**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÇOKLU DİZİLER VE ONLARIN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Fatma Kadriye ÖRGEN

Danışman: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA- 2009**

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇOKLU DİZİLER VE ONLARIN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

F. Kadriye ÖRGEN

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Jüri: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER (Danışman)
Prof. Dr. Eşref HATIR
Prof. Dr. Mübariz TAPDIGOĞLU

Bu çalışmada, çoklu dizi, istatistiksel yakınsak çoklu dizi, çoklu diziler için istatistiksel Cauchy dizisi ve I-yakınsaklık kavramları ele alınmıştır. Ayrıca istatistiksel yakınsak çoklu bir dizinin istatistiksel Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart geliştirilmiştir.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde konunun tarihi gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde, adi diziler için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi ve Cauchy kriteri gibi temel kavramlar verildikten sonra double dizilerin tanımı, double diziler için sınırlılık, yakınsaklık, Cauchy dizisi, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi tanımlarıyla birlikte gerekli teoremler verilmiştir. Son olarak ideal yakınsaklık, filtre tanımı ve bunlar arasındaki ilişki belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde, çoklu dizi tanımı, çoklu diziler için yakınsaklık, Cauchy dizisi, sınırlılık, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi tanımları verilip double diziler için verilmiş olan istatistiksel yakınsaklıkla ilgili bazı teoremler çoklu diziler için geliştirilmiştir.

Dördüncü bölümde $I-$yakınsaklık kullanılarak çoklu dizilerin bazı I bağlantılı özellikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde yine $I-$yakınsaklık kullanılarak $I-\limsup$ ve $I-\liminf$ özellikleri belirtilmiştir.

Altıncı ve son bölümde bir çoklu dizinin $I-\limsup$ ve $I-\liminf$ üzerine bazı ileri sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İdeal yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, Çoklu dizi.
2009, 40 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

TRIPLE SEQUENCES AND THEIR STATISTICAL CONVERGENCE

Fatma Kadriye ÖRGEN

Süleyman Demirel University Graduate School of Applied and Natural Sciences

Department of Mathematics

Thesis Commite: Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER (Supervisor)
Prof. Dr. Eşref HATIR
Prof. Dr. Mübariz TAPDIGOĞLU

In this thesis, multiple sequences, and their statistical convergence are investigated. It is also shown that every statistically convergent multiple sequence is statistically Cauchy.

The thesis consists of seven chapters. The first chapter contains historical backgrounds of $I-$convergence, multiple sequences and double sequences.

In the second chapter, the concepts of statistically convergent sequence, statistically Cauchy sequence, statistically convergent double sequence and statistically double Cauchy sequence are defined and the relation between statistically convergent sequence and statistically Cauchy sequence are stated and some main definitions and theorems related with $I-$convergence are given.

In the third chapter, multiple sequences and their statistically convergence are investigated.

In the fourth chapter some $I-$ related properties of multiple sequences are given.

In the fifth chapter the concepts of $I-$inferior and $I-$superior are defined by using subsets of $N \times N \times N$, thus; the definitions of $I-$cluster point and $I-$bounded multiple sequence are given.

In the final chapter, some further properties of multiple sequences are given.

Key Words: Statistical Convergence, Ideal Convergence, I-convergence, Double sequence, Multiple sequence.

2009, 40 pages

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde beni yönlendiren, konu ile ilgili açık problemleri ortaya koymada bana yardımcı olan ve çalışmamın her aşamasında yardım ve desteğini gördüğüm Danışman Hocam Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER'e ve yine yardımlarını hiç esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL'a teşekkür ederim.

Fatma Kadriye ÖRGEN

ISPARTA, 2009

SİMGELER DİZİNİ

N	Doğal sayılar kümesi
R	Reel sayılar kümesi
$\lvert A \rvert$	A nın eleman sayısı
$\underline{\delta}(A)$	A nın alt asimptotik yoğunluğu
$\overline{\delta}(A)$	A nın üst asimptotik yoğunluğu
$\delta(A)$	A nın asimptotik yoğunluğu
$x=(x_k)$	Reel veya Kompleks sayıların bir dizisi
$x=(x_{nk})$	Reel veya Kompleks sayıların double dizisi
$x=(x_{nkl})$	Reel veya Kompleks sayıların çoklu dizisi
(X,T)	Topolojik uzay
V	Vektör uzayı
W	Alt vektör uzayı
$(X,\lVert . \rVert)$	Normlu uzay
$st-\lim x_{nkl}=L$	x_{nkl} çoklu dizisinin istatistiksel limiti
l_∞^3	Tüm sınırlı çoklu dizilerin kümesi
Λ_x	x dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi
Γ_x	x dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
$I_3(f)$	$N\times N\times N$ in tüm sonlu alt kümelerinin ailesi
$I_3(\Gamma_x)$	I_3-yığılma noktalarının kümesi
$I_3-\limsup x_{nkl}$	x_{nkl} dizisinin üst limiti
$I_3-\liminf x_{nkl}$	x_{nkl} dizisinin alt limiti
$k \mid n$	k sayısı n yi böler

$k \nmid n$	k sayısı n yi bölmez
$\{x\}_K$	alt dizi
$\lvert E \rvert := cardE$	E nin kardinalitesi
O	Büyük sıralı
N^k	$\underbrace{N\times\cdots\times N}_{k\ \text{tane}}$

1. GİRİŞ

Klasik yakınsaklık kavramının yanı sıra ölçüm, küme ve benzeri araçlar kullanılarak bu kavrama yakın birçok yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır.

Yeni yakınsaklık kavramlarının en önemlilerinden biri Fast (1951) ve Schoenberg (1959) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanan istatistiksel yakınsaklık metodudur. İstatistiksel yakınsaklık günümüze kadar çok sayıda matematikçi tarafından üzerinde çalışılmış ve halen çalışılmakta olan bir konudur. Örneğin; T. Šalát (1980) reel sayıların tüm sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerinin kümesinin reel sayıların tüm sınırlı dizilerinin oluşturduğu lineer normlu uzayın hiçbir yerde yoğun olmayan bir alt kümesi olduğunu ve reel sayıların tüm istatistiksel yakınsak dizileri kümesinin s Fréchet uzayında birinci Baire kategoriden yoğun bir alt küme olduğunu gösterdi. Fridy (1985) istatistiksel yakınsak dizi ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarının denkliklerini gösterip düzgün toplanabilme metodunu kullanarak istatistiksel yakınsaklığı çalışıp iki tane Tauberian teoremini ispatladı. Fridy (1993) istatistiksel limit noktası, istatistiksel yığılma noktası ve adi anlamdaki limit noktasının bazı özelliklerinin istatistiksel benzerlerini verdi. Rath ve Tripathy (1994) Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzayı üzerindeki istatistiksel Cauchy dizilerini ve istatistiksel Cauchy dizisi için dağılım teoremini verip Hausdorff lokal konveks topolojik vektör uzayında istatistiksel yakınsaklığa bağlı dizisel tamlık için bazı denklik kriterlerini verdi. B. C. Tripathy (1997) Bolzano Weirstrass teoremi'nin istatistiksel benzerini verdikten sonra Fridy ve Orhan (1997) istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şartın $st-\liminf x = st-\limsup x$ olması düşüncesi ile bağlantılı olarak istatistiksel üst limit ve istatistiksel alt limit tanımlarını verdi. B. C. Tripathy (1998) seriler için Dedekind ve Abel teoremlerini istatistiksel yakınsak serilere genişletip Leibniz ve Tauberian teoremlerinin bir genişlemesinin ispatını verdi. Pehlivan ve Mamedov (1999) düzgün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin bazı özelliklerini inceleyip düzgün istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile hemen hemen çok kuvvetli yakınsak dizilerin uzayı arasındaki ilişkiyi genişletip düzgün istatistiksel yığılma noktasının tanımını verip sonlu boyutlu uzaylardaki yığılma noktalarının kümesinin bazı özelliklerini ispatladı. Kostyrko vd., (2000) verilen bir (x_k) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesini F_σ kümesi olarak tanımlayıp (x_k) nın dağılım fonksiyonunun süreksizlik noktalarını tanımladı. B. C. Tripathy (2000) kendisine ait olan istatistiksel monoton dizilerin bir denk tanımını veren bir sonucu kanıtlayıp istatistiksel yakınsak dizilerle ilgili yeni sonuçlar elde etti. Gürdal ve Pehlivan (2004) 2-Banach uzayında istatistiksel yakınsak dizileri ve istatistiksel Cauchy dizilerini içeren kümeleri elde ettiler.

Double diziler ilk olarak Pringsheim (1900) tarafından verildi. Daha sonra bu kavramı birçok yazar çalıştı. Örneğin; Mursaleen ve Edely (2003) double dizilerin istatistiksel yakınsaklığı tanımını ve double diziler için istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verip bazı özelliklerini inceleyerek istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesáro toplanabilir double diziler arasındaki bağıntıyı oluşturdu. Gökhan ve Çolak (2004) $c_2^P(p)$ ve $c_2^{PB}(p)$ double dizi uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Patterson (2004) sınırlı double diziler üzerindeki düzgün dört boyutlu matrislerin mutlak denkliğini bir tanımla verdi.

Kostyrko vd. (2000) ideal kavramını kullanarak klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklığın da bir genellemesi olan ideal yakınsaklık kavramını tanımlayıp sıfır $T-$ yoğunluklu kümelerin ailesi olan I_{d_T} nin uygun bir ideali olduğunu gösterdiler. Schoenberg (1959), Euler fonksiyonu yardımıyla özel bir toplanabilirlik metodu tanımlamıştır. Buna göre $k \mid n$ ise $\phi_{nk} = \dfrac{\varphi(k)}{n}$, $k \nmid n$ ise $\phi_{nk} = 0$ olmak üzere negatif olmayan regüler $\Phi = (\phi_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ matrisi ile bir kümenin φ yoğunluğunu vermiştir. Kostyrko vd. (2000) tüm sıfır φ yoğunluklu kümelerin ailesi olan I_φ nin ideal olduğunu gösterdi ve bu ideal üzerinden $I_\varphi -$yakınsaklığı tanımladı. Son yıllarda $I-$yakınsaklık kavramı Tripathy (2005) tarafından double dizilere genişletildi.

