DE SITTER UZAYINDA

HİPERYÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Pınar GÜRBÜZ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Isparta, 2007

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DE SITTER UZAYINDA HİPERYÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Pınar GÜRBÜZ

Danışman: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA, 2007

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda oybirliği ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. A. Aziz ERGİN
Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YÜCESAN
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ONAY

Bu tez 23 / 02 / 2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda, yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

... / ... /2007

Prof.Dr. Fatma GÖKTEPE
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DE SITTER UZAYINDA HİPERYÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Pınar GÜRBÜZ

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Jüri: Prof. Dr. A. Aziz ERGİN
Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Ahmet YÜCESAN

Tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, konunun tarihi gelişimi ifade edilmiştir.

İkinci bölümde, simetrik bilineer formlar, semi-Riemann manifoldlar ve semi-Riemann altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, indeksi 1 olan de Sitter uzayında genel spacelike hiperyüzeyler ele alınmış ve böyle hiperyüzeyler için yapı denklemleri elde edilmiştir. Ayrıca böyle hiperyüzeylerin total geodezik ve total umbilik olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Son olarak Total geodezik olma şartları Einstein spacelike hiperyüzeye uygulanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit Ortalama Eğrilik, De Sitter Uzay, Einstein Hiperyüzey, Skalar Eğrilik, Spacelike Hiperyüzey, Total Geodezik, Total Umbilik.

2007, 38 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

GEOMETRY OF HYPERSURFACES IN DE SITTER SPACE

Pınar GÜRBÜZ

Süleyman Demirel University Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Thesis Committee: Prof. Dr. A. Aziz ERGİN
Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN(Supervisor)
Asst. Prof. Ahmet YÜCESAN

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the historical background of the subject is considered.

In the second chapter, fundamental definitions and theorems related to symmetric bilineer forms, semi-Riemannian manifolds and semi-Riemannian submanifolds are given.

In the third chapter, the general spacelike hypersurfaces in de Sitter space of indeks 1 are considered and structure equations for such hypersurfaces are obtained. Also, sufficient and necessary conditions for such hypersurfaces to be totally geodesic and totally umbilical are given. Then, the condition to be totally geodesic is applied to Einstein spacelike hypersurfaces.

Key Words: Constant Mean Curvature, De Sitter Space, Einstein Hypersurface, Scalar Curvature, Spacelike Hypersurface, Totally Geodesic, Totally Umbilical.

2007, 38 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında, değerli yardım ve desteklerini eksik etmeyen danışman hocam Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN' e teşekkür ederim.

Pınar GÜRBÜZ

ISPARTA, 2007

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
V	Reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^n$	Öklid n-uzay
$\mathbb{R}^n_\nu$	ν-indeksli semi-Öklid n-uzay
g	Skalar çarpma
ν	Semi-Riemann manifoldunun indeksi
$\chi(M)$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
T_PM	$P \in M$ noktasındaki tanjant uzay
T_P^*M	$P \in M$ noktasındaki kotanjant uzay
∇	Koneksiyon
Δ	Laplasyan operatörü
R	Riemann eğrilik tensörü
Ric	Ricci eğrilik tensörü
M, $\widetilde{M}$	Semi-Riemann manifoldlar
ρ	Skalar eğrilik
$\mathcal{R}$	Normalleştirilmiş skalar eğrilik
N	Hiperyüzeyin birim normali
$\mathcal{S}$	N birim normali ile birleştirilmiş şekil operatörü
B	İkinci temel form tensörü
h	İkinci temel form
σ	İkinci temel formunun uzunluğunun karesi
H	Ortalama eğrilik
K	Kesit eğriliği
ε	N birim normalinin işareti

1. GİRİŞ

De Sitter uzay, Riemann geometrisindeki n-kürenin Lorentz karşılığı olarak ifade edilebilir. De Sitter uzayının hiperyüzeyleri ile ilgili bazı çalışmalar *S. Y. Cheng*, *S. T. Yau*, *A. J. Goddard*, *S. Nishikawa*, *K. Akutagawa*, *J. Ramanathan*, *S. Montiel*, *Q. M. Cheng*, *Y. Zheng*, *H. D. Pang*, *S. L. Xu* ve *S. Dai* gibi matematikçiler tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalar daha çok spacelike hiperyüzeyler üzerinde yoğunlaşmıştır.

Spacelike hiperyüzeyler üzerinde ilk çalışma 1976 yılında *S. Y. Cheng* ve *S. T. Yau* tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, Lorentz uzayında bir hiperyüzeyin ortalama eğriliği tanımlanmış ve hiperyüzeyin maximal olması durumunda ortalama eğrilik vektörünün sıfır olduğu gösterilmiştir. Buna bağlı olarak, spacelike hiperyüzey, Lorentz uzayında kapalı altküme olmak üzere, hiperyüzeyin ortalama eğriliğinin sabit olması durumunda hiperyüzey üzerine indirgenmiş metriğin tam Riemann metrik ve hiperyüzeyin ikinci temel formunun uzunluğunun sınırlı olduğu ispat edilmiştir.

1977 yılında *A. J. Goddard*, sabit ortalama eğrilikli spacelike hiperyüzeylerin daha genel durumu üzerine çalışma yapmıştır. Bu çalışmasında, sabit ortalama eğrilikli de Sitter uzayının spacelike hiperyüzeylerinin Lorentz uzayındaki bazı hiperyüzeyler ile de Sitter uzayının arakesiti şeklinde verilebileceğini göstermiştir. 1987 yılında *J. Ramanathan*, *A. J. Goddard*' ın bu çalışmasını ortalama eğriliğin $[0, 1]$ aralığında verilmesi durumunda, özel spacetime S_1^3, 3- boyutlu de Sitter uzayına taşımıştır.

De Sitter uzayında spacelike hiperyüzeylerin total geodeziklik durumu ilk olarak 1970 yılında *E. Calabi* ($n \leq 4$) ve daha sonra 1976 yılında *S. Y. Cheng* ve *S. T. Yau* tarafından incelenmiştir. Çalışmalarında flat Lorentz $(n + 1)$-uzayda, tam maximal spacelike hiperyüzeyin total geodezik olduğu gösterilmiştir. 1984 yılında, *S. Nishikawa* yaptığı çalışmada, Lorentz manifoldunda maximal spacelike hiperyüzeylerin total geodezik olma koşullarını vermiştir.

2002 yılında, *H. D. Pang*, *S. L. Xu* ve *S. Dai*, 1- indeksli de Sitter uzayında genel spacelike hiperyüzeyler üzerine çalışmış ve böyle hiperyüzeylerin total geodezik olma koşullarını incelemişlerdir.

De Sitter uzayında spacelike hiperyüzeylerin total umbiliklik durumu ilk kez 1987 yılında *K. Akutagawa* tarafından incelenmiştir. *K. Akutagawa* çalışmasında, $(n+1)$- boyutlu, c pozitif sabit eğrilikli Lorentz manifoldunun, H sabit ortalama eğrilikli tam spacelike hiperyüzeyinde, $n=2$ için $|H| \leq c^{1/2}$ ve $n \geq 3$ için $|H| < 2[(n-1)c]^{1/2}/n$ koşulları sağlanıyor ise spacelike hiperyüzeyin total umbilik olduğunu göstermiştir. 1988 yılında, *S. Montiel* yaptığı çalışmada de Sitter uzayında kompakt spacelike hiperyüzeyler için integral eşitsizliklerini kullanarak *A. J. Goddard*' ın çalışmasını ortalama eğriliği sınırlamadan ele almış ve *K. Akutagawa*' nın verdiği total umbilik olma şartlarını elde etmiştir. *Q. M. Cheng*, 1991 yılında *K. Akutagawa*' nın çalışmasını indefinit uzay formda genel altmanifoldlar üzerine uygulamış ve *K. Akutagawa*' nın verdiği koşulların sağlanması durumunda paralel ortalama eğrilik vektörlü de Sitter uzayında tam spacelike altmanifoldun total umbilik olduğunu göstermiştir. Total umbiliklik ile ilgili bir diğer çalışma ise 1996 yılında *Y. Zheng* tarafından yapılmıştır. *Y. Zheng* çalışmasında, S_1^{n+1}, $(n+1)$- boyutlu, 1- indeksli de Sitter uzayına gömülmüş, $\mathcal{R}$ normalleştirilmiş skalar eğrilikli kompakt spacelike hiperyüzeyinin $\mathcal{R} \geq 0$ olması durumunda total umbilik olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada, de Sitter uzayında hiperyüzeylerin geometrisi adı altında spacelike hiperyüzeylerinin total geodezik ve total umbilik olma koşulları incelenmiş ve total geodezik olma koşulları Einstein spacelike hiperyüzeylere uygulanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmaya esas olan tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 2.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \in V$ için
i) $g(\vec{u}, \vec{v}) = g(\vec{v}, \vec{u})$,
ii) $g(a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = ag(\vec{u}, \vec{w}) + bg(\vec{v}, \vec{w})$,
$g(\vec{u}, a\vec{v} + b\vec{w}) = ag(\vec{u}, \vec{v}) + bg(\vec{u}, \vec{w})$
özeliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.
i) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif definit*,
ii) $\forall \vec{v} \in V$ ve $\vec{v} \neq \vec{0}$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif definit*,
iii) $\forall \vec{v} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif semi-definit*,
iv) $\forall \vec{v} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif semi-definit*,
v) $\forall \vec{w} \in V$ için $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ iken $\vec{v} = \vec{0}$ olmak zorunda ise g simetrik bilineer formuna *non-dejenere*, aksi halde *dejeneredir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun.

$$g_{|W} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun *indeksi* denir ve ν ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.4. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0,\ i \neq j$

ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1,\ 1 \leq i \leq \gamma,$

iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1,\ \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu$

iv) $g\left(\alpha_i, \alpha_i\right) = 0,\ \gamma + \nu + 1 \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$

olacak şekilde V nin $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır (Duggal ve Bejancu, 1996).

Teorem 2.1.5. Bir g simetrik bilineer formun non-dejenere olması için gerek ve yeter şart g nin herhangi bir baza göre ters matrisinin olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.6. Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpma* denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine *skalar çarpımlı vektör uzayı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. $\forall \vec{v},\ \vec{w} \in V$ için $\vec{v} \neq \vec{0}$ ve $\vec{w} \neq \vec{0}$ iken $g(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ ise $\vec{v}$ ve $\vec{w}$ vektörleri diktir denir ve $\vec{v} \perp \vec{w}$ şeklinde gösterilir.

V reel vektör uzayının bir altuzayı W ise $W^{\perp} = \left\{ \vec{v} \in V \middle| \vec{v} \perp W \right\}$ olsun. $W^{\perp}$ altuzayına V nin *dik altuzayı* denir. $W \oplus W^{\perp}$ genellikle V nin tamamı olmadığından, $W^{\perp}$ altuzayına W nın ortogonal komplemanı denilemez (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.8. W bir V skalar çarpım uzayının altuzayı olsun. O zaman,

i) $boyW + boyW^{\perp} = boyV,$

ii) $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$

özelikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpma g ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer g, W üzerinde non-dejenere ise W ya *non-dejenere altuzay*, non-dejenere değil ise *dejenere altuzaydır* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.10. V bir skalar çarpım uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. W nın non-dejenere altuzay olması için gerek ve yeter şart $V = W \oplus W^{\perp}$ olmasıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.11. Bir V reel vektör uzayı üzerindeki skalar çarpma g olsun. Bir $\vec{v} \in V$ vektörünün *normu*

$$\left\| \vec{v} \right\| = \sqrt{\left| g(\vec{v}, \vec{v}) \right|}$$

olarak tanımlanır. Normu bir birim olan vektöre *birim vektör* ve ortogonal birim vektörlerin cümlesine de *ortonormal sistem* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.12. Bir $V \neq \{\vec{0}\}$ skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.1.13. V reel vektör uzayı için bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$ olmak üzere $\forall \vec{v} \in V$ vektörü

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(\vec{v}, e_i) e_i$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.14. V bir skalar çarpım uzayı olsun. V nin indeksi ν olmak üzere $\nu = 1$ ve $boy V \geq 2$ ise V skalar çarpım uzayına bir *Lorentz uzayı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.15. V bir Lorentz uzayı olsun. $\vec{v} \in V$ olmak üzere,

i) $g(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ veya $\vec{v} = 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *spacelike*,

ii) $g(\vec{v}, \vec{v}) < 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *timelike*,

iii) $g(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, $\vec{v} \neq 0$ ise $\vec{v}$ vektörüne *lightlike (null)* denir (O'Neill, 1983).

2.2. Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1. M bir C^∞ manifold olsun. $\forall P \in M$ noktasındaki tanjant uzay $T_P M$ olmak üzere

$$\begin{array}{rlcl} g_{_P}: & T_P M \times T_P M & \to & \mathbb{R} \\ & (X_P, Y_P) & \to & g_{_P}(X_{_P}, Y_P) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensörüne M üzerinde bir *metrik tensör* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.2. M bir C^∞ manifold olsun. M bir g metrik tensör ile donatılmışsa, M ye bir *semi-Riemann manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.3. Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine *semi-Riemann manifoldun indeksi* denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer indeks ν ise $0 \leq \nu \leq boyM$ dir. Özel olarak, $\nu = 0$ ise $\forall P \in M$ için $g_{_P}$, $T_P M$ üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir *Riemann manifoldu* olur. $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir *Lorentz manifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.4. $\mathbb{R}^n$ Öklid $n-$uzay verilsin. $0 \leq \nu \leq n$, olmak üzere ν tamsayısı için, $\mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$g(X_{_P}, Y_{_P}) = -\sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i + \sum_{i=\nu+1}^{n} x_i y_i$$

ile verilen metrik tensör göz önüne alınırsa, elde edilen uzay *semi-Öklid* $n-$*uzay* olarak adlandırılır ve $\mathbb{R}^n_\nu$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.5. M ve N birer semi-Riemann manifold ve

$$f : M \longrightarrow N$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer f nin f_* jakobiyen matrisi $\forall P \in M$ noktasında regüler ise f ye M den N içine bir *immersiyon* denir. Bir başka ifade ile $rankf = boyM$ ise f ye bir *immersiyon* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.6. M bir C^{∞} manifold ve $P \in M$ noktasındaki kotanjant uzay $T_P^*(M)$ olsun. Buna göre, bir

$$\omega : M \longrightarrow \underset{P\in M}{\cup} T_P^* M$$

fonksiyonu için,

$$\pi \circ \omega : M \overset{\text{özdeşlik}}{\longrightarrow} M$$

olacak şekilde bir

$$\pi : \underset{P\in M}{\cup} T_P^*(M) \longrightarrow M$$

fonksiyonu mevcut ise ω ya M üzerinde bir 1-*form* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.2.7. $u_1, ..., u_n$, $\mathbb{R}_\nu^n$ üzerinde doğal koordinat fonksiyonları olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}_\nu^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir. Burada, $\{\partial_i | 1 \leq i \leq n\}$, $\chi(\mathbb{R}_\nu^n)$ vektör alanları uzayının standart bazıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.8. M bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde bir ∇ koneksiyonu
i) $\nabla_V W$, V ye göre $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ lineerdir,
ii) $\nabla_V W$, W ye göre $\mathbb{R}$ lineerdir,
iii) $\nabla_V (fW) = V(f)W + f\nabla_V W$, $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$
olacak şekilde bir

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

fonksiyonudur (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.9. M semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için
i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$
ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
olacak şekilde bir tek ∇ koneksiyonu vardır. ∇ ye M nin *Levi-Civita koneksiyonu* denir ve Levi-Civita koneksiyonu,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad -g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karekterize edilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.10. M bir semi-Riemann manifold ve M nin bir A bölgesinde tanımlı C^∞ fonksiyon f olsun.

$$df(X) = X[f] = g(\nabla f, X)$$

biçiminde tanımlanan df 1-formuna f nin A daki *dış türevi* denir.
A üzerinde w bir C^∞ 1-form olmak üzere, w nin dw ile gösterilen *dış türevi* A üzerinde 2-form olarak

$$dw(X,Y) = \frac{1}{2}(X[w(Y)] - Y[w(X)] - w[X,Y])$$

biçiminde tanımlanır ve bu eşitliğe *Ricci denklemi* denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.11. M bir semi-Riemann manifold, ∇ M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. $U \subset M$ üzerinde C^∞ vektör alanlarının bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve bu bazın duali $w_1, w_2, ..w_n$ olmak üzere, $1 \leq i, j \leq n$ için

$$\begin{array}{rcccll} w_{ij} & : & \chi(U) & \longrightarrow & C^\infty(U, \mathbb{R}) & \\ & & X & \longrightarrow & w_{ij}(X) & = \ w_i(\nabla_X e_j) \end{array}$$

şeklinde tanımlı w_{ij} fonksiyonlarına, U üzerinde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazına göre ∇ koneksiyonunun *koneksiyon 1-formları* denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.2.12. M semi-Riemann manifold ve $x_1, x_2, .., x_n$ $U \subset M$ de koordinat fonksiyonları olsun. Bu koordinat fonksiyonları için *Christoffel sembolleri*, U da Γ_{ij}^k reel değerli fonksiyonlarıdır, öyleki $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$\nabla_{e_i}(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k e_k \ \ , \ \ (1 \leq i, j \leq n)$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.13. Levi-Civita koneksiyonu ∇ olan bir semi-Riemann manifold M olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{rlcl} R: & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ & (X, Y, Z) & \rightarrow & R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{array}$$

şekinde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$ tensördür. Bu tensöre M nin Riemann eğrilik tensörü denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.14. M bir semi-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.15. M bir semi-Riemann manifold ve $P \in M$ noktasındaki X, Y tanjant vektörlerinin gerdiği $T_P M$ tanjant uzayının $2-$boyutlu bir non-dejenere altuzayı Π olsun.

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.16. M bir semi-Riemann manifold olsun. M manifoldu c sabit eğriliğine sahip ise M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.17. M, $(n+1)$-boyutlu, p-indeksli ve c sabit eğrilikli bağlantılı semi-Riemann manifoldu olsun. Bu semi-Riemann manifolduna p-indeksli *indefinite uzay formu* denir ve $p = 0$ ise sadece *uzay formu* denir (Zheng, 1996).

Tanım 2.2.18. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olmak üzere;

(i) $S^n_\nu(r) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}_\nu : g(X,X) = r^2\}$ hiperquadriğine $\mathbb{R}^{n+1}_\nu$ de $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu ve ν-indeksli pseudo-küre denir.

(ii) $H^n_\nu(r) = \{X \in \mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1} : g(X,X) = -r^2\}$ ile verilen hiperquadriğe $\mathbb{R}^{n+1}_{\nu+1}$ de $r > 0$ yarıçaplı, n-boyutlu ve ν-indeksli pseudo-hiperbolik uzay denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.19. $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olsun.

(i) $S^n_\nu(r)$ pseudo-küre, $c = 1/r^2$ sabit pozitif eğrilikli, tam semi-Riemann manifoldudur.

(ii) $H^n_\nu(r)$ pseudo-hiperbolik uzay, $c = -1/r^2$ sabit negatif eğrilikli, tam semi-Riemann manifoldudur (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.20. $M(c)$, p-indeksli indefinite uzay formu olsun. $c > 0$ ve $p = 1$ ise M uzayına 1-indeksli *de Sitter uzayı* denir (Zheng, 1996).

Tanım 2.2.21. M bir semi-Riemann manifold ve $P \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_PM olsun. T_PM nin ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{array}{rcll} \Delta : C^\infty(M,\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^\infty(M,\mathbb{R}) & \\ f & \longrightarrow & \Delta f & = div(gradf) \\ & & & = \sum\limits_i \varepsilon_i(e_ie_i(f) - \nabla_{e_i}e_i(f)) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne *laplasyan operatörü* ve Δf e ise f fonksiyonunun *laplasyanı* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.22. M bir semi-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, ..., e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} Ric: \; T_PM \times T_PM & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \rightarrow & Ric(X,Y) = \sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_i g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{array}$$

veya

$$Ric(X,Y) = iz\{Z \rightarrow R(X,Z)Y\}$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne *Ricci eğrilik tensörü* ve $Ric(X,Y)$ değerine de *Ricci eğriliği* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

Tanım 2.2.23. M bir semi-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, ..., e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \, Ric(e_i, e_i)$$

değerine M nin *skalar eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.2.24. M bir semi-Riemann manifold olsun. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Ric(X_P, Y_P) = \lambda g(X_P, Y_P)$$

ise M ye *Einstein manifoldu* denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Lemma 2.2.25 (Cartan Lemması). M, n-boyutlu Riemann manifoldu, $r \leq n$ ve M de $\forall P \in M$ için lineer bağımsız 1-formlar $w_1, w_2, ..., w_r$ olsun. M de

$$\sum_{i=1}^{r} \theta_i \wedge w_i = 0$$

olacak şekilde $\theta_1, \theta_2, .., \theta_r$ 1-formları var ise, M üzerinde $h_{ij} = h_{ji}$ özeliğini sağlayan C^∞ h_{ij} fonksiyonları mevcuttur, öyleki $1 \leq i \leq r$ olmak üzere

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{r} h_{ij} w_j$$

yazılır (Willmore, 1993).

Tanım 2.2.26. M, n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. M de herhangi iki nokta arasındaki uzunluğun supremum değerine M nin *diameteri* denir ve $diam(M)$ ile gösterilir. d, M de Riemann metrik ve $\forall P, Q \in M$ için

$$diam(M) = \sup\{d(P, Q) : P, Q \in M\}$$

dir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.2.27 (Bonnet-Myers Teoremi). M, n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin Ricci eğriliği, $\forall P \in M$ ve $\forall v \in T_p(M)$ için

$$Ric_P(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

şeklinde yazılabiliyor ise M kompakttır ve $diam(M) \leq \pi r$ dir (O'Neill, 1983).

2.3. Semi-Riemann Altmanifoldlar

Tanım 2.3.1. $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir C^∞ altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ daki metrik $\widetilde{g}$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} \varphi: \ M & \to & \widetilde{M} \\ P & \to & \varphi(P) = P \end{array}$$

inclusion (daldırma) dönüşümü için $P \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$T_P M \xrightarrow{\varphi_*|_P} T_P \widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$T_P M^* \xleftarrow{\varphi^*|_P} T_P \widetilde{M}^*$$

olmak üzere,

$$\varphi^* \mid_P (g_{_P})(X_P, Y_P) = \widetilde{g}(\varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p))_P; \ \forall X_P, Y_P \in T_P M$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi^* \ \mid_P \ (\widetilde{g}_{_P})$, M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nın bir *semi-Riemann altmanifoldu* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.2. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall P \in M$ için $T_P M^\perp$ uzayının boyutuna M nin *dik tümleyeninin boyutu* (*codimension*), $T_P M^\perp$ in indeksine de M nin *dik tümleyenin indeksi (co-indeksi)* denir ve $coindM$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. Buna göre,

$$T_P \widetilde{M} = T_P M \oplus T_P M^\perp$$

olduğundan, $X_P \in T_P \widetilde{M}$ için tanjant ve normal bileşenleri yardımıyla,

$$X_P = \tan X_P + \mathrm{nor} X_P$$

yazılışı tek türlüdür. Burada, $\tan X_P \in T_P M$, $\mathrm{nor} X_P \in T_P M^\perp$ dir. Ortogonal izdüşümlerin sonucu olarak,

$$\tan : T_P\widetilde{M} \longrightarrow T_P M$$

ve

$$\text{nor} : T_P\widetilde{M} \longrightarrow T_P M^{\perp}$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$-lineerdirler (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.3. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. O zaman

$$\text{ind}\widetilde{M} = \text{ind}M + \text{coind}M$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.4. M, $\widetilde{M}$ nin bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. $f(\widetilde{M}) = M$ olacak şekilde bir

$$f : \widetilde{M} \longrightarrow M$$

immersiyonu mevcut ise M ye $\widetilde{M}$ nin bir *gömülmüş altmanifoldu* denir (Hacısalihoğlu, 2000).

Tanım 2.3.5. M, $\widetilde{M}$ nin bir semi-Riemann altmanifoldu ve $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olsun.

$$\begin{array}{rccl} \nabla : & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y) & \to & \nabla_X Y = \tan \widetilde{\nabla}_X Y \end{array}$$

indirgenmiş fonksiyonuna M semi-Riemann altmanifoldu üzerine *indirgenmiş koneksiyon* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.6. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{array}{rccl} B : & \chi(M) \times \chi(M) & \to & \chi(M)^{\perp} \\ & (X,Y) & \to & B(X,Y) = nor\widetilde{\nabla}_X Y \end{array}$$

şeklinde tanımlı B dönüşümü $2-$lineer ve simetriktir. B dönüşümüne M nin *şekil tensörü* veya *ikinci temel tensörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.7. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla, $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonları olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)$$

eşitliğine M nin *Gauss formulü* denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.3.8. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann altmanifoldu olsun. R ve $\widetilde{R}$, sırasıyla, M ve $\widetilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörleri ve $\forall V,W,X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(R_{VW}X, Y) = \widetilde{g}(\widetilde{R}_{VW}X, Y) - \widetilde{g}(B(V, X), B(W, Y)) + \widetilde{g}(B(V, Y), B(W, X))$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.9. M, $\widetilde{M}$ nın bir n-boyutlu semi-Riemann altmanifoldu olsun. $P \in M$ noktasındaki $T_P M$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i B(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlı vektör alanına M nin ortalama eğrilik vektör alanı ve $H = \left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i B(e_i, e_i) \right\|$ sayısına ise M nin *ortalama eğriliği* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.10. $\widetilde{M}$, $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nın dik tümleyeninin boyutu (codimension) 1 olan altmanifolduna $\widetilde{M}$ nın bir *semi-Riemann hiperyüzeyi* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.11. $\widetilde{M}$ nın M semi-Riemann hiperyüzeyinin ε işareti;

$$\begin{cases} +1, & \text{eğer } coindM = 0 \\ -1, & \text{eğer } coindM = 1 \end{cases}$$

biçimindedir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.12. M, $\widetilde{M}$ nın semi-Riemann hiperyüzeyi olsun. N, M nin birim normal vektör alanı olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \chi(M) \times \chi(M) & \longrightarrow & C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ & & (\ X\ \ ,\ \ Y\ ) & \longrightarrow & h(X, Y) \quad = \varepsilon \widetilde{g}(B(X, Y), N) \end{array}$$

şeklinde tanımlı h, bilineer formuna M nin *ikinci temel formu* denir (Hacısalihoğlu, 2003).

Tanım 2.3.13. M, $(n+1)$-boyutlu $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun içine gömülmüş n-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $\widetilde{M}$ üzerindeki semi-Riemann metriği, M deki Riemann metriğine indirger ve M ye *spacelike hiperyüzey* adı verilir (Zheng, 1996).

Tanım 2.3.14. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann hiperyüzeyi olsun. ∇, M üzerinde Levi-Civita koneksiyon ve N de birim normal vektör alanı olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$g(\mathcal{S}(X), Y) = \widetilde{g}(B(X, Y), N)$$

şeklinde tanımlı

$$\mathcal{S} : \chi(M) \to \chi(M)$$

lineer dönüşümüne M nin N den türetilmiş *şekil operatörü* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.15. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann hiperyüzeyi olmak üzere, M nin ikinci temel tensörü sıfır ise M ye *total geodeziktir* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.3.16. M, $\widetilde{M}$ nın bir semi-Riemann hiperyüzeyi olmak üzere, M nin ikinci temel tensörü skalar ise M ye *total umbiliktir* denir (O'Neill, 1983).

Lemma 2.3.17 (Cauchy-Shwartz Eşitsizliği). $\forall a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere,

$$(\sum_i a_i b_i)^2 \leq \sum_i (a_i)^2 \sum_j (b_j)^2$$

dir. Eşitlik ancak ve ancak $a_i = \lambda b_i$ veya $b_i = \lambda a_i$ olması durumunda mevcuttur (*Pang*, *Xu* ve *Dai,* 2002).

3. DE SITTER UZAYINDA SPACELIKE HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde, de Sitter uzayında spacelike hiperyüzeyler ele alınacaktır. Burada, indeksi 1 olan de Sitter uzayında spacelike hiperyüzeyler için yapı denklemleri elde edilecek ve spacelike hiperyüzeylerin total geodezik ve total umbilik olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Ayrıca total geodezik olma koşulu Einstein spacelike hiperyüzeylere uygulanacaktır.

3.1. De Sitter Uzayında Yapı Denklemleri ve Lokal Formüller

$\widetilde{M}(c)$, 1-indeksli, $(n+1)$-boyutlu de Sitter uzayı ve M de, $\widetilde{M}(c)$ nin spacelike hiperyüzeyi olsun. $\widetilde{M}(c)$ de $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}\}$ bir ortonormal baz ve bu ortonormal bazın dual bazı $\{w_{1,}w_2, ..., w_{n+1}\}$ olmak üzere $\widetilde{M}(c)$ deki semi-Riemann metriği

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (w_i)^2 - (w_{n+1})^2 = \sum_{A} \varepsilon_A (w_A)^2$$

dir. Burada, $A, B, C, ... \in \{1, ..., n+1\}$ ve $i, j, k, ... \in \{1, ..., n\}$ indis sıralaması göz önüne alınırsa , $\varepsilon_i = 1$ ve $\varepsilon_{n+1} = -1$ dir. Buna göre $\widetilde{M}(c)$ nin yapı denklemleri aşağıdaki gibidir.

Bir formun dış türevi tanımından

$$\begin{aligned}
dw_A(e_C, e_D) &= \frac{1}{2}\{e_C[w_A(e_D)] - e_D[w_A(e_C)] - w_A([e_{C,}e_D])\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{e_C[\varepsilon_A \delta_{AD}] - e_D[\varepsilon_A \delta_{AC}] - w_A\left(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_D - \widetilde{\nabla}_{e_D} e_C\right)\right\} \\
&= -\frac{1}{2} w_A \{\sum_E \Gamma^E_{CD} e_E - \sum_E \Gamma^E_{DC} e_E\} \\
&= -\frac{1}{2}\{\sum_E \Gamma^E_{CD} w_A(e_E) - \sum_E \Gamma^E_{DC} w_A(e_E)\} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_E \left\{\Gamma^E_{CD} \varepsilon_A \delta_{AE} - \Gamma^E_{DC} \varepsilon_A \delta_{AE}\right\}
\end{aligned}$$

ise

$$dw_A(e_C, e_D) = -\frac{1}{2}\sum_A \varepsilon_A \left\{\Gamma^A_{CD} - \Gamma^A_{DC}\right\} \qquad (3.1.1)$$

dir. Koneksiyon 1-formları tanımından

$$w_{AB}(e_C) = w_A(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_B) = \Gamma^E_{CB} w_A(e_E)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $w_A(e_E) = \varepsilon_A \delta_{AE}$ olduğundan

$$w_{AB}(e_C) = \Gamma^A_{CB} = \Gamma^A_{CB} w_C(e_C)$$

$$\Rightarrow w_{AB} = \Gamma^A_{CB} w_C$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\sum_B (w_{AB} \wedge w_B)(e_C, e_D) &= \frac{1}{2} \sum_B \{w_{AB}(e_C) w_B(e_D) - w_{AB}(e_D) w_B(e_C)\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_B \{w_A(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_B) \varepsilon_B \delta_{BD} - w_A(\widetilde{\nabla}_{e_D} e_B) \varepsilon_B \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_B \{\sum_E \Gamma^E_{CB} w_A(e_E) \varepsilon_B \delta_{BD} - \sum_E \Gamma^E_{DB} w_A(e_E) \varepsilon_B \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_B \varepsilon_B \{\sum_E \Gamma^E_{CB} \varepsilon_A \delta_{AE} \delta_{BD} - \sum_E \Gamma^E_{DB} \varepsilon_A \delta_{AE} \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_B \varepsilon_B \{\sum_A \Gamma^A_{CB} \varepsilon_A \delta_{BD} - \sum_A \Gamma^A_{DB} \varepsilon_A \delta_{BC}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{A,B} \varepsilon_A \varepsilon_B \left\{\Gamma^A_{CB} \delta_{BD} - \Gamma^A_{DB} \delta_{BC}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{A,B} \varepsilon_A \varepsilon_B \left\{\Gamma^A_{CD} - \Gamma^A_{DC}\right\} \qquad (3.1.2)
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.1.1) ve (3.1.2) eşitliklerinden birinci yapı denklemi

$$dw_A = -\sum_B \varepsilon_B w_{AB} \wedge w_B \qquad (3.1.3)$$

biçiminde elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(w_{AB} + w_{BA})(e_C) &= w_{AB}(e_C) + w_{BA}(e_C) \\
&= w_A(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_B) + w_B(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_A) \\
&= \Gamma^E_{CB} w_A(e_E) + \Gamma^E_{CA} w_B(e_E) \\
&= \Gamma^E_{CB} \varepsilon_A \delta_{AE} + \Gamma^E_{CA} \varepsilon_B \delta_{BE} \\
&= \Gamma^A_{CB} \varepsilon_A + \Gamma^B_{CA} \varepsilon_B
\end{aligned}$$

dır. Burada

$$\widetilde{\nabla}_{e_C} e_A = \Gamma^B_{CA} \varepsilon_B$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_A, e_B) &= \Gamma^B_{CA} \varepsilon_B \\ -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_C} e_B, e_A) &= -\widetilde{g}(\Gamma^A_{CB} e_A, e_A) \\ \Rightarrow \; -\Gamma^A_{CB} \varepsilon_A &= \Gamma^B_{CA} \varepsilon_B \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} (w_{AB} + w_{BA})(e_C) &= \Gamma^A_{CB} \varepsilon_A + \Gamma^B_{CA} \varepsilon_B \\ &= \Gamma^A_{CB} \varepsilon_A - \Gamma^A_{CB} \varepsilon_A \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_{AB} + w_{BA} = 0 \tag{3.1.4}$$

elde edilir.

$\widetilde{R}$, $\widetilde{M}(c)$ nin eğrilik tensör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{C,D} \widetilde{R}_{ABCD} w_C \wedge w_D &= \widetilde{R}_{ABCD} \\ &= \widetilde{R}(e_A, e_B, e_C, e_D) \\ &= \widetilde{g}(\widetilde{R}(e_C, e_D) e_B, e_A) \\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_C} \widetilde{\nabla}_{e_D} e_B - \widetilde{\nabla}_{e_D} \widetilde{\nabla}_{e_c} e_B - \widetilde{\nabla}_{[e_C, e_D]} e_B, e_A) \\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{e_C}(\sum_E \Gamma^E_{DB} e_E) - \widetilde{\nabla}_{e_D}(\sum_E \Gamma^E_{CB} e_E), e_A) \\ &\quad -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_C, e_D]} e_B, e_A) \\ &= \varepsilon_A \{ \frac{\partial \Gamma^A_{DB}}{\partial e_C} - \frac{\partial \Gamma^A_{CB}}{\partial e_D} + \sum_E (\Gamma^E_{DB} \Gamma^A_{CE} - \Gamma^E_{CB} \Gamma^A_{DE}) \} \\ &\quad -\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_C, e_D]} e_B, e_A) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

dir. Diğer taraftan

$$w_{AB}(e_N) = w_A(\sum_E \Gamma^E_{NB} e_E) = \sum_E \Gamma^E_{NB} w_A(e_E)$$

olmak üzere

$$dw_{AB} + \sum_C \varepsilon_c w_{AC} \wedge w_{CB}$$

toplamı hesaplanırsa

$$
\begin{aligned}
&(dw_{AB}+\sum_{C}\varepsilon_c(w_{AC}\wedge w_{CB}))(e_M,e_N)\\
&=\frac{1}{2}\{e_M[w_{AB}(e_N)]-e_N[w_{AB}(e_M)]-w_{AB}[e_M,e_N]\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{C}\varepsilon_C\{w_{AC}(e_M)w_{CB}(e_N)-w_{AC}(e_N)w_{CB}(e_M)\}\\
&=\frac{1}{2}\{e_M[\sum_{E}\Gamma^E_{NB}w_A(e_E)]-e_N[\sum_{E}\Gamma^E_{MB}w_A(e_E)]-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_M,e_N]}e_B,e_A)\\
&\quad+\sum_{C}\varepsilon_C(\sum_{E}\Gamma^E_{MC}w_A(e_E)\sum_{E}\Gamma^E_{NB}w_C(e_E)\\
&\quad-\sum_{E}\Gamma^E_{NC}w_A(e_E)\sum_{E}\Gamma^E_{MB}w_C(e_E))\}\\
&=\frac{1}{2}\{e_M[\Gamma^A_{NB}\varepsilon_A]-e_N[\Gamma^A_{MB}\varepsilon_A]-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_M,e_N]}e_B,e_A)\\
&\quad+\sum_{C}\varepsilon_C(\Gamma^A_{MC}\varepsilon_A\Gamma^C_{NB}\varepsilon_C-\Gamma^A_{NC}\varepsilon_A\Gamma^C_{MB}\varepsilon_C)\}\\
&=\frac{1}{2}\{\varepsilon_A(\frac{\partial\Gamma^A_{DB}}{\partial e_C}-\frac{\partial\Gamma^A_{CB}}{\partial e_D}+\sum_{E}(\Gamma^A_{CE}\Gamma^E_{DB}-\Gamma^A_{DE}\Gamma^E_{CB}))\\
&\quad-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{[e_C,e_D]}e_B,e_A)\}
\end{aligned}
\tag{3.1.6}
$$

olduğu görülür. (3.1.5) ve (3.1.6) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
dw_{AB}+\sum_{C}\varepsilon_c w_{AC}\wedge w_{CB} &= \frac{1}{2}\widetilde{R}_{ABCD}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{C,D}\widetilde{R}_{ABCD}w_C\wedge w_D
\end{aligned}
$$

olur. Böylece ikinci yapı denklemi

$$
dw_{AB}=-\sum_{C}\varepsilon_c w_{AC}\wedge w_{CB}+\frac{1}{2}\sum_{C,D}\widetilde{R}_{ABCD}w_C\wedge w_D \tag{3.1.7}
$$

biçiminde elde edilir.

$\widetilde{M}(c)$, de Sitter uzayının Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri

$$
\widetilde{R}_{CD}e_A=c\{\widetilde{g}(e_A,e_C)e_D-\widetilde{g}(e_A,e_D)e_C\}
$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{ABCD} &= \widetilde{g}(\widetilde{R}_{CD}e_A, e_B) \\ &= c\{\widetilde{g}(e_A, e_C)\widetilde{g}(e_D, e_B) - \widetilde{g}(e_A, e_D)\widetilde{g}(e_C, e_B)\} \\ &= c(\varepsilon_A\delta_{AC}\varepsilon_B\delta_{BD} - \varepsilon_A\delta_{AD}\varepsilon_B\delta_{BC}) \\ &= c\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \\ &= c\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}) \qquad (3.1.8)\end{aligned}$$

dir.

Şimdi de M spacelike hiperyüzeyi için birinci ve ikinci yapı denklemleri ile Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri elde edilecektir. Bunun için,

$$w_{n+1} = 0 \qquad (3.1.9)$$

ve M nin

$$ds^2 = \sum (w_i)^2$$

Riemann metriği göz önüne alınacaktır. M spacelike hiperyüzeyinin ikinci temel formu

$$h = \sum h_{ij} w_i \otimes w_j$$

olmak üzere

$$0 = dw_{n+1} = -\sum w_{n+1,i} \Lambda w_i$$

ve Cartan lemmasından

$$w_{n+1,i} = \sum_j h_{ij} w_j \quad , \quad h_{ij} = h_{ji} \qquad (3.1.10)$$

yazılabilir. O halde $\widetilde{M}(c)$ nin birinci ve ikinci yapı denklemlerinden , M nin birinci ve ikinci yapı denklemleri, sırasıyla,

$$dw_i = -\sum_j w_{ij} \Lambda w_j \ , \quad w_{ij} + w_{ji} = 0 \qquad (3.1.11)$$

ve

$$dw_{ij} = -\sum_k w_{ik} \Lambda w_{kj} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} w_k \Lambda w_l \qquad (3.1.12)$$

şeklinde elde edilir. $\forall P \in M$ için, (h_{ij}) simetrik olduğundan uygun ortonormal bazlar seçilerek

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} \tag{3.1.13}$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlikler göz önüne alınırsa, M spacelike hiperyüzeyinin Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= g(R_{kl}e_i, e_j) \\
&= \widetilde{g}(\widetilde{R}_{kl}e_i, e_j) + \widetilde{g}(h(e_k, e_i), h(e_l, e_j)) - \widetilde{g}(h(e_k, e_j), h(e_l, e_i)) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + \widetilde{g}(h_{ik}e_{n+1}, h_{jl}e_{n+1}) - \widetilde{g}(h_{jk}e_{n+1}, h_{il}e_{n+1}) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + h_{ik}h_{jl}\widetilde{g}(e_{n+1}, e_{n+1}) - h_{jk}h_{il}\widetilde{g}(e_{n+1}, e_{n+1}) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{jk}h_{il})\widetilde{g}(e_{n+1}, e_{n+1}) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - (\lambda_i\delta_{ik}\lambda_j\delta_{jl} - \lambda_j\delta_{jk}\lambda_i\delta_{il}) \\
&= c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) - \lambda_i\lambda_j(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \qquad (3.1.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak, M nin ikinci temel formunun bileşenleri olan h_{ij} nin laplasyanı için bir eşitlik verilecektir. M spacelike hiperyüzeyinde h_{ij} ikinci temel formun bileşenlerinin kovaryant türev ve ikinci kovaryant türevi, sırasıyla, h_{ijk} ve h_{ijkl} olmak üzere

$$\sum_k h_{ijk}w_k = dh_{ij} - \sum_k h_{ik}w_{kj} - \sum_k h_{jk}w_{ki}, \tag{3.1.15}$$

$$\sum_l h_{ijkl}w_l = dh_{ijk} - \sum_l h_{ijl}w_{lk} - \sum_l h_{ilk}w_{lj} - \sum_l h_{ljk}w_{li} \tag{3.1.16}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece

$$h_{ijk} - h_{ikj} = 0 \tag{3.1.17}$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{im}R_{mjkl} + \sum_m h_{jm}R_{mikl} \tag{3.1.18}$$

elde edilir.

h_{ij} nin laplasyanı, $\Delta h_{ij} = \sum_k h_{ijkk}$ olduğundan, bu eşitliğe

$$-\sum_k h_{ikjk} + \sum_k h_{ikjk} - \sum_k h_{ikkj} + \sum_k h_{ikkj} - \sum_k h_{kkij} + \sum_k h_{kkij} = 0$$

ifadesi eklenirse sonuç değişmediğinden

$$\begin{aligned}
\Delta h_{ij} &= \sum_k h_{ijkk} - \sum_k h_{ikjk} + \sum_k h_{ikjk} - \sum_k h_{ikkj} + \sum_k h_{ikkj} - \sum_k h_{kkij} + \sum_k h_{kkij} \\
&= \sum_k (h_{ijkk} - h_{ikjk}) + \sum_k (h_{ikjk} - h_{ikkj}) + \sum_k (h_{ikkj} - h_{kkij}) + \sum_k h_{kkij}
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

dir. Burada $h_{ij} = h_{ji}$ ve $h_{ijk} = h_{ikj}$ olduğundan $h_{ijkk} = h_{ikjk}$ ve $h_{ikkj} = h_{kkij}$ dir. M spacelike hiperyüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{n} \sum_i h_{ii}$$

nin ikinci kovaryant türevi

$$nH_{ij} = \sum_k h_{kkij} \tag{3.1.20}$$

dir. (3.1.20) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\Delta h_{ij} = nH_{ij} + \sum_{m,k} h_{im} R_{mkjk} + \sum_{m,k} h_{km} R_{mijk} \tag{3.1.21}$$

elde edilir.

3.2. De Sitter Uzayında Total Geodezik Spacelike Hiperyüzeyler

Bu alt böümde, de Sitter uzayında spacelike hiperyüzeylerin total geodezik olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Ayrıca bu şartlar Einstein spacelike hiperyüzeylere uygulanacaktır.

Lemma 3.2.1. M, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayında spacelike hiperyüzey olsun. Eğer M nin ikinci temel formu, uygun ortonormal bazlar seçilerek, herhangi bir P noktasında

$$\begin{pmatrix} \lambda(P) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılabiliyor ise M total geodeziktir. Burada λ, M de fonksiyondur (Pang vd., 2002).

İspat. M spacelike hiperyüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_i h_{ii}$$

biçiminde tanımlı olduğundan

$$H(P) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_i h_{ii}(P) = \frac{1}{n}\lambda(P) \tag{3.2.1}$$

dir. $H(P)$ ortalama eğrilik fonksiyonu C^∞ olduğundan $\lambda(P)$ fonksiyonu da M de C^∞ olacaktır. Böylece (3.2.1) eşitliğinden

$$\lambda(P) = nH(P)$$

yazılabilir. Kabul edelim ki

$$\bigtriangledown\lambda(P) = \sum_i \lambda_i(P) w_i$$

$$\bigtriangledown^2\lambda(P) = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(P) w_i \otimes w_j$$

ve

$$\bigtriangledown h = \sum_{i,j,k} h_{ijk} w_i \otimes w_j \otimes w_k$$

olsun. (3.1.13), (3.1.14) eşitlikleri ve hipotezden

$$h_{11} = \lambda(P) \quad , \quad h_{ij} = 0 \quad (i,j) \neq (1,1) \tag{3.2.2}$$

olmak üzere

$$h_{11} = \lambda_1 \delta_{11}$$

dir. $h_{ij} = 0$ olduğundan

$$h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$$

olur. Buna göre (3.1.14) eşitliğinde

$$\lambda_i \lambda_j = 0 \ , \ (i,j) \neq (1,1) \qquad \text{ve} \qquad \lambda_1 = 1$$

değeri yerine yazılırsa

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{3.2.3}$$

elde edilir. M nin skalar eğriliği

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{i,j} R_{ijij} \\
&= c\sum_{i,j}(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) \\
&= c\sum_{i,j}\delta_{ii}\delta_{jj} - c\sum_{i,j}(\delta_{ij})^2 \\
&= cn\sum_{j}\delta_{jj} - c\sum_{i=j}(\delta_{jj})^2 \\
&= cn(n-1) \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

dir.

İkinci temel formun uzunluğunun karesi $\sigma = \sum_{i,j}(h_{ij})^2$ olmak üzere, σ laplasyanı

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \frac{1}{2}\sum_{k}\{e_k e_k(\sigma) - \nabla_{e_k}e_k(\sigma)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k}\{e_k e_k(\sum_{i,j}(h_{ij})^2) - \nabla_{e_k}e_k(\sum_{i,j}(h_{ij})^2)\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k}\{e_k(2\sum_{i,j}h_{ij}e_k(h_{ij})) - 2\sum_{i,j}h_{ij}\nabla_{e_k}e_k(h_{ij})\} \\
&= \sum_{k}\{e_k(\sum_{i,j}h_{ij}e_k(h_{ij})) - \sum_{i,j}h_{ij}\nabla_{e_k}e_k(h_{ij})\} \\
&= \sum_{i,j,k}\{e_k(h_{ij})e_k(h_{ij}) + h_{ij}e_k e_k(h_{ij}) - h_{ij}\nabla_{e_k}e_k(h_{ij})\} \\
&= \sum_{i,j,k}e_k(h_{ij})e_k(h_{ij}) + \sum_{i,j,k}h_{ij}e_k e_k(h_{ij}) - \sum_{i,j,k}h_{ij}\nabla_{e_k}e_k(h_{ij})
\end{aligned}$$

dir. Son iki ifade $\sum_{i,j}h_{ij}$ parantezine alınırsa,

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sum_{i,j,k}e_k(h_{ij})e_k(h_{ij}) + \sum_{i,j}h_{ij}\{\sum_{k}(e_k e_k(h_{ij}) - \nabla_{e_k}e_k(h_{ij}))\} \qquad (3.2.5)$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{k}(e_k e_k(h_{ij}) - \nabla_{e_k}e_k(h_{ij})) = \Delta h_{ij}$$

ve

$$\nabla h_{ij}(e_k) = \sum_{k} h_{ijk}w_k(e_k) = e_k(h_{ij}) = h_{ijk}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + \sum_{i,j}h_{ij}\Delta h_{ij} \tag{3.2.6}$$

dır. Diğer taraftan, $\sum\limits_{i,,j}h_{ij}\Delta h_{ij}$ ifadesi (3.1.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{i,,j}h_{ij}\Delta h_{ij} &= \sum_{i,,j}h_{ij}(nH_{ij} + \sum_{m,k}h_{im}R_{mkjk} + \sum_{m,k}h_{km}R_{mijk}) \\ &= n\sum_{i,j}h_{ij}H_{ij} + \sum_{i,j,k,m}h_{ij}h_{im}R_{mkjk} + \sum_{i,,j,k,m}h_{ij}h_{km}R_{mijk}\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Böylece (3.2.6) eşitliği

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i,j}h_{ij}H_{ij} + \sum_{i,j,k,m}h_{ij}h_{im}R_{mkjk} + \sum_{i,,j,k,m}h_{ij}h_{km}R_{mijk} \tag{3.2.7}$$

olur. (3.2.2), (3.2.3) eşitlikleri ve ortalama eğriliğin ikinci türevinden (3.2.7) eşitliği

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i}h_{ii}H_{ii} + \sum_{i,j,k,m}h_{ij}h_{im}c(\delta_{mj}\delta_{kk} - \delta_{mk}\delta_{kj}) \\ &\quad + \sum_{i,,j,k,m}h_{ij}h_{km}c(\delta_{mj}\delta_{ik} - \delta_{mk}\delta_{ij}) \\ &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + \lambda(P)\sum_{i}\lambda_{ii}(P) + \sum_{k,i=j=m=1}h_{ii}h_{ii}c(\delta_{ii} - \delta_{ik}\delta_{ki}) \\ &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + \lambda(P)\sum_{i}\lambda_{ii}(P) + \sum_{k,i=j=m=1}\lambda^2(P)c(1 - (\delta_{ik})^2) \\ &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + \lambda(P)\sum_{i}\lambda_{ii}(P) + \sum_{k,i}\lambda^2(P)c - \sum_{k,i}\lambda^2(P)c(\delta_{ik})^2 \\ &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + \lambda(P)\sum_{i}\lambda_{ii}(P) + c(n-1)\lambda^2(P) \qquad (3.2.8)\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Ayrıca $\sigma = \lambda^2(P)$ olduğundan

$$\frac{1}{2}\Delta\sigma = \frac{1}{2}\Delta\lambda^2(P)$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\lambda^2(P) &= \frac{1}{2}\sum_{i}\left\{e_ie_i(\lambda^2(P)) - \nabla_{e_i}e_i(\lambda^2(P))\right\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i}\left\{e_i\left(2\lambda(P)e_i(\lambda(P))\right) - 2\lambda(P)\nabla_{e_i}e_i(\lambda(P))\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\lambda^2(P) &= \sum_i \{e_i(\lambda(P)e_i(\lambda(P))) - \lambda(P) \bigtriangledown_{e_i} e_i(\lambda(P))\} \\
&= \sum_i \{\lambda(P)e_i(e_i(\lambda(P))) + e_i(\lambda(P))e_i(\lambda(P)) - \lambda(P) \bigtriangledown_{e_i} e_i(\lambda(P))\} \\
&= \sum_i e_i(\lambda(P))e_i(\lambda(P)) + \lambda(P)\sum_i \{e_ie_i(\lambda(P)) - \bigtriangledown_{e_i}e_i(\lambda(P))\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\sum_i \{e_ie_i(\lambda(P)) - \bigtriangledown_{e_i}e_i(\lambda(P))\} = \Delta\lambda(P),
$$

$$
e_i(\lambda(P)) = \lambda_i(P)
$$

ve

$$
\Delta\lambda(P) = \sum_i \lambda_{ii}(P)
$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\lambda^2(P) &= \sum_i e_i(\lambda(P))e_i(\lambda(P)) + \lambda(P)\Delta\lambda(P) \\
&= \sum_i (\lambda_i(P))^2 + \lambda(P)\sum_i \lambda_{ii}(P)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\frac{1}{2}\Delta\sigma = \frac{1}{2}\Delta\lambda^2(P) = \sum_i (\lambda_i(P))^2 + \lambda(P)\sum_i \lambda_{ii}(P) \tag{3.2.9}
$$

biçiminde yazılır. (3.2.8) ve (3.2.9) eşitliklerinden

$$
\sum_i (\lambda_i(P))^2 = \sum_{i,,j,k} (h_{ijk})^2 + c(n-1)\lambda^2(P) \tag{3.2.10}
$$

olur. Son olarak, Ricci eğriliğinin bileşenleri (3.2.3) eşitliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
R_{ij} &= \sum_k R_{kikj} \\
&= \sum_k c(\delta_{kk}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik}) \\
&= \sum_k c(\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik}) \\
&= \sum_k c\delta_{ij} - c\sum_k \delta_{kj}\delta_{ik} \\
&= c(n-1)\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Ricci eğriliğinin bileşenleri R_{ij}ler sabit olduğundan Ricci eğriliği sınırlıdır ve Bonnet-Myers teoreminden Ricci eğriliği sınırlı ise M kompakttır. Buna göre öyle bir P vardır ki, $\lambda(P)$ bu noktada maksimum değere sahip olur ve bu noktada

$$\lambda_{ii} \leq 0 \quad , \quad \lambda_i(P) = 0 \tag{3.2.11}$$

dır. (3.2.10) eşitliğinden görülür ki

$$\max_{P \in M^n} \lambda(P) = 0$$

ve aynı düşünceyle

$$\min_{P \in M^n} \lambda(P) = 0$$

elde edilir. Böylece

$$\lambda(P) \equiv 0$$

olur ve M total geodeziktir.

Teorem 3.2.2 M, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayının bir spacelike hiperyüzeyi olsun. $Ric(M)$ ve ρ, sırasıyla, M nin Ricci eğriliği ve skalar eğriliği olmak üzere

$$|Ric(M)|^2 \geq 2c\rho(n-1) - c^2 n(n-1)^2$$

dir (Pang vd., 2002).

İspat. M, spacelike hiperyüzeyinin Ricci eğrilik tensörünün bileşenleri (3.1.14) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \sum_k R_{kikj} \\
&= \sum_k \{c(\delta_{kk}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik}) - \lambda_k\lambda_i(\delta_{kk}\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik})\} \\
&= \sum_k \{c(\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik}) - \lambda_k\lambda_i(\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik})\} \\
&= -\sum_k \lambda_k\lambda_i\delta_{ij} + \sum_k \lambda_k\lambda_i\delta_{kj}\delta_{ik} + c\sum_k(\delta_{ij} - \delta_{kj}\delta_{ik}) \\
&= -\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k + \lambda_i\lambda_j\delta_{ij} + c\delta_{ij} - c\sum_k \delta_{ki}\delta_{kj} \\
&= -\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k + \lambda_i\lambda_j\delta_{ij} + c\delta_{ij} - c\sum_{k=i} \delta_{ii}\delta_{ij} \\
&= -\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k + \lambda_i\lambda_j\delta_{ij} + c(n-1)\delta_{ij}
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
|Ric(M)|^2 &= \sum_{i,j} R_{ij}^2 = \sum_{i,j}\{-\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k + \lambda_i\lambda_j\delta_{ij} + c(n-1)\delta_{ij}\}^2 \\
&= \sum_{i,j}\{\lambda_i^2(\sum_k \lambda_k)^2\delta_{ij} + \lambda_i^2\lambda_j^2\delta_{ij} + c^2(n-1)^2\delta_{ij} - 2\lambda_i^2\lambda_j\delta_{ij}\sum_k \lambda_k \\
&\quad -2c(n-1)\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k + 2c(n-1)\lambda_i\lambda_j\delta_{ij}\} \\
&= \sum_{i,j}(\lambda_i^2(\sum_k \lambda_k)^2\delta_{ij}) + \sum_{i,j}\left(\lambda_i^2\lambda_j^2\delta_{ij}\right) + c^2(n-1)^2\sum_{i,j}\delta_{ij} \\
&\quad -2\sum_{i,j}(\lambda_i^2\lambda_j\delta_{ij}\sum_k \lambda_k) - 2c(n-1)\sum_{i,j}(\lambda_i\delta_{ij}\sum_k \lambda_k) \\
&\quad +2c(n-1)\sum_{i,j}(\lambda_i\lambda_j\delta_{ij}) \\
&= (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_k \lambda_k)^2 + \sum_i \lambda_i^4 + c^2 n(n-1)^2 - 2\sum_i \lambda_i^3 \sum_k \lambda_k \\
&\quad -2c(n-1)(\sum_i \lambda_i)^2 + 2c(n-1)\sum_i \lambda_i^2 \qquad (3.2.13)
\end{aligned}$$

dir. M spacelike hiperyüzeyinin skalar eğriliği ise

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{i,j} R_{ijij} \\
&= \sum_{i,j}\{c(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji}) - \lambda_i\lambda_j(\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji})\} \\
&= \sum_{i,j}\{c(1-\delta_{ij}^2) - \lambda_i\lambda_j(1-\delta_{ij}^2)\} \\
&= \sum_{i,j} c(1-\delta_{ij}^2) - \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j(1-\delta_{ij}^2)\} \\
&= cn(n-1) - \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j + \sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\delta_{ij}^2 \\
&= cn(n-1) - (\sum_i \lambda_i)^2 + \sum_i \lambda_i^2 \\
&= -(\sum_i \lambda_i)^2 + \sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) \qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$(\sum_i \lambda_i)^2 = \sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho \qquad (3.2.15)$$

olur. (3.2.13) eşitliğinde (3.2.15) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
|Ric(M)|^2 &= (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) + \sum_i \lambda_i^4 + c^2 n(n-1)^2 \\
&\quad -2\sum_i \lambda_i^3 \sum_k \lambda_k - 2c(n-1)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) \\
&\quad +2c(n-1)\sum_i \lambda_i^2 \\
&= (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) + \sum_i \lambda_i^4 + c^2 n(n-1)^2 \\
&\quad -2\sum_i \lambda_i^3 \sum_k \lambda_k - 2c(n-1)\sum_i \lambda_i^2 - 2c^2 n(n-1)^2 + 2c(n-1)\rho \\
&\quad +2c(n-1)\sum_i \lambda_i^2 \\
&= (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) + \sum_i \lambda_i^4 - 2\sum_i \lambda_i^3 \sum_k \lambda_k \\
&\quad +2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan Cauchy Shwartz eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
|Ric(M)|^2 &= (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) + \sum_i \lambda_i^4 - 2\sum_i \lambda_i^3 \sum_k \lambda_k \\
&\quad +2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2 \\
&\geq (\sum_i \lambda_i^2)(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho) + \sum_i \lambda_i^4 \\
&\quad -2(\sum_i \lambda_i^4)^{1/2}(\sum_i \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2} \\
&\quad +2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2 \\
&= \{(\sum_i \lambda_i^4)^{1/2} - (\sum_i \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2}\}^2 \\
&\quad +2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2 \\
&= \{(\sum_i \lambda_i^4)^{1/2} - (\sum_i \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2}\}^2 \\
&\quad +2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2 \\
&\geq 2c(n-1)\rho - c^2 n(n-1)^2 \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.3. M, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayının spacelike hiperyüzeyi olsun. $Ric(M)$ ve ρ, sırasıyla, M nin Ricci eğriliği ve skalar eğriliği olmak üzere

$$|Ric(M)|^2 = 2c\rho(n-1) - c^2 n(n-1)^2 \Leftrightarrow M \text{ total geodeziktir}$$

(Pang vd., 2002).

İspat. **(⇐)** M spacelike hiperyüzeyi total geodezik olsun. O halde $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$ dir. (3.2.13) ve (3.2.14) eşitliklerinden

$$|Ric(M)|^2 = c^2 n(n-1)^2 \text{ ve } \rho = cn(n-1) \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} |Ric(M)|^2 &= 2c^2 n(n-1)^2 - c^2 n(n-1)^2 \\ &= 2ccn(n-1)(n-1) - c^2 n(n-1)^2 \\ &= 2c\rho(n-1) - c^2 n(n-1)^2 \end{aligned}$$

dir.

(⇒) M spacelike hiperyüzeyi için (3.2.16) eşitsizliği eşitlik olsun. Cauchy Shwartz eşitsizliği göz önüne alınırsa, belli bir λ değeri için

$$\lambda_i^2 = \lambda\lambda_i \quad , \qquad i = 1, 2, ..., n$$

veya

$$\lambda\lambda_i^2 = \lambda_i \quad , \qquad i = 1, 2, ..., n$$

biçiminde yazılabilir.

Burada

$$\lambda_i = \lambda \quad , \qquad i = 1, 2, ..., k$$

ve

$$\lambda_j = 0 \quad , \quad j = k+1, k+2, ..., n$$

şeklinde kabul edilirse $\lambda = 0$ ve $\lambda \neq 0$ durumlarını incelemek yeterli olur.

$\lambda = 0$ ise M total geodeziktir. $\lambda \neq 0$ ise (3.2.16) eşitliğinde

$$\{(\sum_i \lambda_i^4)^{1/2} - (\sum_i \lambda_i^2)^{1/2}(\sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2}\}^2 = 0$$

olmalıdır. Böylece λ_i değerleri yerine yazılırsa

$$(k\lambda^4)^{1/2} - (k\lambda^2)^{1/2}(k\lambda^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2} = 0$$

$$(k\lambda^4)^{1/2} = (k\lambda^2)^{1/2}(k\lambda^2 + cn(n-1) - \rho)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} k\lambda^4 &= (k\lambda^2)(k\lambda^2 + cn(n-1) - \rho) \\ &= k^2\lambda^4 + k\lambda^2 cn(n-1) - k\lambda^2\rho \end{aligned}$$

$$k\lambda^2\rho = k^2\lambda^4 - k\lambda^4 + k\lambda^2 cn(n-1)$$

$$\rho = (k-1)\lambda^2 + cn(n-1) \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.3) ve (3.2.13) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \rho &= -(\sum_i \lambda_i)^2 + \sum_i \lambda_i^2 + cn(n-1) \\ &= -(k\lambda)^2 + k\lambda^2 + cn(n-1) \\ &= (k-k^2)\lambda^2 + cn(n-1) \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

dir. (3.2.18) ve (3.2.19) eşitliklerinden

$$(k-1)\lambda^2 + cn(n-1) = (k-k^2)\lambda^2 + cn(n-1)$$

$$(k-1)\lambda^2 = (k-k^2)\lambda^2$$

$$\Rightarrow k = 1$$

dir. Bu ise $\lambda = \lambda_1 \neq 0$ ve diğer durumlarda λ nın sıfır olduğunu gösterir. O halde Lemma 3.2.1. den M total geodeziktir.

Sonuç. M, $Ric(M) = c(n-1)g$ eşitliği ile verilen, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayının spacelike Einstein hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M total geodeziktir (Pang vd., 2002).

İspat. M, $\widetilde{M}(c)$ da Spacelike Einstein hiperyüzey ve $Ric(M) = c(n-1)g$ olsun. O halde $\rho = cn(n-1)$ ve $|Ric(M)|^2 = c^2n(n-1)^2 = 2c\rho(n-1) - c^2n(n-1)^2$ dir. Böylece Teorem 3.2.2 den M total geodeziktir.

3.3. De Sitter Uzayında Total Umbilik Spacelike Hiperyüzeyler

Bu alt bölümde, de Sitter uzayında spacelike hiperyüzeylerin total umbilik olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 3.3.1. M, $\widetilde{M}(c)$ de n-boyutlu spacelike hiperyüzey olsun. Eğer $Ric(M) \leq (n-1)c$ ve $\mathcal{R} < c$ ise M nin ikinci temel formu semi-definit ve eğer sadece $Ric(M) < (n-1)c$ ise M nin ikinci temel formu definittir. Burada $\mathcal{R}$, M nin normalleştirilmiş skalar eğriliğidir (Zheng, 1996).

İspat. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ M nin ortonormal bazı olmak üzere M nin Ricci eğrilik tensörünün bileşenleri (3.2.12) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \sum_k R_{ikjk} \\ &= -\lambda_i \delta_{ij} \sum_k \lambda_k + \lambda_i \lambda_j \delta_{ij} + c(n-1)\delta_{ij} \end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

$$\sum_k \lambda_k = \sum_i h_{ii} = nH$$

eşitliği göz önüne alınırsa

$$Ric(i) = c(n-1) - \lambda_i nH + \lambda_i^2$$

elde edilir. Böylece

$$n\lambda_i H - \lambda_i^2 = (n-1)c - Ric(i) \tag{3.3.1}$$

dir. Burada $Ric(i)$, M nin e_i yönündeki Ricci eğriliğidir.
(3.2.14) eşitliğinden ve

$$(\sum_i \lambda_i)^2 = (\sum_i h_{ii})^2 = n^2 H^2$$

$$\sum_i \lambda_i^2 = \sum_i (h_{ii})^2 = \sigma$$

eşitliklerinden

$$\rho = cn(n-1) - n^2 H^2 + \sigma$$

elde edilir. Ayrıca M nin normalleştirilmiş skalar eğriliği $\mathcal{R} < c$ olduğundan

$$n^2H^2 - \sigma = n(n-1)(c - \mathcal{R}) \tag{3.3.2}$$

dir. Böylece, (3.3.2) eşitliği göz önüne alınarak ortalama eğriliğin bazı noktalarda sıfır olduğu düşünülürse, bu noktalarda hipotezin aksine $\mathcal{R} \geq c$ dir. Bu nedenle $H > 0$ kabul edilir. $Ric(M) \leq (n-1)c$ ve (3.3.1) eşitliğinden $\lambda_i \geq 0$ dır. Böylece h pozitif semi-definittir. Eğer $Ric(M) < (n-1)c$ ise $\lambda_i > 0$ olacağından h pozitif definittir.

Teorem 3.3.2. M, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayında spacelike hiperyüzey olsun. $H^2 \leq c - \mathcal{R}$ ise M total umbiliktir (Zheng, 1996).

İspat. M spacelike hiperyüzeyi için

$$\sigma - nH^2 = \sum_{i,j}(h_{ij} - H\delta_{ij})^2 \geq 0 \tag{3.3.3}$$

dır ve M total umbiliktir ancak ve ancak eşitlik vardır. Hipotezden ve (3.3.2) eşitliğinden, $\sigma \leq nH^2$ dir. Böylece $\sigma = nH^2$ dir, yani M total umbiliktir.

Lemma 3.3.3. $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayında M spacelike hiperhüzeyi total umbilik ise M, $c - H^2$ sabit kesit eğriliğine sahiptir (Zheng, 1996).

Teorem 3.3.4. $\widetilde{M}(c)$ nin, sabit skalar eğrilikli ve pozitif kesit eğrilikli, kompakt spacelike hiperyüzeyi M olsun. M nin ikinci temel formu semi-definit ise M total umbiliktir (Zheng, 1996).

İspat. M spacelike hiperyüzeyi sabit skalar eğriliğe ve pozitif kesit eğriliğine sahip olsun. (3.2.6) ve (3.2.7) eşitliklerinden M nin ikinci temel formunun uzunluğunun karesi σ nın laplasyanı

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{i,,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i,j}h_{ij}H_{ij} + \sum_{i,j,k,m}h_{ij}h_{im}R_{mkjk} + \sum_{i,,j,k,m}h_{ij}h_{km}R_{mijk} \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i}h_{ii}H_{ii} + \sum_{i,j,k,m}h_{ij}h_{im}R_{mkjk} + \sum_{i,,j,k,m}h_{ij}h_{km}R_{mijk} \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i}\lambda_i H_{ii} + \sum_{i=j=m,k}h_{ii}h_{ii}R_{ikik} + \sum_{i=j,k=m}h_{ii}h_{kk}R_{kiik} \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_{i}\lambda_i H_{ii} + \sum_{i,k}\lambda_i^2 R_{ikik} + \sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k R_{kiik} \qquad (3.3.4)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$R_{kiik} = c(\delta_{ki}\delta_{ik} - \delta_{kk}\delta_{ii}) - \lambda_k\lambda_i(\delta_{ik}\delta_{ik} - \delta_{kk}\delta_{ii})$$

ve

$$R_{ikik} = c(\delta_{ii}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{ki}) - \lambda_i\lambda_k(\delta_{ii}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{ki})$$

eşitliklerinden

$$\Rightarrow R_{kiik} = -R_{ikik} \tag{3.3.5}$$

dir. Bu eşitlik (3.3.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \sum_{i,k}\lambda_i^2 R_{ikik} + \sum_{i,k}\lambda_i\lambda_k R_{ikik} \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \sum_{i,k} R_{ikik}(\lambda_i^2 - \lambda_i\lambda_k) \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \sum_{i,k} R_{ikik}(\frac{\lambda_i^2}{2} - \lambda_i\lambda_k + \frac{\lambda_k^2}{2}) \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \sum_{i,k} R_{ikik}\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_k)^2 \\
&= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + n\sum_i \lambda_i H_{ii} + \sum_{i,j} R_{ijij}\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \qquad (3.3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca M nin skalar eğriliği sabit olduğundan, (3.3.2) eşitliği gereğince

$$n^2H^2 - \sigma = 0 \Rightarrow n^2H^2 = \sigma$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\sigma &= \frac{1}{2}n^2\Delta H^2 = \frac{1}{2}n^2\sum_i \left\{e_ie_i(H^2) - \nabla_{e_i}e_i(H^2)\right\} \\
&= \frac{1}{2}n^2\sum_i \{e_i(2He_i(H)) - 2H\nabla_{e_i}e_i(H)\} \\
&= n^2\sum_i \{e_i(He_i(H)) - H\nabla_{e_i}e_i(H)\} \\
&= n^2\sum_i e_i(H)e_i(H) + n^2H\sum_i \{e_ie_i(H) - \nabla_{e_i}e_i(H)\} \\
&= n^2\sum_i H_iH_i + n^2H\Delta H \\
&= n^2\sum_i (H_i)^2 + n^2H\sum_i H_{ii} \\
&= n^2\{\sum_i (H_i)^2 + H\sum_i H_{ii}\} \qquad (3.3.7)
\end{aligned}$$

dir. Burada H_i, H nin kovaryant türevidir. Böylece (3.3.6) ve (3.3.7) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} n^2H\sum_i H_{ii} - n\sum_i \lambda_i H_{ii} &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2\sum_i (H_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ n^2(\frac{1}{n}\sum_j \lambda_j)\sum_i H_{ii} - n\sum_i \lambda_i H_{ii} &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2\sum_i (H_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ n\sum_{j\neq i}\lambda_j \sum_i H_{ii} - n\sum_i \lambda_i \sum_i H_{ii} &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2\sum_i (H_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \\ n\sum_i(\sum_{j\neq i}\lambda_j) H_{ii} &= \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 - n^2\sum_i (H_i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

elde edilir. M spacelike hiperyüzeyi kompakt olduğundan, öyle bir P noktası için H maximum değere sahiptir ve bu noktada

$$H_{ii} \leq 0 \quad , \quad H_i = 0 \tag{3.3.9}$$

dır. Diğer taraftan, teoremin hipotezinden, $\lambda_{ii} \geq 0$ alabiliriz. Böylece M nin pozitif kesit eğrilikli olduğu göz önüne alınır ve (3.3.8) eşitliğinde (3.3.9) eşitliği kullanılırsa P noktasında

$$\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0 \tag{3.3.10}$$

elde edilir. Bu eşitlik P nin M nin bir umbilik noktası olduğunu gösterir. Böylece P noktasında, Gauss eşitliğinden $H^2 = c - \mathcal{R}$ dir. Bu ise H^2 nin P noktasında maximum değere sahip olduğunu gösterir. O halde M nin her noktasında $H^2 \leq c - \mathcal{R}$ dir. Teorem 3.3.2 den M total umbiliktir.

Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.4 ün bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç. M, $\widetilde{M}(c)$ de Sitter uzayında sabit skalar eğrilikli, kompakt spacelike hiperyüzey olsun. Eğer M

$$\begin{aligned} K(M) &> 0, \\ Ric(M) &\leq (n-1)c, \\ \mathcal{R} &< c \end{aligned}$$

özeliklerine sahip ise M total umbiliktir (Zheng, 1996).

5. KAYNAKLAR

Akutagawa, K., 1987. On Space-like Hypersurfaces with Constant Mean Cuvature in the de Sitter Space. Math. Z., 196, 13-19.

Cheng, Q. M., 1991. Complete Space-like Submanifolds in a de Sitter Space with Parallel Mean Curvature Vector. Math. Z., 206, 333-339.

Cheng, S. Y., Yau, S. T., 1976. Maximal Space-like Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Spaces. Ann. of Math., 104, 407-419.

Duggal, L. K., Bejancu, A., 1996. Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications. Kluwer Academic Publishers, 300 p., AH Dordrecht.

Goddard, A. J., 1977. Some Remarks on the Existence of Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature. Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,82, 489.

Hacısalihoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri. Ankara Üniversitesi, Fen-Fakültesi Yayınları Matbaası, Cilt 3, 205 s.

Hacısalihoğlu, H. H., 2003. Tensör Geometri. Ankara Üniversitesi, Fen-Fakültesi Yayınları Matbaası, 256 s.

Montiel, S., 1988. An Integral Inequality for Compact Spacelike Hypersurfaces in de Sitter Space and Applications to the Case of Constant Mean Curvature. Indiana Univ. Math.J., 37, 909-917.

Nishikawa, S., 1984. On Maximal Spacelike Hypersurfaces in a Lorentzian Manifold. Nagoya Math. J., 95, 117-124.

O'Neill, B., 1983. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, Inc., 468 p., New York.

Pang, H.D., Xu, S.L., Dai, S., 2002. Spacelike Hypersurfaces in de Sitter Space. J. of Geometry and Physics, 42, 78-84.

Ramanathan, J., 1987. Complete Spacelike Hypersurfaces of Constant Mean Curvature in de Sitter Space. Indiana Univ. Math. J., 36, 349-359.

Willmore, T. J., 1993. Riemannian Geometry. Clarendon Prees, Oxford, 318 p.

Zheng, Y., 1996. Spacelike Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature in the de Sitter Space. Differential Geometry and its Applications, 6, 51-54.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Pınar GÜRBÜZ
Doğum Yeri ve Yılı	:	ANTALYA 1981
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	:	1995-1999 Alanya Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Lise Bölümü
Lisans	:	1999-2003 Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Bölümü