2-BANACH UZAYLARI

Işıl AÇIK

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Isparta, 2007

T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-BANACH UZAYLARI

Işıl AÇIK

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2007

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda oybirliği ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Veli KURT
Akdeniz Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

ONAY

Bu tez 02 / 03 / 2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda, yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

02 / 03 /2007

Prof.Dr. Fatma GÖKTEPE
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2-BANACH UZAYLARI

Işıl AÇIK

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Jüri: Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL (Danışman)

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sırasıyla 2-normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizisi, 2-Banach uzaylar, n-normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizisi ve n-Banach uzayları kavramları tanıtılıp bunlara ilişkin bazı bilinen sonuçlar hatırlatılmıştır.

Orjinal sonuçlar üçüncü ve dördüncü bölümde yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, 2-Banach uzaylarda lineer operatörler dizisi yardımıyla T-yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve lineer operatörlerde kararlılık koşulu ve yaklaşım koşulu yardımıyla sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise, 2-Banach uzayları ve sınırlı lineer 2-fonksiyonel kavramları geliştirilmiş ve bu teoride bilinen bazı temel sonuçların n durumundaki benzerleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, Cauchy dizisi, 2-normlu uzaylar, 2-Banach uzayları, n-normlu uzaylar, n-Banach uzayları, T-yakınsaklık, sınırlı lineer 2-fonksiyonel.

2007, 44 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

2-BANACH SPACES

Işıl AÇIK

Süleyman Demirel University Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Thesis Committee: Prof. Dr. Veli KURT
Prof. Dr. Serpil PEHLİVAN
Asst.Prof. Mehmet GÜRDAL (Supervisor)

This thesis consists of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction of the subject.

In the second chapter, the concepts of convergence and Cauchy sequence in 2-normed spaces, 2-Banach spaces, convergence and Cauchy sequence in n-normed spaces, and n-Banach spaces are considered respectively. Also, some known results concerning these concepts are considered.

Our original results are presented in Chapters 3 and 4.

In the third chapter, the concept of T-convergence in 2-Banach spaces is introduced with the help of a sequence of linear operators. Furthermore, some results have been obtained by the approach condition and the stability condition of linear operators.

In the last chapter, the concepts of 2-Banach spaces and the bounded linear 2-functional have been developed. Meanwhile, we have examined n analogs of some basic known results of this theory.

Key Words: Convergence, Cauchy sequence, 2-normed spaces, 2-Banach spaces, n-normed spaces, n-Banach spaces, T-convergence, bounded linear 2-functional.

2007, 44 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, ayrıca diğer üniversitelerdeki uzman bilim adamlarıyla iletişim kurma hususunda beni cesaretlendiren danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL'a, çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümünü hazırlanırken bazı problemleri tartıştığımız Yrd. Doç. Dr. Ahmet Şahiner'e teşekkür ederim.

TBAG-HD/167 - 106T230 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (1002-A Hızlı Destek Programı) teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında manevi desteklerini devamlı hissettiğim nişanlıma ve aileme en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

.

Işıl AÇIK

ISPARTA, 2007

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^d$	d-boyutlu reel Öklid uzayı
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Vert\cdot,\cdot\Vert$	2-norm fonksiyonu
$\Vert\cdot\Vert_p$	$1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere baz ile elde edilen norm
$\Vert\cdot\Vert_\infty$	2-normların maksimumu olan sonsuz norm
$\Vert\cdot,...,\cdot\Vert$	n-norm fonksiyonu
$\Vert\cdot,...,\cdot\Vert_\infty$	$(n-1)$-boyutlu norm fonksiyonu
$\Vert\cdot,...,\cdot\Vert_S$	Standart n-norm
L	Vektör uzayının lineer manifoldu
$\{u_1,...,u_d\}$	d-boyutlu baz
$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x,r)$	$\{u_1,...,u_d\}$ bazı altındaki x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
F	Sınırlı lineer 2-fonksiyonel
$F_{n\text{fonk}}$	Sınırlı lineer n-fonksiyonel
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	İç çarpım fonksiyonu
X	Sonsuz boyutlu 2-Banach uzayı
$\overline{X_n}$	Sonlu boyutlu 2-Banach uzayı
$\{\overline{X}_n\}$	Sonlu boyutlu 2-Banach uzayları dizisi
T_n	Kısıtlama operatörü
$T_{2\text{norm}}$	2-normlu uzaylarda T-yakınsaklık
$\mathcal{L}(X,\overline{X}_n)$	Sınırlı lineer operatörler dönüşümü
$\Vert\cdot,\cdot\Vert_{C[0,\ell]}$	$C[0,\ell]$ nin standart 2-normu
A^T	A matrisinin transpozu
izA	A matrisinin köşegen elemanlarının toplamı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

İlk olarak 1963 yılında Gähler tarafından tanıtılan ve yine iki yıl sonra Gähler (1965) tarafından geliştirilen "2-Normlu Uzaylar" kavramı, 2-Metrik Uzaylar (Gähler, 1965; Ehret, 1969), Non-Archimedean 2-Normlu Uzaylar (Ingleton, 1952; Gähler 1965), 2-Banach Uzaylar (White, 1968; 1969), 2-Fonksiyonel (Lal ve Das, 1982), Lineer 2-Normlu Uzaylarda Tamlaştırma (Ehret, 1969), 2-İç Çarpım Uzayı (Diminnie vd., 1973; 1974; 1977), 2-Konvekslik (Diminnie, 1956; Diminnie ve White, 1978), Kombinatorik Teorisi (Grant, 1968) ve son zamanlarda İstatistiksel yakınsaklık (Gürdal ve Pehlivan, 2004) ve n-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve n-Banach Uzaylar (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)) gibi matematiğin temel alanlarıyla ve klasik Fonksiyonel Analiz ile olan ilişkisi nedeniyle bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Özellikle 2001 yılında Gunawan ve Mashadi tarafından "2-normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve Cauchy" kavramı verilerek bir çeşit yeni bir analiz kavramı ortaya konulmuştur. Bununla birlikte yine aynı yılda Gunawan ve Mashadi (2001(b)) yaptıkları çalışmada "n-normlu uzaylar ve n-Banach Uzaylar" kavramlarını vererek 2-normlu uzayları daha da genelleştirmişlerdir. 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı Gürdal ve Pehlivan (2004) tarafından son zamanlarda incelenerek yeni bir çalışma alanı oluşturulmuştur.

Bu Yüksek Lisans tezinde, 2-Banach uzaylarda lineer operatörleri kullanarak bir kısıtlama operatörüne göre yakınsaklık kavramı tanımlayacağız ve 2-Banach uzaylarda ki yakınsaklık kavramının genelleştirilmesini göstereceğiz. 2-Banach uzayları dizisi ile bir 2-Banach uzayına yaklaşım yöntemleri incelenecek ve bu incelemeler sayesinde uzayın yapısını belirleyeceğiz. Ayrıca yaklaşım ve kararlılık koşulları yardımıyla sayısal hesaplamalarda yaklaşık çözümler dizisinin operatöre göre tam çözüme yakınsak olması probleminin incelenmesinde kullanılabilecek bazı yöntemler geliştireceğiz. Son olarak, 2-normlu uzaylarda bilinen bazı sonuçların n durumundaki benzerlerini elde edeceğiz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yüksek lisans tezi olarak yapılan bu çalışmada kullanılacak olan bazı bilinen tanım, teorem ve notasyonlar verilecektir. Daha sonra "2-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık" ve "2-Banach Uzayları" kavramları tanıtılarak bunların yardımıyla elde edilen temel teoremler hatırlatılacak ve sonra da 2-normlu uzaylar ve 2-Banach uzaylardan daha genel olan sırasıyla, "n-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık" ve "n-Banach Uzayları" kavramları hakkında genel bilgiler verilecektir.

2.1. 2-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve 2-Banach Uzaylar

İlk olarak lineer 2-normlu uzaylara taban teşkil eden lineer uzay kavramını verelim.

Tanım 2.1.1. Bir X kümesi bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde $X \times X \to X$ ve $\mathbb{K} \times X \to X$ olacak şekilde aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X e bir *lineer uzay* denir:

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(ii) $x + y = y + x$;

(iii) $x + 0 = 0 + x = x$, $\forall x \in X$ için X de bir 0 elemanı vardır;

(iv) Her $x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olacak şekilde bir $-x \in X$ elemanı vardır;

(v) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$;

(vi) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;

(vii) $\alpha (\beta x) = (\alpha \beta) x$;

(viii) Her x, y, $z \in X$ ve α, $\beta \in \mathbb{K}$ için $1.x = x$ dir.

Burada $\mathbb{R}$ üzerindeki bir lineer uzaya *reel lineer uzay* ve $\mathbb{C}$ üzerindeki bir lineer uzaya *kompleks lineer uzay* denir.

Ayrıca (i)-(iv) özellikleri de X in toplama işlemi altında bir *abel (değişmeli) grup* olduğunu belirtir (Raymond vd., 2001).

Lineer uzayın bilinen bir örneğini verirsek,

Örnek 2.1.2. n-boyutlu $V_n(\mathbb{R})$ reel Öklid uzayı reel sayıların n-lilerinin kümesi olsun. Her $x = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ için toplam ve skalerle çarpım özellikleriyle

$$\begin{aligned} x + y &= (\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n) \\ \gamma x &= \gamma(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\gamma\alpha_1, ..., \gamma\alpha_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $V_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde, $V_n(\mathbb{C})$ ise $\mathbb{C}$ üzerinde bir lineer uzaydır (Raymond vd., 2001).

Şimdi bazı literatürlerde lineer alt uzay olarak da geçen lineer manifold kavramını tanımlayıp ikisi arasındaki farkı inceleyelim:

Tanım 2.1.3. V bir vektör uzayı ve L de V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer

$$L + v = \{l + v : l \in L\}$$

V nin bir alt vektör uzayı olacak şekilde bir $v \in V$ mevcut ise o zaman L ye V nin bir *lineer manifoldu* denir. Burada L nin boyutu $L + v$ nin boyutudur (Cristescu, 1977).

Tanım 2.1.4. boy L =boy $V - 1$ olduğu durumda bir V vektör uzayının tüm lineer manifoldlarının oluşturduğu düzleme *hiperdüzlem* denir. Yani L ye *hiperdüzlem* adı verilir (Cristescu, 1977).

Tanım 2.1.5. X bir lineer uzay ve M de X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her λ, $\mu \in \mathbb{C}$ ve x, $y \in M$ için $\lambda x + \mu y \in M$ ise M ye X in bir *alt uzayıdır* denir (Maddox, 1970).

Şimdi Bölüm 4 de kullanılacak olan bir lineer manifold örneği verelim:

Örnek 2.1.6. $y = 2x$ doğrusunun $\mathbb{R}^2$ de bir lineer manifold olup olmadığını inceleyelim. $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^2$ olduğundan $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $(x, 2x) \in \mathbb{R}^2$ olarak tanımlanırsa, Tanım 2.1.3 den $(0,0) + (x, 2x) \in \mathbb{R}^2$ elde edilir. Yani, $\mathbb{R}^2$ nin $L = \mathbb{R}^2 : y = 2x$ doğrusu bir lineer manifolddur. Ayrıca a, $b \in \mathbb{R}^2$ olacak şekilde

$a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2)$ alınırsa, her $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2) &= (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2) \\ \lambda a_2 + \mu b_2 &= 2(\lambda a_1 + \mu b_1) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\lambda a + \mu b \in \mathbb{R}^2$ koşulu sağlanır. Böylece $y = 2x$ doğrusu aynı zamanda bir lineer alt uzaydır.

Örnek 2.1.7. $y = x + 1$ doğrusunun $\mathbb{R}^2$ de bir lineer manifold olup olmadığını inceleyelim. Öncelikle lineer alt uzay olup olmadığına bakılırsa: $a = (a_1, a_2)$ ve $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ olsun. $\lambda a + \mu b \in \mathbb{R}^2$ için

$$\lambda(a_1, a_2) + \mu(b_1, b_2) = (\lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2)$$

elde edilir. Buradan $y = x + 1$ doğrusunu $y = x$ doğrusuna $(0, -1) \in \mathbb{R}^2$ noktasıyla ötelersek bir lineer alt uzay elde ederiz. Böylece $y = x + 1$ doğrusu $\mathbb{R}^2$ de bir lineer alt uzay değildir. Fakat bir lineer manifolddur.

Şimdi de adi anlamdaki normun tanımını hatırlatalım:

Tanım 2.1.8. Verilen bir X uzayı üzerinde tanımlanan $X \to \mathbb{R}$, $\|\cdot\|$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar ise

(N_1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N_2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(N_3) Her $x,\ y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

$\|\cdot\|$ fonksiyonuna bir *norm*, $\|\cdot\|$ normu üzerinde tanımlanan X lineer uzayına *normlu lineer uzay* denir ve $(X, \|\cdot\|)$ ile gösterilir. $\|\cdot\|$ fonksiyonu reel değerli fonksiyondur (Kreyszig, 1989).

Örnek 2.1.9. $V_n(\mathbb{R})$ n-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}$ üzerinde bir normlu lineer uzaydır ve $V_n(\mathbb{R})$ üzerindeki norm $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in V_n(\mathbb{R})$ için, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ norm koşullarını sağladığından $(V_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzaydır (Raymond vd. , 2001).