Balakrushna Tripathy ve B. C. Tripathy (2005) logaritmik yoğunluk ve $N \times N$ in alt kümeleri için düzgün yoğunluğu geliştirdiler. Ayrıca farklı tip I-yakınsak double dizileri, I-Cauchy double dizilerini ve onların simetri, yoğunluk gibi farklı özelliklerini geliştirdiler. Çakan vd. (2006) daha önce Raimi ve Mishra'nın geliştirmiş olduğu reel sınırlı dizilerin $\sigma-$çekirdeği ve $\sigma-$ yakınsaklığı konusunu double diziler için geliştirdi. Tripathy ve Dutta (2007) istatistiksel sıfır fuzzy reel değerli double dizi uzaylarının ve istatistiksel yakınsaklığın farklı tiplerini inceleyip fuzzy reel değerli Cesáro toplanabilir double dizi uzaylarını geliştirip $p-$Cesáro toplanabilme ve sınırlı istatistiksel yakınsak double diziler arasındaki bağıntıyı kurdu. Gökhan vd. (2007) reel değerli fonksiyonların Cauchy kriterini double diziler için verdiler. Gürdal ve Şahiner (2008) $I-$ sınırlı dizi, $I-$ alt limit ve $I-$ üst limit tanımlarını verdiler.

Bu çalışmada, çoklu dizi kavramını ve bir çoklu dizi için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy dizisi kavramlarını geliştiriyoruz. Teorem 3.2.3 de sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin kümesinin sınırlı dizilerin oluşturduğu lineer normlu uzayın bir alt kümesi olduğunu verip bu kümenin sınırlı dizilerin oluşturduğu uzayda hiçbir yerde yoğun olmadığını belirttik. Teorem 3.2.8 de istatistiksel yakınsak çoklu bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşulu geliştirdik. Son olarak çoklu dizilerin bazı $I-$ bağlantılı özelliklerini verdik.

2. TEMEL TANIM, TEOREM VE ÖRNEKLER

Bu bölümde, bilinen bazı temel tanım, örnek ve teoremleri inceleyip yorumladık.

2.1 Bazı Temel Kavramlar, İstatistiksel Yakınsaklık ile İlgili Bilinen Bazı Tanım, Teorem ve Örnekler

Bu çalışmada gerekli olacak lineer alt uzay, kapalı lineer alt uzay, hiçbir yerde yoğun olmayan küme tanımları ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili bazı temel kavramları inceleyim.

Tanım 2.1.1 (Lineer Alt Uzay) V, K reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $W \subset V$ olsun. Eğer W aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa W ya V nin alt uzayı denir.

1) $0 \in W$
2) $u, v \in V$ iken $u + v \in W$
3) $u \in W,\ c \in K$ ise $cu \in W$ (Lusternik vd., 1985).

Tanım 2.1.2 (Kapalı Lineer Alt Uzay) $\left(X, \|.\|\right)$ bir normlu uzay Y de X in bir lineer alt uzayı ise Y $\left(X, \|.\|\right)$ de bir normlu uzaydır. Bu uzaya $\left(X, \|.\|\right)$ uzayının normlu alt uzayı denir. Eğer Y kapalı ise $\left(Y, \|.\|\right)$ alt uzayına $\left(X, \|.\|\right)$ normlu uzayının kapalı alt uzayı denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.1.3 (Hiçbir Yerde Yoğun Olmayan Küme) $\left(X, T\right)$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\overline{A}^{0} = \phi$ ise A kümesine $\left(X, T\right)$ da hiçbir yerde yoğun olmayan küme denir (Bülbül, 1994).

İlk olarak Niven'in (1991) tanımlamış olduğu istatistiksel yakınsaklık kavramının ortaya çıkmasına neden olan yoğunluk kavramını verelim.

N doğal sayılar kümesinin bir E alt kümesinin kardinal (eleman) sayısının $|E|$ ile gösterildiğini belirtelim.

Tanım 2.1.4 E, N doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $E_n := \{k \leq n : k \in E\}$ olsun. Buna göre E kümesinin sırasıyla alt ve üst yoğunluğu;

$$\underline{\delta}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n}, \quad \overline{\delta}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} \tag{2.1}$$

olarak verilir. Eğer $\frac{|E_n|}{n}$ dizisinin limiti var ise bu limite E kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(E)$ ile gösterilir. Yani $\delta(E) = \underline{\delta}(E) = \overline{\delta}(E)$ eşitliklerinin sağlanması halinde $E \subseteq N$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : k \in E\}\right| \tag{2.2}$$

dir (Niven vd., 1991).

Doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 2.1.5 $E = \{1,4,5,6,13,14,...,24,49,50,...,96,193,194,...\}$ şeklinde verilsin. E indeks kümesi için $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

1) $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesinin üst limitini oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3} \tag{2.3}$$

ve

2) $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesinin alt limitini oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3} \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Dolayısıyla

$$\underline{\delta}(E) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} = \frac{1}{3}, \ \overline{\delta}(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} = \frac{2}{3} \tag{2.5}$$

olduğundan $\underline{\delta}(E) \neq \overline{\delta}(E)$ dir. Bu nedenle E kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşılacağı gibi doğal yoğunluğu olmayan kümeler de vardır. Ama her bir küme için alt ve üst yoğunluk mevcuttur. Eğer E kümesi sonlu elemanlı bir küme ise $\delta(E) = 0$ dır (Gürdal, 2004).

Şimdi istatistiksel yakınsaklık tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.1.6 (İstatistiksel Yakınsaklık) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in N : |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{2.6}$$

yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{2.7}$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ifadesi ile gösterilir (Fast, 1951).

Örnek 2.1.7 $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} k & , \quad k = n^2 \quad n \in N \\ 0 & , \quad k \neq n^2 \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlansın. $\frac{1}{2}$ den küçük olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $E = \{k \in N : |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1,4,9,16,...\}$ olur buradan E kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Dolayısıyla $st - \lim x = 0$ dır (Fridy, 1985).

Adi anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağıntıyı kurmak için, bu iki kavramı karşılaştıralım: Bilindiği gibi, x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise L nin her bir ε komşuluğunun dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. İstatistiksel yakınsaklıkta ise L nin her bir ε komşuluğunun dışında sonsuz sayıda da eleman kalabilir. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre “çok çok az” dır. Yani dizinin “hemen hemen” tüm elemanları L nin ε komşuluğunun içerisindedir. Buradan x dizisinin L noktasına “hemen hemen” yakınsak olduğunu anlarız. L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanların sayısının “az” olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Pehlivan, 2001).

Şimdi de istatistiksel Cauchy dizisi tanımını gösterelim.

Tanım 2.1.8 (İstatistiksel Cauchy Dizisi) $\forall \; \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|x_k - x_N\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{2.9}$$

olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisi denir. Bu ifade, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için

$$\left|x_k - x_N\right| < \varepsilon \tag{2.10}$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır şeklinde de yazılabilir (Fridy, 1985).

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsak dizi ve istatistiksel Cauchy dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir. Buna göre;

Teorem 2.1.9 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri) Aşağıdaki ifadeler denktir:

1) x istatistiksel yakınsak bir dizidir;
2) x istatistiksel Cauchy dizisidir;
3) x dizisi verilsin. Hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır (Fridy, 1985).

Şimdi diziler reel terimli olmak üzere; öncelikle, bir dizinin yığılma noktaları ve limit noktaları kavramlarının istatistiksel benzerleri olan istatistiksel yığılma noktalarının ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri gösterilecektir.

Tanım 2.1.10 (Seyrek, Seyrek Olmayan Alt Dizi) $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Eğer

$$\delta(\{k_j : j \in N\}) = 0 \tag{2.11}$$

ise (x_{k_j}) alt dizisine seyrek alt dizi, aksi takdirde seyrek olmayan alt dizi adı verilir (Fridy, 1993).

Bilindiği gibi bir (x_k) dizisinin L sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa L sayısı (x_k) dizisinin adi limit noktasıdır.

Tanım 2.1.11 (İstatistiksel Limit Noktası) λ ya yakınsak $x=(x_k)$ dizisinin seyrek olmayan $(\delta(E)>0)$ alt dizisi varsa, λ ya x sayı dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir (Fridy, 1993).

$x=(x_k)$ sayı dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile adi limit noktalarının kümesi L_x ile gösterilir.

Örnek 2.1.12 $$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \qquad n \in N \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlanan dizide $x=(x_k)$ nın adi limit noktalarının kümesi $L_x=\{0,1\}$ dir. Bu dizinin istatistiksel limit noktalarının kümesi ise $\Lambda_x=\{0\}$ dır.

Örnek 2.1.13 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ rasyonel sayılar kümesinin bir dizisi olsun.

$$x_k = \begin{cases} r_n, & k = n^2 \qquad n \in N \\ k, & k \neq n^2 \end{cases} \tag{2.13}$$

elemanları herhangi bir doğal sayının karesi olan kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan $\Lambda_x=\phi$ dir. Buna rağmen $\{r_k : k \in N\}$ kümesi R de yoğun olduğu için $L_x = R$ dir (Fridy, 1993).

Bir x dizisinin L limit noktası “L merkezli her açık aralık x dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir ” ifadesi ile karakterize edilebilir. Bu ifadenin istatistiksel benzeri Fridy (1993) tarafından verilmiştir.

Tanım 2.1.14 (İstatistiksel Yığılma Noktası) $x = (x_k)$ dizisi verilsin. $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\{k \in N : |x_k - \mu| < \varepsilon\} \tag{2.14}$$

kümesi sıfır doğal yoğunluğa sahip değilse μ sayısına $x = (x_k)$ dizisinin bir istatistiksel yığılma noktasıdır denir. x sayı dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir ve herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır (Fridy, 1993).

Örnek 2.1.15 $(x_k) = \dfrac{1}{p}$, $k = 2^{p-1}(2p+1)$ ile tanımlansın. k nın asal çarpanlarında 2 nin çarpanlarının sayısı da $p-1$ olsun. $\forall\ p$ için $\delta\left(\left\{k : x_k = \dfrac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p} > 0$ olduğunu göstermek kolaydır. Böylece $\dfrac{1}{p} \in \Lambda_x$ dir. Ayrıca $\delta\left(\left\{k : 0 < x_k < \dfrac{1}{p}\right\}\right) = 2^{-p}$ olduğundan $0 \in \Gamma_x$ ve buradan da $\Gamma_x = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{p}\right\}_{p=1}^{\infty}$ elde ederiz. Şimdi $0 \notin \Lambda_x$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer $\{x\}_E$ sıfır limiti olan bir alt dizi ise $\delta(E) = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Bunu $\forall p$ için

$$\begin{aligned} |E_n| &= \left|\left\{k \in E_n : x_k \geq \frac{1}{p}\right\}\right| + \left|\left\{k \in E_n : x_k < \frac{1}{p}\right\}\right| \\ &\leq O(1) + \left|\left\{k \in N : x_k < \frac{1}{p}\right\}\right| = O(1) + \frac{n}{2^p} \end{aligned} \tag{2.15}$$

ile gösterebiliriz. Böylece $\delta(E) \leq 2^{-p}$ ve p keyfi olduğundan $\delta(E) = 0$ dır.

Genelde adi limit noktaları ile ilgili bilgilerimiz bize Λ_x ve Γ_x kümelerinin denk olacağını düşündürür fakat bu durumun böyle olmadığını Fridy (1993) ispatlamıştır.

İstatistiksel limit noktaları ile istatistiksel yığılma noktaları arasındaki kapsama bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 2.1.16 Herhangi bir $x = (x_k)$ sayı dizisi için $\Lambda_x \subseteq \Gamma_x$ dir (Fridy, 1993).

Buradan $st - \lim x = \lambda$ ise $\{\lambda\}$ tek nokta kümeleri için $\Lambda_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$ dır. Fakat karşıtı doğru değildir. Bunları aşağıdaki iki örnekle Fridy (1993) göstermiştir.

Örnek 2.1.17 $x = (x_k)$ dizisi $x = \left(0,0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,0,...\right)$ şeklinde düzgün dağılımlı bir dizi olsun (Kupers ve Niederreiter, 1974). Herhangi bir alt aralıktaki (x_k) ların yoğunluğu aralığın boyuna eşittir. Burada $L_x = [0,1]$ dır. Aynı zamanda herhangi bir $\gamma \in [0,1]$ için

$$\delta\left(\{\mathrm{k} \in \mathrm{N} : x_k \in (\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon)\} \geq \varepsilon\right) > 0 \tag{2.16}$$

olduğundan, $\Gamma_x = [0,1]$ olur. $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir n için $\lambda \in [0,1]$ alarak x in bir $\{x\}_K$ alt dizisinin λ ya yakınsak olduğunu kabul edip $\delta\{E\}$ yoğunluğuna bakacağız.

$$E = \{k \in E_n : x_k\} = \{k \in E_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\} \cup \{k \in E_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\} \tag{2.17}$$

yazıp yoğunluğa geçersek,

$$\delta(E) = \delta(\{k \in E_n : |x_k - \lambda| < \varepsilon\}) + \delta(\{k \in E_n : |x_k - \lambda| \geq \varepsilon\}) \leq 2\varepsilon \tag{2.18}$$

olduğundan $\delta\{E\} \leq 2\varepsilon$ buluruz. ε keyfi olduğundan yeterince küçük ε için $\delta(E) = 0$ olur. Bu ise $\{x\}_K$ alt dizisinin seyrek bir alt dizi olduğunu gösterir. λ keyfi olduğundan bu şekilde hiçbir seyrek olmayan alt dizi bulunamayacağından $\Lambda_x = \phi$ dir (Fridy, 1993).

Örnek 2.1.18 $x = (x_k)$ dizisini $(0,4,0,8,0,12,0,16,...)$ dizisi olarak alalım. Bu dizinin iki tane alt dizisi $x_{2k} = (4,8,12,16,...) \to \infty$ ve $x_{2k-1} = (0,0,0,...) \to 0$ dır. $\delta(\{1,3,5,...\}) = \frac{1}{2}$ ve $\delta(\{2,4,6,...\}) = \frac{1}{2}$ olduğundan, $\Lambda_x = \Gamma_x = \{0\}$ olup $st - \lim x_k$ mevcut değildir (Fridy, 1993).

İstatistiksel yakınsaklığın tanımından, verilen bir (x_k) dizisinin istatistiksel yakınsaklığının, (x_k) dizisinin seyrek bir alt dizisinin değerlerini değiştirmekle değişmez olduğunu söyleyebiliriz. Bu özelliğin istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları içinde geçerli olduğu Fridy (1993) tarafından aşağıdaki teoremle gösterilmiştir.

Teorem 2.1.19 x ve y hemen hemen her k için $x_k = y_k$ olacak şekilde diziler ise $\Lambda_x = \Lambda_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir (Fridy, 1993).

2.2 Double Diziler ile İlgili Bilinen Bazı Tanım, Teorem ve Örnekler

Bu bölümde Mursaleen ve Edely'nin tanımlamış olduğu double yoğunluk, double yakınsaklık gibi tanımlarla birlikte bunlarla ilgili bazı örnekleri veriyoruz.

Tanım 2.2.1 (Double Dizi) N doğal sayılar kümesi olmak üzere

$$\begin{array}{lcl} x:\mathrm{N}\times\mathrm{N} & \rightarrow & \mathrm{R}(\mathrm{C}) \\ (n,k) & \rightarrow & x(n,k)=x_{nk} \end{array} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanan x fonksiyonuna bir double dizi denir (Pringsheim, 2000).

Tanım 2.2.2 $E\subseteq N\times N$ olsun. $P(E)=\lim\limits_{p,q\to\infty}\dfrac{1}{pq}\sum\limits_{n\le p}\sum\limits_{k\le q}\chi_E(n,k)$ limitine E nin doğal yoğunluğu denir (Şahiner ve Tripathy, 2008).

Örneğin; $E=\left\{\left(i^2,j^2\right):i,j\in N\right\}$ olsun. Bu durumda

$$\delta_2(E)=\lim_{n,k}\frac{E(n,k)}{nk}\le\lim_{n,k}\frac{\sqrt{n}\sqrt{k}}{nk}=0 \tag{2.20}$$

olur. Buna rağmen $K=\{(i,2j):i,j\in N\}$ kümesinin double doğal yoğunluğu $\dfrac{1}{2}$ dir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi de double diziler için yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 2.2.3 (Double Yakınsaklık) (x_{nk}) Kompleks terimli bir double dizi olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $n,k\ge N$ iken $|x_{nk}-l|<\varepsilon$ olacak şekilde en az bir N doğal sayısı var ise $x=(x_{nk})$ double dizisi $l\in C$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir ve l değerine de x dizisinin Pringsheim limiti denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Şimdi ilk olarak Mursaleen ve Edely (2003) tarafından verilen double diziler için Cauchy dizisi ve sınırlılık tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.4 (Double Cauchy Dizisi) $\forall\varepsilon > 0$ için $p \geq n \geq N$, $q \geq k \geq N$ iken $\left|x_{pq} - x_{nk}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde N doğal sayısı var ise $x = (x_{nk})$ double dizisine Cauchy dizisi denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Tanım 2.2.5 (Double Sınırlı Dizi) Tüm n, k lar için $\left|x_{nk}\right| < M$ olacak şekilde $M > 0$ var ise (x_{nk}) double dizisine sınırlıdır denir.

Tüm double sınırlı dizilerin kümesini l_∞^2 ile gösteriyoruz. l_∞^2 uzayı $\|x\|_{(\infty,2)} = \sup_{n,k}\left|x_{nk}\right| < \infty$ normu ile bir normlu uzaydır (Mursaleen ve Edely, 2003).

Burada adi dizilerin tersine double dizilerde yakınsak olan her dizinin sınırlı olamayabileceğini ifade etmek gerekir.

Adi dizilerde istatistiksel yakınsaklık N nin alt kümelerine bağlı iken double dizilerde istatistiksel yakınsaklık $N \times N$ nin alt kümelerine bağlıdır. Şimdi double diziler için istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 2.2.6 (Double İstatistiksel Yakınsaklık) $x = (x_{nk})$ reel double dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k) \in N \times N : \left|x_{nk} - l\right| \geq \varepsilon\} \tag{2.21}$$

kümesinin double doğal yoğunluğu sıfır ise $x = (x_{nk})$ reel double dizisine l ye istatistiksel yakınsaktır denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Sadece sınırlı (sınırsız) satır ve (veya) sütunların sayısı sonlu olduğundan, adi diziler için geçerli olan yakınsak her dizinin aynı sayıya istatistiksel yakınsak olmasının double diziler içinde geçerli olduğunu söylememiz yerinde olur.

Tanım 2.2.7 (Double İstatistiksel Cauchy Dizisi) $x = (x_{nk})$ bir reel double dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\delta(\{(n,k) \in N \times N : |x_{nk} - x_{NM}| \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{2.22}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon) \in N$ ve $M = M(\varepsilon) \in N$ var ise $x = (x_{nk})$ reel double dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir (Mursaleen ve Edely, 2003).

Adi diziler için Fridy'nin (1985) elde etmiş olduğu sonucun double diziler için benzerini Mursaleen ve Edely (2003) vermiştir.

Teorem 2.2.8 $x = (x_{nk})$ reel double dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart x in istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır (Mursaleen ve Edely, 2003).

2.3 İdeal Yakınsaklık ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Örnekler

Kostyrko vd. (2000) ideal kavramını kullanarak ideal yakınsaklık ya da kısaca $I-$ yakınsaklık kavramını tanımladılar. Bu yakınsaklık tipi klasik yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık başta olmak üzere çok sayıda yakınsaklık çeşidini kapsar.

Tanım 2.3.1 2^N, $N \neq \phi$ kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $I \subseteq 2^N$ ailesi için,

1) $A, B \in I$ ise $A \cup B \in I$ (toplamsallık),

2) $A \in I$ ve $B \subseteq A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık),

koşulları sağlanıyorsa I, N de bir ideal olarak adlandırılır (Jech, 2003).

Tanım 2.3.1 (2) gereğince $\phi \in I$ olacağı açıktır. Eğer $N \notin I$ ise I ideali öz ideal olarak adlandırılır. Buna göre 2^N dışındaki bütün idealler öz idealdir. $\forall \ x \in N$ için $\{x\} \in I$ ise yani I ideali N nin tüm sonlu alt kümelerini içeriyorsa uygun ideal olarak adlandırılır. Eğer I ideali kapsamaya göre maksimal olan bir öz ideal ise maksimal ideal adını alır (Kostyrko vd., 2000).

I ile 2^N in idealini, I_2 ile $2^{N\times N}$ in idealini, I_3 ile $2^{N\times N\times N}$ in idealini gösteriyoruz.

Şimdi filtre tanımını verelim.

Tanım 2.3.2 $F \subseteq 2^N$ ailesi için;

1) $\phi \notin F$,

2) $A, B \in F$ ise $A \cap B \in F$,

3) $A \in F$ ve $A \subseteq B$ ise $B \in F$,

koşulları sağlanıyorsa F ye N de bir filtre denir (Jech, 2003).

I ile F arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önerme açıkca vermektedir.

Önerme 2.3.3 I , N de bir öz ideal olsun.

$$F(I) = \{ M \subseteq N : \exists A \in I \ni M = N \backslash A \} \tag{2.23}$$

ailesi N de I ideali ile ilgili filtredir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.3.4 $I \subset 2^N$ ideali N de bir öz ideal olsun. $x = (x_k)$ reel değerli bir dizi ve $\xi \in R$ olsun. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{ k \in N : |x_k - \xi| \geq \varepsilon \} \in I \tag{2.24}$$

ise x dizisi ξ sayısına $I-$yakınsaktır denir ve bu durum $I - \lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ şeklinde ifade edilir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.3.5 I bir uygun ideal olsun. $E := \{k(j) : j \in N\}$ olmak üzere $E \in I$ ise $\{x\}_E$ alt dizisine $I-$seyrek alt dizi denir. Eğer $E \notin I$ ise $\{x\}_E$ dizisine $x = (x_k)$ dizisinin $I-$seyrek olmayan alt dizisi denir (Gürdal, 2004).

Tanım 2.3.6 (X, ρ) bir metrik uzay ve (x_k) X de bir dizi olsun.

1) $M \notin I$ ve $\lim_{m\to\infty} x_{k_m} = \xi$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset N$ kümesi mevcut ise $\xi \in X$ elemanına (x_k) nın $I-$ limit noktası denir.

2) Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\{k \in N : \rho(x_k, \xi) < \varepsilon\} \notin I$ ise $\xi \in X$ elemanına (x_k) nın $I-$yığılma noktası denir (Kostyrko vd., 2000).

$I(\Lambda_x)$ ile x dizisinin tüm $I-$limit noktaları kümesini ve $I(\Gamma_x)$ ile x dizisinin tüm $I-$yığılma noktaları kümesini tanımlayacağız.

Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Çünkü $\xi \in I(\Lambda_x)$ olması, $\lim x_{k_m} = \xi$ olması anlamına gelir. Bu da $\xi \in L_x$ olduğunu verir.

Önerme 2.3.7 I bir uygun ideal olsun. Bu durumda her $x = (x_k) \in X$ dizisi için $I(\Lambda_x) \subset I(\Gamma_x)$ dir (Kostyrko vd., 2000).

Önerme 2.3.8 I bir uygun bir ideal olsun. Herhangi bir $x=(x_k)\in X$ dizisi için $I(\Gamma_x)\subseteq L_x$ dir.

Şimdi double diziler için Tripathy'nin (2005) vermiş olduğu Pringsheim anlamında $I-$ yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 2.3.9 I_2, $2^{N\times N}$ in bir ideali olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{(n,k)\in N\times N : |x_{nk}-L|\geq\varepsilon\}\in I_2 \tag{2.25}$$

ise (x_{nk}) dizisi L ye Pringsheim anlamında $I-$ yakınsaktır denir.

3. ÇOKLU DİZİLER

Şimdi double dizi kavramını çoklu dizilere genelleştiriyoruz. Çalışmamızın devamında üç indisli diziler için sonuçlar elde edeceğiz ancak sonuçlar genel üçten büyük indisli çoklu diziler içinde doğrudur.

3.1 Çoklu Dizi ile İlgili Temel Tanım, Teorem ve Örnekler

Bu bölümde çoklu dizi tanımı ile birlikte çoklu dizi ile ilgili temel tanım, teorem ve örnekleri verdik.

Tanım 3.1.1 (Çoklu Dizi) N doğal sayılar kümesini, R reel sayılar kümesini göstermek üzere $x : N^k \to R(C)$ fonksiyonuna reel (kompleks) bir çoklu dizi denir.

Şimdi double diziler için tanımlanmış olan double yakınsaklığı çoklu diziler için geliştiriyoruz.

Tanım 3.1.2 (Çoklu Yakınsaklık) $\forall \varepsilon > 0$ için $n \geq N$, $k \geq N$, $l \geq N$ iken $|x_{nkl} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N(\varepsilon) \in N$ var ise (x_{nkl}) çoklu dizisi L ye Pringsheim anlamında yakınsaktır denir.

Bu tanıma bir örnek verecek olursak;

$$x_{nkl} = \begin{cases} kl & , \quad n = 3 \\ nl & , \quad k = 5 \\ nk & , \quad l = 7 \\ 8 & , \quad diğer \end{cases} \tag{3.1}$$

ise (x_{nkl}) Pringsheim anlamında 8 e yakınsaktır.

Double diziler için Mursaleen ve Edely'nin (2003) vermiş olduğu Cauchy dizisi tanımını çoklu diziler için geliştiriyoruz

Tanım 3.1.3 (Çoklu Cauchy Dizisi) $\forall \varepsilon > 0$ için $p \geq n \geq N$, $q \geq k \geq N$, $r \geq l \geq N$ iken $\left| x_{pqr} - x_{nkl} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $N(\varepsilon) \in N$ var ise (x_{nkl}) çoklu dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.4 (Çoklu Sınırlı Dizi) Tüm n, k, l ler için $\left| x_{nkl} \right| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı var ise (x_{nkl}) çoklu dizisine sınırlıdır denir.

Tüm çoklu sınırlı dizilerin kümesini l_∞^3 ile gösteriyoruz. l_∞^3 uzayı $\|x\|_{(\infty,3)} = \sup\limits_{n,k,l} \left| x_{nkl} \right| < \infty$ normu ile bir normlu uzaydır.

Çoklu istatistiksel yakınsak dizi ve çoklu istatistiksel Cauchy dizisinin tanımını verebilmek için gerekli olan çoklu doğal yoğunluk kavramını verelim.

Öncelikle $N \times N \times N$ kümesinin bir E alt kümesinin kardinal (eleman) sayısının $\left| E(p,q,r) \right|$ ile gösterildiğini belirtelim.

Tanım 3.1.5 Eğer $n \leq p$, $k \leq q$, $l \leq r$ iken

$$\delta_3(E) = \lim_{p,q,r \to \infty} \frac{\left| E(p,q,r) \right|}{pqr} \tag{3.2}$$

limiti varsa E ye $\delta_3(E)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir.

Çoklu diziler için doğal yoğunluk kavramının daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 3.1.6

$E = \{ (n^3, k^3, l^3) : n, k, l \in N \}$ ise $\delta_3(E) = \lim\limits_{p,q,r \to \infty} \dfrac{\left| E(p,q,r) \right|}{pqr} \leq \lim\limits_{p,q,r} \dfrac{\sqrt[3]{p}\sqrt[3]{q}\sqrt[3]{r}}{pqr} = 0$ dır.

Şimdi çoklu diziler için istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 3.1.7 (Çoklu İstatistiksel Yakınsaklık) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta_3(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : |x_{nkl} - L| \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{3.3}$$

ise (x_{nkl}) reel çoklu dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $st - \lim_{n,k,l \to \infty} x_{nkl} = L$ ile ifade edilir.

Herhangi bir (x_{nkl}) çoklu dizisi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır fakat tersinin doğru olması gerekmez. Ayrıca aşağıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere istatistiksel yakınsak çoklu bir dizinin sınırlı olması da gerekmez.

Örnek 3.1.8

$$x_{nkl} = \begin{cases} nkl, & eğer\ n,k,l\ ler\ küp\ ise \\ 5, & diğer \end{cases} \tag{3.4}$$

olarak tanımlanırsa, $st - \lim_{n,k,l \to \infty} x_{nkl} = 5$ dir fakat (x_{nkl}) Pringsheim anlamında yakınsak olmadığı gibi sınırlı da değildir.

Şimdi çoklu diziler için istatistiksel Cauchy dizisini tanımlayalım.

Tanım 3.1.9 (Çoklu İstatistiksel Cauchy Dizisi) $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta_3(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : |x_{nkl} - x_{NMT}| \geq \varepsilon\}) = 0 \tag{3.5}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$, $T = T(\varepsilon) \in N$ var ise (x_{nkl}) çoklu dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir.

3.2 Çoklu Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde double diziler için Mursaleen ve Edely tarafından ispatlanmış olan bazı teoremleri çoklu diziler için verdik.

Teorem 3.2.1 $st - \lim x_{nkl} = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{n,k,l\to\infty \\ n,k,l\in K}} x_{nkl} = L$ olacak şekilde bir $K \subseteq N \times N \times N$ alt kümesinin mevcut olmasıdır.

İspat Bu teorem (Fridy, 1993) Teorem 2 nin ispatına benzer bir yol kullanılarak ispatlanabilir.

Uyarı 3.2.2 Eğer x_{nkl} istatistiksel yakınsak yani $st - \lim x_{nkl} = L$ ise $\lim\limits_{n,k,l\to\infty} y_{nkl} = L$

ve

$$\delta_3\left(\{(n,k,l) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N} \times \mathrm{N} : \mathrm{x}_{\mathrm{nkl}} \neq y_{nkl}\}\right) = 0 \tag{3.6}$$

olacak şekilde y_{nkl} çoklu dizisi vardır.

Teorem 3.2.3 $st \cap l_\infty^3$ kümesi l_∞^3 normlu lineer uzayının kapalı lineer bir alt uzayıdır.

İspat $x^{(\xi\varsigma v)} = x_{nkl}{}^{(\xi\varsigma v)} \in st \cap l_\infty^3$ ve $x^{(\xi\varsigma v)} \to x \in l_\infty^3$ dur. $x^{(\xi\varsigma v)} \in st \cap l_\infty^3$ olduğundan $(\xi,\varsigma,v = 1,2,...)$ iken $st - \lim x_{nkl}^{(\xi\varsigma v)} = a_{\xi\varsigma v}$ olacak şekilde $a_{\xi\varsigma v}$ reel sayısı vardır.

Öte yandan $x^{(\xi\varsigma v)} \to x \in l_\infty^3$ olduğundan $\Xi \geq \xi \geq N$, $\vartheta \geq \varsigma \geq N$, $V \geq v \geq N$ iken

$$\left|x^{(\Xi\vartheta V)} - x^{(\xi\varsigma v)}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.7}$$

olacak şekilde en az bir $N(\varepsilon) \in N$ vardır. Burada |.| lineer uzayda normu göstermektedir. Bir önceki teoremden $\delta_3(K_1) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{n,k,l\to\infty \\ (n,k,l)\in K_1}} x_{nkl}^{(\xi\varsigma v)} = a_{\xi\varsigma v}$ olacak şekilde $K_1 \subseteq N \times N \times N$ vardır. Benzer şekilde $\delta_3(K_2) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{n,k,l\to\infty \\ (n,k,l)\in K_2}} x_{nkl}^{(\Xi\vartheta V)} = a_{\Xi\vartheta V}$ olacak şekilde $K_2 \subseteq N \times N \times N$ vardır. $\delta_3(K_1 \cap K_2) = 1$ olduğu için $K_1 \cap K_2$ sonlu değildir. $(k_1, k_2, k_3) \in K_1 \cap K_2$ seçelim bu durumda $\left| x_{k_1k_2k_3}^{(\Xi\vartheta V)} - a_{\Xi\vartheta V} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $\left| x_{k_1k_2k_3}^{(\xi\varsigma\nu)} - a_{\xi\varsigma\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür. Bundan dolayı her bir $\Xi \geq \xi \geq N$, $\vartheta \geq \varsigma \geq N$, $V \geq \nu \geq N$ iken

$$\left| a_{\xi\varsigma\nu} - a_{\Xi\vartheta V} \right| \leq \left| x_{k_1k_2k_3}^{(\xi\varsigma\nu)} - a_{\xi\varsigma\nu} \right| + \left| x_{k_1k_2k_3}^{(\xi\varsigma\nu)} - x_{k_1k_2k_3}^{(\Xi\vartheta V)} \right| + \left| x_{k_1k_2k_3}^{(\Xi\vartheta V)} - a_{\Xi\vartheta V} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.8}$$

dur ve bunun anlamı $a_{\xi\varsigma\nu}$ nin bir Cauchy dizisi olmasıdır bu da $a_{\xi\varsigma\nu}$ nin yakınsak olması demektir. O halde $\lim_{\xi,\varsigma,\nu} a_{\xi\varsigma\nu} = a$ diyebiliriz. Şimdi x in a ya istatistiksel yakınsak olduğunu göstermek istiyoruz. $x^{(\xi\varsigma\nu)} \to x$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $n, k, l \geq N_1(\varepsilon)$ iken $\left| x_{nkl}^{(\xi\varsigma\nu)} - x_{nkl} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir $N_1(\varepsilon)$ sayısı vardır. $\lim_{\xi,\varsigma,\nu} a_{\xi\varsigma\nu} = a$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $n, k, l \geq N_2(\varepsilon)$ iken $\left| a_{nkl} - a \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir $N_2(\varepsilon)$ sayısı vardır. Sonuç olarak $x^{(\xi\varsigma\nu)}$ $a_{\xi\varsigma\nu}$ ye istatistiksel yakınsak olduğundan $\delta_3(K) = 1$ olacak şekilde $K = \{(n, k, l)\} \subseteq N \times N \times N$ vardır ve $\forall \varepsilon > 0$ için tüm $n, k, l \geq N_3(\varepsilon)$ ve $(n, k, l) \in K$ için $\left| x_{nkl}^{(\xi\varsigma\nu)} - a_{\xi\varsigma\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ olacak şekilde en az bir $N_3(\varepsilon)$ vardır. Eğer $N_4(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$ kabul edersek

$$\left| x_{nkl} - a \right| \leq \left| x_{nkl}^{(\xi\varsigma\nu)} - x_{nkl} \right| + \left| x_{nkl}^{(\xi\varsigma\nu)} - a_{\xi\varsigma\nu} \right| + \left| a_{nkl} - a \right| < \varepsilon \tag{3.9}$$

olur. Bundan dolayı x a ya istatistiksel yakınsaktır ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.4 $st \cap l_\infty^3$ kümesi l_∞^3 da hiçbir yerde yoğun değildir.

İspat Eğer X lineer normlu bir uzay ise X in X den farklı her kapalı lineer alt uzayının X de hiçbir yerde yoğun olmadığını biliyoruz.

$$x_{nkl} = \begin{cases} -5 & \text{eğer } n, k, l \text{ ler tek ise} \\ 5 & \text{diğer} \end{cases}$$

dizisi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak değildir bu da $st \cap l_\infty^3 \neq l_\infty^3$ olduğunu gösterir.

Şimdi de her istatistiksel yakınsak çoklu dizinin istatistiksel Cauchy dizisi olduğunu göstermek için aşağıdaki tanımları geliştiriyoruz.

Tanım 3.2.5 $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\delta_3(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : |x_{nkl} - x_{NMT}| \geq \varepsilon\}) = 0 \qquad (3.10)$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$, $M = M(\varepsilon)$, $T = T(\varepsilon)$ var ise (x_{nkl}) çoklu dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir.

Tanım 3.2.6 $x = (x_{nkl})$ ve $y = (y_{nkl})$ iki çoklu dizi olsun. Eğer

$$\delta_3(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} \neq y_{nkl}\}) = 0 \qquad (3.11)$$

ise hemen hemen tüm n,k,l ler için $x_{nkl} = y_{nkl}$ dir.

Tanım 3.2.7 $x = (x_{nkl})$ bir çoklu dizi olsun. C kompleks sayılar kümesi, D de C nin alt kümesi olsun. Eğer

$$\delta_3(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} \notin D\}) = 0 \qquad (3.12)$$

ise D hemen hemen tüm n,k,l ler için (x_{nkl}) yi içerir denir.

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsak bir dizi ile istatistiksel Cauchy dizisi arasındaki bağıntıyı vermektedir.

Teorem 3.2.8 (x_{nkl}) çoklu dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat Gereklilik açıktır. Yeterliliği ispatlamak için (x_{nkl}) istatistiksel Cauchy dizisi ve $\varepsilon = 1$ olsun. Bu durumda öyle ξ_1, ς_1, v_1 vardır ki $x_{\xi_1\varsigma_1 v_1}$ merkezli 2 birim çaplı U_1 kapalı yuvarı hemen hemen tüm n,k,l ler için (x_{nkl}) yi bulundurur. $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ için öyle ξ_2, ς_2, v_2 vardır ki $x_{\xi_2\varsigma_2 v_2}$ merkezli 1 birim çaplı U^2 kapalı yuvarı hemen hemen tüm n,k,l ler için (x_{nkl}) yi bulundurur. Eğer $U_2 = U_1 \cap U^2$ alırsak U_2, C nin $x_{\xi_3\varsigma_3 v_3}$ merkezli 1 birime eşit yada daha küçük çaplı bir alt kümesidir öyleki tüm n,k,l ler için U_2, (x_{nkl}) yi içerir.

$\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$ için öyle ξ_3, ς_3, v_3 vardır ki $x_{\xi_3 \varsigma_3 v_3}$ merkezli $\dfrac{1}{2}$ birim çaplı U^3 kapalı yuvarı hemen hemen tüm n, k, l ler için (x_{nkl}) yi bulundurur. Bu durumda diyebiliriz ki $U_3 = U_2 \cap U^3$ ise U_3, C nin $\dfrac{1}{2}$ ye eşit yada daha küçük çaplı kapalı bir alt kümesidir öyleki hemen hemen tüm n, k, l ler için U_3, (x_{nkl}) yi içerir.

Böyle devam edersek C nin aşağıdaki özellikleri sağlayan kapalı alt kümelerinin bir (U_n) dizisini elde ederiz.

1) $\forall\ n \in N$ için $U_{n+1} \subseteq U_n$

2) $\forall\ n \in N$ için $çapU_n \leq 2^{2-n}$

Sonuç olarak $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ bir nokta içerir. Bu noktayı L ile gösteriyoruz. Bu durumda $\forall\ n \in N$ için $L \in U_n$ dir. Eğer m yi $\dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$ seçersek U_m hemen hemen tüm n, k, l ler için (x_{nkl}) yi içerir. Bunun anlamı (x_{nkl}) L ye istatistiksel yakınsaktır.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlamak kolaydır.

Teorem 3.2.9 Eğer (x_{nkl}) çoklu dizi ise aşağıdaki ifadeler denktir.

1) (x_{nkl}) l ye istatistiksel yakınsaktır;

2) (x_{nkl}) istatistiksel Cauchy dizisidir;

3) (x_{nkl}) nin $\lim\limits_{n,k,l \to \infty} y_{nkl} = l$ olacak şekilde bir (y_{nkl}) alt dizisi vardır.

4. ÇOKLU DİZİLERİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde double dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramını çoklu dizilerin yakınsaklığına genelleştirip çoklu diziler için $I-$bağlantılı birtakım incelemeler yaptık.

4.1 Çoklu Dizilerin Bazı I-Bağlantılı Özellikleri

Bu bölümde double diziler için olan $I-$ yakınsaklık ile ilgili bazı özellikleri çoklu diziler için geliştirdik.

Tanım 4.1.1 I_3, $2^{N\times N\times N}$ in bir ideali olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}-L|\geq\varepsilon\}\in I_3 \tag{4.1}$$

ise (x_{nkl}) L ye Pringsheim anlamında $I-$ yakınsaktır diyoruz ve bu durumu $I_3-\lim x_{nkl}=L$ şeklinde ifade ediyoruz.

Şimdi bazı ideal örnekleri verelim.

Örnek 4.1.2

1) $I_3(f)$, $N\times N\times N$ in tüm sonlu alt kümelerinin ailesi olsun. Bu durumda $I_3(f)$, $N\times N\times N$ de uygun bir idealdir ve $I_3(f)$ yakınsaklık çoklu dizilerin Pringsheim anlamında yakınsaklığı ile çakışır.

2) $A\subseteq N\times N\times N$ pozitif tamsayıların üç boyutlu bir kümesi ve $A(p,q,r)$ $n\leq p,\ \ k\leq q,\ \ l\leq r$ iken (n,k,l) nin A daki kardinalitesi olsun. Bu durumda Pringsheim anlamında $\lim\limits_{p,q,r}\left(\frac{A(p,q,r)}{pqr}\right)$ limiti mevcut ise A bir çoklu doğal yoğunluğa sahiptir denir ve bu

$$\lim_{p,q,r}\left(\frac{A(p,q,r)}{pqr}\right)=\rho(A) \tag{4.2}$$

ile gösterilir. $I_3(\rho)=\{\, A \subset N \times N \times N : \rho(A)=0 \,\}$ ise $I_3(\rho)$, $N \times N \times N$ de uygun bir idealdir ve $I_3(\rho)$ yakınsaklık Pringsheim anlamında istatistiksel yakınsaklıkla çakışır.

Şimdi de $I-$ yakınsak çoklu diziye bir örnek verelim.

Örnek 4.1.3 $I = I_3(\rho)$ olsun ve $x_{nkl} = \begin{cases} 1, & eğer\ n,k,l\ ler\ kare\ ise \\ 5, & diğer \end{cases}$

ile tanımlansın. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$P\left(\{(n,k,l) \in N \times N \times N : |x_{nkl} - 5| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{p,q,r} \frac{\sqrt{p}\sqrt{q}\sqrt{r}}{pqr} = 0 \tag{4.3}$$

dır. Bu da Pringsheim anlamında $I_3 - \lim x_{nkl} = 5$ olmasını gerektirir. Fakat (x_{nkl}) dizisi Pringsheim anlamında 5 e yakınsak değildir.

Uyarı 4.1.4 Eğer I_3 uygun ve (x_{nkl}) l ye Pringsheim anlamında yakınsak ise (x_{nkl}) l ye Pringsheim anlamında $I-$yakınsaktır.

5. $I-$ ÜST LİMİT VE $I-$ ALT LİMİT

Bu bölümde çoklu diziler için I ile ilgili bazı tanımlarla birlikte $I-$üst limit ve $I-$alt limit tanımlarını geliştiriyoruz.

5.1 $I-$ Üst Limit ve $I-$ Alt Limit

Tanım 5.1.1 I_3, $2^{N\times N\times N}$ in bir ideali olsun. $M\notin I_3$ ve her $i,j,m=1,2,...$ için $P-\lim x_{n_i k_j l_m}=\xi$ olacak şekilde bir

$$M=\{(n_i,k_j,l_m): i,j,m=1,2,...\}\subseteq N\times N\times N \tag{5.1}$$

kümesi varsa, ξ sayısına (x_{nkl}) çoklu dizisinin bir $I-$limit noktasıdır denir.

Tanım 5.1.2 $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}-\varsigma|<\varepsilon\}\notin I_3 \tag{5.2}$$

ise ζ ye (x_{nkl}) çoklu dizisinin $I-$ yığılma noktasıdır denir.

Tanım 5.1.3

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}|>K\}\in I_3 \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $K>0$ sayısı var ise (x_{nkl}) reel çoklu dizisi sınırlıdır denir. (x_{nkl}) çoklu dizi ve $t\in R$ olsun. Bu durumda (x_{nkl}) nin $I-\liminf x$ ve $I-\limsup x$ in tanımı için gerekli olan kümeleri

$$M_t=\{(n,k,l): x_{nkl}>t\},\quad M^t=\{(n,k,l): x_{nkl}<t\} \tag{5.4}$$

olarak veriyoruz.

Tanım 5.1.4

1) Eğer $M_t\notin I_3$ olacak şekilde bir $t\in R$ varsa bunu

$$I-\limsup x=\sup\{\,t\in R: M_t\notin I_3\,\} \tag{5.5}$$

şeklinde yazarız. Eğer $\forall t\in R$ için $M_t\in I_3$ ise $I-\limsup x=-\infty$ dur.

2) Eğer $M^t \notin I_3$ olacak şekilde bir $t \in R$ varsa bunu

$$I - \liminf x = \inf \{ t \in R : M^t \notin I_3 \} \tag{5.6}$$

şeklinde yazarız. Eğer $\forall t \in R$ için $M^t \in I_3$ sağlıyorsa $I - \liminf x = +\infty$ dur.

Örnek 5.1.5 (x_{nkl}) dizisini

$$x_{nkl} = \begin{cases} n & \text{eğer } n \text{ tek ve kare} \quad \text{ise} \\ 2 & \text{eğer } n \text{ çift ve kare} \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer } n \text{ tek ve kare değil} \quad \text{ise} \\ 0 & \text{eğer } n \text{ çift ve kare değil} \quad \text{ise} \end{cases} \tag{5.7}$$

veya

$$x_{nkl} = \begin{cases} k & \text{eğer } k \text{ tek ve kare} \quad \text{ise} \\ 2 & \text{eğer } k \text{ çift ve kare} \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer } k \text{ tek ve kare değil} \quad \text{ise} \\ 0 & \text{eğer } k \text{ çift ve kare değil} \quad \text{ise} \end{cases} \tag{5.8}$$

veya

$$x_{nkl} = \begin{cases} l & \text{eğer } l \text{ tek ve kare} \quad \text{ise} \\ 2 & \text{eğer } l \text{ çift ve kare} \quad \text{ise} \\ 1 & \text{eğer } l \text{ tek ve kare değil} \quad \text{ise} \\ 0 & \text{eğer } l \text{ çift ve kare değil} \quad \text{ise} \end{cases} \tag{5.9}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (x_{nkl}) üstten sınırlı değildir fakat $I-$ sınırlıdır. Ayrıca

$$\{t \in R : M_t \notin I_3\} = (-\infty, 1), \ \{t \in R : M^t \notin I_3\} = (0, \infty) \tag{5.10}$$

ve böylece $I - \limsup x = 1,$ $I - \liminf x = 0$ dır. Diğer taraftan (x_{nkl}) Pringsheim anlamında $I-$ yakınsak değildir ve Pringsheim anlamında $I-$yığılma noktalarının kümesi $\{0,1\}$ dir. Sonuç olarak aşağıdakiler doğrudur.

Teorem 5.1.6

1) $\beta = I - \limsup x$ olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > \beta - \varepsilon\} \notin I_3 \tag{5.11}$$

ve

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > \beta + \varepsilon\} \in I_3 \tag{5.12}$$

olmasıdır.

2) $\alpha = I - \liminf x$ olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} < \alpha + \varepsilon\} \notin I_3 \tag{5.13}$$

ve

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} < \alpha - \varepsilon\} \in I_3 \tag{5.14}$$

olmasıdır.

İspat

1) $(:\Rightarrow)$ $\varepsilon > 0$ verilsin. $\beta + \varepsilon > \beta$ olduğundan, $(\beta + \varepsilon) \notin \{t : M_t \notin I_3\}$ ve

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > \beta + \varepsilon\} \in I_3 \tag{5.15}$$

dür. Benzer olarak $\beta - \varepsilon < \beta$ olduğundan $\beta - \varepsilon < t' < \beta$ olacak şekilde en az bir t' vardır ve $t' \in \{t : M_t \notin I_3\}$ dür.

Böylece

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > t'\} \notin I_3 \tag{5.16}$$

ve

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > \beta - \varepsilon\} \notin I_3 \tag{5.17}$$

bulunur.

$(\Leftarrow:)$ $\varepsilon > 0$ ise $(\beta + \varepsilon) \notin \{t : M_t \notin I_3\}$ ve $I_3 - \limsup x_{nkl} \leq \beta + \varepsilon$ olur.

Diğer taraftan $I_3 - \limsup x_{nkl} \geq \beta - \varepsilon$ olduğundan $I_3 - \limsup x_{nkl} = \beta$ elde edilir.

2) Benzer yolla ispat yapılabilir.

Teorem 5.1.7 Her çoklu reel (x_{nkl}) dizisi için, $I_3 - \liminf x_{nkl} \leq I_3 - \limsup x_{nkl}$ dir.

İspat Herhangi bir (x_{nkl}) çoklu reel dizisi için üç durum vardır.

1) $I_3 - \limsup x_{nkl} = +\infty$ olduğunda sonuç açıktır.

2) Eğer $I_3 - \limsup x_{nkl} = -\infty$ ise bu durumda

$t \in R \Rightarrow \; M_t \in I_3$ ve $M^t \notin I_3$ (5.18)

dür. Böylece

$$I_3 - \liminf x_{nkl} = \inf\{t : M^t \notin I_3\} = \inf \; R = -\infty \tag{5.19}$$

ve

$$I_3 - \liminf x_{nkl} \le I_3 - \limsup x_{nkl} \tag{5.20}$$

dir.

3) $\forall t \in R$ için eğer $-\infty < I_3 - \limsup x_{nkl} < +\infty$ ve $\beta = I_3 - \limsup x_{nkl}$ ise

$$\beta < t \Rightarrow M_t \in I_3 \text{ ve } M^t \notin I_3 \tag{5.21}$$

dür. Bu ise $I_3 - \liminf x_{nkl} = \inf\{t : M^t \notin I_3\} \le \beta$ demektir.

Teorem 5.1.8 Herhangi bir (x_{nkl}) $I-$reel sınırlı çoklu dizisi için aşağıdaki eşitsizlikler vardır.

$$P - \liminf x_{nkl} \le I_3 - \liminf x_{nkl} \le I_3 - \limsup x_{nkl} \le P - \limsup x_{nkl} \,. \tag{5.22}$$

İspat $P - \limsup x_{nkl} = +\infty$ durumu açıktır. $P - \limsup x_{nkl} = L < +\infty$ olduğunda herhangi bir $t' > L$ için $M_{t'} \in I_3$ dür. $t' \notin \{\, t : M_t \notin I_3\}$ olması $I_3 - \limsup x_{nkl} = \sup\{\, t : M_t \notin I_3\} < t'$ ve $I_3 - \limsup x_{nkl} \le L$ olmasını gerektirir. Buradan, $I_3 - \limsup x_{nkl} \le P - \limsup x_{nkl}$ olur. Diğer eşitsizlik için, eğer $P - \liminf x_{nkl} = -\infty$ ise eşitsizliğin sağlandığı açıktır. $P - \liminf x_{nkl} = T > -\infty$ ise herhangi $t' < T$ için $M^{t'} \in I_3$ olur. Böylece $t' \notin \{\, t : M^t \notin I_3\}$ olması $I_3 - \liminf x_{nkl} = \sup\{\, t : M^t \notin I_3\} > t'$ ve $I_3 - \limsup x_{nkl} \ge T$ olmasını gerektirir.

Uyarı 5.1.9 Eğer $I_3 - \lim x_{nkl}$ var ise (x_{nkl}) $I-$sınırlıdır.

Uyarı 5.1.10 Çoklu dizilerin ideal sınırlılığı $I_3 - \limsup$ ve $I_3 - \liminf$ in sonlu olmasını gerektirir. (x_{nk}) sınırlı double dizisinin $P-$ çekirdeği

$$P - core(x_{nk}) = [P - \liminf x_{nk}, P - \limsup x_{nk}] \tag{5.23}$$

kapalı aralığıdır. (x_{nk}) sınırlı double dizisinin $I-$çekirdeği ise

$$[I_2 - \liminf x_{nk}, I_2 - \limsup x_{nk}] \tag{5.24}$$

kapalı aralığıdır (Gürdal vd., 2008).

Biz de buna benzer olarak, (x_{nkl}) sınırlı çoklu dizisinin $P-$çekirdeğini ve $I-$çekirdeğini aşağıdaki şekilde tanımladık.

Tanım 5.1.11 Herhangi bir (x_{nkl}) reel sınırlı çoklu dizisinin $P-$ çekirdeği

$$[P - \liminf x_{nkl},\ P - \limsup x_{nkl}] \tag{5.25}$$

kapalı aralığıdır.

Tanım 5.1.12 Herhangi bir (x_{nkl}) reel sınırlı çoklu dizisinin $I-$ çekirdeği

$$[I_3 - \liminf x_{nkl}, I_3 - \limsup x_{nkl}] \tag{5.26}$$

kapalı aralığıdır.

Çalışmamızda, (x_{nkl}) nin I_3-çekirdeğini $I_3 - \mathrm{core}(x_{nkl})$ olarak göstereceğiz.

Uyarı 5.1.13 Herhangi (x_{nkl}) reel çoklu dizisi için

$$I_3 - core(x_{nkl}) \subset P - core(x_{nkl}) \tag{5.27}$$

dir.

Teorem 5.1.14 Herhangi bir (x_{nkl}) reel çoklu dizisinin I_3- yakınsak olması için gerek ve yeter şart $I_3 - \liminf x_{nkl} = I_3 - \limsup x_{nkl}$ olmasıdır.

İspat $(:\Rightarrow)$ $L = I_3 - \lim x_{nkl}$ olsun. Bu durumda

$$\{(n,k,l) \in N \times N \times N : x_{nkl} > L + \varepsilon\} \in I_3 \tag{5.28}$$

ve

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} < L-\varepsilon\}\in I_3 \tag{5.29}$$

olur. Herhangi $t\geq L+\varepsilon$ ve $t' < L-\varepsilon$ için $M_t\in I_3$ ve $M^{t'}\in I_3$ olduğundan $\sup\{\, t : M_t \notin I_3\}\leq L+\varepsilon$ ve $\inf\{t' : M^{t'}\notin I_3\}\geq L-\varepsilon$ bulunur.

$(\Leftarrow:)$ $\varepsilon>0$ ve $L = I_3-\liminf x_{nkl} = I_3-\limsup x_{nkl}$ olsun. Bu durumda

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}-L|\geq\varepsilon\}\subseteq\{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} > L+\varepsilon\} \tag{5.30}$$

$$\mathrm{Y}\ \{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} < L-\varepsilon\}$$

olduğundan, $L = I_3-\lim x_{nkl}$ bulunur.

Eğer (x_{nkl}) reel sınırlı çoklu dizi ise (x_{nkl}) nin I_3- yığılma noktalarının kümesini $I_3(\Gamma_x)$ ile göstereceğiz.

Teorem 5.1.15 Eğer (x_{nkl}) bir reel sınırlı çoklu dizi ise

$$I_3-\limsup x_{nkl} = \max I_3(\Gamma_x) \tag{5.31}$$

ve

$$I_3-\liminf x_{nkl} = \min I_3(\Gamma_x) \tag{5.32}$$

dir.

İspat $I_3-\limsup x_{nkl} = L = \sup\{t : \{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} > t\}\notin I_3\}$ olsun. Eğer $L' > L$ ise $\{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} > L'-\varepsilon\}\in I_3$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ vardır. Bunun anlamı $\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}-L'| < \varepsilon\}\in I_3$ olacak şekilde bir $\varepsilon>0$ sayısının var olmasıdır. Yani $L'\notin I_3(\Gamma_x)$ dir. Şimdi L nin gerçekten (x_{nkl}) nin bir $I-$ yığılma noktası olduğunu gösterelim. Açıkça $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : x_{nkl} > t\}\notin I_3 \tag{5.33}$$

olacak şekilde $t\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ vardır ki bu

$$\{(n,k,l)\in N\times N\times N : |x_{nkl}-L| < \varepsilon\}\notin I_3 \tag{5.34}$$

olmasını gerektirir.

6. DİĞER ÖZELLİKLER

Bu bölümde bir çoklu dizinin $I-\limsup$ ve $I-\liminf$ üzerine bazı ileri sonuçlarını ispatlayacağız.

6.1 $I-\limsup$ ve $I-\liminf$ Üzerine Bazı İleri Sonuçlar

Teorem 6.1.1 I_3, $2^{N\times N\times N}$ in bir ideali olsun. Eğer $x=(x_{nkl})$, $y=(y_{nkl})$ Pringsheim anlamında $I-$sınırlı iki çoklu dizi ise

1) $$I-\limsup(x+y)\leq I-\limsup x+I-\limsup y \tag{6.1}$$

2) $$I-\liminf(x+y)\geq I-\liminf x+I-\liminf y \tag{6.2}$$

dir.

İspat (6.2) nin ispatı (6.1) inkine benzer olduğundan yalnızca (6.1) i ispatladık. $l_1=I-\limsup x$, $l_2=I-\limsup y$ olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. Bu durumda hem l_1 in hemde l_2 nin sonlu olduğunu biliyoruz.

$A=\{c\in R:\{(n,k,l):x_{nkl}+y_{nkl}>c\}\notin I_3\}$ ve $A\neq\phi$ olsun.

Şimdi

$$\left\{(n,k,l):x_{nkl}<l_1+\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cap\left\{(n,k,l):y_{nkl}<l_2+\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$
$$\subset\{(n,k,l):x_{nkl}+y_{nkl}<l_1+l_2+\varepsilon\} \tag{6.3}$$

olduğundan,

$$\{(n,k,l):x_{nkl}+y_{nkl}>l_1+l_2+\varepsilon\}\subset$$
$$\left\{(n,k,l):x_{nkl}>l_1+\frac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{(n,k,l):y_{nkl}>l_2+\frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{6.4}$$

elde ederiz. Yukarıdaki kapsamada sağ taraftaki kümelerin her ikiside I_3 e ait olduğundan

$$\{(n,k,l):x_{nkl}+y_{nkl}>l_1+l_2+\varepsilon\}\in I_3 \tag{6.5}$$

olur. Eğer $c \in A$ ise $\{(n,k,l): x_{nkl} + y_{nkl} > c\} \notin I_3$ dür. İddia ediyoruz ki $c \leq l_1 + l_2 + \varepsilon$ dur. Aksi takdirde

$$\{(n,k,l): x_{nkl} + y_{nkl} > c\} \subset \{(n,k,l): x_{nkl} + y_{nkl} > l_1 + l_2 + \varepsilon\} \tag{6.6}$$

olurdu. Bu

$$\{(n,k,l): x_{nkl} + y_{nkl} > c\} \in I_3 \tag{6.7}$$

demektir. Bu ise bir çelişkidir. Sonuç olarak $c \leq l_1 + l_2 + \varepsilon$ ve

$$I_3 - \lim\sup(x_{nkl} + y_{nkl}) = \sup A \leq l_1 + l_2 + \varepsilon \tag{6.8}$$

dur. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğu için bu ispatı tamamlar.

Alt dizi teoremini verebilmek için aşağıdaki tanıma ihtiyacımız vardır.

Tanım 6.1.2 I_3, $2^{N \times N \times N}$ in bir ideali olsun. Eğer her reel $G > 0$ sayısı için $\{(n,k,l): x_{nkl} \leq G\} \in I_3$ $\left(yada\ \{(n,k,l): x_{nkl} \geq -G\} \in I_3\right)$ ise (x_{nkl}) Pringsheim anlamında $+\infty$ (yada $-\infty$) a $I-$ yakınsaktır denir.

Teorem 6.1.3 Eğer I_3 uygun bir ideal ve $I - \lim\sup x = l$ ise (x_{nkl}) nin l ye Pringsheim anlamında $I-$ yakınsak olan bir alt dizisi vardır.

İspat. $\phi \in I_3$ ve I_3 uygun ideal olduğundan (x_{nkl}) dizisini sabit olmayan ve sonsuz tane terimi birbirinden farklı kabul edebiliriz.

1. durum: Eğer $I = -\infty$ ise tanımdan $\{ t \in R : M_t \notin I \} = \phi$ dir. Böylece $K > 0$ ise $\{(n,k,l): x_{nkl} > -2K\} \in I_3$ dür. $\{(n,k,l): x_{nkl} \geq -K\} \subset \{(n,k,l): x_{nkl} > -2K\}$ olduğundan $\{(n,k,l): x_{nkl} \geq -K\} \in I_3$ vardır. Bundan dolayı da $I - \lim x = -\infty$ dur.

2. durum: Eğer $l = +\infty$ ise $\{ t \in R : M_t \notin I \} = R$ dir. Böylece herhangi $t \in R$ için $\{(n,k,l): x_{nkl} > t\} \notin I_3$ dür. $x_{n_1k_1l_1}$, (x_{nkl}) nin keyfi bir terimi ve

$$A_{n_1k_1l_1} = \{(n,k,l): x_{nkl} > x_{n_1k_1l_1} + 1\} \tag{6.9}$$

olsun. $\phi \in I_3$ olduğundan $A_{n_1k_1l_1}$ boş değildir ve ayrıca $A_{n_1k_1l_1} \notin I_3$ dür. Biz $n > n_1 + 1,\ k > k_1 + 1,\ l > l_1 + 1$ olmak üzere en az bir $(n,k,l) \in A_{n_1k_1l_1}$ var olduğunu iddia ediyoruz. Tersini kabul edelim. I_3 uygun olduğundan

$$A_{n_1k_1l_1} \subset \{(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(n_1,n_1,n_1),(n_1+1,n_1+1,n_1+1)\} \tag{6.10}$$

I_3 ün bir elemanıdır yani $A_{n_1k_1l_1} \in I_3$ dür. Bu bir çelişkidir. (n,k,l) ye (n_2,k_2,l_2) diyelim. Böylece $x_{n_2k_2l_2} > x_{n_1k_1l_1} + 1$ dir. Bu yöntemle devam ederek tüm i ler için $x_{n_ik_il_i} > x_{n_{i-1}k_{i-1}l_{i-1}} + 1$ ile (x_{nkl}) nin $\{x_{n_ik_il_i}\}$ alt dizisini elde ederiz. Herhangi $K > 0$ için $\{(n_i,k_i,l_i) : x_{n_ik_il_i} \le K\}$ sonlu bir kümedir. Bu küme I_3 uygun ideal olduğundan I_3 e aittir. Bundan dolayı da $I_3 - \lim x_{nkl} = +\infty$ dur.

3. durum: $-\infty < l < +\infty$ olsun. Teorem 5.1.6 (1) gereğince

$$\{(n,k,l) : x_{nkl} > l - 1\} \notin I_3 \tag{6.11}$$

dür öyleki $\{(n,k,l) : x_{nkl} > l - 1\} \neq \phi$ dir. Bu kümenin $x_{n_1k_1l_1} \le l + \frac{1}{2}$ olacak şekilde en az bir $n_1k_1l_1$ elemanının var olduğunu iddia ediyoruz. Aksi halde

$$\{(n,k,l) : x_{nkl} > l - 1\} \subset \left\{(n,k,l) : x_{nkl} > l + \frac{1}{2}\right\} \in I_3 \tag{6.12}$$

olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $l - 1 < x_{n_1k_1l_1} \le l + \frac{1}{2} < l + 1$ dir. $n_2 > n_1,\ k_2 > k_1,\ l_2 > l_1$ olmak üzere (x_{nkl}) den $x_{n_2k_2l_2}$ elemanını $x_{n_2k_2l_2} > l - \frac{1}{2}$ olacak şekilde seçebiliriz. Aksi takdirde

$$\left\{(n,k,l) : x_{nkl} > l - \frac{1}{2}\right\} \subset \{(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(n_1,n_1,n_1)\} \in I_3 \tag{6.13}$$

olur ki bu Teorem 5.1.6 (1) ile çelişir. Böylece

$$\left\{(n,k,l) : n > n_1, k > k_1, l > l_1 \ ve \ x_{nkl} > l - \frac{1}{2}\right\} = E_{n_1k_1l_1} \neq \phi \tag{6.14}$$

dir. Şimdi $(n,k,l) \in E_{n_1k_1l_1}$ olması daima $x_{nkl} \ge l + \frac{1}{2}$ olmasını gerektirir. Bu durumda

$$E_{n_1k_1l_1} \subset \left\{(n,k,l): x_{nkl} \geq l + \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{(n,k,l)\ : x_{nkl} > l + \frac{1}{4}\right\} \tag{6.15}$$

Teorem 5.1.6 (1) gereğince sağ taraftaki küme I_3 e aittir ve böylece $E_{n_1k_1l_1} \in I_3$ dür. I_3 uygun ideal olduğundan $\{(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(n_1,n_1,n_1)\} \in I_3$ olur. Bundan dolayı

$$\left\{(n,k,l): x_{nkl} > l - \frac{1}{2}\right\} \subset \{(1,1,1),(2,2,2),\ldots,(n_1,n_1,n_1)\} \cup E_{n_1k_1l_1} \tag{6.16}$$

dir. Böylece $\left\{(n,k,l): x_{nkl} > l - \frac{1}{2}\right\} \in I_3$ olur ki bu Teorem 5.1.6 ile çelişir. Yukarıdaki gözlemler $l - \frac{1}{2} < x_{n_2k_2l_2} < l + \frac{1}{2}$ olan $n_2 > n_1,\ k_2 > k_1,\ l_2 > l_1$ sayılarının var olduğunu gösteriyor. Bu yolla devam edersek $n_i > n_{i-1},\ \ k_i > k_{i-1},\ \ l_i > l_{i-1}$ olmak üzere (x_{nkl}) nin $\{x_{n_ik_il_i}\}$ alt dizisini elde ederiz öyleki her i için $l - \frac{1}{i} < x_{n_ik_il_i} < l + \frac{1}{i}$ olur. Böylece $\{x_{n_ik_il_i}\}$ alt dizisi l ye Pringsheim anlamında yakınsaktır. Böylece Uyarı 4.1.4 gereğince l ye Pringsheim anlamında $I-$ yakınsaktır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi $I-\limsup$ ve $I-\liminf$ ile ilgili aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 6.1.4 Eğer $I-\liminf x = l$ ise (x_{nkl}) nin l ye Pringsheim anlamında $I-$yakınsak olan bir alt dizisi vardır.

Teorem 6.1.5 Her (x_{nkl}) $I-$sınırlı reel çoklu dizisi sonlu reel bir sayıya Pringsheim anlamında $I-$yakınsak olan bir alt diziye sahiptir.

KAYNAKLAR

Albayrak, H., 2008. İdeal ve φ Yakınsaklık. S.D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 28s, Isparta.

Buck, R C., 1953. Generalized Asymptotic Density. American Journal Mathematics , 75, 335-346.

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji. Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, No:10711, 239s. Trabzon.

Connor, J. S., 1988. The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences. Analysis, 8,47-63.

Çakan, C., Altay, B., Mursaleen, M., 2006. The $\sigma -$ Convergence and $\sigma -$ Core of Double Sequences. Applied Mathematics Letters, 19, 1122-1128.

Fast, H., 1951. Sur la Convergence Statistique. Colloquium Mathematicum, 2, 241-244.

Freedman, A. ve R., Sember J. J., 1981. Densities and Summabilities. Pacific Journal of Mathematics, 95, 293-305.

Fridy, J. A., 1985. On Statistical Convergence. Analysis, 5, 301-313.

Fridy, J. A., 1993. Statistical Limit Points. Proceedings of the American Mathematical Society, 118, 1187-1192.

Fridy, J. A. ve Orhan C., 1997. Statistical Limit Superior and Limit Inferior. Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 12, 3625-3631.

Gökhan, A. ve Çolak, R., 2004. The Double Sequences Spaces $C_2^P(p)$ ve $C_2^{PB}(p)$. Applied Mathematics and Computation, 157, 491-501.

Gökhan, A., Güngör, Et, M., 2007. Statistical Convergence of Double Sequences of Real-Valued Functions. International Mathematical Forum 2,8, 365-374.

Gürdal, M., 2004. Bazı Yakınsaklık Tipleri. S.D.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, 72s, ISPARTA.

Gürdal, M. Pehlivan, S., 2004. The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces. The journal of Mathematics, 2, 1, 107-113.

Gürdal, M., Şahiner A., 2008. Extremal I-Limit Points of Double Sequences. Applied mathematics, 8, 131-137.

Hamilton, H. J., 1936. Transformations of Multiple Sequences. Duke Math. Journal, 2,29-60.

Jech, T., 2003. Set Theory. Springer Monographs in Mathematic, Springer-Verlags, 769, Berlin.

Kelly, J. L., 1955. General Topology, Springer-Verlag, Newyork.

Kostryko, P., Šalát, T., Wladyslaw, W., 2000. I-Convergence. Real Analysis Exchange, 26, 2, 669-686.

Kostyrko, P., *Maǧaj* , M., Šalát, Strauch, O., 2000. On Statistical Limit Points. Proceedings of the American Mathematical society, 129, 9, 2647-3654.

Kostryko, P., M., Šalát, 2005. I-Convergence and Extremal I-limit points. Mathematical Slovaca, 55,443-464.

Kupers, L., Niederreiter, M., 1974. Uniform Distribution of Sequences. Wiley, New York.

Lusternik, L. A., Sobolev V. J., 1985. Elements of Functional Analysis. No:34778. Russian.

Maǧaj , M., Šalát, T., 2001. Statistical Convergence of Subsequences of a Given Sequence. Mathematica Bohemica, 126, 1, 191-208.

Mursaleen, O., Edely, H. H., 2003. Statistical Convergence of Double Sequences. Journal Mathematical Analysis Applications, 288, 223-23.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz. Balcı yayınları.

Niven, I., Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L., 1991. An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth Edition John Wiley and Jons, Inc.,529.

Patterson, F. Richard, 2004. Four Dimensional Matrix Characterization of The Pringsheim Core. Southeast Asian Bulletion of Mathematics, 27, 899-906.

Pehlivan, S. Mamedov, M. A., 1999. Uniform Statistical Convergence. Tools for Mathematical Modelling, 143-147.

Pehlivan, S., 2001. İstatistiksel yakınsaklık Üzerine Ders Notları. Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

Pringsheim, A., 1900. Zur Theorie der Zweifach Unendlichen Zahlenfolgen. Mathematische Annalen, 53, 289-321.

Rath, D., Tripathy, B. C., 1994. On Statistically Convergent and Statistically Cauchy Sequences. Indian Journal Pure Applications Mathematical, 25, 4, 381-386.

Robinson, G. M., 1926. Divergent Double Sequences and Series. Transactions of American Mathematical Society. 28, 50-73.

Šalát, T., 1980. On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers. Mathematical Slovaca, 30, 2, 139-150.

Schoenberg, I. J.,1959. The İntegrability of Certain Functions and Related Summability Methods. American Mathematical, Monthly, 66, 361-375.

Steinhaus, H., 1951. Sur la Convergence Ordiniaire et la Convergence Asymptotique. Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.

Şahiner, A., Gürdal, M., Düden, F. K., 2007. Triple Sequences and Their Statistical Convergence. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 8, 2, 49-55.

Şahiner, A., Tripathy, B. C., 2008. Some I-Related Properties of Triple Sequences. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 9, 2, 9-18.

Tripathy, B. C., 1988. On Statistical Convergence. Proc. Estonjan Acad., 47, 4, 299-303.

Tripathy, B. C., 1998. On Statistically Convergent Sequences. Null Cal. Mathematical Society, 90, 259-262.

Tripathy, B. C., 1998. On Statistical Convergence. Proceedings Estonjan Acad. Sci. Phys. Math., 47, 4, 299-303.

Tripathy, B. C., 2000. A Note On Statistical Convergence. Far East Journal Mathematical Sciences, 2, 1, 87-91.

Tripathy, B. C., 2003. Statistical Convergent Double Sequences. Tamkang Journal Mathematical, 34, 3, 231-237.

Tripathy, B. K., Tripathy, B. C. , 2005. On I-convergent Double Sequences. Soochow Journal of Mathematics, 31, 4, 549-560.

Tripathy, B. C., Dutta, A. J., 2007. Statistically Convergent and Cesáro Summable Double Sequences of Fuzzy Real Numbers. Soochow journal of Mathematics, 33, 4, 835-848.

ÖZ GEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fatma Kadriye ÖRGEN
Doğum Yeri ve Yılı	: Burdur 1983
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
Eğitim Durumu	
Lise	: 1996-2000 Isparta Gürkan Lisesi
Lisans	: 2001-2005 Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi