{10} & (W_{11})_{11} & \cdots & (W_{11})_{1s} & \cdots & (W_{1s})_{10} & (W_{1s})_{11} & \cdots & (W_{1s})_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (W_{11})_{s0} & (W_{11})_{s1} & \cdots & (W_{11})_{ss} & \cdots & (W_{1s})_{s0} & (W_{1s})_{s1} & \cdots & (W_{1s})_{ss} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (W_{s1})_{00} & (W_{s1})_{01} & \cdots & (W_{s1})_{0s} & \cdots & (W_{ss})_{00} & (W_{ss})_{01} & \cdots & (W_{ss})_{0s} \\ (W_{s1})_{10} & (W_{s1})_{11} & \cdots & (W_{s1})_{1s} & \cdots & (W_{ss})_{10} & (W_{ss})_{11} & \cdots & (W_{ss})_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (W_{s1})_{s0} & (W_{s1})_{s1} & \cdots & (W_{s1})_{ss} & \cdots & (W_{ss})_{s0} & (W_{ss})_{s1} & \cdots & (W_{ss})_{ss} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

3.1.3. II. Kısmın Matris Gösterimi

$I_m^{(n)}(x)$ ifadesi açık olarak

$$I_m^{(n)}(x)=f_m^{(n)}(x)+F_m^{(n)}(x)$$

ya da

$$I_m^{(n)}(x)=f_m^{(n)}(x)+\sum_{j=1}^{s}\int_a^b \frac{\partial^n K_{mj}(x,t)}{\partial x^n} y_j(t)dt \qquad , \qquad m=1,2,...,s$$

şeklindedir. Bu sistemde $x=c$ konulursa

$$I_m^{(n)}(c)=f_m^{(n)}(c)+\sum_{j=1}^{s}\int_a^b \left.\frac{\partial^n K_{mj}(x,t)}{\partial x^n}\right|_{x=c} y_j(t)dt \qquad , \qquad m=1,2,...,s \tag{3.1.9}$$

elde edilir. $y_1(t), y_2(t),..., y_s(t)$'nin $t=c$ noktasındaki Taylor açılımları

$$y_i(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}y_i^{(k)}(c)(t-c)^k \quad , \quad i=1,2,...,s \tag{3.1.10}$$

olup bunlar (3.1.9)'da yerine konulursa

$$
\begin{aligned}
I_1^{(n)}(c) &= f_1^{(n)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{11}T_{nk}\, y_1^{(k)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{12}T_{nk}\, y_2^{(k)}(c) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{1s}T_{nk}\, y_s^{(k)}(c) \\
I_2^{(n)}(c) &= f_2^{(n)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{21}T_{nk}\, y_1^{(k)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{22}T_{nk}\, y_2^{(k)}(c) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{2s}T_{nk}\, y_s^{(k)}(c) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
I_s^{(n)}(c) &= f_s^{(n)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{s1}T_{nk}\, y_1^{(k)}(c) + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{s2}T_{nk}\, y_2^{(k)}(c) + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} {}^{ss}T_{nk}\, y_s^{(k)}(c)
\end{aligned}
\tag{3.1.11}
$$

elde edilir. Buradaki

$$
{}^{mj}T_{nk} = \frac{1}{k!}\int_a^b \left. \frac{\partial^{(n)} K_{mj}(x,t)}{\partial x^n} \right|_{x=c} (t-c)^k \, dt
$$

dir.

Bilinmeyen Taylor katsayıları ile verilen sonsuz (3.1.11) bağıntıları bir sonsuz lineer cebirsel sistem oluştururlar. (3.1.10) sistemi uygun bir yerde kesilerek yaklaşık olarak bulunabilir.

Bu durumda II. kısmın

$$
\mathbf{I} = \mathbf{F} + \mathbf{TY} \tag{3.1.12}
$$

matris gösterimi elde edilir. Buradaki $\mathbf{Y}$, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{T}$ matrisleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1^{(0)}\\ y_1^{(1)}\\ \vdots\\ y_1^{(N)}\\ y_2^{(0)}\\ y_2^{(1)}\\ \vdots\\ y_2^{(N)}\\ \vdots\\ y_s^{(0)}\\ y_s^{(1)}\\ \vdots\\ y_s^{(N)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y_1}\\ \mathbf{Y_2}\\ \vdots\\ \mathbf{Y_s}\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix} f_1^{(0)}(c)\\ f_1^{(1)}(c)\\ \vdots\\ f_1^{(N)}(c)\\ f_2^{(0)}(c)\\ f_2^{(1)}(c)\\ \vdots\\ f_2^{(N)}(c)\\ \vdots\\ f_s^{(0)}(c)\\ f_s^{(1)}(c)\\ \vdots\\ f_s^{(N)}(c) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{F_1}\\ \mathbf{F_2}\\ \vdots\\ \mathbf{F_s}\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{T_{11}} & \mathbf{T_{12}} & \cdots & \mathbf{T_{1s}}\\ \mathbf{T_{21}} & \mathbf{T_{22}} & \cdots & \mathbf{T_{2s}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{T_{s1}} & \mathbf{T_{s2}} & \cdots & \mathbf{T_{ss}}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}$ matrisinin içindeki $\mathbf{T_{nk}}$ $(n,k=1,2,...,s)$ matrisleri de

$$\mathbf{T_{11}}=\begin{bmatrix} {}^{11}T_{00} & {}^{11}T_{01} & \cdots & {}^{11}T_{0N}\\ {}^{11}T_{10} & {}^{11}T_{11} & \cdots & {}^{11}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{11}T_{N0} & {}^{11}T_{N1} & \cdots & {}^{11}T_{NN} \end{bmatrix},\mathbf{T_{12}}=\begin{bmatrix} {}^{12}T_{00} & {}^{12}T_{01} & \cdots & {}^{12}T_{0N}\\ {}^{12}T_{10} & {}^{12}T_{11} & \cdots & {}^{12}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{12}T_{N0} & {}^{12}T_{N1} & \cdots & {}^{12}T_{NN} \end{bmatrix},\cdots,\mathbf{T_{1s}}=\begin{bmatrix} {}^{1s}T_{00} & {}^{1s}T_{01} & \cdots & {}^{1s}T_{0N}\\ {}^{1s}T_{10} & {}^{1s}T_{11} & \cdots & {}^{1s}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{1s}T_{N0} & {}^{1s}T_{N1} & \cdots & {}^{1s}T_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T_{21}}=\begin{bmatrix} {}^{21}T_{00} & {}^{21}T_{01} & \cdots & {}^{21}T_{0N}\\ {}^{21}T_{10} & {}^{21}T_{11} & \cdots & {}^{21}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{21}T_{N0} & {}^{21}T_{N1} & \cdots & {}^{21}T_{NN} \end{bmatrix},\mathbf{T_{22}}=\begin{bmatrix} {}^{22}T_{00} & {}^{22}T_{01} & \cdots & {}^{22}T_{0N}\\ {}^{22}T_{10} & {}^{22}T_{11} & \cdots & {}^{22}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{22}T_{N0} & {}^{22}T_{N1} & \cdots & {}^{22}T_{NN} \end{bmatrix},\cdots,\mathbf{T_{2s}}=\begin{bmatrix} {}^{2s}T_{00} & {}^{2s}T_{01} & \cdots & {}^{2s}T_{0N}\\ {}^{2s}T_{10} & {}^{2s}T_{11} & \cdots & {}^{2s}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{2s}T_{N0} & {}^{2s}T_{N1} & \cdots & {}^{2s}T_{NN} \end{bmatrix}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots$$

$$\mathbf{T_{s1}}=\begin{bmatrix} {}^{s1}T_{00} & {}^{s1}T_{01} & \cdots & {}^{s1}T_{0N}\\ {}^{s1}T_{10} & {}^{s1}T_{11} & \cdots & {}^{s1}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{s1}T_{N0} & {}^{s1}T_{N1} & \cdots & {}^{s1}T_{NN} \end{bmatrix},\mathbf{T_{s2}}=\begin{bmatrix} {}^{s2}T_{00} & {}^{s2}T_{01} & \cdots & {}^{s2}T_{0N}\\ {}^{s2}T_{10} & {}^{s2}T_{11} & \cdots & {}^{s2}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{s2}T_{N0} & {}^{s2}T_{N1} & \cdots & {}^{s2}T_{NN} \end{bmatrix},\cdots,\mathbf{T_{ss}}=\begin{bmatrix} {}^{ss}T_{00} & {}^{ss}T_{01} & \cdots & {}^{ss}T_{0N}\\ {}^{ss}T_{10} & {}^{ss}T_{11} & \cdots & {}^{ss}T_{1N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {}^{ss}T_{N0} & {}^{ss}T_{N1} & \cdots & {}^{ss}T_{NN} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

3.1.4. Temel Matris Denklemi

Elde edilen (3.1.6) ve (3.1.12) matris formları (3.1.3)'de yerine konulursa $x=c$ noktasındaki değerinin, yani (3.1.3)'ün, yani (3.1.1.a) Fredholm integral denklem sisteminin matris formu

$$\mathbf{WY} = \mathbf{F} + \mathbf{TY}$$

veya

$$(\mathbf{W} - \mathbf{T})\mathbf{Y} = \mathbf{F}$$

olarak elde edilmiş olur. Burada $\mathbf{M} = \mathbf{W} - \mathbf{T}$ denirse (3.1.1.a)'nın matris formu kısaca

$$\mathbf{MY} = \mathbf{F} \tag{3.1.13}$$

olarak belirlenir. Buradaki $\mathbf{M}$ matrisi

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{W_{11}} - \mathbf{T_{11}} & \mathbf{W_{12}} - \mathbf{T_{12}} & \cdots & \mathbf{W_{1s}} - \mathbf{T_{1s}} \\ \mathbf{W_{21}} - \mathbf{T_{21}} & \mathbf{W_{22}} - \mathbf{T_{22}} & \cdots & \mathbf{W_{1s}} - \mathbf{T_{1s}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W_{s1}} - \mathbf{T_{s1}} & \mathbf{W_{s2}} - \mathbf{T_{s2}} & \cdots & \mathbf{W_{ss}} - \mathbf{T_{ss}} \end{bmatrix}$$

veya daha açık olarak

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} (W_{11})_{00} - {}^{11}T_{00} & (W_{11})_{01} - {}^{11}T_{01} & \cdots & (W_{11})_{0s} - {}^{11}T_{0s} & & (W_{1s})_{00} - {}^{1s}T_{00} & (W_{1s})_{01} - {}^{1s}T_{01} & \cdots & (W_{1s})_{0s} - {}^{1s}T_{0s} \\ (W_{11})_{10} - {}^{11}T_{10} & (W_{11})_{11} - {}^{11}T_{11} & \cdots & (W_{11})_{1s} - {}^{11}T_{1s} & \cdots & (W_{1s})_{10} - {}^{1s}T_{10} & (W_{1s})_{11} - {}^{1s}T_{11} & \cdots & (W_{1s})_{1s} - {}^{1s}T_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (W_{11})_{s0} - {}^{11}T_{s0} & (W_{11})_{s1} - {}^{11}T_{s1} & \cdots & (W_{11})_{ss} - {}^{11}T_{ss} & & (W_{1s})_{s0} - {}^{1s}T_{s0} & (W_{1s})_{s1} - {}^{1s}T_{s1} & \cdots & (W_{1s})_{ss} - {}^{1s}T_{ss} \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots & & \\ (W_{s1})_{00} - {}^{s1}T_{00} & (W_{s1})_{01} - {}^{s1}T_{01} & \cdots & (W_{s1})_{0s} - {}^{s1}T_{0s} & & (W_{ss})_{00} - {}^{ss}T_{00} & (W_{ss})_{01} - {}^{ss}T_{01} & \cdots & (W_{ss})_{0s} - {}^{ss}T_{0s} \\ (W_{s1})_{10} - {}^{s1}T_{10} & (W_{s1})_{11} - {}^{s1}T_{11} & \cdots & (W_{s1})_{1s} - {}^{s1}T_{1s} & \cdots & (W_{ss})_{10} - {}^{ss}T_{10} & (W_{ss})_{11} - {}^{ss}T_{11} & \cdots & (W_{ss})_{1s} - {}^{ss}T_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (W_{s1})_{s0} - {}^{s1}T_{s0} & (W_{s1})_{s1} - {}^{s1}T_{s1} & \cdots & (W_{s1})_{ss} - {}^{s1}T_{ss} & & (W_{ss})_{s0} - {}^{ss}T_{s0} & (W_{ss})_{s1} - {}^{ss}T_{s1} & \cdots & (W_{ss})_{ss} - {}^{ss}T_{ss} \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\mathbf{Y}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri (3.1.12)'de tanımlandığı gibi

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} f_1^{(0)}(c) \\ f_1^{(1)}(c) \\ \vdots \\ f_1^{(N)}(c) \\ f_2^{(0)}(c) \\ f_2^{(1)}(c) \\ \vdots \\ f_2^{(N)}(c) \\ \vdots \\ f_s^{(0)}(c) \\ f_s^{(1)}(c) \\ \vdots \\ f_s^{(N)}(c) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix} y_1^{(0)} \\ y_1^{(1)} \\ \vdots \\ y_1^{(N)} \\ y_2^{(0)} \\ y_2^{(1)} \\ \vdots \\ y_2^{(N)} \\ \vdots \\ y_s^{(0)} \\ y_s^{(1)} \\ \vdots \\ y_s^{(N)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

(3.1.1.b) integral denklem sisteminin çözümü için (3.1.13) matris denklemi kullanabilir. Eğer $|\mathbf{M}| \neq 0$ ise

$$\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \tag{3.1.14}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.1.14) denklemi yardımıyla bilinmeyen $y_m^{(n)}(c)$, $(i=1,2,...,N)$ katsayıları belirlenmiş olur. Bu katsayılar (3.1.2)'de yerine konulursa

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y_m^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , \quad (m=1,2,...,s;\; a \leq x,c \leq b)$$

Taylor polinom çözümleri elde edilmiş olur. Böylece (3.1.1.a) Fredholm integral denklem sisteminin $y_m(x)$, $(m=1,2,...,s)$ yaklaşık çözümleri bulunmuş olur.

Bulunan bu $y_m(x)$ çözümleri (3.1.1.b) sistemindeki denklemlerde de x 'in verilen bir değeri için yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani $x_i \in [a,b] \quad (i = 0,1,...,m)$ için

$$D_m(x_i) = |E_m(x_i) - f_m(x_i) - F_m(x_i)| \cong 0$$

dır. Burada

$$D_m(x_i) \leq 10^{-k_i} \;, \quad (k_i \text{ pozitif bir tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max(10^{-k_i}) = 10^{-k_i}$, (k_i pozitif bir tamsayı) önceden belirlenmiş ise x_i noktalarının herbirindeki $D_m(x_i)$ farkı belirlenen 10^{-k_i} 'dan küçük oluncaya kadar N kesme sınırı yükseltilebilir (Yalçınbaş, 1998).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemleri ile ilgili çeşitli örnekler verilip hata hesapları yapılmıştır.

4.1. Lineer Değişken Katsayılı Fredholm İntegral Denklem Sistemleri İle İlgili Uygulamalar

Örnek 4.1.1.

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)-2xy_2(x)&=22x+3+3\int_{-1}^{1}(x+t)y_1(t)dt+3\int_{-1}^{1}(x-t)y_2(t)dt \\ 5y_1(x)+y_2(x)&=-x+9+3\int_{-1}^{1}x^2y_1(t)dt+3\int_{-1}^{1}(xt-t^2)y_2(t)dt \end{aligned}\right\} \tag{4.1.1}$$

lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemi gözönüne alınsın. Bu sistemin $c=0$ ve $N=3$ için çözümü araştırılsın. İlk olarak (3.1.8)'deki ifadeler yardımı ile

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Daha sonra (3.1.12)'deki $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{T}$ matrisleri

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}3\\22\\0\\0\\9\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\qquad\qquad \mathbf{T}=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{5}&0&-2&0&-\frac{1}{5}\\0&0&1&0&6&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&\frac{3}{5}&0\\0&0&0&0&0&2&0&\frac{1}{5}\\12&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{W}$ matrisleri kullanılarak (3.1.13)'deki $\mathbf{M}$ matrisi

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0&-\frac{1}{5}&0&2&0&\frac{1}{5}\\-6&1&-1&0&-8&0&-1&0\\0&0&1&0&0&-4&0&0\\0&0&0&1&0&0&-6&0\\5&0&0&0&-1&0&-\frac{3}{5}&0\\0&5&0&0&0&-1&0&-\frac{1}{5}\\-12&0&3&0&0&0&1&0\\0&0&0&5&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $|\mathbf{M}|\neq 0$ olduğundan (3.1.14)'teki $\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$ denklemi kullanılarak $y_m^{(n)}(c)$, $(m=1,2\ ;\ n=0,1,2,3)$ bilinmeyen katsayıları

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}1\\0\\4\\0\\-4\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu $y_m^{(n)}(c)$ katsayıları

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{3}\frac{1}{n!}y_m^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , \quad (m=1,2;\ a\le x,c\le b)$$

denkleminde yerlerine konulduğunda

$$y_1(x)=\frac{(1)x^0}{0!}+\frac{(0)x^1}{1!}+\frac{(4)x^2}{2!}+\frac{(0)x^3}{3!}=1+2x^2$$
$$y_2(x)=\frac{(-4)x^0}{0!}+\frac{(1)x^1}{1!}+\frac{(0)x^2}{2!}+\frac{(0)x^3}{3!}=-4+x$$

çözümleri elde edilir. Bu çözümler (4.1.1) sisteminin tam çözümleridir.

Örnek 4.1.2.

$$\left.\begin{aligned} y_1(x)-e^{-x}y_2(x)&=e^x-\int_0^1 e^{x-2t}y_2(t)dt \\ y_2(x)&=e^{2x}+\int_0^1 y_1(t)dt-\int_0^1 e^{-t}y_2(t)dt \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.2)$$

sisteminin $c=0$ ve $N=5$ için çözümü araştırılsın. Örnek 4.1.1.'deki gibi benzer işlemler yapılırsa $\mathbf{W}$, $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{F}$ matrisleri

$$
\mathbf{W}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -6 & 4 & -1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}\quad,\qquad
\mathbf{F}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\2\\4\\8\\16\\32\end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{T}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}e^{-2}-\frac{1}{4} & \frac{5}{8}e^{-2}-\frac{1}{8} & \frac{19}{48}e^{-2}-\frac{1}{16} & \frac{7}{32}e^{-2}-\frac{1}{32} & \frac{109}{960}e^{-2}-\frac{1}{64}\\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \frac{1}{120} & \frac{1}{720} & e^{-1}-1 & 2e^{-1}-1 & \frac{5}{2}e^{-1}-1 & \frac{8}{3}e^{-1}-1 & \frac{65}{24}e^{-1}-1 & \frac{163}{60}e^{-1}-1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

şeklinde elde edilir. $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{W}$ matrisleri kullanılarak $\mathbf{M}$ matrisi

$$
\mathbf{M}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}+\frac{1}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}+\frac{1}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}+\frac{1}{32} & -\frac{109}{960}e^{-2}+\frac{1}{64} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}-\frac{3}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}+\frac{1}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}+\frac{1}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}+\frac{1}{32} & -\frac{109}{960}e^{-2}+\frac{1}{64} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{9}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}-\frac{7}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}+\frac{1}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}+\frac{1}{32} & -\frac{109}{960}e^{-2}+\frac{1}{64} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}-\frac{11}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}+\frac{25}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}-\frac{15}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}+\frac{1}{32} & -\frac{109}{960}e^{-2}+\frac{1}{64} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{17}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}-\frac{47}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}+\frac{65}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}-\frac{31}{32} & -\frac{109}{960}e^{-2}+\frac{1}{64} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}e^{-2}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{4}e^{-2}-\frac{19}{4} & -\frac{5}{8}e^{-2}+\frac{81}{8} & -\frac{19}{48}e^{-2}-\frac{159}{16} & -\frac{7}{32}e^{-2}+\frac{161}{32} & -\frac{63}{64}-\frac{109}{960}e^{-2} \\
-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{24} & -\frac{1}{120} & -\frac{1}{720} & 2-e^{-1} & -2e^{-1}+1 & -\frac{5}{2}e^{-1}+1 & -\frac{8}{3}e^{-1}+1 & -\frac{65}{24}e^{-1}+1 & -\frac{163}{60}e^{-1}+1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

olarak bulunur. $\left|\mathbf{M}\right| \neq 0$ olup, $\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$ denkleminden $y_m^{(n)}(c)$ bilinmeyen katsayıları

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}
1.0068 \\ 0.99322 \\ 1.0068 \\ 0.99322 \\ 1.0068 \\ 0.99322 \\ 1.0068 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32
\end{bmatrix}
$$

olarak elde edilir. Bu $y_m^{(n)}(c)$katsayıları

$$
y_m(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}y_m^{(n)}(c)(x-c)^n \quad , \quad (m=1,2; \quad a \le x, c \le b)
$$

denkleminde yerlerine konulursa

$$y_1(x)=\frac{(1.0068)}{0!}x^0+\frac{(0.99322)}{1!}x^1+\frac{(1.0068)}{2!}x^2+\frac{(0.99322)}{3!}x^3+\frac{(1.0068)}{4!}x^4+\frac{(0.99322)}{5!}x^5$$
$$y_2(x)=\frac{(1.0068)}{0!}x^0+\frac{(2)}{1!}x^1+\frac{(4)}{2!}x^2+\frac{(8)}{3!}x^3+\frac{(16)}{4!}x^4+\frac{(32)}{5!}x^5$$

çözümleri elde edilir.

Benzer şekilde $c=0$ ve $N=7$ için

$$y_1(x)=\frac{(1.000344579)}{0!}x^0+\frac{(0.9996482243)}{1!}x^1+\frac{(1.000344577)}{2!}x^2+\frac{(0.9996482213)}{3!}x^3$$
$$+\frac{(1.000344577)}{4!}x^4+\frac{(0.9996481743)}{5!}x^5+\frac{(1.000344556)}{6!}x^6+\frac{(0.9996482)}{7!}x^7$$
$$y_2(x)=\frac{(1,0068)}{0!}x^0+\frac{(2)}{1!}x^1+\frac{(4)}{2!}x^2+\frac{(8)}{3!}x^3+\frac{(16)}{4!}x^4+\frac{(32)}{5!}x^5+\frac{(64)}{6!}x^6+\frac{(128)}{7!}x^7$$

ve $c=0$ ve $N=9$ için

$$y_1(x)=\frac{(1.00001178)}{0!}x^0+\frac{(0.9999877396)}{1!}x^1+\frac{(1.000011778)}{2!}x^2+\frac{(0.9999877426)}{3!}x^3+\frac{(1.000011777)}{4!}x^4$$
$$+\frac{(0.9999876916)}{5!}x^5+\frac{(1.000011903)}{6!}x^6+\frac{(0.9999876766)}{7!}x^7+\frac{(1.000011151)}{8!}x^8+\frac{(0.9999874)}{9!}x^9$$
$$y_2(x)=\frac{(1,0068)}{0!}x^0+\frac{(2)}{1!}x^1+\frac{(4)}{2!}x^2+\frac{(8)}{3!}x^3+\frac{(16)}{4!}x^4+\frac{(32)}{5!}x^5+\frac{(64)}{6!}x^6+\frac{(128)}{7!}x^7+\frac{(256)}{8!}x^8+\frac{(512)}{9!}x^9$$

çözümleri bulunur. Elde edilen bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 4.1.1.'de verilmiştir.

Çizelge 4.1.1. Örnek 4.1.2.'nin Nümerik Sonuçları

Nokta	**Tam Çözüm**		**Şimdiki Metot N=5 , c=0**			
x_i	$y_1(x_i)=e^x$	$y_2(x_i)=e^{2x}$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$
0	1	1	1.006824819	1.006804378	2×10^{-9}	4×10^{-9}
0.1	1.105170918	1.221402758	1.111350363	1.228207045	8.3×10^{-8}	9.5×10^{-8}
0.2	1.211402758	1.491824698	1.226999586	1.498623045	4.847×10^{-6}	6.035×10^{-6}
0.3	1.349858808	1.8221188	1.354926142	1.828852378	5.1387×10^{-5}	7.0804×10^{-5}
0.4	1.491824698	2.225540928	1.496410234	2.231935045	2.68941×10^{-4}	4.10265×10^{-4}
0.5	1.648721271	2.718281828	1.652858542	2.423471045	9.56154×10^{-4}	1.61517×10^{-3}
0.6	1.8221188	3.320116923	1.825819158	3.321940378	2.66238×10^{-3}	4.98093×10^{-3}
0.7	2.013752707	4.055199967	2.016990518	4.049023045	6.26402×10^{-3}	1.29813×10^{-2}
0.8	2.225540928	4.953032424	2.228231332	4.929919045	1.30304×10^{-2}	2.99178×10^{-2}
0.9	2.459603111	6.049647464	2.461570518	5.993668378	2.46765×10^{-2}	6.27835×10^{-2}
1	2.718281828	7.389056096	2.719217134	7.273471045	4.34011×10^{-2}	1.22389433×10^{-1}

0Nokta	**Şimdiki Metot N=7 , c=0**				**Şimdiki Metot N=9 , c=0**			
x_i	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$
0	1.000344579	1.006804378	0	2×10^{-9}	1.00001178	1.000012021	1×10^{-9}	3.5×10^{-8}
0.1	1.105481984	1.228207045	2×10^{-9}	3×10^{-9}	1.105181529	1.22141478	0	3.6×10^{-8}
0.2	1.221683428	1.498623045	1.5×10^{-8}	1.5×10^{-8}	1.221412307	1.491836719	2×10^{-9}	3.5×10^{-8}
0.3	1.350111884	1.828852378	3.28×10^{-7}	4.44×10^{-7}	1.349867389	1.82213082	3×10^{-9}	3.4×10^{-8}
0.4	1.492052702	2.231935045	3.041×10^{-6}	4.56×10^{-6}	1.491832396	2.225552918	2.3×10^{-8}	4×10^{-9}
0.5	1.648926416	2.723471045	1.6797×10^{-5}	2.7857×10^{-5}	1.648728164	2.718293548	1.85×10^{-7}	2.66×10^{-7}
0.6	1.822302881	3.321940378	6.6933×10^{-5}	1.22772×10^{-4}	1.822124959	3.320127031	1.05×10^{-6}	1.878×10^{-6}
0.7	2.013916811	4.049023045	2.1301×10^{-4}	4.32071×10^{-4}	2.013758184	4.05520287	4.52×10^{-6}	9.083×10^{-6}
0.8	2.225684801	4.929919045	5.75053×10^{-4}	1.28997×10^{-3}	2.225545763	4.953009069	1.5866×10^{-5}	3.5341×10^{-5}
0.9	2.459723967	5.993668378	1.36928×10^{-3}	3.39704×10^{-3}	2.459607302	6.049542194	4.7584×10^{-5}	1.17256×10^{-4}
1	2.718372264	7.273471045	2.95331×10^{-3}	8.10372×10^{-3}	2.718285294	7.388724543	1.2609×10^{-4}	3.43542×10^{-4}

Örnek 4.1.3.

$$\left.\begin{aligned} \cos x y_1(x) - \sin x y_2(x) &= -\cos x - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x y_1(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2(t)dt \\ y_1(x) &= \sin x - \frac{1}{2}\pi x + x - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_1(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x t y_2(t)dt \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.3)$$

lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sisteminin $c = 0$ ve $N = 4$ için çözümü araştırılsın. (4.1.3) sistemine ait $\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{T}$ matrisleri de

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 - \frac{1}{2}\pi \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}
\frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{\pi^5}{3840} & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{\pi^5}{3840} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\pi}{2} & -\frac{\pi^2}{8} & -\frac{\pi^3}{48} & -\frac{\pi^4}{384} & -\frac{\pi^5}{3840} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{\pi^5}{3840} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\pi}{2} & \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{48} & \frac{\pi^4}{384} & \frac{\pi^5}{3840} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\pi^2}{8} & \frac{\pi^3}{24} & \frac{\pi^4}{128} & \frac{\pi^5}{960} & \frac{\pi^6}{9216} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

biçimindedirler. Bulunan $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{W}$ matrisleri kullanılarak $\mathbf{M}$ matrisi

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}
1-\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{8}\pi^2 & -\frac{1}{48}\pi^3 & -\frac{1}{384}\pi^4 & -\frac{1}{3840}\pi^5 & -\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{8}\pi^2 & -\frac{1}{48}\pi^3 & -\frac{1}{384}\pi^4 & -\frac{1}{3840}\pi^5 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1+\frac{1}{2}\pi & \frac{1}{8}\pi^2 & 1+\frac{1}{48}\pi^3 & \frac{1}{384}\pi^4 & \frac{1}{3840}\pi^5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\
1-\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{8}\pi^2 & -6-\frac{1}{48}\pi^3 & -\frac{1}{384}\pi^4 & -\frac{1}{3840}\pi^5 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\
1-\frac{1}{2}\pi & -\frac{1}{8}\pi^2 & -\frac{1}{48}\pi^3 & -\frac{1}{384}\pi^4 & -\frac{1}{3840}\pi^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8}\pi^2 & -\frac{1}{24}\pi^3 & -\frac{1}{128}\pi^4 & -\frac{1}{960}\pi^5 & -\frac{1}{9216}\pi^6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $|\mathbf{M}| \neq 0$ olduğundan $\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$ denklemi yardımı ile

$y_m^{(n)}(c)$, $(m=1,2\ ;\ n=0,1,2,3,4)$ bilinmeyen Taylor katsayıları

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0.0346293792\\1.00016425\\0\\-1\\0\\1.00016425\\0\\1.0001095\\0\\0.9408712441\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bulunan katsayılar

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}y_m^{(n)}(c)(x-c)^n \qquad , \qquad (m=1,2\,;\; a\le x,c\le b)$$

denkleminde yerlerine konulursa

$$y_1(x)=\frac{(0.346293792)}{0!}x^0+\frac{(1.00016425)}{1!}x^1+\frac{(0)}{2!}x^2+\frac{(-1)}{3!}x^3+\frac{(0)}{4!}x^4$$
$$y_2(x)=\frac{(1.00016425)}{0!}x^0+\frac{(0)}{1!}x^1+\frac{(-1.0001095)}{2!}x^2+\frac{(0)}{3!}x^3+\frac{(0.9408712441)}{4!}x^4$$

çözümleri bulunmuş olur.

Benzer şekilde $c=0$ ve $N=6$ için

$$y_1(x)=\frac{(0.0063056218)}{0!}x^0+\frac{(0.9963575036)}{1!}x^1+\frac{\left(-4.759\times10^{-10}\right)}{2!}x^2+\frac{(-1.000000001)}{3!}x^3$$
$$+\frac{\left(-7.624\times10^{-10}\right)}{4!}x^4+\frac{(1)}{5!}x^5+\frac{(0)}{6!}x^6$$
$$y_2(x)=\frac{(0.9963575033)}{0!}x^0+\frac{\left(-9.481\times10^{-12}\right)}{1!}x^1+\frac{(-0.9975716702)}{2!}x^2+\frac{\left(-4.708\times10^{-10}\right)}{3!}x^3$$
$$+\frac{(1.001942665)}{4!}x^4+\frac{\left(-3,286\times10^{-10}\right)}{5!}x^5+\frac{(-0.11249348)}{6!}x^6$$

$c=0$ ve $N=8$ için

$$y_1(x)=\frac{(0.000043228)}{0!}x^0+\frac{(1.000000051)}{1!}x^1+\frac{\left(8.38947\times10^{-12}\right)}{2!}x^2+\frac{(-1.000000001)}{3!}x^3$$
$$+\frac{\left(-5.25614\times10^{-10}\right)}{4!}x^4+\frac{(1)}{5!}x^5+\frac{\left(1.22044\times10^{-9}\right)}{6!}x^6+\frac{(-1)}{7!}x^7+\frac{(0)}{8!}x^8$$
$$y_2(x)=\frac{(1.000000051)}{0!}x^0+\frac{\left(4.98977\times10^{-10}\right)}{1!}x^1+\frac{(-1.000000036)}{2!}x^2+\frac{\left(-2.16823\times10^{-10}\right)}{3!}x^3$$
$$+\frac{(0.999999973)}{4!}x^4+\frac{\left(1.46419\times10^{-9}\right)}{5!}x^5+\frac{(-1.000000078)}{6!}x^6+\frac{\left(3.72360\times10^{-9}\right)}{7!}x^7+\frac{(0.97759)}{8!}x^8$$

çözümleri bulunur. Elde edilen bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 4.1.2.’de verilmiştir.

Çizelge 4.1.2. Örnek 4.1.3.'ün Nümerik Sonuçları

Nokta	**Tam Çözüm**		**Şimdiki Metot N=4 , c=0**			
x_i	$y_1(x_i) = \text{sinx}$	$y_2(x_i) = \text{cosx}$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$
0	0	1	0.0346293792	1.00016425	8×10^{-10}	1×10^{-9}
$\frac{\pi}{6}$	0.5	0.866025404	0.5343895599	0.8660179486	2.039617×10^{-4}	3.258214×10^{-4}
$\frac{\pi}{4}$	0.707106781	0.707106781	0.7394110321	0.7066222364	1.3014891×10^{-3}	2.45413×10^{-3}
$\frac{\pi}{3}$	0.866025404	0.5	0.8906021623	0.4989376138	4.1062564×10^{-3}	1.0224623×10^{-2}
$\frac{\pi}{2}$	1	0	0.9597196111	0.0049989546	4.9989564×10^{-3}	7.516×10^{-2}

Nokta	**Şimdiki Metot N=6 , c=0**				**Şimdiki Metot N=8 , c=0**			
x_i	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$
0	-0.00156001	0.9999966973	3.8×10^{-9}	3×10^{-9}	0.000043228	1.000000051	3×10^{-9}	1×10^{-9}
$\frac{\pi}{6}$	0.498440393	0.86602325	1.4283×10^{-6}	2.1345439×10^{-6}	0.5000432468	0.866025447	6.2×10^{-9}	8.5×10^{-9}
$\frac{\pi}{4}$	0.705580441	0.7071117963	2.0264×10^{-5}	3.62667×10^{-5}	0.7071497378	0.7071067645	1.815×10^{-7}	1.5×10^{-9}
$\frac{\pi}{3}$	0.864731813	0.5000253592	1.1125×10^{-4}	2.698812×10^{-4}	0.8660645531	0.4999996604	1.7474×10^{-6}	4.133×10^{-6}
$\frac{\pi}{2}$	1.002959654	$-1.7931651 \times 10^{-4}$	1.7931731×10^{-4}	$4.524854476 \times 10^{-3}$	0.9998864089	4.1372289×10^{-4}	4.1392289×10^{-6}	1.56899×10^{-4}

Örnek 4.1.4. Son olarak

$$\left.\begin{aligned} -\cos x y_1(x)+\sin x y_2(x) &= -x-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x y_1(t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_2(t)dt \\ y_2(x) &= \cos x - x - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x t y_1(t)dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} y_3(t)dt \\ \sin x y_2(x)+\cos x y_3(x) &= -\frac{\pi}{2}x + x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x t y_2(t)dt \end{aligned}\right\} \qquad (4.1.4)$$

lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sisteminin $c=0$ ve $N=6$ için çözümü araştırılacaktır. Önceki örneklerde olduğu gibi benzer işlemler yapılarak $\mathbf{W}$, $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{T}$ matrisleri bulunup elde edilen $\mathbf{T}$ ve $\mathbf{W}$ matrisleri kullanılarak $\mathbf{M}$ matrisi elde edilir. $|\mathbf{M}| \neq 0$ olduğundan $\mathbf{Y}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$ denklemi kullanılarak $y_m^{(n)}(c)$, $(m=1,2,3\ ;\ n=0,1,2,...,6)$ bilinmeyen katsayıları bulunduktan sonra

$$y_m(x)=\sum_{n=0}^{7}\frac{1}{n!}y_m^{(n)}(c)(x-c)^n \qquad , \qquad (m=1,2,3;\ a\le x,c\le b)$$

denkleminde yerlerine konulursa

$$y_1(x)=\frac{(0.00541231)}{0!}x^0+\frac{(0.98931413)}{1!}x^1+\frac{(0.01133172)}{2!}x^2+\frac{(-1.0243258)}{3!}x^3+\frac{(0.0461728)}{4!}x^4+\frac{(0.847874)}{5!}x^5 +\frac{(0.536902)}{6!}x^6$$

$$y_2(x)=\frac{(0.99455135)}{0!}x^0+\frac{(0.001917224)}{1!}x^1+\frac{(-1.000000014)}{2!}x^2+\frac{\left(-1.501238371\times10^{-8}\right)}{3!}x^3+\frac{(1.0000000028)}{4!}x^4 +\frac{(0)}{5!}x^5+\frac{(-1)}{6!}x^6$$

$$y_3(x)=\frac{\left(-1.708750158\times10^{-8}\right)}{0!}x^0+\frac{(-0.99892605)}{1!}x^1+\frac{(-0.00372029)}{2!}x^2+\frac{(0.99575532)}{3!}x^3+\frac{(-0.01425284)}{4!}x^4 +\frac{(-1.0257245)}{5!}x^5+\frac{(-0.1707509)}{6!}x^6$$

çözümleri bulunur.

Benzer şekilde $c = 0$ ve $N = 7$ için

$$y_1(x) = \frac{(-0.00146347)}{0!}x^0 + \frac{(1.0123485)}{1!}x^1 + \frac{(-0.000868663)}{2!}x^2 + \frac{(-0.99709449)}{3!}x^3 + \frac{(-0.00493746)}{4!}x^4 + \frac{(1.0236804)}{5!}x^5 + \frac{(-0.0607122)}{6!}x^6 + \frac{(-0.596561)}{7!}x^7$$

$$y_2(x) = \frac{(1.000797851)}{0!}x^0 + \frac{(0.00029715)}{1!}x^1 + \frac{(-1.00000004)}{2!}x^2 + \frac{(2.287480325 \times 10^{-9})}{3!}x^3 + \frac{(1.000000005)}{4!}x^4 + \frac{(0)}{5!}x^5 + \frac{(-1)}{6!}x^6 + \frac{(0)}{7!}x^7$$

$$y_3(x) = \frac{(0)}{0!}x^0 + \frac{(-0.999651371)}{1!}x^1 + \frac{(-0.0005943)}{2!}x^2 + \frac{(1.00184378)}{3!}x^3 + \frac{(-0.0023772)}{4!}x^4 + \frac{(-0.9841034)}{5!}x^5 + \frac{(-0.0285263)}{6!}x^6 + \frac{(1.272537)}{7!}x^7$$

yaklaşık çözümleri elde edilir. Elde edilen bu çözümler ile ilgili hata hesapları aşağıdaki Çizelge 4.1.3.'de verilmiştir.

Çizelge 4.1.3. Örnek 4.1.4.'ün Nümerik Sonuçları

Nokta	**Tam Çözüm**			**Şimdiki Metot N=6 , c=0**					
x_i	$y_1(x_i)=\text{sinx}$	$y_2(x_i)=\text{cosx}$	$y_3(x_i)=\text{-sinx}$	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$	$D_3(x_i)$
0	0	1	0	0.00541231	0.99455135	-1.708750×10^{-8}	9.38037×10^{-4}	7.285×10^{-5}	1.70875×10^{-8}
$\frac{\pi}{6}$	0.5	0.866025404	-0.5	0.5009007531	0.861580468	-0.5001093115	3.14801×10^{-3}	1.60676×10^{-3}	2.16857×10^{-5}
$\frac{\pi}{4}$	0.707106781	0.707106781	-0.707106781	0.7062216927	0.7031603438	-0.7081354513	3.88596×10^{-3}	2.37036×10^{-3}	9.7011×10^{-6}
$\frac{\pi}{3}$	0.866025404	0.5	-0.866025404	0.8637753366	0.4965236183	-0.8693198529	4.06517×10^{-3}	3.10551×10^{-3}	1.97815×10^{-5}
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-1	1.002209151	-3.33162×10^{-3}	-1.019397572	2.41936×10^{-3}	3.78047×10^{-3}	3.68484×10^{-3}

Şimdiki Metot N=7 , c=0						
x_i	$y_1(x_i)$	$y_2(x_i)$	$y_3(x_i)$	$D_1(x_i)$	$D_2(x_i)$	$D_3(x_i)$
0	-0.00146347	1.000797851	0	5.38×10^{-7}	4×10^{-9}	0
$\frac{\pi}{6}$	0.499124956	0.866978696	-0.4998572686	3.37098×10^{-7}	3.94×10^{-8}	2.84×10^{-8}
$\frac{\pi}{4}$	0.7065551959	0.7081344346	-0.7068645084	3.0242×10^{-6}	3.4224×10^{-6}	2.4518×10^{-6}
$\frac{\pi}{3}$	0.8659311949	0.50107357	-0.8655590159	2.84647×10^{-5}	3.52482×10^{-5}	3.7634×10^{-5}
$\frac{\pi}{2}$	1.002381319	3.70043×10^{-4}	-0.9974930366	4.06452×10^{-4}	8.94261×10^{-4}	1.43081×10^{-3}

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Fredholm ve Volterra tipi integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmaya yarayan Taylor metodu incelenmiştir. Daha sonra bu metot kullanılarak lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir.

Bu yöntem, verilen Fredholm integral denklem sistemindeki denklemlerin her iki tarafının n defa türevlerini almaya ve sonuç denklemlerdeki bilinmeyen fonksiyonların Taylor seri açılımlarının yerlerine koyulmasına dayalıdır.

Burada elde edilen lineer cebirsel sistem uygun bir yerde kesilerek yaklaşık bir çözüm bulunmaktadır.

Yöntemin geçerli olabilmesi için

$$\sum_{j=1}^{s} a_{mj}(x) y_j(x) = f_m(x) + \int_a^b K_{mj}(x,t) y_j(x) dt$$

formundaki lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemindeki $K_{mj}(x,t)$, $a_{mj}(x)$ ve $f_m(x)$ fonksiyonlarının $a \le x \le b$ aralığında n. mertebeden türevlerinin mevcut olması gerekmektedir. Bu durum sağlandığında $x = c$ ($a \le c \le b$) noktası civarında

$$y_m(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{y_m^{(n)}(x)}{n!}(x-c)^n \quad , \quad (m = 1,2,...,s)$$

formunda N. dereceden Taylor polinom çözümleri bulunabilir. Aksi halde yöntem kullanılamaz.

Çalışmanın son bölümünde, lineer değişken katsayılı Fredholm integral denklem sistemlerinin çözülebildiği görülmüştür. Bu yöntemin ilginç bir özelliği son bölümde yer alan örneklerden de anlaşılacağı üzere, çözüm fonksiyonlarının polinom olduğu durumlarda N kesme sınırının yüksek dereceli polinom derecesi ya da daha büyük değer alınarak analitik çözüme ulaşılmasıdır. Bu yöntem, Volterra ve Fredholm integro-diferansiyel denklem sistemlerine de genişletilebilir.

Ayrıca kısmi diferansiyel ve diferansiyel-cebirsel denklem sistemler ve optimal kontrol sistemlerinin de bu yöntem ile çözülebileceği düşünülmektedir.

6. KAYNAKLAR

Abedzadeh, F. & Pak, R.Y.S.,1995. Horizontal translation and rocking rotation of a rigid tubular foundation. Geotechnique, 45, 1, 83-94.

Agarwal, R.S., Bhargava, R. & Balaji, A.V.S. 1990. Finite elementsolutions of nonsteady three-dimensional micropolar fluid flow at astagnation-point. Int. J. Engineering Sci., 28, 8, 851-857.

Aksoy, Y.,1983. İntegral Denklemler. Yıldız Üniversitesi Yayınları, Cilt:1,Sayı:166.

Andres, J. & Krajc, B., 2000. Bounded solutions in a given set of differential systems. Journal of Computional and Applied Mathematics, 113, 73-82.

Bayın, S.Ş., 2000. Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler, s.249-254.

Bloom, F., 1980. Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of elektromanyetic theory. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 73, 2, 524-542.

Bocher, M.,1913. An Introduction to the Study of Integral Equations, New York.

Büyükaksoy, A. & Alkumru, A.,1995. Multiple diffraction of plane waves by a soft/hard strip. Journal of Engineering Mathematics, 29, 2, 105-120.

El-Gendi, S.E., 1969. Chebyshev Solution of Differential, Integral and Integro -Differential Equations, Comp. J., 12, 282-287.

Ezechias, J.,1998. Contribution to the calculation of thick arcs with respect to shearing strain and extension of the centroid axis. Computers & Structures, 29, 4, 645-656.

Greenspan, D.,1998. Dynamical simulation of the simplest hydrides. Computers Math. Applic., 35, 10, 55-62.

Gürgöze, M.,1992. On some series occuring in the theory of vibrations. Int. J. Math.Educ. Sci. Technol, 23, 3, 493-496.

Holmekar, K.,1993. Global asymtotic stability for a stationary solution of a system of integro-differential equations describing the formation of liver zones. SIAM Journal Math. Anal.,24, 1, 116-128.

Kaçar, A., Mamedov, Y.D.,1996. İnce Çubuğu Esneklik Probleminin İki Yaklaşık Metodla Çözümü, Azerb.Ilm.Akad.-Nin Haber. Sibernetika ,21-24, (109), 1-11.

Kant, T., Varaiya, J. & Arora, H.C.P., 1990. Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes. Computers & Structures, 36, 3, 401-420.

Kanwall, R.P., Liu, K.C.,1989. A Taylor Expansion Approach for Solving Integral Equtations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 20, (3), 411-414.

Kauthen, J.P., Continuous time collacation methods for Volterra-Fredholm Integral Equations , Numer. Math. 56 (1989) 409-424.

Kopeikin, I.D. & Shishkin, V.P.,1984. Integral form of the general solution of equations of steady-state thermoelasticity. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM U.S.S.R.), 48, 1, 117-119.

Lewis, P.E., Word, J.P., The Finite Element Method, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.

Lovitt, W.V., 1924. Linear Integral Equations, McGraw-Hill, New York.

Nas, Ş.,Yalçınbaş, S.,Sezer, M., 2000. A Taylor Polynomial Approach for Solving High-Order Linear Fredholm Integro-Differential Equations, Int. J. Math. Educ. Scı. Technol., Vol.31, No.2, 213-225.

Pesterev, A.V. & Bergman, L.A., 1997. Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator. Journal of Engineering Mechanics, 123, 8, 878-7.

Petrovsky, I.G., 1953. Lectures on the theory of Integral Equations, Würzburg.

Pucci, P.,Serrin, J.,1995. Asymptotic stability for ordinary differential systems with time-dependent restoring potentials. Arch. Rational Mech. Anal., 132, 3, 207-232.

Rzepecki, B., 1982. On the existence of solutations of infinite systems of differential and integral-differential equations. Demonstratio Mathematica, 15, 4, 1087-1099.

Sezer, M., 1992. The Solutions of Certain Classes of Ferdholm Integral Equations by Means of Taylor Series, Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakülteleri Dergisi, Cilt:VII, Sayı:2, 17-24.

Sezer, M., 1994. Taylor Polynomial Solutation of Volterra Integral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,25, (5), 625-633.

Sezer, M., 1996. A Method for The Approximate Solutation of The Second-Order Linear Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Int.J.Math.Educ.Sci.Technol., 27, (6), 821-834.

Tricomi, F.G., 1955. Integral Equations, University of Turin, Italy.

Yalçınbaş, S., Sezer, M., 2000. The Approximate Solutions of High-Order Linear Volterra- Fredholm Integro-Differential Equations in Terms of Taylor Polynomials, Applied Mathematics and Computation, 112, 291-308.

Yalçınbaş, S., Demirbaş, M., 2001. The Approximate Solutions of High-Order Linear Differential Equation sytems with variable coefficients in Terms of Taylor Polynomials, Tools For Mathematical Modelling, Saint Petersburg, Rusya, 8, 175-188.

Yalçınbaş, S., "Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Taylor Polinom Çözümleri", II. Uluslararası Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi, 20-22 Mayıs 1998, Kırıkkale.

Yue, Z.Q. & Selvadurai, A.P.S., 1995. Contac problem for saturated poroelastic solid. Journal of Engineering Mechanics, 121, 4, 502-512.

Zimmerman, W.R., 1996. Time domain solutations to partial differential equations using spice. IEEE Transactions on Education, 39 , 4, 563-11.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: İsmail TULGA
Doğum Yeri	: Isparta
Doğum Yılı	: 1976
Medeni Hali	: Evli

Eğitim ve Akademik Durumu:

Ortaokul ve Lise	1987-1994	Isparta Anadolu Lisesi
Lisans	1994-1998	Akdeniz Üniversitesi
	1998-2001	Süleyman Demirel Üniversitesi

Yabancı Dil İngilizce

İş Deneyimi:

2001-2002	Burdur-Altınyayla-Dirmil İlköğretim Okulu Matematik Öğretmeni
2002-…	Isparta Eğirdir Lisesi Matematik Öğretmeni