Örnek 2.1.10. $C[a, b]$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir normlu lineer uzaydır. $f \in C[a, b]$ nin normu $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$ olup norm koşullarını sağladığından $(C[a,b], \|\cdot\|)$ bir normlu lineer uzaydır (Raymond vd. , 2001).

Şimdi Gähler (1963; 1965) ve Gunawan ve Mashadi (2001(a)) de verilen 2-normlu uzaylar ve bu uzaylar üzerinde ifade edilen yakınsaklık tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.1.11. X, $2 \leq d < \infty$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonuna bir 2-*norm* ve $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisine de bir 2-*normlu uzay* denir:

(i) $\|x, y\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır;
(ii) $\|x, y\| = \|y, x\|$;
(iii) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
(iv) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.
2-normun bir standart örneği

$$0,\ x \text{ ve } y \text{ vektörlerinin oluşturduğu üçgenin alanı}$$

veya

$$x \text{ ve } y \text{ vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanının yarısı}$$

dır. Her x, $y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için her $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu uzayda $\|x, y\| \geq 0$ ve $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$ özellikleri sağlanır. Ayrıca, x, y ve z lineer bağımlı ise (örneğin, $d = 2$ olduğunda), $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ veya $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ dir (Gähler 1963; 1965; Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).
2-normlu $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ uzayı verilsin. Aşağıda tanımlanan bir dizinin limiti kavramından faydalanarak bir topoloji elde edilebilir.

Tanım 2.1.12. Her $y \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ ise X deki bir (x_n) dizisine x değerine *yakınsaktır* denir. Böyle bir durumda, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n := x$ ile gösterilir ve (x_n) *dizisinin limiti* x *dir* denir (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Şimdi 2-normlu uzaylarda yakınsak bir dizinin limitinin tek olduğunu gösterelim; (x_n) dizisinin X deki iki farklı x ve y limitlerine yakınsadığını kabul edelim.

$\|x-y,z\| \neq 0$ olacak şekilde $z \in X$ seçelim ve $\|x_N - x, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$ ve $\|x_N - y, z\| < \frac{1}{2}\|x-y,z\|$ olacak şekilde yeteri kadar büyük $N \in \mathbb{N}$ alalım. O zaman, üçgen eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|x-y,z\| &\leq \|x-x_N,z\| + \|x_N-y,z\| \\ &< \frac{1}{2}\|x-y,z\| + \frac{1}{2}\|x-y,z\| = \|x-y,z\| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu mümkün olmadığından $\lim_{n\to\infty} x_n$ tek olmalıdır.

Şimdi ise bir 2-normlu uzayda yakınsak dizileri tanımlayalım. Boyutu $2 \leq d \leq \infty$ olan X 2-normlu uzayı için $\{u_1, ..., u_d\}$ bir baz olsun. Tanımlanan bu baz yardımıyla 2-normlu uzaylardaki yakınsaklık kavramı için bazı karakterizasyonlar hatırlatılmıştır.

Yardımcı Teorem 2.1.13. X deki bir (x_n) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, ..., d$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, u_i\| = 0$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Yardımcı Teorem 2.1.13 ün devamından aşağıdaki ifade elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.14. X deki bir (x_n) dizisi X deki x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} \max\{\|x_n - x, u_i\| : i = 1, ..., d\} = 0$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Bu basit gerçek bizi Gunawan ve Mashadi (2001(a)) tarafından tanımlanan X üzerindeki bir norm tanımına götürür. X üzerinde $\{u_1, ..., u_d\}$ bazıyla bir norm tanımlayabiliriz. $\|.\|_\infty$ normunu

$$\|x\|_\infty := \max\{\|x, u_i\| : i = 1, ..., d\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Gerçekten, (i) $\|x\|_\infty = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır, (ii) $\|\alpha x\|_\infty = |\alpha| \|x\|_\infty$, ve (iii) $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ olduğundan $\|.\|_\infty$ norm koşullarını sağlar.
Genelde $1 \leq p \leq \infty$ için, X üzerinde $\|\cdot\|_p$ normu

$$\|x\|_p := \left\{ \sum_{i=1}^{d} \|x, u_i\|^p \right\}^{1/p}$$

biçiminde tanımlayabiliriz. Sırasıyla bu normlara sonsuz normu ve p normu olarak tanımlayacağız. Daha sonra bu iki normu Bölüm 3 de kullanacağız. X sonlu boyutlu olduğunda tüm bu normlar denktir. Burada üzerinde durmamız gereken önemli diğer durum, bu normların adi norm özelliklerini sağlamasına rağmen değer olarak adi normlardan farklı olmasıdır.

Ayrıca burada bazın seçimi önemli değildir. X için başka $\{v_1, ..., v_d\}$ şeklinde bir baz seçilir ve $\|\cdot\|_\infty$ normu bu baza ait olarak tanımlanırsa, sonuçta elde edilen norm $\{u_1, ..., u_d\}$ bazına ait olan tanımlamaya denk olacaktır.

Böylece $\|\cdot\|_\infty$ normu için bir başka karakterizasyon aşağıdaki gibi verilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1.15. X de bir (x_n) dizisinin X de x e yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normu yardımıyla, x noktasında r yarıçaplı (x, r) merkezli $B_{\{u_1,...,u_d\}}$ açık yuvarı

$$B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, r) := \{y : \|x - y\|_\infty < r\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yuvarları kullanarak, Yardımcı Teorem 2.1.15 aşağıdaki şekilde verilebilir.

Yardımcı Teorem 2.1.16. X de bir (x_n) dizisinin X de x e yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ N \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq N \Rightarrow x_n \in B_{\{u_1,...,u_d\}}(x, \varepsilon)$ olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).
Dolayısıyla yukarıda verilen düşünceleri de kullanırsak şunu yazabiliriz: Her sonlu boyutlu 2-normlu uzay bir normlu uzaydır ve bunların topolojileri ile $\|\cdot\|_\infty$ normu arasında bir ilişki vardır. Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 2.1.17. $X = \mathbb{R}^2$, $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinden meydana gelen paralelkenarın alanı olarak alalım. Bu açıkça

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1|, \ x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2)$$

formülüyle verilebilir. $\mathbb{R}^2$ için $\{i,\ j\}$ standart bazı alınsın. O zaman, $\|x,i\| = |x_2|$ ve $\|x,j\| = |x_1|$, ve $\{i,j\}$ bazına ait $\|\cdot\|_\infty$ normu

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,|x_2|\},\ x=(x_1,x_2)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, burada tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normu $\mathbb{R}^2$ üzerindeki düzgün norm ile tamamen aynıdır. Bundan dolayı, $B_{\{i,j\}}(x,r)$ yuvarı x merkezli r yarıçaplı bir karedir. Elde edilen norm $\mathbb{R}^2$ üzerindeki Öklid normuna denk olduğu için, yukarıdaki 2-normu ile donatılan $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminden başka bir şey ifade etmez sonucuna varırız.

Daha genel olarak Gunawan ve Mashadi (2001(a)) tarafından aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 2.1.18. $\|x,y\| :=$ x ve y den meydana gelen paralelkenarın alanında $\left(\mathbb{R}^d,\|\cdot,\cdot\|\right)$ 2-normlu uzayı bir normlu uzaydır ve bunun normu Öklid normuna eşittir (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Şimdi de bu kısımda Raymond vd. (2001) ne göre lineer 2-normlu uzaylardaki Cauchy dizisi ve dizi yakınsaklığı üzerine bazı tanımları ve 2-Banach uzaylarının temel bazı özelliklerini ve örneklerini hatırlatalım.

Tanım 2.1.19. X lineer 2-normlu uzayında herhangi bir (x_n) dizisi ve her $z \in X$ için

$$\lim_{n,\ m\to\infty}\|x_n - x_m, z\| = 0$$

ise (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Raymond vd., 2001).

Tanım 2.1.20. Eğer lineer 2-normlu X uzayında her Cauchy dizisi X de bir x değerine yakınsak ise $(X,\|.,.\|)$ ikilisine 2-*Banach uzayı* denir (Raymond vd., 2001).

Yukarıda verilen tanıma ve Gunawan ve Mashadi (2001(a)) nin elde ettiği $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre aşağıdaki ilişkiyi verebiliriz.

Yardımcı Teorem 2.1.21. $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu uzayın bir 2-Banach uzay olması için gerek ve yeter koşul $(X,\|\cdot\|_\infty)$ bir Banach uzay olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(a)).

Teorem 2.1.22. $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ bir lineer 2-normlu uzay olmak üzere a, b değerlerine göre (x_k) ve (y_k) 2-normlu X uzayında Cauchy dizileri ise,
(i) $(\|x_k, a\|)$ ve $(\|x_k, b\|)$ birer reel Cauchy dizileridir.
(ii) (α_k) bir reel Cauchy dizisi olmak üzere $(x_k + y_k)$ ve $(\alpha_k x_k)$ dizileri X de Cauchy dizileridir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.23. Her $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ lineer 2-normlu uzayda, aşağıdaki özellikler sağlanır:
(i) $x_k \to x, k \to \infty$ ve $y_k \to y, k \to \infty$ ise, $k \to \infty$ için $x_k + y_k \to x + y$,
(ii) $x_k \to x, k \to \infty$ ve $\alpha_k \to \alpha, k \to \infty$ ise, $k \to \infty$ için $\alpha_k x_k \to \alpha x$,
(iii) boy $X \geq 2$ ve $k \to \infty$ için $x_k \to x$ ve $x_k \to y$ ise, $x = y$
dir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.24. 2 boyutlu her lineer 2-normlu uzay tanımlandığı cisim altında tam ise bir 2-Banach uzayıdır (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.25. $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ bir lineer 2-normlu uzay olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, d\| = 0$$

ise, her bir $x \in X$ için $(\|x_n - x, d\|)$ bir yakınsak dizidir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.26. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x, d\| = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n, d\| = \|x, d\|$ dir (Raymond vd., 2001).

Şimdi Ehret (1969) in doktora tezinde tanımlanan 2-fonksiyonel kavramını hatırlayalım.

Tanım 2.1.27. A ve C lineer 2-normlu uzay üzerinde lineer manifoldlar olsun. $A \times C$ tanım kümesi üzerindeki bir reel değerli dönüşüme 2-*fonksiyonel* denir (Ehret, 1969).

Tanım 2.1.28. F, $A \times C$ tanım kümesindeki bir 2-fonksiyonel olsun. F fonksiyoneli

(i) $F(a+c,b+d)=F(a,b)+F(a,d)+F(c,b)+F(c,d)$

(ii) Verilen cisim altında α, β için $F(\alpha a,\beta b)=\alpha\beta F(a,b)$

koşullarını sağlarsa F değerine *lineer* 2-*fonksiyone*l veya *bilineer* 2-*fonksiyonel* denir (Ehret, 1969).

Tanım 2.1.29. F, $D(F)$ tanım kümesi üzerinde bir 2-fonksiyonel olsun. Her $(a,b)\in D(F)$ için $|F(a,b)|\leq K\|a,b\|$ olacak şekilde bir $K\geq 0$ reel sabiti var ise F fonksiyoneline *sınırlıdır* denir (Ehret, 1969).

F fonksiyoneli sınırlı ise F ifadesinin normu

$$\|F\|=\inf\{K:|F(a,b)|\leq K\|a,b\|,\ \ (a,b)\in D(F)\ \text{ için}\}$$

şeklinde tanımlanır. F sınırlı değil ise, $\|F\|=+\infty$ dur.

Yardımcı Teorem 2.1.30. F bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel, $(a,b)\in D(F)$ olmak üzere a ve b lineer bağımlı ise $F(a,b)=0$ dır (Ehret, 1969).

Teorem 2.1.31. F, $D(F)$ üzerinde bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}\|F\| &= \sup\{|F(x,y)|:\|x,y\|=1,\ \ (x,y)\in D(F)\}\\ &= \sup\left\{\frac{|F(x,y)|}{\|x,y\|}:\|x,y\|\neq 0,\ \ (x,y)\in D(F)\right\}\end{aligned}$$

dir (Ehret, 1969).

Tanım 2.1.32. Verilen $\varepsilon>0$ için $\|a-c,b\|<\delta$ ve $\|c,b-d\|<\delta$ veya $\|a-c,d\|<\delta$ ve $\|a,b-d\|<\delta$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı var ve

$$|F(a,b)-F(c,d)|<\varepsilon$$

ise F 2-fonksiyonel ifadesine (a,b) noktasında *süreklidir* denir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.33. $\|\cdot,\cdot\|$ 2-normu bir sürekli 2-fonksiyoneldir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.34. F lineer 2-fonksiyoneli $(0,0)$ noktasında sürekli ise F fonksiyoneli $D(F)$ tanım kümesindeki her bir noktada süreklidir (Raymond vd., 2001).

Teorem 2.1.35. F lineer 2-fonksiyonelin sürekli olması için gerek ve yeter koşul sınırlı olmasıdır (Raymond vd., 2001).

2.2. n-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve n-Banach Uzaylar

Bu kısımda n-normlu uzaylarda yakınsaklık kavramını hatırlatacağız. Gunawan ve Mashadi (2001(b)) $n \geq 2$ için verilen bir n-normlu uzaydan $(n-1)$-norm elde etmenin basit bir yolunu sunmuş ve her n-normlu uzayın bir $(n-1)$-normlu uzay olduğunu göstermiştir. Ayrıca belirli bazı koşullar altında, n-normdan $(n-1)$-norm elde edilebilir olduğunu ve bu yolla n-normdaki yakınsaklığın ve tamlığın elde edilen $(n-1)$-normdakine denk olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.2.1. $n \in \mathbb{N}$ için X, $d \geq n$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun (Burada, d yi sonsuz olarak alabiliriz). X^n üzerindeki bir reel değerli $\|\cdot,...,\cdot\|$ fonksiyonu

(i) $\|x_1,...,x_n\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_1,...,x_n$ lerin lineer bağımlı olması;

(ii) $\|x_1,...,x_n\|$ permütasyon altında değişmez;

(iii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|x_1,...,x_{n-1},\alpha x_n\| = |\alpha| \, \|x_1,...,x_n\|$;

(iv) $\|x_1,...,x_{n-1},y+z\| \leq \|x_1,...,x_{n-1},y\| + \|x_1,...,x_{n-1},z\|$

koşullarını sağlarsa $\|\cdot,...,\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir n-*norm* ve $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ ikilisine de bir n-*normlu uzay* denir (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

n-normlu bir uzayın bilinen örneği $X = \mathbb{R}^n$ dir ve her $i = 1,...,n$ için $x_i = (x_{i1},...,x_{in}) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere n-norm

$$\|x_1,...,x_n\|_E := \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır (E Öklid uzayını belirtir). Dikkat edilirse, $(X,\|\cdot,...,\cdot\|)$ n-normlu uzayında, her $x_1,...,x_n \in X$ ve $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ için $\|x_1,...,x_n\| \geq 0$

ve

$$\|x_1, ..., x_n\| = \|x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_{n-1} x_{n-1}\|$$

özellikleri sağlanır.

Uyarı 2.2.2. n-normlu $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ uzayında $\{a_1, ..., a_n\}$ bir lineer bağımsız kümesini alalım. X^{n-1} üzerinde tanımlanan $\|\cdot, ..., \cdot\|_\infty$ fonksiyonu,

$$\|x_1, ..., x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1, ..., x_{n-1}, a_i\| : i = 1, ..., n\},$$

ile tanımlanır. Bu tanımlanan $\|\cdot, ..., \cdot\|_\infty$ normuna göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.3. X üzerinde $\|\cdot, ..., \cdot\|_\infty$ fonksiyonu bir $(n-1)$-norm tanımlar (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Sonuç 2.2.4. Her $r = 1, ..., n-1$ için her n-normlu uzay bir $(n-r)$-normlu uzaydır. Özel olarak, her n-normlu uzay bir normlu uzaydır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Uyarı 2.2.5. Genelde $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$\|x_1, ..., x_{n-1}\|_p := \left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_1, ..., x_{n-1}, a_i\|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu aynı zamanda X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımlar. Bu $(n-1)$-normlar n tane $a_1, ..., a_n$ vektörlerinin aynı kümesini kullanmamız koşuluyla $\|\cdot, ..., \cdot\|_\infty$ normuna denktir. Bazı durumlarda, eğer n vektörlerin farklı kümeleri kullanılırsa $(n-1)$-norma denk olması mümkün olmayabilir.

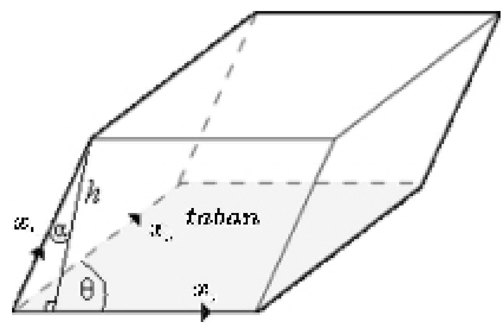
Şimdi de n-norm kavramı için standart durumu ele alalım. X uzayı $d \geq n$ boyutlu bir reel iç çarpım uzayı olsun. X deki standart n-norm

$$\|x_1, ..., x_n\|_S := \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & ... & \langle x_1, x_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & ... & \langle x_n, x_n\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

ile Gunawan ve Mashadi (2001(b)) tarafından tanımlanmıştır. Burada $X = \mathbb{R}^n$ ise, bu n-norm Öklid n-norm ile tamamen aynıdır.

Şimdi verilen yukarıdaki norma göre geometrik yapıyı verelim. Üstte verdiğimiz n-norm,

(i) $n = 1$ için, $\|x_1\|_S = \langle x_1, x_1\rangle^{\frac{1}{2}}$ adi normu, yani x_1 in uzunluğunu,
(ii) $n = 2$ için, $\|x_1, x_2\|_S = \left\{\|x_1\|_S^2 \|x_2\|_S^2 - \langle x_1, x_2\rangle^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ standart 2-normu, yani x_1 ve x_2 tarafından gerilen paralelkenarın alanını,
(iii) $n = 3$ için $\|x_1, x_2, x_3\|_S = \|x_1, x_2, x_3\|_E$ normunu, yani x_1, x_2 ve x_3 tarafından gerilen Şekil 2.2.1 deki paralelyüzün hacmini



Şekil 2.2.1

verir. Genelde, $\|x_1, ..., x_n\|_S$, X deki $x_1, ..., x_n$ ler tarafından gerilen n-boyutlu paralelyüzün hacmini belirtir.

Şimdi $\{e_1, ..., e_n\}$, X üzerinde bir ortogonal küme olsun. O halde, Teorem 2.2.3 ifadesinden

$$\|x_1, ..., x_{n-1}\|_\infty := \max\left\{\|x_1, ..., x_{n-1}, e_i\|_S : i = 1, ..., n\right\}$$

fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımlar. Bu norma göre, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2.6. Bir X standart n-norm üzerinde $\{e_1, ..., e_n\}$ bazına göre tanımlanan $\|\cdot, ..., \cdot\|_\infty$ $(n-1)$-normu standart $\|\cdot, ..., \cdot\|_S$ $(n-1)$-normuna denktir. Yani, her $x_1, ..., x_{n-1} \in X$ için

$$\|x_1, ..., x_{n-1}\|_\infty \leq \|x_1, ..., x_{n-1}\|_S \leq \sqrt{n}\,\|x_1, ..., x_{n-1}\|_\infty$$

dur (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Şimdi sonlu boyutlu durum için n-norm kavramını inceleyelim. $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ sonlu boyutlu n-normlu uzaylar için n-norm dan bir $(n-1)$-normun elde edilmesini hatırlayalım. X de $n \leq m \leq d$ olacak şekilde bir lineer bağımsız $\{a_1,...,a_m\}$ kümesi alalım. $\{a_1,...,a_m\}$ ifadesine göre,

$$\|x_1,...,x_{n-1}\|_\infty := \max\{\|x_1,...,x_{n-1},a_i\| : i = 1,...,m\}$$

ile X^{n-1} üzerinde $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ fonksiyonu tanımlanır.

Bu sebeple, Teorem 2.2.3 den, $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımlar.

Tanım 2.2.7. $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ n-normlu uzaydaki bir (x_k) dizisi her $z_1,...,z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, z_1,...,z_{n-1}\| = 0$$

koşulunu sağlarsa $x \in X$ elemanına n-normda *yakınsaktır* denir (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Aşağıdaki önerme n-normdaki yakınsaklıktan $(n-1)$-normdaki $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ yakınsaklığın elde edilmesini verir.

Önerme 2.2.8. (x_k) dizisi n-normda bir $x \in X$ elemanına yakınsak ise (x_k) aynı zamanda $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ $(n-1)$-normda x elemanına yakınsaktır, yani her $z_1,...,z_{n-2} \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, z_1,...,z_{n-2}\|_\infty = 0$$

dır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Teorem 2.2.9. Bir X standart n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\|\cdot,...,\cdot\|_\infty$ $(n-1)$-normda yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Sonuç 2.2.10. Bir standart n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul standart $(n-1)$-normda yakınsak olmasıdır ve tümevarım metodu ile her $r = 1, ..., n-1$ için standart $(n-r)$-normda yakınsak olmasıdır. Özellikle, standart n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\|\cdot\|_S := \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$ adi normda yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

$(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ sonlu boyutlu n-normlu uzayı için de benzer sonuç elde edilir. X için bir baz $\{b_1, ..., b_d\}$ olsun. $\{b_1, ..., b_d\}$ ile X^{n-1} üzerinde $\|\cdot, ..., \cdot\|_{\bowtie}$ fonksiyonu

$$\|x_1, ..., x_{n-1}\|_{\bowtie} := \max\left\{\|x_1, ..., x_{n-1}, b_i\| : i = 1, ..., d\right\}.$$

şeklinde tanımlansın. O zaman, $\|\cdot, ..., \cdot\|_{\bowtie}$ fonksiyonu X üzerinde bir $(n-1)$-norm tanımlar.

Önerme 2.2.11. X sonlu boyutlu n-normlu uzayda bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\|\cdot, ..., \cdot\|_{\bowtie}$ $(n-1)$-normda dizinin yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Sonuç 2.2.12. Bir standart X n-normlu uzay üzerinde $\|\cdot, ..., \cdot\|_{\infty}$, $\|\cdot, ..., \cdot\|_{\bowtie}$ $(n-1)$-normları ve $\|\cdot, ..., \cdot\|_S$ standart $(n-1)$-normu denktir. Sonuç olarak, bir standart X n-normlu uzay üzerinde tanımlı bir dizinin n-normda yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu tanımlanan üç tane $(n-1)$-normun birinde yakınsak olmasıdır (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Şimdi Gunawan ve Mashadi (2001(b)) tarafından verilen n-normlu uzaylarda Cauchy dizisi ve tamlık kavramlarını hatırlatalım.

Tanım 2.2.13. Her $z_1, ..., z_{n-1} \in X$ için

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m, z_1, ..., z_{n-1}\| = 0$$

ise $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ n-normlu uzaydaki bir (x_k) dizisine n-norma göre bir *Cauchy dizisi* denir. Eğer X de her Cauchy dizisi bir $x \in X$ değerine yakınsak ise n-norma göre X uzayına *tamdır* denir. Tam n-normlu uzaya bir *n-Banach uzayı* denir (Gunawan ve Mashadi, 2001(b)).

Gunawan ve Mashadi (2001(a)) nin 2-normlu uzaylarda verdiği aşağıdaki iki sonucu n-normlu uzayların genelleştirilmesi olarak benzer metodlarla verebiliriz.

Yardımcı Teorem 2.2.14. $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ bir n-normlu uzay olsun. X deki bir (x_k) dizisinin X deki bir x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, ..., n$ için $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, a_i\| = 0$ olmasıdır.

İspat. Her $i = 1, ..., n$ için $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, a_i\| = 0$ olsun. O zaman her $x_1, ..., x_{n-2} \in X$ ve $i = 1, 2, ..., n$ için $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, a_i\| = 0$ dır. Her $z \in X$ ve $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ için $z = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n$ yazılabilir. Üçgen eşitsizliğini kullanarak, her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, z\| \quad \leq \quad & |\alpha_1| \, \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, a_1\| + ... \\ & + |\alpha_n| \, \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, a_n\| \end{aligned}$$

elde edilir. Yani her $x_1, ..., x_{n-2} \in X$ ve $z \in X$ için

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}, z\| = 0$$

dır. Teoremin gerekliliği açıktır.

Yardımcı Teorem 2.2.14 ün devamından aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Yardımcı Teorem 2.2.15. $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ bir n-normlu uzay olsun. X deki bir (x_k) dizisinin X deki x elemanına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, x_1, ..., x_{n-2}\|_\infty = 0$ olmasıdır.

3. 2-BANACH UZAYLARDA YAKLAŞIM TEORİSİ

Yaklaşımlar teorisi, polinomların yaklaşımında, fonksiyonel analizin çeşitli alanlarında, diferansiyel ve integral denklemlerin nümerik çözümlerinde önemli uygulamalara sahiptir. Bu bölümdeki amacımız 2-Banach uzayılarını yaklaşım teorisi içerisinde incelemektir. Bunun için 2-Banach uzaylarda lineer operatörler dizisi yardımıyla T-yakınsaklık kavramını tanımlayıp lineer operatörlerde kararlılık koşulu ve yaklaşım koşulu yardımıyla sonuçlar elde edeceğiz ve konuyla ilgili bazı uygulamalar üzerinde duracağız.

3.1. 2-Banach Uzaylarda T-Yakınsaklık

$\left\{\overline{X}_n\right\}_1^\infty$ 2-Banach uzayları dizisini gözönüne alalım. Bu uzaylar dizisi ile X uzayına yaklaşım problemini inceleyeceğiz. $\overline{X}_n$ ve X uzayları arasındaki ilişki $T_n \in \mathcal{L}\left(X, \overline{X}_n\right)$, $n = 2, 3, ...$ lineer operatörler dizisinin yardımıyla verilecektir. Burada $T_n X = \overline{X}_n$, yani T_n nin değer kümesi $R\left(T_n\right) = \overline{X}_n$ dir. T_n operatörlerine kısıtlama operatörleri diyeceğiz. Uygulamalarda $\overline{X}_n$ nin sonlu boyutlu olduğu durum çok önemli olacaktır, çünkü $n \to \infty$ iken boy $\overline{X}_n \to \infty$ dur. $\overline{X}_n$ uzayının elemanlarını X uzayının elemanlarına yaklaşım yapmak için kullanacağız ve $\overline{x}_n \in \overline{X}_n$ elemanı ile $x \in X$ değerine yaklaşımı $\|\overline{x}_n - T_n x, z\|_{\overline{X}_n}$ ile tanımlayacağız. Her $\overline{X}_n$ uzayında $\overline{x}_n$ elemanı alalım. Bu elemanlardan bir $\{\overline{x}_n\}$ dizisi oluşturacağız.

Tanım 3.1.1. Eğer her $z \in \overline{X}_n$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|\overline{x}_n - T_n x, z\|_{\overline{X}_n} = 0$$

(veya $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\to} x$) ise $\{\overline{x}_n\}$ dizisi $x \in X$ değerine T-*yakınsaktır* denir.

Eğer $\overline{X}_n = X$, $n = 2, 3, ...$ ise T-yakınsaklık X deki 2-norm anlamındaki yakınsaklık ile çakışır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $\overline{x}_n, \overline{y}_n \in \overline{X}_n$; $x, y \in X$; α skaler ve $n \to \infty$ için

$\overline{x}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x$, $\overline{y}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} y$ olsun. O zaman

(i) Her α ve $n \to \infty$ için $(\alpha \overline{x}_n) \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} (\alpha x)$.

(ii) $(\overline{x}_n + \overline{y}_n) \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x + y$, $n \to \infty$

dir.

İspat. α skaler ve $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x$ olsun. Her $z \in \overline{X}_n$ için

$$\left\| \alpha \overline{x}_n - T_n(\alpha x), z \right\|_{\overline{X}_n} \leq \left\| \alpha(\overline{x}_n - T_n x), z \right\|_{\overline{X}_n} = |\alpha| \left\| \overline{x}_n - T_n x, z \right\|_{\overline{X}_n}$$

olup, her α ve $n \to \infty$ için $(\alpha \overline{x}_n) \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} (\alpha x)$ elde edilir. Benzer olarak (ii) ifadesi de ispatlanır.

Aşağıda vereceğimiz örnek T-limitin tek olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.3. $X = \ell_2$ ve $\overline{X}_n = \ell_2^{(n)}$ olsun. Burada ℓ_2 ve $\ell_2^{(n)}$ ifadeleri üzerinde tanımlı 2-normları verelim. Burada $\det A := \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{vmatrix}$ olmak üzere ℓ_2 üzerinde standart 2-norm

$$\|x, y\| = \left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k |\det A|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

olarak ve $\ell_2^{(n)}$ üzerinde standart 2-norm

$$\|x\|_2 := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x, u_k\|^2 \right\}^{1/2}$$

olarak verelim. T_n kısıtlama operatörlerini $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ için $T_n x = \left(\xi_{k+1}\right)_k^n$ olarak tanımlayalım. Şimdi $\xi_1^{(0)} = 0$ olmak üzere $x_0 = \left(\xi_k^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ ifadesini gözönüne alalım. O halde $n \to \infty$ için $\overline{x}_n = \left(\xi_{k+1}^{(0)}\right)_{k=1}^{n} \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x_0$ dır. Benzer şekilde $\xi_1^{(0)}$ keyfi sayı olmak üzere $x_0' = \left(\xi_k^{(0)}\right)_{k=1}^{\infty}$ ise $\overline{x}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x_0'$ dır. Böylece $\{\overline{x}_n\}$ dizisi sonsuz çoklukta T-limitlerine sahiptir. Dolayısıyla limit tek değildir.

Verilen örnekte T-limitin tek olmamasının nedeni $T_n x$ uzaylarının X uzayına çok kötü yaklaşım yapmasından dolayıdır.

Tanım 3.1.4. Eğer her $z \in \overline{X}_n$ için

$$\lim_{n \to \infty} \|T_n x, z\|_{\overline{X}_n} = 0$$

olmasından $\|x,z\|=0$ durumu; aynı zamanda x ve z lineer bağımsız ise $x=0$ durumu elde edilirse $\overline{X}_n$ deki 2-normlar *regülerdir* denir.

Bu 2-normların regülerlik koşulu altında aşağıda vereceğimiz teoreme göre T-limitin tekliği için gerek ve yeter koşul elde edilir.

Teorem 3.1.5. T-limitin tek olması için gerek ve yeter koşul $\overline{X}_n$ nin 2-normlarının regüler olmasıdır.

İspat. *Yeterlilik.* $\{\overline{x}_n\}$ dizisi x' ve $x'' \in X$ elemanlarına T-yakınsak olsun. O halde her $z \in \overline{X}_n$ için,

$$\|T_n(x'-x''),z\|_{\overline{X}_n} \leq \|T_nx'-\overline{x}_n,z\|_{\overline{X}_n} + \|\overline{x}_n - T_nx'',z\|_{\overline{X}_n}$$

olup $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x'-x''),z\|_{\overline{X}_n}=0$ dır. Buradan 2-normun regüler olması tanımı gereği $\|x'-x'',z\|=0$ durumu ve aynı zamanda $(x'-x'')$ ve z lineer bağımsız ise $x'-x''=0$ yani $x'=x''$ elde edilir. O halde T-limit tektir.

Gereklilik. T-limit tek olsun. O zaman her z için $\lim\limits_{n\to\infty}\|T_nx,z\|_{\overline{X}_n}=0$ olması $n\to\infty$ için $T_nx \overset{T_{2\text{norm}}}{\to} 0$ anlamına gelir. Diğer taraftan T nin lineer olmasından dolayı $x=0$ dır. Yani $\overline{X}_n$ nin 2-normları regülerdir.

Tanım 3.1.6. Eğer her $x\in X$, $y\in\overline{X}_n$ ve $z\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\|T_nx,y\|_{\overline{X}_n}=\|x,z\|$$

ise $\overline{X}_n$ deki 2-normlar X uzayının 2-normuyla *uyumludur* denir.

T_n ve X_n operatörlerini uygun bir şekilde seçmekle 2-normlarının uyumluluğunu sağlayabiliriz. Yukarıda verdiğimiz uyumluluk ve regülerlik tanımları gözönüne alınırsa, 2-normların uyumluluğundan $\overline{X}_n$ uzaylarının regülerliği elde ediliyor sonucunu verebiliriz. Burada uyumluluk koşulunu veren bir tanım vereceğiz, fakat bu bölümde inceleyeceğimiz konularla ilişkisini kurmayacağız.

Tanım 3.1.7. Eğer

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}\left(X,\overline{X}_n\right)} \leq M,\ n=2,3,... \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı bulunursa $\overline{X}_n$ uzaylarındaki normlar *düzgün sınırlıdır* denir.

Normların düzgün sınırlılık koşulu 2-normların uyumluluk koşulundan kolayca elde edilir. Bunuda yapmak için aşağıdaki genelleştirilmiş düzgün sınırlılık prensibi kullanılabilir.

Teorem 3.1.8. Eğer her $x \in X$ ve her $z \in \overline{X}_n$ için $\left\{\|T_n x, z\|_{\overline{X}_n}\right\}$ sınırlı ise $\left\{\|T_n\|_{\mathcal{L}\left(X,\overline{X}_n\right)}\right\}$ sınırlıdır.

Yukarıda verdiğimiz kavramları örneklerle inceleyelim. $X = C[0,\ell]$ aralığında $0 \leq t_1^{(n)} < ... < t_n^{(n)} \leq \ell$ noktalarını alalım. Aşağıdaki şekilde T_n kısıtlama operatörünü kuralım.

$$T_n x = \left(x\left(t_k^{(n)}\right)\right)_{k=1}^{n}. \tag{3.2}$$

Yani T_n operatörü her $x = x(t) \in C[0,\ell]$ fonksiyonuna karşılık $T_n x$ fonksiyonunun $t_k^{(n)}$ noktalarındaki değerlerinden oluşan sütun vektörleridir.

Böylece T_n operatörü X uzayını n-boyutlu $\overline{X}_n = \mathbb{R}^n$ sütun vektörlerin lineer uzayına dönüştürüyor. $\overline{X}_n$ elemanları $\overline{x}_n = (x_k)_{k=1}^n$ olsun.

$\overline{X}_n$ deki normu çeşitli yöntemlerle verebiliriz. Biz burada aşağıdaki iki çeşit normu kullanacağız. Önce, $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ bazına göre

$$\|\overline{x}_n\|_\infty := \max\{\|\overline{x}_n, u_k\| : 1 \leq k \leq n\} \tag{3.3}$$

tanımlı sonsuz normunu inceleyelim. Burada sonsuz normu s ile gösterirsek $\overline{X}_n = s^n$ almış oluyoruz. $\{\overline{x}_n\} = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^n \in s^n$, $n = 2, ..., k$ dizisinin $[0,\ell]$ de $x(t)$ sürekli fonksiyonuna T-yakınsak olması $n \to \infty$ için

$$\|\overline{x}_n - T_n x\|_\infty := \max\left\{\left\|x_k^{(n)} - x\left(t_k^{(n)}\right), u_k\right\| : 1 \leq k \leq n\right\} \to 0 \tag{3.4}$$

olması demektir.

Burada (3.4) eşitsizliğinden gözüküyor ki s^n deki 2-normlar $C[0,\ell]$ de tanımlanan 2-normla uyumludur. Bu sebeple T-yakınsaklığın tekliği garantilenmiş olur. Burada $C[0,\ell]$ üzerindeki iç çarpım $\langle x,y\rangle := \int\limits_0^\ell x(t)\,y(t)\,dt$ olmak üzere, $C[0,\ell]$ deki standart 2-norm

$$\|x,y\|_{C[0,\ell]} := \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \int\limits_0^\ell x(t)\,x(t)\,dt & \int\limits_0^\ell x(t)\,y(t)\,dt \\ \int\limits_0^\ell y(t)\,x(t)\,dt & \int\limits_0^\ell y(t)\,y(t)\,dt \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

dir. Şimdi ikinci bir norma geçelim. $\overline{X}_n$ yi E^n e dönüştüren 2-normu

$$\|\overline{x}_n\|_{2,\overline{X_n}} := \sqrt{\frac{\ell}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\|\overline{x}_n,u_k\|^2} \tag{3.5}$$

ile ifade edelim. Burada $\frac{\ell}{n(n-1)}$ çarpanını aşağıdaki muhakemelerden tanımlayacağız. $[0,\ell]$ de $x(t)\equiv 1$ ise $T_n x = (1)_{k=1}^n$ ifadesi yardımıyla (3.5) e göre $\|T_n.1\|_{2,\overline{X_n}} = \sqrt{\ell}$ elde edilir.

Buna göre $\{\overline{x}_n\}$ nin $x(t)\in C[0,\ell]$ ye T-yakınsak olması

$$\|\overline{x}_n - T_n x\|_{2,\overline{X_n}}^2 = \frac{\ell}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left\|x\left(t_k^{(n)}\right) - x_k^{(n)}, u_k\right\|^2 \to 0,\ n\to\infty \tag{3.6}$$

koşulunu sağlanması ile mümkündür.

Sayısal hesaplamalarda $\{\overline{x}_n\}$ dizisinin x değerine T-yakınsak olması gerçeği ve bunun yanısıra yakınsaklığın hızının da belirlenmesi çok önemlidir.

Tanım 3.1.9. Negatif olmayan sonsuz küçük $\{\varphi_n\}$ dizisini gözönüne alalım. Eğer her $z\in\overline{X}_n$ için

$$\|\overline{x}_n - T_n x, z\|_{\overline{X}_n} \le \varphi_n,\ n = 2,3,... \tag{3.7}$$

ise $\{\overline{x}_n\}$ dizisi x elemanına φ_n *hızıyla T-yakınsaktır* denir.

Tanım 3.1.10. $\{\psi_n\}$ herhangi bir pozitif bir dizi olsun. Eğer her $z\in\overline{X}_n$ için

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n^{-1}\|\overline{x}_n - T_n x, z\|_{\overline{X}_n} = 0 \tag{3.8}$$

ise $\{\overline{x}_n\}$ dizisi x elemanına $o\left(\psi_n\right)$ *hızıyla T-yakınsaktır* denir.

Özel durumda $o\left(1\right)$ hızıyla $\overline{x}_n \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ önermesi sadece $\overline{x}_n \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ anlamına gelir.

Tanım 3.1.9 ve Tanım 3.1.10 durumlarında x elemanının x_n dizisine yaklaşım mertebesi sırasıyla φ_n ve $o\left(\psi_n\right)$ dir. $X = C\left[0, \ell\right]$, $\overline{x}_n = \left(x_k^{(n)}\right)_{k=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Her $\overline{x}_n \in \overline{X}_n = \mathbb{R}^n$ için

$$\sqrt{\frac{\ell}{n\left(n-1\right)}}\left\|\overline{x}_n\right\|_\infty \leq \left\|\overline{x}_n\right\|_{2,\overline{X}_n} \leq \left\|\overline{x}_n\right\|_\infty \tag{3.9}$$

dur. (3.9) eşitsizliği sonsuz ve 2 normun $\mathbb{R}^n$ de denkliğini gösteriyor. $\mathbb{R}^n$ de,

i) $\{\overline{x}_n\}$ dizisinin sonsuz norm anlamında sürekli $x\left(t\right)$ fonksiyonuna T-yakınsak olmasını düzgün T-yakınsaklık,

ii) $\{\overline{x}_n\}$ dizisinin x değerine 2 norm anlamında T-yakınsaklığını ise ortalama T-yakınsaklık

olarak adlandıralım. Normun uyumluluğu tanımı ve (3.4) ifadesinden aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.1.11. $\{\overline{x}_n\}$ nin x e düzgün T-yakınsaklığından ortalama T-yakınsaklık elde edilir.

Bu verilen önermenin tersinin doğru olmadığını bir örnekle verelim.

Örnek 3.1.12. $\{\overline{x}_n\}$ dizisini $0 < \alpha < 1/2$ için $x_1^{(n)} = n^\alpha$ ve $x_k^{(n)} = 0$, $k = 2, ..., n$ seçelim. O halde $n \to \infty$ için $\left\|\overline{x}_n\right\|_{2,\overline{X}_n} = \sqrt{\ell}\sqrt{\frac{n^{2\alpha}-1}{n-1}} \to 0$ elde edilir. Yani ortalama anlamında $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} 0$ dır. Fakat $n \to \infty$ için $\left\|\overline{x}_n\right\|_\infty = \left(n^{2\alpha} - 1\right)^{1/2} \to \infty$ olup düzgün T-yakınsak değildir.

Fakat buna rağmen aşağıdaki önerme sağlanıyor.

Önerme 3.1.13. Eğer $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ ifadesi $o\left(1/\sqrt{n\left(n-1\right)}\right)$ hızıyla ortalama T-yakınsak ise o zaman $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ ifadesi düzgün T-yakınsaklıktır.

Gerçekten (3.9) eşitsizliğinin sol tarafına göre ve Tanım 3.1.10 gereği

$$\left\|\overline{x}_n - T_n x\right\|_\infty \leq \sqrt{n\left(n-1\right)\ell^{-1}}\left\|\overline{x}_n - T_n x\right\|_{2,\overline{X}_n} \to 0,\ n \to \infty$$

elde edilir.

Sonuç 3.1.14. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) Eğer $\{\overline{x}_n\} \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ ifadesi φ_n hızıyla düzgün T-yakınsak ise $\{\overline{x}_n\} \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ ifadesi aynı hızla T-yakınsaktır.

(ii) Eğer $\{\overline{x}_n\} \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ e $\varphi_n = o\left(1/\sqrt{n(n-1)}\right)$ hızıyla ortalama T-yakınsak ise $\{\overline{x}_n\} \overset{T_{2\mathrm{norm}}}{\longrightarrow} x$ değerine $\left(\sqrt{n(n-1)}\varphi_n\right)$ hızıyla T-yakınsaktır.

3.2. 2-Banach Uzaylarda Lineer Operatörlerin Yaklaşımları

X ve Y ifadeleri 2-Banach uzaylar olsun. Bu uzayların sırasıyla $\{T_n\}$ ve $\{T_n'\}$ kısıtlama operatörleri dizisi, $\{\overline{X}_n\}$ ve $\{\overline{Y}_n\}$ değerlerine yaklaşım yapan 2-Banach uzayları

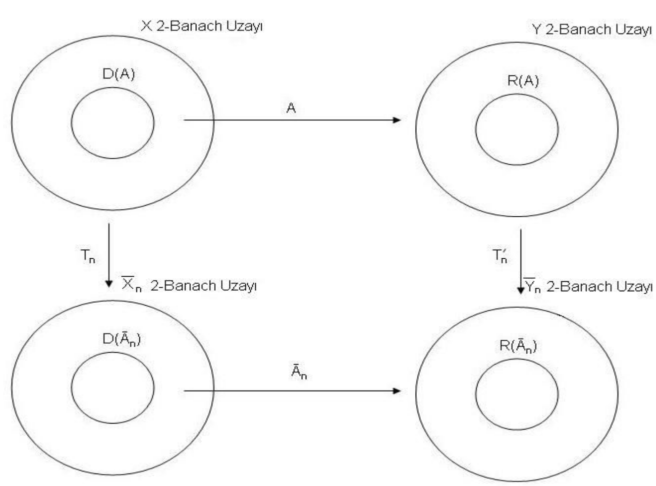
$$T_n X = \overline{X}_n \text{ ve } T_n' Y = \overline{Y}_n,\ n = 2, 3, ...$$

yaklaşımları ile temsil edilir.

Tanım kümesi $D(A) \subset X$ ve değer kümesi $R(A) \subset Y$ olan A lineer operatörünü gözönüne alalım. Burada genel olarak A yı sınırsız alacağız. A operatörüne tanım kümeleri $D\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{X}_n$ ve değer kümesi $R\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{Y}_n$ olan $\overline{A}_n$ lineer operatörleri dizisi ile yaklaşacağız. $n = 2, 3, ...$ iken

$$T_n(D(A)) \subset D\left(\overline{A}_n\right) \tag{3.10}$$

için koşulun sağlandığını kabul edelim. Tüm bu sembolik dildeki ifadeleri aşağıdaki şekilde gösterelim:



Şekil 3.2.1

Tanım 3.2.1. *(Yaklaşım Koşulu)* Eğer $n \to \infty$ ve her $z \in \overline{Y}_n$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \overline{A}_n T_n x - T'_n A x, z \right\|_{\overline{Y}_n} = 0 \tag{3.11}$$

ise $x \in D(A)$ elemanı üzerinde *yaklaşım koşulu* sağlanıyor veya $\{\overline{A}_n\}$ dizisini A ya x üzerinden yaklaştırıyor denir.

Buradan görüldüğü gibi (3.10) koşulu $\overline{A}_n T_n x \in \overline{Y}_n$ ifadesine anlam kazandırıyor. (3.11) yaklaşım koşulu ise $n \to \infty$ için

$$\overline{A}_n T_n x \overset{T'_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} Ax \tag{3.12}$$

olduğunu gösterir.

Yani yaklaşım koşulu ile lineer operatörler dizisinin kuvvetli veya noktasal yakınsaklığı arasında bir bağlantı mevcuttur.

Her $n = 2, 3, ...$ için $\overline{X}_n \equiv X$ ve $\overline{Y}_n \equiv Y$ olsun. O halde I_X, X deki birim operatör ve I_Y, Y deki birim operatör olmak üzere $T_n = I_X$ ve $T'_n = I_Y$ alalım. Ayrıca (3.12) de $\overline{A}_n$ yerine A_n yazalım. Şimdi yaklaşım koşulu $x \in D(A)$ elemanlarının bir M kümesi üzerinde her $z \in Y$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax, z\|_Y = 0,$$

olup bu ifade aynı zamanda M üzerinde $\{A_n\}$ nin A ya kuvvetli yakınsak olduğunu gösteriyor. Böylece yaklaşım koşulu kuvvetli yakınsaklık koşulunun genelleştirilmesidir. (3.11) yaklaşım koşulunu kısaca şöyle yazalım:

$$\overline{A}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} A, \ x \text{ üzerinde.}$$

Çoğu durumlarda yaklaşım koşulu aşağıdaki güçlendirilmiş şekilde sağlanır: yalnız x e bağlı n den bağımsız sabit olarak öyle bir $\alpha(x)$ ve $\varphi_n \geq 0$, $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$ olacak şekilde bir $\{\varphi_n\}$ dizisi vardır ki her $z \in \overline{Y_n}$ için

$$\left\| \overline{A}_n T_n x - T'_n A x, z \right\|_{\overline{Y_n}} \leq \alpha(x)\, \varphi_n \tag{3.13}$$

dir. Eğer $\varphi_n = \frac{1}{n^k}$, $k > 0$ ise x elemanı üzerinde A operatörünün $\{\overline{A}_n\}$ dizisiyle yaklaşım mertebesi k ya eşittir.

3.3. 2-Banach Uzaylarda Kararlılık Koşulu ve Uygulamalar

Önceki kısımda verilen Şekil 3.2.1 e göre $D\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{X_n}$, $R\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{Y}_n$, $T_nX = \overline{X}_n$, $T'_nY = \overline{Y}_n$ ve herhangi bir A operatöründen bağımsız olacak şekilde $\left(\overline{A}_n\right)$ lineer operatör dizisini gözönüne alalım.

Tanım 3.3.1. *(Kararlılık Koşulu)* Her $\overline{x}_n \in D\left(\overline{A}_n\right)$, $y \in \overline{Y}_n$ ve $z \in \overline{X}_n$ için öyle bir $n > N$ indis numarasından başlatılarak

$$\left\|\overline{A}_n\overline{x}_n, y\right\|_{\overline{Y}_n} \geq \gamma \left\|\overline{x}_n, z\right\|_{\overline{X}_n} \tag{3.14}$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ sabiti mevcutsa $\left(\overline{A}_n\right)$ *dizisi kararlılık koşulunu sağlıyor* denir.

Teorem 3.3.2. A, 2-Banach X uzayında yoğun $D(A)$ tanım kümesine ve 2-normlu Y uzayında $R(A)$ değer kümesine sahip kapalı lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(A)$, $y \in Y$ ve $z \in X$ için

$$\|Ax, y\| \geq \gamma \|x, z\|, \ \gamma > 0 \tag{3.15}$$

sağlanıyorsa $R(A)$ kapalıdır.

Üstteki teoreme göre (3.14) koşulundan belli bir $n > N$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) $\overline{R}_n = R\left(\overline{A}_n\right)$, $\overline{Y}_n$ de bir altuzaydır.
2) $\overline{R}_n$ de $\overline{A}_n^{-1}$ tanımlıdır.
3) Her z için $\left\|\overline{A}_n^{-1}, z\right\|_{\mathcal{L}\left(\overline{R}_n, \overline{X}_n\right)} \leq \gamma^{-1}$ dir.

Bazı durumlarda kararlılık koşulunun sağlandığını kolayca görmek için aşağıdaki şekilde yorum yapabiliriz.

Uyarı 3.3.3. Eğer her $n > N$ için $\overline{A}_n$ operatörlerinin tersi var ve sürekli yani, her z için $\left\|\overline{A}_n^{-1}\right\|_{\infty} \leq c$, $n = 2, 3, ...$ise kararlılık koşulu $\gamma = c^{-1}$ için sağlanır.

Örnek 3.3.4. $\overline{X}_n = \mathbb{R}^n$ ve $\overline{A}_n$ de

$$\overline{A}_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \end{pmatrix}_{n\times n}$$

ile verilsin. $n \times n$ tipindeki A ve B matrisleri üzerindeki iç çarpım $\langle A, B\rangle = iz\left(B^T A\right)$ olmak üzere matris üzerindeki standart 2-normu

$$\|A, B\| := \begin{vmatrix} \langle A, A\rangle & \langle A, B\rangle \\ \langle B, A\rangle & \langle B, B\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} iz\left(A^T A\right) & iz\left(B^T A\right) \\ iz\left(A^T B\right) & iz\left(B^T B\right) \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlayabiliriz. Burada A^T matrisi A nın transpozu ve iz kavramı da matrisin esas köşegen üzerindeki elemanlarının toplamına eşittir. O halde $\mathbb{R}^n$ deki standart baza göre

$$\left\|\overline{A_n^{-1}}\right\|_\infty := \max\left\{\left\|\overline{A_n^{-1}}, u_k\right\| : 1 \le k \le n^2\right\} = \frac{\sqrt{2n-1}}{n} \le 1$$

elde edilir. Buna göre Uyarı 3.3.3 gereği $\left\{\overline{A}_n\right\}$ kararlılık koşulunu sağlar.

Şimdi alınan operatöre göre yaklaşık çözümler dizisi yardımıyla bir tam çözümünü elde edeceğimiz T-yakınsaklık durumunu inceleyelim. Bunun için aşağıdaki denklemi gözönüne alalım.

$$Ax = y,\ y \in R(A) \tag{3.16}$$

olsun. A, $D(A) \subset X$ den $R(A) \subset Y$ ye dönüşen bir lineer operatör ve X ve Y 2-Banach uzaylar olsun. Burada A sınırlı olmayabilir.

(3.16) denklemine esas denklem diyelim ve $y \in R(A)$ koşulu altında mevcut çözümlerine de bu denklemin tam çözümleri diyelim.

Şimdi X uzayı $(T_n) : T_n X = \overline{X}_n$ kısıtlama operatörleri yardımıyla $\overline{X}_n$ 2-Banach uzaylarıyla yaklaştırılsın. Y uzayı da benzer şekilde $(T_n') : T_n' Y = \overline{Y}_n$ kısıtlama operatörleri yardımıyla $\overline{Y}_n$ 2-Banach uzaylarıyla yaklaştırılsın.

$$\begin{array}{ccc} X = \Pi\left(A\right) & \xrightarrow{A} & Y \\ \downarrow_{T_n} & & \downarrow_{T_n'} \\ \overline{X}_n = \Pi\left(\overline{A}_n\right) & \xrightarrow{\overline{A}_n} & \overline{Y}_n \end{array}$$

Şekil 3.3.1

Sonra yaklaşık denklemler dizisini $n = 2, 3, ...$ için

$$\overline{A}_n \overline{x}_n = \overline{y}_n, \ \overline{y}_n \in R\left(\overline{A}_n\right) \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\overline{A}_n$, yukarıdaki Şekil 3.3.1 den de görüleceği gibi $D\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{X}_n$ den $R\left(\overline{A}_n\right) \subset \overline{Y}_n$ ye dönüşen lineer operatördür. Şimdi verdiğimiz denklem ve dönüşümlere isim vermek gerekirse,

i) (3.17) denkleminin $\overline{x}_n$ çözümüne (3.16) denkleminin *yaklaşık çözümü*,

ii) (3.17) denklemlerine *yaklaşık sistem*,

iii) Eğer her yaklaşık çözüm dizisi bir tam çözüme T-yakınsak ise (3.17) *yaklaşık sistemi yakınsaktır* veya diğer bir değişle (3.17) de $\overline{x}_n$ dizisi (3.16) deki x e T-yakınsak ise (3.17) sistemi yakınsaktır,

diyelim. Burada i) deki yaklaşık çözüm mevcuttur, çünkü $\overline{y}_n \in R\left(\overline{A}_n\right)$ dir.

Şimdi (3.17) yaklaşık sisteminin yakınsaklığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.5. Aşağıdaki koşullar sağlansın. (i) $\overline{x}_n$ deki 2-normlar regüler olsun. (ii) $\left(\overline{A}_n\right)$ her tam çözüm üzerinde A nın yaklaşımı olsun ((3.11) dekiyle aynı). (iii) $\left(\overline{A}_n\right)$ dizisi için γ sabiti ile kararlılık koşulu sağlansın. (iv) $\overline{y}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} y$ olsun. O halde

(a) Tam çözüm tektir.

(b) Yeterince büyük n ler için yaklaşık çözüm tektir.

(c) Yaklaşık sistem yakınsaktır ve her $z \in \overline{X}_n$ ve $m \in \overline{Y}_n$ için

$$\left\|\overline{x}_n - T_n x, z\right\|_{\overline{X}_n} \leq \gamma^{-1}\left(\left\|\overline{y}_n - T_n y, m\right\|_{\overline{Y}_n} + \left\|T_n' A x - \overline{A}_n T_n x, m\right\|_{\overline{Y}_n}\right) \tag{3.18}$$

dir.

İspat. (a) (3.16) denkleminin iki farklı çözümü x_1 ve x_2 olsun. Yani $Ax_1 = y$ ve $Ax_2 = y$ alalım. O halde üçgen eşitsizliği ve kararlılık koşulu gözönüne alınarak yeterince büyük n ler ve her $m \in \overline{Y}_n$ ve $z \in \overline{X}_n$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \overline{A}_n T_n x_1 - T_n' A x_1, m \right\|_{\overline{Y}_n} + \left\| \overline{A}_n T_n x_2 - T_n' A x_2, m \right\|_{\overline{Y}_n} \\ \geq & \left\| \overline{A}_n T_n \left(x_1 - x_2 \right), m \right\|_{\overline{Y}_n} \geq \gamma \left\| T_n \left(x_1 - x_2 \right), z \right\|_{\overline{X}_n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sol tarafı (ii) koşuluna göre $n \to \infty$ için sıfıra yakınsaktır. O halde $\left\| T_n \left(x_1 - x_2 \right), z \right\|_{\overline{X}_n} \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} 0$, $n \to \infty$, dır. (i) regülerlik koşuluna göre $\| x_1 - x_2, z \| = 0$ durumu; aynı zamanda $(x_1 - x_2)$ ve z lineer bağımsız ise $x_1 - x_2 = 0$, yani $x_1 = x_2$ dir.

(b) Kararlılık koşulu ve (3.15) formülünden yeterince büyük n ler için yaklaşık çözüm tektir.

Şimdi (c) yi ispatlayalım. x ve $\overline{x}_n$ sırasıyla tam ve yaklaşık çözümler olsunlar. Kararlılık koşulu ve üçgen eşitsizliğini gözönünde bulundurarak, (3.16) ve (3.17) denklemlerinden yeterince büyük n ler ve her $z \in \overline{X}_n$ ve $m \in \overline{Y}_n$ için

$$\begin{aligned} \left\| \overline{x}_n - T_n x, z \right\|_{\overline{X}_n} & \leq \gamma^{-1} \left\| \overline{A}_n \left(\overline{x}_n - T_n x \right), m \right\|_{\overline{Y}_n} = \gamma^{-1} \left\| \overline{y}_n - \overline{A}_n T_n x, m \right\|_{\overline{Y}_n} \\ & \leq \gamma^{-1} \left[\left\| \overline{y}_n - T_n' y, m \right\|_{\overline{Y}_n} + \left\| T_n' A x - \overline{A}_n T_n x, m \right\|_{\overline{Y}_n} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. (ii) ve (iv) yaklaşım koşulları yardımıyla $n \to \infty$ için bu eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Buna göre $n \to \infty$ için $\overline{x}_n \overset{T_{2\text{norm}}}{\longrightarrow} x$ dir.

4. n-BANACH UZAYLARI VE SINIRLI n-FONKSİYONEL

Bu bölümde 2-Banach uzayları ve sınırlı lineer 2-fonksiyonel kavramlarını n-Banach uzayları ve sınırlı lineer n-fonksiyonellerine genelleştireceğiz. Bu sayede 2-normlu uzaylar teorisindeki bilinen bazı klasik sonuçları yeni verilecek tanımlar ışığı altında geliştireceğiz.

4.1. n-Banach Uzaylarda Temel Sonuçlar

Bölüm 2 deki 2.2 kısmında verilen n-normda yakınsaklık ve n-normda Cauchy dizileri için aşağıda elde edeceğimiz teoremler 2-Banach uzayların bir genişlemesini vermektedir.

Teorem 4.1.1. $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ bir n-normlu uzay olmak üzere $a_1, ..., a_{n-1}$ değerlerine göre (x_k) ve (y_k) n-normlu X uzayında Cauchy dizileri ise,

(i) $(\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\|)$ bir reel Cauchy dizisidir.
(ii) (α_k) bir reel Cauchy dizisi olmak üzere $(x_k + y_k)$ ve $(\alpha_k x_k)$ X de Cauchy dizileridir.

İspat. Öncelikle (i) durumunu ispatlayalım. n-normun tanımında verdiğimiz (iv) koşulundan

$$\begin{aligned}
\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\| &= \|(x_k - x_m) + x_m, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq \|x_k - x_m, a_1, ..., a_{n-1}\| + \|x_m, a_1, ..., a_{n-1}\|,
\end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\| - \|x_m, a_1, ..., a_{n-1}\| \leq \|x_k - x_m, a_1, ..., a_{n-1}\|$$

dir. Yani

$$|\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\| - \|x_m, a_1, ..., a_{n-1}\|| \leq \|x_k - x_m, a_1, ..., a_{n-1}\| \tag{4.1}$$

eşitsizliği elde edilir. (x_k) n-normlu X uzayında Cauchy dizisi olduğundan (4.1) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfıra yakınsar. O halde $(\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\|)$ değeri bir reel

Cauchy dizisidir. Şimdi de (ii) ifadesini ispatlayalım.

$$\begin{aligned}
\|(x_k + y_k) - (x_m + y_m), a_1, ..., a_{n-1}\| &= \|(x_k - x_m) + (y_k - y_m), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq \|x_m - x_k, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + \|y_k - y_m, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $(x_k + y_k)$, n-normlu X uzayında bir Cauchy dizisidir. (α_k) ve $(\|x_k, a_1, ..., a_{n-1}\|)$ reel Cauchy dizilerinin sınırlı olması gereği,

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_k x_k - \alpha_m x_m), a_1, ..., a_{n-1}\| &= \|(\alpha_k x_k - \alpha_k x_m) + \\
&\quad + (\alpha_k x_m - \alpha_m x_m), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq \|(\alpha_k x_k - \alpha_k x_m), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + \|(\alpha_k x_m - \alpha_m x_m), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq K_1 \|(x_k - x_m), a_1, ..., a_{n-1}\| + K_2 |\alpha_k - \alpha_m| \\
&\rightarrow 0 \quad (k,\ m \rightarrow \infty \text{ and for } K_1,\ K_2 \geq 0)
\end{aligned}$$

dır. Böylece $(\alpha_k x_k)$ X de bir Cauchy dizisidir.

Şimdi de n-normlu uzayda toplama ve çarpma işlemlerine göre bazı limit özelliklerini veren aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1.2. Her $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ lineer n-normlu uzayda, aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)$ $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ ve $y_k \rightarrow y, k \rightarrow \infty$ ise, $k \rightarrow \infty$ için $x_k + y_k \rightarrow x + y$,

$ii)$ $x_k \rightarrow x, k \rightarrow \infty$ ve $\alpha_k \rightarrow \alpha, k \rightarrow \infty$ ise, $k \rightarrow \infty$ için $\alpha_k x_k \rightarrow \alpha x$,

$iii)$ boy $X \geq n$ ve $k \rightarrow \infty$ için $x_k \rightarrow x$ ve $x_k \rightarrow y$ ise, $x = y$.

İspat. Önce $i)$ ifadesini ispatlayalım. n-normun tanımında verdiğimiz (iv) koşuluna göre

$$\begin{aligned}
\|(x_k + y_k) - (x + y), a_1, ..., a_{n-1}\| &= \|(x_k - x) + (y_k - y), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq \|x_k - x, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + \|y_k - y, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $ii)$ yi ispatlayalım. Bir reel yakınsak dizinin sınırlılığını kullanarak bazı $K \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\|(\alpha_k x_k - \alpha x), a_1, ..., a_{n-1}\| &\leq \|(\alpha_k x_k - \alpha_k x), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + \|(\alpha_k x - \alpha x), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&= |\alpha_k| \|(x_k - x), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + |\alpha_k - \alpha| \|x, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\leq K \|(x_k - x), a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\quad + |\alpha_k - \alpha| \|x, a_1, ..., a_{n-1}\| \\
&\rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

dır. Son olarak n-normun (iv) koşulunu kullanırsak

$$\|x - y, a_1, ..., a_{n-1}\| \leq \|x - x_k, a_1, ..., a_{n-1}\| + \|x_k - y, a_1, ..., a_{n-1}\|$$

eşitsizliğinden $\|x - y, a_1, ..., a_{n-1}\| = 0$ durumunu elde ederiz. Burada $x - y$ ve her $a_1, ..., a_{n-1} \in X$ için $a_1, ..., a_{n-1}$ lineer bağımlıdır. Böylece n-normun (i) koşulundan $x - y = 0$ elde edilir.

Daha önce bahsettiğimiz gibi lineer n-normlu uzayda her Cauchy dizisi aynı uzayda yakınsak ise n-Banach uzayı olarak tanımlanmıştır. Şimdi n-Banach uzayına bir örnek verelim.

Örnek 4.1.3. E^n, n-boyutlu lineer Öklid uzayı olsun.

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{11}e_1 + ... + x_{1n}e_n, \\
x_2 &= x_{21}e_1 + ... + x_{2n}e_n, \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n1}e_1 + ... + x_{nn}e_n
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\|x_1, ..., x_n\| := \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} x_{11} & ... & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & ... & x_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

ile tanımlanırsa $(E^n, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ ikilisi bir n-Banach uzayıdır.

Bu verilen örneğin n-Banach uzayı olduğunu $n = 3$ durumu için gösterelim. Yani E^3 3-boyutlu Öklid lineer uzayı için inceleyelim. $x = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $y = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ ve $z = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$ olsun.

$$\begin{aligned} \|x, y, z\| &= \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) \\ &= |a_1 (b_2c_3 - c_2b_3) + a_2 (b_3c_1 - c_3b_1) + a_3 (b_1c_2 - c_1b_2)| \end{aligned}$$

tanımlansın. O zaman $(E^3, \|\cdot, \cdot, \cdot\|)$ bir 3-Banach uzayıdır. E^3 de $x_k = a_ke_1 + b_ke_2 + c_ke_3$ bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|(x_k - x_m), y, z\| = 0$ olacak şekilde E^3 de bir $y = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ ve $z = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$ lineer bağımsız vektörleri mevcut olsun. (a_k), (b_k) ve (c_k) reel Cauchy dizileri olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \|x_k - x_m, y, z\| &= \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} a_k - a_m & b_k - b_m & c_k - c_m \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) \\ &= |(a_k - a_m) (b_2c_3 - c_2b_3) + (b_k - b_m) (a_3c_2 - c_3a_2) \\ &\quad + (c_k - c_m) (a_2b_3 - b_2a_3)| . \end{aligned}$$

Böylece, $\lim\limits_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m, y, z\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned} \alpha &: \lim_{k,m\to\infty} |(a_k - a_m) (b_2c_3 - c_2b_3)| = 0, \\ \beta &: \lim_{k,m\to\infty} |(b_k - b_m) (a_3c_2 - c_3a_2)| = 0, \\ \gamma &: \lim_{k,m\to\infty} |(c_k - c_m) (a_2b_3 - b_2a_3)| = 0 \end{aligned}$$

olmasıdır. (a_k) nın bir Cauchy dizisi olmadığını kabul edelim. O zaman $b_2c_3 = c_2b_3$ ve buradan $\frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3}$ olur ki bu y ve z lineer bağımsız olduğundan mümkün değildir. Böylece (a_k) bir Cauchy dizisidir. Benzer şekilde (b_k) ve (c_k) da birer Cauchy dizisidir. Ayrıca , $\mathbb{R}$ tam olduğundan, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = c$ olacak şekilde a, b ve c reel sayıları vardır. $x = ae_1 + be_2 + ce_3$ olsun. $x_k \to x$

$(k \to \infty)$ olduğunu göstermeliyiz. $y = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ ve $z = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$ E^3 ün birer elemanı olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \|(x_k - x), y, z\| &= \lim_{k\to\infty} \text{mutlak} \left(\begin{vmatrix} a_k - a & b_k - b & c_k - c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right) \\
&= \lim_{k\to\infty} [(a_k - a)(b_2c_3 - c_2b_3) + (b_k - b)(a_3c_2 - c_3a_2) \\
&\quad + (c_k - c)(a_2b_3 - b_2a_3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $(E^3, \|\cdot,\cdot,\cdot\|)$ bir 3-Banach uzayıdır. Benzer şekilde $(E^n, \|\cdot,...,\cdot\|)$ nin bir n-Banach uzay olduğu gösterilebilir.

Son olarak bu kısımdaki son iki teoremi verelim.

Teorem 4.1.4. $(X, \|\cdot,...,\cdot\|)$ bir lineer n-normlu uzay olsun.

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m, d_1, ..., d_{n-1}\| = 0 \tag{4.2}$$

ise, her bir $x \in X$ için $(\|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\|)$ bir yakınsak dizidir.

İspat. $\|\cdot,...,\cdot\|$, n-normun (iv) özelliğinden,

$$\begin{aligned}
\|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\| &= \|x_k - x_m + x_m - x, d_1, ..., d_{n-1}\| \\
&\leq \|x_k - x_m, d_1, ..., d_{n-1}\| + \|x_m - x, d_1, ..., d_{n-1}\|
\end{aligned}$$

elde ederiz ve

$$\|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\| - \|x_m - x, d_1, ..., d_{n-1}\| \leq \|x_k - x_m, d_1, ..., d_{n-1}\|.$$

yazılır. Gerçekten,

$$|\|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\| - \|x_m - x, d_1, ..., d_{n-1}\|| \leq \|x_k - x_m, d_1, ..., d_{n-1}\|$$

olur. Böylece (4.2) den, $(\|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\|)$ bir yakınsak dizidir.

Teorem 4.1.5. Eğer $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\| = 0$ ise, $\lim_{k\to\infty} \|x_k, d_1, ..., d_{n-1}\| =$

$\|x, d_1, ..., d_{n-1}\|$ dir.

İspat. Teorem 4.1.1 den

$$|\|x_k, d_1, ..., d_{n-1}\| - \|x, d_1, ..., d_{n-1}\|| \leq \|x_k - x, d_1, ..., d_{n-1}\|$$

dir. Eşitsizliğin her iki tarafının $k \to \infty$ için limiti alındığında ispat tamamlanır. Buradan, $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k, d_1, ..., d_{n-1}\| = \|x, d_1, ..., d_{n-1}\|$ bulunur.

4.2. Sınırlı Lineer n-Fonksiyonel

Bu kısımda klasik Fonksiyonel Analiz den hatırlayacağımız sınırlı lineer fonksiyoneller kavramının $n-$normdaki durumunu inceleyeceğiz ve sınırlı lineer $n-$fonksiyonel kavramı ile ilgili bazı temel özellikleri vereceğiz.

Tanım 4.2.1. Lineer n-normlu uzayın lineer manifoldları $A_1, ..., A_n$ olsun. $A_1 \times ... \times A_n$ tanım kümesinden reel sayılara olan dönüşüme *n-fonksiyonel* denir.

Tanım 4.2.2. Lineer n-normlu uzayın lineer manifoldları $A_1, ..., A_n$ ve tanım kümesi $A_1 \times ... \times A_n$ olmak üzere F, n-fonksiyonel olsun. Eğer
(i)

$$\begin{aligned}
F(x_1 + x_1', ..., x_n + x_n') &= F(x_1, ..., x_n) + F(x_1, x_2', x_3, ..., x_n) \\
&+F(x_1, x_2, x_3', x_4, ..., x_n) + ... + F(x_1, ..., x_n') \\
&+F(x_1, x_2', x_3', x_4, ..., x_n) + F(x_1, x_2', x_3, x_4', x_5, ..., x_n) \\
&+... + F(x_1, x_2', x_3, ..., x_n') + ... + F(x_1, ..., x_{n-1}', x_n') \\
&+F(x_1, x_2', x_3', x_4', x_5, ..., x_n) + ... \\
&+F(x_1, x_2', x_3', x_4, ..., x_n') \\
&+F(x_1, x_2', x_3, x_4', x_5', x_6, ..., x_n) + ... \\
&+F(x_1, x_2', x_3, ..., x_{n-1}', x_n') \\
&+... + F(x_1, ..., x_{n-3}, x_{n-2}', x_{n-1}', x_n') + ... \\
&+F(x_1, x_2'..., x_{n-1}', x_n')
\end{aligned}$$

$$+F(x_1', x_2, ..., x_n) + F(x_1', x_2', x_3, ..., x_n) + ... +$$
$$+F(x_1', x_2, ..., x_n') +$$
$$+F(x_1', x_2', x_3', x_4, ..., x_n) + F(x_1', x_2', x_3, x_4', x_5, ..., x_n)$$
$$+... + F(x_1', x_2', x_3, ..., x_n') + ...$$
$$+F(x_1', x_2, ..., x_{n-1}', x_n')$$
$$+F(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5, ..., x_n) + ...$$
$$+F(x_1', x_2', x_3', x_4, ..., x_n')$$
$$+F(x_1', x_2', x_3, x_4', x_5', x_6, ..., x_n) + ...$$
$$+F(x_1', x_2', ..., x_{n-1}', x_n');$$

$ii)$ Her $\alpha_1, ..., \alpha_n$ için $F(x_1, ..., x_n)$ fonksiyoneli tanımlandığı cisim altında $F(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_n x_n) = \alpha_1 ... \alpha_n F(x_1, ..., x_n)$
ise F e bir *lineer n-fonksiyonel* veya n lineer n-fonksiyonel denir.

Tanım 4.2.3. $D(F)$ tanım kümesi ile F bir n-fonksiyonel olsun. Eğer her $(x_1, ..., x_n) \in D(F)$ için

$$|F(x_1, ..., x_n)| \leq K \|x_1, ..., x_n\|$$

olacak şekilde $K \geq 0$ bir sabit mevcut ise F *sınırlıdır* denir. Eğer F sınırlı ise F in normu

$$\|F\| = \sup\{K : |F(x_1, ..., x_n)| \leq K \|x_1, ..., x_n\|, \ \forall (x_1, ..., x_n) \in D(F) \ \text{için}\}$$

ile tanımlanır.

Örnek 4.2.4. $\{e_1, ..., e_n\}$ standart bazı ile $(X, \|\cdot, ..., \cdot\|)$ bir lineer n-normlu uzay olsun. $a_1 = \alpha_{11}e_1 + ... + \alpha_{1n}e_n, ..., a_n = \alpha_{n1}e_1 + ... + \alpha_{nn}e_n$ile

$$F(a_1, ..., a_n) = \text{mutlak}\left(\begin{vmatrix} \alpha_{11} & ... & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & ... & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır. $b_1 = \beta_{11}e_1 + ... + \beta_{1n}e_n, ..., b_n = \beta_{n1}e_1 + ... + \beta_{nn}e_n$ olsun.

O zaman

$$
\begin{aligned}
& F\left(a_1+b_1,...,a_n+b_n\right) \\
= \ & \text{mutlak}\left(\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & ... & \alpha_{1n}+\beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}+\beta_{n1} & ... & \beta_{nn}+\alpha_{nn} \end{vmatrix}\right) \\
= \ & F(a_1,...,a_n)+F(a_1,b_2,a_3,...,a_n) \\
& +F(a_1,a_2,b_3,a_4,...,a_n)+...+F(a_1,...,b_n) \\
& +F(a_1,b_2,b_3,a_4,...,a_n)+F(a_1,b_2,a_3,b_4,a_5,...,a_n) \\
& +...+F(a_1,b_2,a_3,...,b_n)+...+F(a_1,...,b_{n-1},b_n) \\
& +F(a_1,b_2,b_3,b_4,a_5,...,a_n)+... \\
& +F(a_1,b_2,b_3,a_4,...,b_n) \\
& +F(a_1,b_2,a_3,b_4,b_5,a_6,...,a_n)+... \\
& +F(a_1,b_2,a_3,...,b_{n-1},b_n) \\
& +...+F(a_1,...,a_{n-3},b_{n-2},b_{n-1},b_n)+... \\
& +F(a_1,b_2,...,b_{n-1},b_n) \\
& +F(b_1,a_2,...,a_n)+F(b_1,b_2,a_3,...,a_n)+...+ \\
& +F(b_1,a_2,...,b_n)+ \\
& +F(b_1,b_2,b_3,a_4,...,a_n)+F(b_1,b_2,a_3,b_4,a_5,...,a_n) \\
& +...+F(b_1,b_2,a_3,...,b_n)+... \\
& +F(b_1,a_2,...,b_{n-1},b_n) \\
& +F(b_1,b_2,b_3,b_4,a_5,...,a_n)+... \\
& +F(b_1,b_2,b_3,a_4,...,b_n) \\
& +F(b_1,b_2,a_3,b_4,b_5,a_6,...,a_n)+... \\
& +F(b_1,b_2,...,b_{n-1},b_n),
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned}
F\left(c_1 a_1, ..., c_n a_n\right) &= \text{mutlak}\left(\left|\begin{array}{ccc} c_1\alpha_{11} & ... & c_1\alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n\alpha_{n1} & ... & c_n\alpha_{nn} \end{array}\right|\right) \\
&= \left(c_1 ... c_n\right)\text{mutlak}\left(\left|\begin{array}{ccc} c_1\alpha_{11} & ... & c_1\alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n\alpha_{n1} & ... & c_n\alpha_{nn} \end{array}\right|\right) \\
&= \left(c_1 ... c_n\right) F\left(a_1, ..., a_n\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, Tanım 4.2.2 ye göre F sınırlı lineer n-fonksiyoneldir.

Yardımcı Teorem 4.2.5. F sınırlı lineer n-fonksiyonel ve $x_1, ..., x_n \in D\left(F\right)$ olmak üzere $x_1, x_2, ..., x_n$ ler lineer bağımlı ise $F(x_1, ..., x_n) = 0$ dır.

İspat. F sınırlı olduğu için, her $(x_1, ..., x_n) \in D\left(F\right)$ için $|F(x_1, ..., x_n)| \leq \|F\| \|x_1, ..., x_n\|$ dir. Aynı zamanda $x_1, ..., x_n$ ler lineer bağımlı olduğundan $\|x_1, ..., x_n\| = 0$ dır. Bu sebeple,

$$|F(x_1, ..., x_n)| \leq \|F\| .0 = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. $D\left(F\right)$ tanım kümesi ile F sınırlı lineer $n-$fonksiyonel olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\|F\| &= \sup\left\{|F(x_1, ..., x_n)| : \|x_1, ..., x_n\| = 1, (x_1, ..., x_n) \in D\left(F\right)\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{|F(x_1, ..., x_n)|}{\|x_1, ..., x_n\|} : \|x_1, ..., x_n\| \neq 0, (x_1, ..., x_n) \in D\left(F\right)\right\}
\end{aligned}$$

dir.

İspat.

$$A = \sup\left\{|F(x_1, ..., x_n)| : \|x_1, ..., x_n\| = 1,\ (x_1, ..., x_n) \in D\left(F\right)\right\}$$

olsun. Her $(x_1, ..., x_n) \in D\left(F\right)$ için $|F(x_1, ..., x_n)| \leq \|F\| \|x_1, ..., x_n\|$ dir. Böylece $A \leq \|F\|$ olur. $\|x_1, ..., x_n\| \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$\left\|\frac{x_1}{\|x_1, ..., x_n\|}, x_2, ..., x_n\right\| = 1 \text{ ve } \left|F(\frac{x_1}{\|x_1, ..., x_n\|}, x_2, ..., x_n)\right| \leq A$$

dır. Bu sebeple, $\|x_1,...,x_n\| \neq 0$ olduğunda her $(x_1,...,x_n) \in D(F)$ için $|F(x_1,...,x_n)| \leq A\|x_1,...,x_n\|$ dır. Eğer $\|x_1,...,x_n\| = 0$ ise $x_1,...,x_n$ ler lineer bağımlı olup Yardımcı Teorem 4.2.5 den $F(x_1,...,x_n) = 0$ elde edilir. Böylece, $(x_1,...,x_n) \in D(F)$ için $|F(x_1,...,x_n)| \leq A\|x_1,...,x_n\|$ ve $\|F\| \leq A$ dır.

$$C = \sup\left\{\frac{|F(x_1,...,x_n)|}{\|x_1,...,x_n\|} : \|x_1,...,x_n\| \neq 0,\ (x_1,...,x_n) \in D(F)\right\}$$

olsun. $\|F\|$ in tanımından, $\|x_1,...,x_n\| \neq 0$ olmak üzere her $(x_1,...,x_n) \in D(F)$ için $|F(x_1,...,x_n)| / \|x_1,...,x_n\| \leq \|F\|$ elde edilir. Yani $C \leq \|F\|$ dir. Yardımcı Teorem 4.2.5 ve C nin tanımından her $(x_1,...,x_n) \in D(F)$ için, $|F(x_1,...,x_n)| \leq C\|x_1,...,x_n\|$ dir. Sonuç olarak, $\|F\| \leq C$ dir.

Tanım 4.2.7. Eğer verilen $\varepsilon > 0$ için $\|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| < \delta$, $\|y_1, x_2 - y_2, x_3,...,x_n\| < \delta$, ..., $\|y_1,...,y_{n-1}, x_n - y_n\| < \delta$, $\|y_1 - x_1, y_2,...,y_n\| < \delta$, $\|x_1, y_2 - x_2, y_3,...,y_n\| < \delta$, ..., $\|x_1,...,x_{n-1}, y_n - x_n\| < \delta$ olduğunda

$$|F(x_1,...,x_n) - F(y_1,...,y_n)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa bir F n-fonksiyoneli $(x_1,...,x_n)$ de *süreklidir* denir. F, tanım kümesindeki her bir noktada sürekli ise F süreklidir.

Teorem 4.2.8. $\|\cdot,...,\cdot\|$ n-normu bir sürekli n-fonksiyoneldir.

İspat. $\|\cdot,...,\cdot\|$ n-normun tanımından,

$$\begin{aligned}
\|x_1,...,x_n\| &= \|(x_1 - y_1) + y_1, x_2,...,x_n\| \\
&\leq \|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| + \|y_1, x_2,...,x_n\| \\
&= \|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| + \|y_1, (x_2 - y_2) + y_2, x_3,...,x_n\| \\
&\leq \|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| + \|y_1, x_2 - y_2, x_3,...,x_n\| \\
&\quad + \|y_1, y_2, x_3,...,x_n\| \\
&\quad \vdots \\
&= \|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| + \|y_1, x_2 - y_2, x_3,...,x_n\| \\
&\quad +... + \|y_1,...,y_{n-1}, (x_n - y_n) + y_n\| \\
&\leq \|x_1 - y_1, x_2,...,x_n\| + \|y_1, x_2 - y_2, x_3,...,x_n\| \\
&\quad +... + \|y_1,...,y_{n-1}, x_n - y_n\| + \|y_1,...,y_{n-1}, y_n\|
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\|x_1,...,x_n\| - \|y_1,...,y_n\| \quad \leq \quad & \|x_1 - y_1, x_2, ..., x_n\| \\ & + \|y_1, x_2 - y_2, x_3, ..., x_n\| \\ & + \|y_1, y_2, x_3 - y_3, x_4, ..., x_n\| + ... + \\ & \|y_1, ..., y_{n-1}, x_n - y_n\|\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\|y_1,...,y_n\| &= \|y_1,...,y_{n-1},(y_n - x_n) + x_n\| \\ &\leq \|y_1,...,y_{n-1},y_n - x_n\| + \|y_1,...,y_{n-1},x_n\| \\ &= \|y_1,...,y_{n-1},y_n - x_n\| + \|y_1,...,y_{n-2},(y_{n-1} - x_{n-1}) + x_{n-1},x_n\| \\ &\leq \|y_1,...,y_{n-1},y_n - x_n\| + \|y_1,...,y_{n-2},y_{n-1} - x_{n-1},x_n\| \\ &\quad + \|y_1,...,y_{n-2},x_{n-1},x_n\| \\ &\quad \vdots \\ &= \|y_1,...,y_{n-1},y_n - x_n\| + \|y_1,...,y_{n-2},y_{n-1} - x_{n-1},x_n\| \\ &\quad +... + \|y_1 - x_1,x_2,...,x_n\| + \|x_1,...,x_n\|\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}\|y_1,...,y_n\| - \|x_1,...,x_n\| \quad \leq \quad & \|x_1 - y_1, x_2, ..., x_n\| \\ & + \|y_1, x_2 - y_2, x_3, ..., x_n\| \\ & + \|y_1, y_2, x_3 - y_3, x_4, ..., x_n\| + ... + \\ & \|y_1, ..., y_{n-1}, x_n - y_n\|\end{aligned}$$

dır. Bu şekilde

$$\begin{aligned}|\|x_1,...,x_n\| - \|y_1,...,y_n\|| \quad \leq \quad & \|x_1 - y_1, x_2, ..., x_n\| \\ & + \|y_1, x_2 - y_2, x_3, ..., x_n\| \qquad (4.3) \\ & + \|y_1, y_2, x_3 - y_3, x_4, ..., x_n\| + ... + \\ & \|y_1, ..., y_{n-1}, x_n - y_n\|\end{aligned}$$

elde edilir. (4.3) ve Tanım 4.2.7 den $\|\cdot,...,\cdot\|$ n-norm bir sürekli n-fonksiyoneldir.

Teorem 4.2.9. Eğer bir F lineer n-fonksiyonel $(0, ..., 0)$ da sürekli ise o zaman $D(F)$ tanım kümesinin her bir noktasında F süreklidir.

İspat. Eğer F lineer ise $F(0, ..., 0) = 0$ dır. Ayrıca F n-fonksiyoneli $(0, ..., 0)$ da sürekli olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için $\|a_1, ..., a_n\| < \delta$ olduğunda $|F(a_1, ..., a_n)| < \frac{\varepsilon}{n}$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. $(x_1, ..., x_n) \in D(F)$ olsun. O zaman $\|x_1 - a_1, x_2, ..., x_n\| < \delta$, $\|a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_n\| < \delta, ...,$ $\|a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n\| < \delta$ olduğunda

$$\begin{aligned}
|F(x_1, ..., x_n) - F(a_1, ..., a_n)| &= |F(x_1, ..., x_n) - F(a_1, x_2, ..., x_n) \\
&\quad + F(a_1, x_2, ..., x_n) - F(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) \\
&\quad + F(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) + ... + F(a_1, ..., a_{n-1}, x_n) \\
&\quad - F(a_1, ..., a_n)| \\
&\leq |F(x_1, ..., x_n) - F(a_1, x_2, ..., x_n)| \\
&\quad + |F(a_1, x_2, ..., x_n) - F(a_1, a_2, x_3, ..., x_n)| \\
&\quad + ... + |F(a_1, ..., a_{n-1}, x_n) - F(a_1, ..., a_n)| \\
&= |F(x_1 - a_1, x_2, ..., x_n)| \\
&\quad + |F(a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_n)| \\
&\quad + ... + |F(a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{n} + ... + \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Böylece F $n-$fonksiyoneli $(x_1, ..., x_n)$ de süreklidir.

Teorem 4.2.10. Bir lineer F n-fonksiyonelin sürekli olması için gerek ve yeter koşul F in sınırlı olmasıdır.

İspat. F in sürekli olduğunu kabul edelim. $(x_1, ..., x_n) \in D(F)$ için $\|x_1, ..., x_n\| < \delta$ olduğunda $|F(x_1, ..., x_n)| < 1$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ mevcuttur. Lineer bağımsız olan $y_1, ..., y_n$ ler ile $(y_1, ..., y_n) \in D(F)$ için

$$\left(\frac{y_1}{\|y_1, ..., y_n\|} \left(\frac{\delta}{2} \right), y_2, ..., y_n \right)$$

ifadesini dikkate alalım. O halde

$$\left\| \frac{y_1}{\|y_1, ..., y_n\|} \frac{\delta}{2}, y_2, ..., y_n \right\| = \frac{1}{\|y_1, ..., y_n\|} \frac{\delta}{2} \|y_1, ..., y_n\| = \frac{\delta}{2}$$

elde ederiz. Buradan, $F\left(\left(y_1 \diagup \|y_1,...,y_n\|\right)(\delta \diagup 2), y_2,...,y_n\right) < 1$ dir, yani

$$|F(y_1,...,y_n)| < \left(\frac{2}{\delta}\right)\|y_1,...,y_n\|$$

elde edilir. $\|x_1,...,x_n\| < \delta_n$ olduğunda $|F(x_1,...,x_n)| < \frac{1}{n}$ olacak şekilde bir $\delta_n > 0$ mevcuttur. Eğer $x_1,...,x_n$ ler lineer bağımlı ise $\|y_1,...,y_n\| = 0 < \delta_n$ ve $|F(y_1,...,y_n)| = 0$ dır. Bu sebeple F sınırlıdır.

Tersine, F sınırlı olsun. Her $(a_1,...,a_n) \in D(F)$ için $|F(a_1,...,a_n)| \leq K\|a_1,...,a_n\|$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ vardır. Verilen $\varepsilon > 0$ için $\delta = \frac{\varepsilon}{K+1}$ olsun. O zaman $\|a_1,...,a_n\| < \delta$ olduğunda

$$|F(a_1,...,a_n)| \leq K\|a_1,...,a_n\| < K\frac{\varepsilon}{K+1}$$

elde ederiz. Böylece F n-fonksiyoneli $(0,...,0)$ da süreklidir ve Teorem 4.2.9 dan F süreklidir.

5. KAYNAKLAR

Cristescu, R., 1977. Topological vector spaces. Noordhoff International Publishing, 232 s. Leyden, The Netherlands.

Diminnie, C., Gähler, S., White, A., 1973. 2-Inner Product Spaces. Demonstrario Math., 6, 525 − 536.

Diminnie, C, R., Gähler, S., White, A., 1974. Remarks On Generalizations of 2-Inner Products. Math. Nachr., 74, 269 − 278.

Diminnie, C, R., Gähler, S., White, A., 1974. Strictly Convex Linear 2-Normed Spaces. Math. Nachr., 59, 319 − 324.

Diminnie, C., Gähler, S., White, A., 1977. 2-Inner Product Space. II. Demonstrario Math., 10, 169 − 188.

Diminnie, C, R., Gähler, S., White, A., 1978. Some Geometric Remarks Concerning Strictly 2-Convex Spaces. Math. Seminar Notes, Kobe Univ., 6, 245 − 253.

Ehret, R., 1969. Linear 2-Normed Spaces. Dissertation, St. Louis University.

Freese, R., W., Gähler, S., 1982. Remarks on Semi-2-Normed Spaces. Math. Nachr., 105, 151 − 161.

Gähler, S., 1963. 2-Metrische Räume und ihre Topologische Struktur. Math. Nachr., 26, 115 − 148.

Gähler, S., 1965. Lineare 2-Normietre Räume, Math.Nachr., 28, 1 − 43.

Gähler, S., 1965. Uber der Uniformisierbarkeit 2-Metrische Räume. Math. Nachr., 28, 235 − 244.

Gähler, S., Siddiqui, A., H., Gupta, S.,C., 1975. Contribution to Non-Archimedian Functional Analysis. Math. Nachr., 69, 163 − 171.

Grant, K, E., 1968. A 2-Metric Lattice Structure. Doctoral Diss., St. Louis Univ.

Greub, W., 1975. Linear Algebra, Springer-Verlag, New York.

Gunawan, H., Mashadi, 2001. On Finite Dimensional 2-Normed Spaces. Soochow J. Math., 27(3), $321-329$.

Gunawan, H., 2001. On n-Inner Products, n-Norms and The Cauchy-Schwarz Inequality. Scientiae Mathematicae Japonicae Online, 5, $47-54$.

Gunawan, H., Mashadi , 2001. On n-Normed Spaces. Int. J. Math. Math. Sci., 27(10), $631-639$.

Gunawan, H., Mashadi, 2001. The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm. Bull. Aust. Math. Soc., 64(1), $137-147$.

Gürdal, M., Pehlivan S., 2004. The Statistical Convergence in 2-Banach spaces. Thai Journal of Mathematics, Vol. 2, Number 1, $107-113$.

Ingleton, A, W., 1952. The Hahn-Banach-Theorem for Non-Archimedean Valued Fields. Proc. Combrige Philos. Soc., 48, $41-45$.

Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons. Inc., Canada.

Misiak, A., 1989. n-Inner Product Spaces. Math. Nachr., 140, $299-319$.

Misiak, A., 1989. Orthogonality and Orthonormality in n-Inner Product Spaces. Math. Nachr., 143, $249-261$.

Maddox, I.J.,1970. Elements of Functional Analysis. At the University Press, 208 s. Cambridge.

Raymond, W., Freese, R.W., Cho, J., 2001. Geometry of Linear 2-Normed Spaces. Nova Science Publishers, 301 s. Huntington, N.Y.

Trenogin, V, A., 1980. Funksionalnıy Analiz. Nauka, Moskva, In Russian.

White, A., 1968. 2-Banach Spaces. Doktoral Diss., St. Louis Univ.

White, A., 1969. 2-Banach Spaces. Math. Nachr., 42, $43-60$.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Işıl AÇIK
Doğum Yeri ve Yılı	: Karşıyaka - İzmir, 1982
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	: 1995-1998 Karşıyaka Lisesi
Lisans	: 1998-2002 SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü