İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÇİZGELERİN SPERNER SAYILARI

Gülnur BAŞER

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yusuf CİVAN

Dört bölümden oluşan bu tezde Çizgelerin Sperner sayıları tanıtılmış ve incelenmiştir. Bu çalışmaya gerekli olan bazı temel Çizgeler teorisi ile ilgili tanımlarla giriş yapılmıştır.

İlk bölümde çalışmamızla ilgili olan Milner'ın bir teoremine yer verilmiştir (Milner, 1968). Bu çalışmada Milner'ın bu teoreminin İspatı Scott'dan alınmıştır (Scott, 1999).

İkinci bölümde arakesit çizgesi ve bir çizgenin Sperner sayısı tanıtılmıştır ve her sonlu çizgenin bir Sperner sayısı olduğu ispatlanmıştır. Milner'ın teoremi yardımıyla tam çizgenin Sperner sayısı hesaplanmıştır; ayrıca iki-çoklu çizgenin de Sperner sayısı burada verilmiştir. Bir G çizgesinin verilen herhangi bir v köşesi için v'nin Sperner derecesi tanıtılmış ve v'nin Sperner derecesi ile v'nin komşuluklarının indirgediği altçizgenin tamsal örtüm sayısı arasındaki ilişkiyi veren bir teorem ispatlanmıştır.

Üçüncü bölümde, bu çalışma çizgelerin regüler gerenleriyle genişletilmiştir ve regüler Sperner sayıları tanımlanmıştır. Verilen bir çizgenin bir k-regüler gereninin hangi durumlarda mevcut olduğu incelenmiştir. Sperner sayısı ile regüler Sperner sayısı arasında ilişkiye değinilmiştir. Örnek olarak tam çizgenin ve tam iki-çoklu çizgenin regüler Sperner sayıları hesaplanmıştır.

Son bölümde çizgelerin Sperner sayıları için çeşitli sınırlar bulmanın üzerinde durulmuştur. İlk önce bir çizgenin Sperner sayısının bağımsızlık sayısının iki katından daha büyük veya eşit olduğu ifade ve ispat edilmiştir. Ardından bu ifadenin eşitlik durumuna bakılmıştır; yani bir çizgenin Sperner sayısının, bağımsızlık sayısının iki katına eşit olduğu durumlar incelenmiştir. Daha sonra da bağımsızlık sayısının iki katından daha büyük olduğu durumlara bakılmıştır. Bunların ardında ise bir çizgenin bir kenarının atılmasıyla ve bir kenarının büzülmesiyle Sperner sayısının nasıl değişiklik gösterdiği incelenmiştir. Son olarak bir çizgenin Sperner sayısı ile bütünleyeninin kromatik sayısı arasındaki ilişki açıklanmış, bunun bir sonucu olarak bir çizgenin Sperner sayısının tamsal örtüm sayısından daha büyük veya eşit olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Çizge, Sperner sayısı, geren, bağımsızlık sayısı.

2009, 50 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SPERNER NUMBER OF GRAPHS

Gülnur BAŞER

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf CİVAN

In this thesis that consists of four chapters we introduce and study the Sperner numbers of graphs. We begin our work with providing some basic definitions of graph theory that are needed throughout our thesis.

Apart from the common terminologies of graph theory, we supply some of the known results such as Milner's theorem (Milner, 1968, Katona, 1998) that are related to our work in the first chapter. The proof of Milner's theorem that we state here is due to Scott (Scott, 1999).

The definition of the Sperner number of a graph is given in the second chapter, where we also prove that it is well-defined, that is, every finite graph has a Sperner number. We there compute the Sperner number of complete graphs (by use of Milner's theorem) and complete bipartite graphs. For any given vertex v of a graph G, we introduce the Sperner degree of v, and prove a theorem that relates the Sperner degree of v to the clique-covering number of the subgraph induced by the neighborhoods of v.

In chapter three, we extend our work to include uniform realizers of graphs, and define the regular Sperner numbers. We investigate the existence of a k-regular realizer of a given graph, and discuss the relation between k-regular Sperner numbers and ordinary Sperner numbers of graphs. As examples, we compute k-regular Sperner numbers of complete and complete bipartite graphs.

The final chapter is devoted to find various bounds on the Sperner numbers of graphs.

We prove that the Sperner number of a graph is bounded below by the twice of the independence number of that graph. In the case of equality, we offer a detailed analysis of graphs satisfying this condition. Moreover, we also study those graphs such that this bound is strict. We there also investigate how the Sperner number is effected under some graph operations, such as edge-contractions. Finally, we explain the relation between the Sperner number of a graph and the chromatic number of its complement. As a result, we prove that the Sperner number of a given graph is greater than or equal to the clique-covering number of the graph.

Keywords: Graph, Sperner number, realizer, independence number.

2009, 50 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında uyarı ve görüşlerini esirgemeyerek böyle bir çalışmanın oluşumunda yardımlarını gördüğüm Danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf CİVAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Gülnur BAŞER

ISPARTA, 2009

TERMİNOLOJİ SAYFASI

Çizge	Graph
Köşe	Vertex
Kenar	Edge
Derece	Degree
Mertebe	Order
Altçizge	Subgraph
İndirgenmiş altçizge	Induced subgraph
Bağımsız küme	Independent set
Bağımsızlık sayısı	Independence number
Yol	Path
Döngü	Cycle
Orman	Forest
Ağaç	Tree
Bütünleyen	Complement
Tamsal	Clique
Tamsal sayısı	Clique number
Tamsal örtüm sayısı	Clique covering number
İkiçoklu çizge	Bipartite graph
Tam çizge	Complete graph
Kromatik sayısı	Chromatic number
Üst gölge	Upper Shadow
Alt gölge	Lower Shadow
Arakesit çizge	Intersection graph
Sperner ailesi	Sperner family
Geren	Realizer
Germe fonksiyonu	Realizing map
Sperner sayısı	Sperner number
Sperner derecesi	Sperner degree

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{P}(X)$	X'in bütün altkümelerinin ailesi
$\|G\|$	G'nin mertebesi (köşelerinin sayısı)
$\\|G\\|$	G'nin kenarlarının sayısı
$H \leq G$	H çizgesi G'nin indirgenmiş altçizgesi
$\alpha(G)$	G'nin bağımsızlık sayısı
$\mathcal{N}(v)$	v'nin komşuluğu
$d(v)$	v'nin derecesi
$\Delta(G)$	G'nin maksimum derecesi
$\delta(G)$	G'nin minimum derecesi
P_n	n-köşeli yol
C_n	n-köşeli döngü
K_n	n-köşeli tam çizge
$\bar{G}$	G'nin bütünleyeni
$G \cong H$	G çizgesi H'ye izomorfik
$\omega(G)$	G'nin tamsal sayısı
$k(G)$	G'nin tamsal örtüm sayısı
$K_{p_1,\ldots,p_n}$	tam n-çoklu çizge
$\chi(G)$	G'nin kromatik sayısı
G/e	G'de e kenarının büzülmesi
$G - e$	G'den e kenarının atılması
$G - v$	G'den v köşesinin atılması
$\partial^+\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$ ailesinin üst gölgesi
$\partial^-\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$ ailesinin alt gölgesi
$\|A\|$	A kümesinin eleman sayısı
$[n]$	$\{1, 2, \ldots, n\}$
$[n]^{(k)}$	$[n]$'nin k-elemanlı altkümelerinin ailesi
$Sp(G)$	G'nin Sperner sayısı
$d_{Sp}(v)$	v köşesinin Sperner derecesi
$RSp^k(G)$	G'nin k-regüler Sperner sayısı
$G[S]$	G'nin S tarafından indirgenmiş altçizgesi

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, Sperner aileleri kullanılmıştır ve bundan yola çıkarak arakesit çizgesi yardımıyla bir çizgenin Sperner sayısı hesaplanmıştır.

Sperner aileleri, bu çalışmada olduğu gibi pek çok yerde kullanılmıştır. Katona bir makalesinde Sperner ailesinin maksimum eleman sayısını vermiş ve bu ailelerden elde ettiği vektörlerle bir çalışma yapmıştır (Katona, 1997). Bey vd. (2002) arakasit Sperner ailelerinin eleman sayılarını incelemiştir. Pek çok kitapta da Sperner ailelerine ve bu ailelerle ilgili özelliklere yer verilir.

Yapılan bu çalışmada ise Sperner aileleri çizge elde etmek için kullanılmıştır. Literatürde kümeler ailesinden çizge oluşturarak yapılan pek çok çalışma vardır. Bunlardan biri Kong ve Yaokun (2009)'nun arakesit çizge kullanarak yaptıkları çalışmadır. Arakesit çizgeyi oluşturan aileler yardımıyla çizgelerin arakesit sayılarını tanımlamışlar ve bu sayıların çeşitli türleri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Jukna (2009) da bir makalesinde çizgelerin köşelerine kümeler karşılık getirerek bir tanımlama yapmış ve bu tanımlamaya göre iki-çoklu çizgeleri incelemiştir. Jukna, Yapılan tez çalışmasından farklı olarak çizgenin köşelerine karşılık gelen kümelerin arakesitlerinin eleman sayılarına göre çizgenin kenarlarını belirlemiştir. Hamburger vd. (2009) sonlu bir kümenin k-elemanlı altkümelerinden oluşan bir aile yardımıyla çizgeler elde ederek bir çalışma yapmışlardır. Bu ailede ayrık olan kümeler arasında kenar oluşturarak çizgeler meydana getirilmiştir ve oluşabilecek çizgelere göre k-tamsayısının durumu incelenmiştir.

Bu çalışmada ise Sperner aileleri yardımıyla çizgeler elde edilerek basit bir çizgenin Sperner sayısı incelenmiş ve buna ilişkin sınırlar elde edilmiştir. Bunun için Sperner ailesi ve geren tanımlarının yanı sıra çalışmada gerekli olan çizgeler teorisiyle ilgili temel kavramlar verilmiştir. Bu temel kavramlar için West (1996)'in ve Balakrishnan ve Ranganathan (2000)'ın kitaplarından yararlanılmıştır.

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{P}(X)$ kümesi X'in kuvvet kümesi olmak üzere aşağıdaki iki özellik sağlanıyor ise $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$ alt ailesine bir *(tam) Sperner ailesi* denir.

i) (Tamlık özelliği:) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$,

ii) (Sperner özelliği:) Her $i, j \in I$, $i \neq j$ için $A_i \nsubseteq A_j$.

Örneğin, $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{A} = \{\{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ ailesi bir Sperner ailesidir.

Tanım 1.1.2. V sonlu bir küme ve $E \subseteq V \times V$ bir altküme olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine bir *çizge* denir. Eğer $E \subseteq V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$ ise G'ye *basit çizge* denir. G'nin köşelerinin kümesi $V(G)$, kenarlarının kümesi $E(G)$ ile gösterilir. Ayrıca u ve v arasında bir kenar $e = (u, v)$ şeklinde belirtilir. G'nin *mertebesi* (*köşelerinin sayısı*) $|G|$ ile; G'nin *kenarlarının sayısı* $\|G\|$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. G ve H iki çizge olsun. Buna göre $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H çizgesine G çizgesinin *altçizgesi* denir. Ayrıca $V(H)$'deki köşelerin G'de oluşturduğu her kenar $E(H)$'ye ait ise H çizgesine G çizgesinin *indirgenmiş altçizgesi* denir. H çizgesi G çizgesinin indirgenmiş altçizgesi ise $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.4. $G = (V, E)$ bir çizge ve $S \subseteq V$ olsun. Her $u, v \in S$ için $(u, v) \notin E$ ise S kümesine G çizgesinde bir *bağımsız küme* denir. Ayrıca

$$\alpha(G) := maks\{|S| \mid S \subseteq V \text{ kümesi } G \text{ çizgesinde bağımsız küme}\}$$

sayısına G çizgesinin *bağımsızlık sayısı* denir.

Tanım 1.1.5. Bir G çizgesi için

$$\mathcal{N}(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$$

kümesine v'nin G'deki *(açık) komşuluğu* denir.

Tanım 1.1.6. Bir G çizgesinde bulunan bir v köşesi için $|\mathcal{N}(v)|$ sayısına v köşesinin *derecesi* denir ve $d_G(v)$ (veya $d(v)$) ile gösterilir. Bütün köşelerinin derecesi k olan çizgelere $k-$*regüler çizge* denir. Ayrıca $\Delta(G) := maks\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ sayısına G'nin *maksimum derecesi* ve $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ sayısına da G'nin *minimum* *derecesi* denir.

Tanım 1.1.7 $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ köşelerin bir kümesi olsun. Her $2 \leq i \leq n$ için (v_{i-1}, v_i) bir kenar ise birbirinden farklı $v_1, v_2, ..., v_n$ köşelerinin sıralanmış bir listesine *yol* denir. Benzer şekilde (v_{i-1}, v_i) ve (v_n, v_1) kenar ise $v_1, v_2, ..., v_n$ köşelerinin sıralanmış listesine bir *döngü* denir. n-köşeli bir yol P_n ile, n-köşeli bir döngü C_n ile gösterilir. Her iki köşesi arasında bir kenar bulunan basit çizgelere *tam çizge* denir ve n-köşeli bir tam çizge K_n ile gösterilir. Yani $K_n = \left([n], [n]^{(2)}\right)$'dir.

Tanım 1.1.8. Bir G çizgesinde herhangi iki a, b köşesi için bir a,b-yolu mevcut ise G çizgesine *bağlantılı çizge* denir.

Tanım 1.1.9. Döngü içermeyen çizgelere *orman*, bağlantılı bir ormana *ağaç* denir.

Tanım 1.1.10. $G = (V, E)$ bir çizge olsun. Buna göre

$$(u, v) \in E^{'} \iff (u, v) \notin E(G)$$

koşulunu sağlayan $\bar{G} = \left(V, E^{'}\right)$ çizgesine G çizgesinin *bütünleyeni* denir.

Tanım 1.1.11. G ve H birer çizge olmak üzere, $f : V(G) \to V(H)$ fonksiyonu için $(u, v) \in E(G)$ olduğunda $(f(u), f(v)) \in E(H)$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna G çizgesinden H çizgesine bir *homomorfizma* denir.

Tanım 1.1.12. G ve H birer çizge olmak üzere $f : V(G) \to V(H)$ birebir ve örten fonksiyonu için

$$(u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(H)$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna G çizgesinden H çizgesine bir *izomorfizma* denir. Eğer G çizgesinden H çizgesine bir izomorfizma varsa G çizgesi H çizgesine *izomorfiktir* denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.13. $G = (V, E)$ çizgesinin indirgenmiş bir tam altçizgesine G çizgesinin bir *tamsalı* denir. Bir $S \subseteq V$ kümesi için $G[S] \cong K_k$ ise S kümesine bir $k-tam$ denir. Ayrıca

$$\omega(G) := maks\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ bir } k - \text{tama sahip}\}$$

sayısına G çizgesinin *tamsal sayısı* denir.

Tanım 1.1.14. G bir çizge olsun. G'nin köşelerini örten tamsallara *tamsal örtüm*, minimal elemanlı bir tamsal örtümün eleman sayısına da *tamsal örtüm sayısı* denir. Bir G çizgesinin tamsal örtüm sayısı $k(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.15. G çizgesindeki köşeler n-tane boş olmayan bağımsız kümeye parçalanabiliyorsa G'ye *n-çoklu çizge* denir.
G çizgesi n-çoklu çizge olmak üzere $V_1, V_2, ..., V_n$ bu çizgedeki bağımsız kümeler olsun. Buna göre $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, her $v_i \in V_i$ ve her $v_j \in V_j$ için $(v_i, v_j) \in E(G)$ ise G'ye *tam n-çoklu çizge* denir. G tam n-çoklu çizgesi, her $i = 1, 2, ..., n$ için $|V_i| = p_i$ olmak üzere, $K_{p_1,p_2,...,p_n}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.16. $G = (V, E)$ bir çizge olsun. Bu takdirde $\kappa(v) = \kappa(w)$ olduğunda, $(v, w) \notin E$ olacak şekildeki örten bir $\kappa : V \to [n] = \{1, 2, ..., n\}$ fonksiyonuna G çizgesinin *n-renklendirilmesi* denir. Ayrıca, G çizgesini renklendirmek için gerekli olan minimum renk sayısına G çizgesinin *kromatik sayısı* denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.17. G bir çizge olsun. G çizgesindeki $e = (u, v)$ kenarı yardımıyla köşe kümesi $V(H) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{uv\}$ ve kenar kümesi

$$\begin{aligned} E(H) &= \{f \in E(G) \mid u \notin f \text{ ve } v \notin f\} \\ &\quad \cup \{(w, uv) \mid w \in \mathcal{N}_G(u) \cup \mathcal{N}_G(v) \text{ ve } uv \in V(H)\} \end{aligned}$$

olan $H = G/e$ çizgesini oluşturan operasyona e kenarının *büzülmesi* denir.

Tanım 1.1.18. $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin altkümelerinden oluşan bir $\mathcal{F}$ ailesi verilmiş olsun. Eğer her $F, G \in \mathcal{F}$ için $F \nsubseteq G$ ve $F \cap G \neq \varnothing$ ise $\mathcal{F}$ ailesine *arakesit Sperner ailesi* denir. $[n]$ 'nin k-elemanlı altkümelerinin kümesini $[n]^k$ ile gösterelim. $\mathcal{F} \subset [n]^k$ için

$$\partial^+\mathcal{F} := \left\{G \in [n]^{(k+1)} \mid \text{bir } F \in \mathcal{F} \text{ için } G \supset F\right\}$$

kümesine $\mathcal{F}$'nin *üst gölgesi* denir.

$$\partial^-\mathcal{F} := \left\{G \in [n]^{(k-1)} \mid \text{bir } F \in \mathcal{F} \text{ için } G \subset F\right\}$$

kümesine ise $\mathcal{F}$'nin *alt gölgesi* denir.
$k < \frac{n}{2}$ ise $|\partial^+\mathcal{F}| \geq |\mathcal{F}|$ ve $k > \frac{n}{2}$ ise $|\partial^-\mathcal{F}| \geq |\mathcal{F}|$'dir.

Teorem 1.1.19. (Sperner, 1928). $\mathcal{A}$ ailesi n-elemanlı S kümesi üzerinde bir Sperner ailesi olsun. Bu durumda $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$'dir.

İspat (Lubell, 1966): Öncelikle S kümesinin elemanlarından oluşan $n!$-tane permütasyon olduğunu aklımızda tutalım.

S'nin elemanlarından oluşan bir π permütasyonunun ilk $|A|$-elemanlı kısmı, A kümesinin elemanlarından oluşuyor ise π permütasyonuna A kümesi ile başlar denilebilir. A ile başlayan permütasyonların sayısı $|A|!\,(n-|A|)!$ olmalıdır.

Bir permütasyon, $\mathcal{A}$ ailesindeki iki farklı küme ile başlayamaz, çünkü bu kümelerin biri diğerini kapsayabilir; ayrıca $\mathcal{A}$ ailesindeki farklı kümelerle başlayan permütasyonlar birbirinden farklıdır. Böylece

$$\sum_{A\in\mathcal{A}} |A|!\,(n-|A|)! \leq n!$$

olur. Buna göre, $\mathcal{A}$'nın k-elemanlı kümelerinin sayısı p_k ile gösterilirse

$$\sum_k k!\,(n-k)!p_k \leq n!$$

olup

$$\sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

elde edilir. Böylece

$$|\mathcal{A}| = \sum_k p_k = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}\sum_k \frac{p_k}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n}{\lceil \frac{n}{2}\rceil}$$

bulunur.■

Tanım 1.1.20. $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir permütasyon π ve $1 \leq r \leq n$ olsun. Eğer $\pi(a_1) = a_2, \pi(a_2) = a_3, \ldots, \pi(a_{r-1}) = a_r, \pi(a_r) = a_1$ ve her $a \in X\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ için $\pi(a) = a$ ise π'ye uzunluğu r olan *devirli permütasyon* ya da kısaca r-*devirli* denir ve $\pi = (a_1a_2\ldots a_r)(a_{r+1})\ldots(a_n) = (a_1a_2\ldots a_r)$ ile gösterilir.

Teorem 1.1.21. (Milner, 1968) $[n]$ üzerindeki bir arakesit Sperner ailesi en fazla $\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2}\rceil}$ elemana sahiptir.

İspat: (Scott, 1999) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(n)$ maksimum N büyüklükte bir arakasit Sperner ailesi olsun. Eğer n-tek sayı ise $\mathcal{F}$ ailesi Teorem 1.1.19'dan dolayı $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2}\rceil}$'dir.

Şimdi $n = 2k$ olduğu durumu inceleyelim. $r = \min\{|A| \mid A \in \mathcal{F}\}$ ve $0 \leq k \leq n$ için $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap [n]^k$ olsun. Buradan $r < \frac{n}{2} = k$ ise $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}\backslash\mathcal{F}_r) \cup \partial^+\mathcal{F}_r$ ailesini göz önüne alalım. Bu, en az $\mathcal{F}$ kadar geniş bir arakesit Sperner ailesidir; çünkü $|\partial^+\mathcal{F}_r| \geq |\mathcal{F}_r|$'dir. Kabul edelim ki, $A \in \mathcal{F}$ için $|A| \geq \frac{n}{2}$ ve $r = maks\{|A| \mid A \in \mathcal{F}\}$ olsun. Buradan

$r > k+1$ ise $\mathcal{F}' = (\mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_r) \cup \partial^- \mathcal{F}_r$ ailesini düşünelim. $\mathcal{F}$ ailesindeki bütün kümeler en az $\frac{n}{2}$-elemana sahip olduğundan bu bir arakesit Sperner ailesidir. Diğer taraftan $|\mathcal{F}'| \geq |\mathcal{F}|$'dir; çünkü $|\partial^- \mathcal{F}_r| \geq |\mathcal{F}_r|$'dir. Bu şekilde devam edildiğinde, $\mathcal{F} \subset [n]^{(k)} \cup [n]^{(k+1)}$ olacaktır.

$\mathcal{G} = \partial^+ \mathcal{F}_k$ olsun. $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{F}_{k+1}$ ayrık ve $|\mathcal{F}_{k+1}| + |\mathcal{G}|$ sayısı $\binom{n}{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$ ile sınırlandığından $|\mathcal{G}| \geq |\mathcal{F}_k|$ olduğunu göstermeliyiz.

$[n]$'nin bir c-devirli permütasyonunu düşünelim ve $\mathcal{F}_k$'nın $f(c)$-elemanı, $\mathcal{G}$'nin $g(c)$-elemanı c-devirli permütasyon üzerinde, sırasıyla, k-uzunluklu ve $k+1$-uzunluklu aralıklar olarak oluşsun. Buna göre, c-devirli permütasyonundaki k-uzunluklu bir aralık $\mathcal{F}_k$'nın elemanı ise bu aralığın bütünleyeni $\mathcal{F}_k$'ya ait değildir. Bu yüzden $f(c) \leq \frac{n}{2} = k$'dır. Ayrıca, k-uzunluklu her aralık $(k+1)$-uzunluklu bir aralığa iki şekilde uzatılabilir. Bu durumda

$$g(c) \geq f(c) + 1 \geq \left(\frac{k+1}{k}\right) f(c)$$

olur. $\mathcal{F}_k$'nın herbir elemanı $k!^2$-tane devirli permütasyonda ve $\mathcal{G}$'nin herbir elemanı $(k+1)!\,(k-1)!$-tane devirli permütasyonda oluşur. Böylece, bütün devirli permütasyonlar üzerinden toplam

$$(k+1)!\,(k-1)!\,|\mathcal{G}| = \sum_c g(c) \geq \frac{k+1}{k} \sum_c f(c) = \frac{k+1}{k} k!^2\,|\mathcal{F}_k|$$

olduğunu gösterir ve buradan $|\mathcal{F}_k| \leq |\mathcal{G}|$ elde edilir.■

Teorem 1.1.22. (Erdös-Ko-Rado (EKR) Theorem). $A_1, A_2, \ldots, A_m$ kümeleri n-elemanlı bir S kümesinin k-elemanlı altkümeleri olmak üzere $k \leq \frac{1}{2}n$ ve her $1 \leq i, j \leq m$ için $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda $m \leq \binom{n-1}{k-1}$'dir.

İspat (Katona, 1972)**:** Kabul edelim ki $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ olsun. $1, 2, \ldots, n$'nin herbir α devirli permütasyonu ve her bir A_i kümesi için

$$f(\alpha, A_i) = \begin{cases} 1, & \alpha \text{ devirli permütasyonu } A_i\text{'yi içeriyorsa,} \\ 0, & \text{aksi takdirde,} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\sum\limits_{i,\alpha} f(\alpha, A_i)$'yi iki farklı şekilde sayabiliriz. İlki

$$\sum_{i,\alpha} f(\alpha, A_i) = \sum_i \sum_\alpha 1$$

dir. (Burada ikinci toplam A_i'yi içeren α devirli permütasyonları üzerindedir.) Herbir α, ardışık elemanların n-tane k-elemanlı kümesine sahiptir. $(n-1)!$-tane devirli permütasyonun tümü düşünüldüğünde, S'nin $\binom{n}{k}$-tane k-elemanlı altkümelerinin herbiri sıralı elemanlar olarak oluşacaktır. Buna göre

$$\sum_{\alpha} 1 = \frac{n(n-1)!}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{\binom{n}{k}}$$

olur. Böylece

$$\sum_{i,\alpha} f(\alpha, A_i) = \frac{m.n!}{\binom{n}{k}} \tag{1.1}$$

elde edilir.

Eğer herhangi bir α devirli permütasyonunun A_i kümelerinin en fazla k-tanesini içerdiğini gösterebilirsek (bu Teorem 1.1.23'de gösterilecek.)

$$\sum_{i,\alpha} f(\alpha, A_i) = \sum_{\alpha} \sum_{\substack{i \\ (A_i, \alpha\text{'da})}} 1 \leq \sum_{\alpha} k = (n-1)!.k \tag{1.2}$$

olur. (1.1) ve (1.2) karşılaştırıldığında

$$\frac{m.n!}{\binom{n}{k}} \leq \binom{n-1}{k-1}$$

bulunur; yani

$$m \leq \frac{k}{n}\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

olur.■

Teorem 1.1.23. (Katona, 1972)**.** Eğer $[n]$'nin devirli bir permütasyonu α ve $[n]$'nin A_i kümeleri Teorem 1.1.22'deki gibi ise α devirli permütasyonu A_i kümelerinin en fazla k-tanesini içerebilir.

İspat: Kabul edelim ki A_h kümesi α'nın ardışık $x_1, x_2, \ldots, x_k$ elemanları olarak oluşsun. Buna göre A_i'lerin arakesit özelliğinden dolayı α üzerinde oluşan diğer kümelerden sadece $(k-1)$-tanesi x_i $(1 \leq i \leq k)$ ile başlayan A_i kümeleri ve $(k-1)$-tanesi x_i $(1 \leq i \leq k-1)$ ile biten B_i kümeleridir. Fakat $A_1 = B_k$'dır ve $1 \leq i \leq k-1$ olduğunda A_{i+1} ve B_i'den en fazla biri ailede bulunabilir; çünkü $A_{i+1} \cap B_i = \varnothing$'dir. Bu yüzden aile bu kümelerin en fazla $1 + (k-1) = k$-tanesini içerebilir.■

2. ÇİZGELERİN SPERNER SAYILARI

Bu bölümde, bir (basit) çizgenin Sperner sayısı tanımlanarak örnekler verilecektir. Ayrıca, Sperner sayısı ile ilgili incelediğimiz bazı özelliklerden bahsedilecektir. Son olarak da bir v köşesinin Sperner derecesi kavramı tanımlanarak, bu tanımla ilgili bir teorem verilecektir. Bu tanım ve teorem sonraki bölümlerde kullanılacaktır.

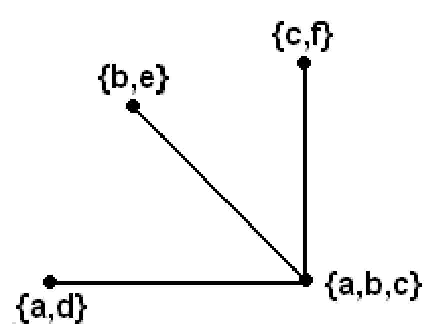
Tanım 2.1. $\mathcal{A}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi, $G(\mathcal{A})$ ise köşe kümesi $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan bir çizge olsun. Eğer, $G(\mathcal{A})$'da iki farklı köşenin bir kenar oluşturması için gerek ve yeter şart bu iki köşeye karşılık gelen kümelerin kesişiminin boştan farklı olması ise $G(\mathcal{A})$'ya $\mathcal{A}$'nın *arakesit çizgesi* denir.

Tanım 2.2. $G = (V, E)$ basit çizge olmak üzere, $\mathcal{A}$ bir X kümesi üzerinde bir Sperner ailesi olsun. Bu durumda, eğer G çizgesi $\mathcal{A}$'nın kesişim çizgesine izomorfik ise $\mathcal{A}$'ya G'nin *gereni* denir. Yani, $\mathcal{A}$ ailesi G'nin gereni ise

$$(u, v) \in E \Leftrightarrow \forall u, v \in V \text{ için } \mu(u) \cap \mu(v) \neq \varnothing$$

şartını sağlayan bir $\mu : V \to \mathcal{A}$ birebir örten fonksiyonu vardır. Bu durumda, $(X, \mathcal{A}, \mu)$'ye G'nin bir *gereni*, μ'ye de *germe fonksiyonu* denir.

Örnek 2.3. $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ve $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}\}$ olsun. $\mathcal{A}$, aşağıdaki şekildeki çizgenin bir gerenidir.



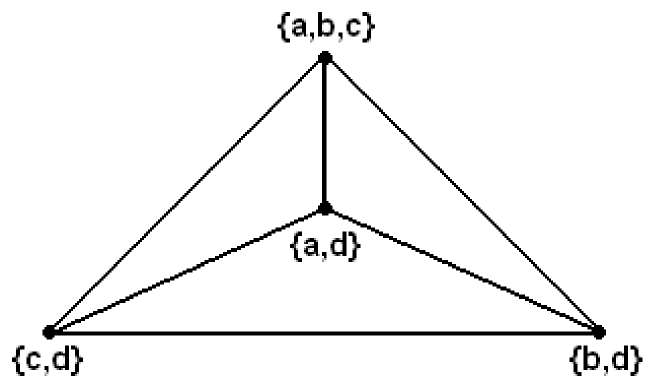
Şekil 2.1. $G(\mathcal{A})$ arakesit çizgesine izomorfik bir çizge

Tanım 2.4. G basit bir çizge olsun. Bu takdirde

$$Sp(G) = \min\{k \mid G\text{'nin bir } ([k], \mathcal{A}, \mu) \text{ gereni vardır}\}$$

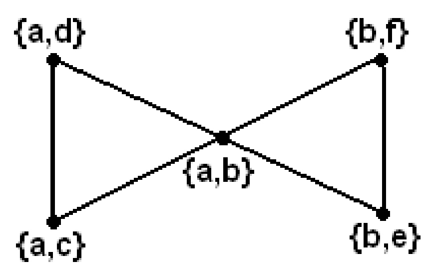
sayısına G'nin *Sperner sayısı* denir.

Örnek 2.5. $Sp(K_4) = 4$'dür. Ayrıca $X = \{a, b, c, d\}$ ve
$\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ailesi K_4'ün bir gerenidir.



Şekil 2.2. Bir gereni ile verilmiş K_4 tam çizgesi

Örnek 2.6. Şekil 2.3'deki gibi verilen G çizgesi için $Sp(G) = 6$'dır. G'nin bu şartı sağlayan bir gereni $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{b, f\}\}$'dır.



Şekil 2.3. Sperner sayısı 6 olan bir çizge

Teorem 2.7. Her basit çizgenin bir Sperner sayısı vardır.

İspat: G bir basit çizge olsun. G'nin en az bir gereninin olduğunu gösterelim. $U = \{u \in V \mid d(u) = 1\}$, $V = \{w \in V \mid d(w) = 0\}$ ve $Z = \{z \in V \mid d(z) > 1\}$ olarak alalım. Ayrıca $d_1(G) = |U|$ ve $d_0(G) = |W|$ ile gösterelim. Bu durumda
$V = U \cup W \cup Z$'dir. Ayrıca $X = E \cup \{a_{w_1}, a_{w_2}, \ldots, a_{w_{|W|}}\} \cup \left\{a_{u_1}, a_{u_2}, \ldots, a_{u_{|U|}}\right\}$ olsun. Buradan her $z \in Z$ için $E(z) := \{e \in E \mid z \in e\}$ ve her $w \in W$ için $E(w) := \{a_w\}$ ve her $u \in U$ için $u \in e_u \in E$ olmak üzere $E(u) := \{e_u, a_u\}$ olarak tanımlansın. Buradan $\varepsilon(G) := \{E(v) \mid v \in V\}$ olarak tanımlayalım. Buna göre $\kappa_G : V \to \varepsilon(G)$ fonksiyonu $\kappa_G(v) := E(v)$ olarak tanımlanırsa $(X, \varepsilon(G), \kappa_G)$ üçlüsü G'nin bir gereni olur. Ayrıca,

$$Sp(G) \leq \|G\| + d_1(G) + d_0(G)$$

elde edilir. Buna göre her basit G çizgesinin bir Sperner sayısı vardır.■

Sonuç 2.8. $G = (V, E)$ basit çizge olsun. Bu durumda her $v \in V$ için $d(v) > 1$ ise

$$Sp(G) \leq \|G\|$$

olur.

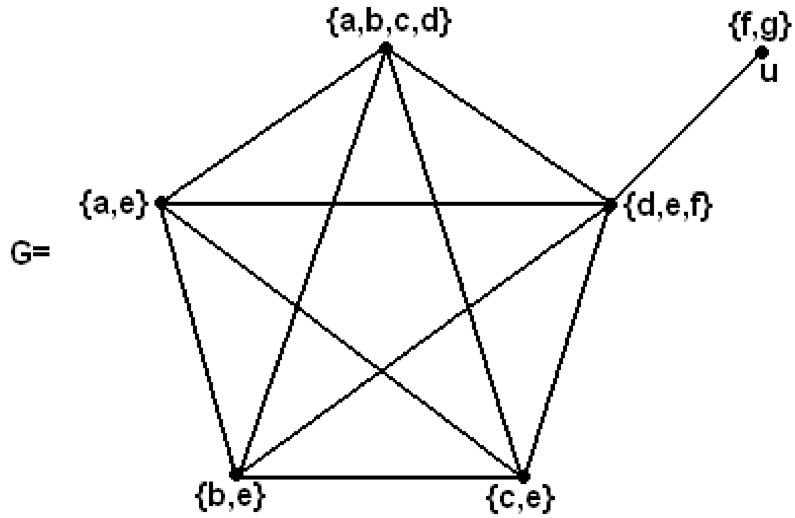
İspat: Her $v \in V$ için $E(v) := \{e \in E : v \in e\}$ olmak üzere $\varepsilon(G) := \{E(v) : v \in V\}$ olsun. $\kappa_G : V \to \varepsilon(G)$ fonksiyonu $\kappa_G(v) := E(v)$ olacak şekilde tanımlanırsa, $d(v) > 1$ olduğundan $(E, \varepsilon(G), \kappa_G)$ üçlüsü G'nin gereni olur. Böylece

$$Sp(G) \leq \|G\|$$

olduğu görülür.■

Örnek 2.9. $G = K_4$ alalım. Her $v \in V(K_4)$ için $d(v) > 1$'dir. Buna göre
$Sp(K_4) = 4 \leq 6 = \|K_4\|$'dür.

Örnek 2.10. Şekil 2.4'deki G çizgesi için $Sp(G) = 7$ ve $\|G\| = 11$, ayrıca $d(u) = 1$'dir.



Şekil 2.4. Derecesi 1 olan köşesi olmasına rağmen
Sperner sayısı kenar sayısından küçük olan bir çizge

Tanım 2.11. $G = (V, E)$ basit bir çizge ve her $v \in V$ için $d(v) > 1$ olsun. Buna göre $(E, \varepsilon(G), \kappa_G)$ üçlüsüne G'nin *kenar-gereni* denir.

Teorem 2.12. $G = (V, E)$ basit bir çizge olsun. Her $v \in V$ için

$$Sp(G - v) \leq Sp(G)$$

olur. Eğer $d(v) = 0$ veya 1 ise eşitsizlik kesindir.

İspat: $Sp(G) = t$ diyelim ve $\mu : V \to \mathcal{A}$ fonksiyonu, G için t-elemanlı bir X kümesi üzerindeki germe fonksiyonu olsun. G'den keyfi bir v köşesi attığımızda $d(v)$-tane kenarı da v'nin beraberinde G'den silmiş oluruz. Fakat G'nin diğer köşeleri arasındaki kenarlar aynı kalır. O halde $\mathcal{A} \setminus \{\mu(v)\}$ Sperner ailesi $G - v$'yi gerer. Böylece

$$Sp(G - v) \leq Sp(G)$$

elde edilir.

$d(v) = 0$ ise her $u \in V \setminus \{v\}$için $\mu(v) \cap \mu(u) = \varnothing$'dur. O halde $X \setminus \mu(v)$ kümesi üzerinde tanımlanan Sperner ailesi $G - v$'yi gerer ve

$$Sp(G - v) < Sp(G)$$

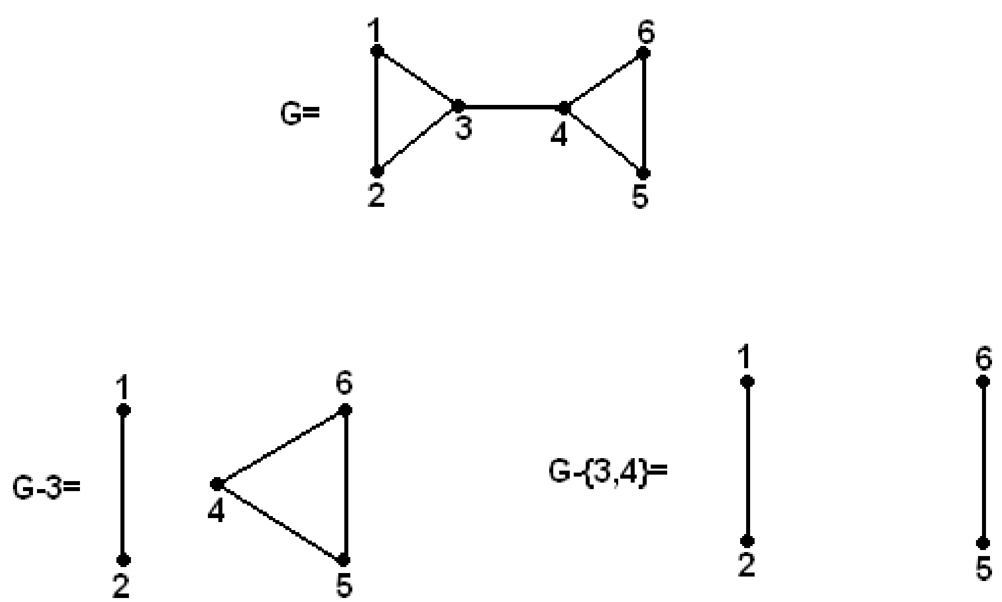
olduğu görülür.

$d(v) = 1$ ise bir $a \in \mu(v)$ vardır öyle ki her $u \in V \setminus \{v\}$ için $a \notin \mu(u)$'dur. Buna göre $|X \setminus \{a\}|$-tane eleman $(G - v)$'yi germek için yeterlidir. O halde

$$Sp(G - v) < Sp(G)$$

olur.■

Örnek 2.13. G çizgesi Şekil 2.5'deki gibi verilmiş olsun. $Sp(G) = 7$, $Sp(G - \{3, 4\}) = 6 < 7$ ve $Sp(G - 3) = 6 < 7$'dir. $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olmak üzere G'nin bir gereni $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{d, e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$'dir



Şekil 2.5. G çizgesinden köşeleri silinerek elde edilen çizgeler

Teorem 2.12.'den dolayı aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.14. G basit bir çizge ve H de G'nin indirgenmiş altçizgesi olsun. Buna göre

$$Sp(H) \leq Sp(G)$$

olur.

İspat: H altçizgesi G'nin indirgenmiş altçizgesi olduğundan $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) = \{e = (u,v) \in E(G) \mid u,v \in V(H)\}$'dır. Buna göre $V(G) \backslash V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$ olmak üzere $H \cong G - \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}$'dir.
Her $v \in V$ için $Sp(G-v) \leq Sp(G)$ olduğundan G'den t-tane köşe atılırsa

$$\begin{aligned} Sp(G) &\geq Sp(G-v_1) \geq Sp(G - \{v_1, v_2\}) \\ &\vdots \\ &\geq Sp(G - \{v_1, v_2, \ldots, v_t\}) = Sp(H) \end{aligned}$$

elde edilir.■

Uyarı: Bir G çizgesinin tamsal sayısı $\omega(G) = \omega$ olmak üzere

$$Sp(G) \geq Sp(K_\omega)$$

olduğu Sonuç 2.14'den kolaylıkla görülebilir.
$\omega(G) = \omega$, olduğundan G'deki en büyük tamsal K_ω'dir ve bu G'nin indirgenmiş altçizgesidir.

Teorem 2.15. $G = (V, E)$ üçgen içermeyen bir çizge ve her $v \in V$ için $d(v) > 1$ ise

$$Sp(G) = \|G\|$$

olur.

İspat: Lemma 2.8.'den $(E, \varepsilon(G), \kappa_G)$ üçlüsü G'nin bir gerenidir ve $Sp(G) \leq \|G\|$'dir. İddiayı ispat etmek için G'nin keyfi bir $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gereni için $\|G\| \leq |X|$ olduğunu göstermek yeterlidir.
G üçgen içermediğinden her $v \in V$ için $|\kappa_G(v)| \leq |\mu(v)|$'dir. Ayrıca, G'nin bir gereninin en fazla iki farklı elemanı boştan farklı bir arakesite sahip olabilir; yani her $u, v \in V$

için $|\kappa_G(v) \cap \kappa_G(u)| \leq 1$'dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\|G\| &= |E| = \left| \bigcup_{v \in V} \kappa_G(v) \right| \\
&= \left(\sum_{v \in V} |\kappa_G(v)| - \sum_{(u,v) \in E} |\kappa_G(v) \cap \kappa_G(u)| \right) \\
&\leq \left(\sum_{v \in V} |\mu(v)| - \sum_{(u,v) \in E} |\mu(v) \cap \mu(u)| \right) = \left| \bigcup_{v \in V} \mu(v) \right| = |X|
\end{aligned}$$

elde edilir.■

Örnek 2.16. $n > 3$ için C_n döngüsü üçgen içermediğinden ve her $v \in C_n$ için $d(v) = 2 > 1$ olduğundan

$$Sp(C_n) = \|C_n\| = n$$

olur.

Teorem 2.17. $G = (V, E)$ üçgen içermeyen bağlantılı bir çizge ve $d_1(G) := |\{v \in V : d(v) = 1\}|$ olmak üzere

$$Sp(G) = d_1(G) + \|G\|$$

olur.

İspat: $\|G\|$ üzerinden tümevarım yapalım. $\|G\| = 0$ ise yani G hiç kenar içermiyorsa, G bağlantılı olduğundan $|G| = 1$ olup $Sp(G) = 1$'dir.

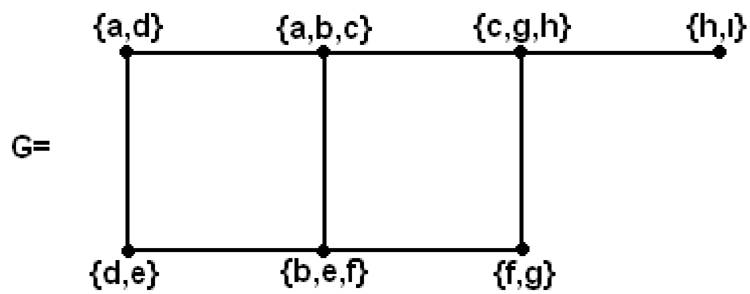
$\|G\| = n > 0$ için $Sp(G) = d_1(G) + \|G\|$ ifadesinin doğru olduğunu kabul edelim. G bağlantılı, üçgen içermeyen bir çizge, $\|G\| = n + 1$ ve $d_1(G) = m$ olsun. Eğer v köşesi G'nin derecesi 1 olan bir köşesi ise $G - v$ bağlantılı ve üçgen içermeyen bir çizgedir ve $\|G - v\| = n$'dir. Ayrıca, $u \in V(G)$ köşesi v ile kenar oluşturan tek köşe ise $G - v$'de u'nun derecesinin bir olup olmamasına bağlı olarak $Sp(G - v) = m + n$ veya $m - 1 + n$'dir.

İlk olarak, $G - v$'de $d(u) = 1$ kabul edelim ve $(m + n)$-elemanlı bir X kümesi üzerinde $G - v$ için $\kappa : V(G - v) \to \mathcal{A}$ bir germe fonksiyonu olsun. Bu durumda, $G - v$'de $d(u) = 1$ olduğundan bir $x_u \in X$ elemanı sadece $\kappa(u)$ tarafından kapsanır. Bir $x_0 \notin X$ için $X' := X \cup \{x_0\}$ ve $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cup \{\{x_u, x_0\}\}$ olmak üzere $w \neq v$ ve $\kappa'(v) = \{x_u, x_0\}$ olacak şekilde $\kappa' : V(G) \to \mathcal{A}'$ fonksiyonu $\kappa'(w) := \kappa(w)$ ile tanımlansın. Bu durumda κ' fonksiyonu $(m + n + 1)$-elemanlı bir küme üzerinde G için bir germe fonksiyonudur. Buna göre $Sp(G) = m + n + 1$'dir.

İkinci olarak, $G-v$'de $d(u)>1$ kabul edelim. Bu durumda, $Sp(G-v)=m+n-1$ olur. Ayrıca, $(m+n-1)$-elemanlı bir Y kümesi üzerinde bir germe fonksiyonu $\mu : V(G-v) \to \mathcal{B}$ verilsin. Herhangi iki $y_0, y_1 \notin Y$ için $Y' := Y \cup \{y_0, y_1\}$ ve $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \setminus \{\mu(u)\} \cup \{\mu(u) \cup \{y_0\}, \{y_0, y_1\}\}$ alalım. Buna göre $\mu' : V(G) \to \mathcal{B}'$ fonksiyonu; $w \neq u, v$, $\mu'(u) := \mu(u) \cup \{y_0\}$ ve $\mu'(v) := \{y_0, y_1\}$ olacak şekilde $\mu'(w) := \mu(w)$ olarak tanımlansın. Bu durumda, μ' fonksiyonu $(m+n+1)$-elemanlı bir küme üzerinde G için bir germe fonksiyonudur. O halde $Sp(G)=m+n+1$ olur.■

Örnek 2.18. $n>1$ için P_n yolu üçgen içermeyen bağlantılı bir çizgedir. Her $i \in \{2,3,...,n-1\}$ için $d(v_i)=2>1$ ve $d(v_1)=d(v_n)=1$ olup $d_1(P_n)=|\{v_1,v_n\}|=2$'dir. Buna göre $Sp(P_n)=\|P_n\|+d_1(P_n)=n-1+2=n+1$'dir.

Örnek 2.19. Aşağıdaki gibi verilen G çizgesi üçgen içermeyen bir çizge olup, $\|G\|=8$ ve $d_1(G)=1$'dir. Buna göre, $Sp(G)=8+1=9$'dur.

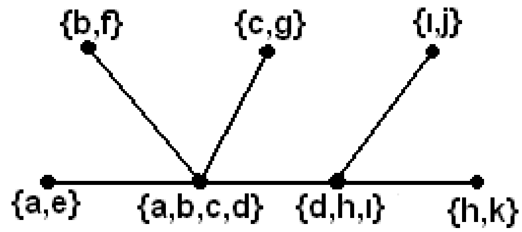


Şekil 2.6. Derecesi 1 olan köşe ve kenar sayısı ile Sperner sayısı hesaplanabilen bir çizge

Örnek 2.20. T çizgesi n-köşeli bir ağaç ve T'nin yapraklarının sayısı m olsun. T bir ağaç olduğundan üçgen içermez. O halde, $\|T\|=n-1$ ve $d_1(T)=m$ olduğundan $Sp(T)=n+m-1$'dir.

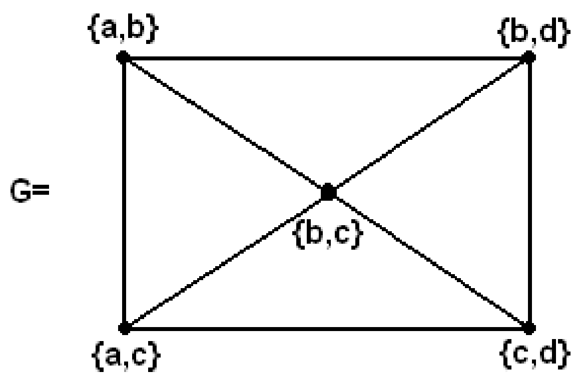
Örneğin Şekil 2.7'deki ağacın kenar sayısı 6, yaprak sayısı 5 olup Sperner sayısı

$6 + 5 = 11$'dir.



Şekil 2.7. Bir gereni ile birlikte verilmiş bir ağaç

Örnek 2.21. Şekil 2.8'deki gibi resmedilmiş zarf şeklindeki çizge; Sperner sayısı, mertebesinden küçük olabilen bir çizgenin var olduğunu gösterir.



Şekil 2.8. Sperner sayısı mertebesinden küçük olan bir çizge

$Sp(G) = 4 < 5 = |G|$'dir.

Şimdi Milner (1968)'ın teoremi olan Teorem 1.1.21'in bir sonucu olarak, tam çizgenin Sperner sayısını ve ardından iki-çoklu çizgenin Sperner sayısını verelim.

Teorem 2.22. Her $n, m > 1$ için

$i)$ $Sp(K_n) = t(n)$'dir. Burada $t(n)$,

$$n \leq \binom{t(n)}{\left\lceil \frac{t(n)+1}{2} \right\rceil}$$

koşulunu sağlayan en küçük tamsayıdır.

ii) $Sp(K_{n,m}) = nm$'dir.

İspat: *i)* Teorem 1.1.21'den m-elemanlı bir küme üzerinde inşaa edilebilecek maksimum elemanlı arakesit Sperner ailesi $\begin{pmatrix} m \\ \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil \end{pmatrix}$-elemanlıdır. Böyle bir Sperner ailesinin bir tam çizgeyi germesi mümkündür. Eğer n-köşeli bir tam çizgeyi geren $\mathcal{A}$ Sperner ailesi için $|\mathcal{A}| \leq \begin{pmatrix} t(n) \\ \left\lceil \frac{t(n)+1}{2} \right\rceil \end{pmatrix}$ oluyor ise bu eşitsizliği sağlayan en küçük $t(n)$ pozitif tamsayısı n-köşeli tam çizgenin Sperner sayısıdır.

ii) $n \leq m$ olsun. $V = \{v_1, ..., v_n\}$ ve $U = \{u_1, ..., u_m\}$ olmak üzere $K_{n,m}$'nin köşelerinin kümesini $V(K_{n,m}) = V \cup U$ olarak alalım.

$(X, \mathcal{A}, \kappa)$ üçlüsü $K_{n,m}$'nin herhangi bir gereni ise $1 \leq i \leq n$ için $|\kappa(v_i)| \geq m$'dir.

$1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $\mu(v_i) := \left\{x_1^i, x_2^i, ..., x_m^i\right\}$ ve $\mu(u_j) := \left\{x_j^1, x_j^2, ..., x_j^n\right\}$ olarak tanımlayalım.

$$Y = \left\{x_1^1, ..., x_m^1, x_1^2, ..., x_m^2, ..., x_1^n, ..., x_m^n\right\}$$

kümesi üzerindeki

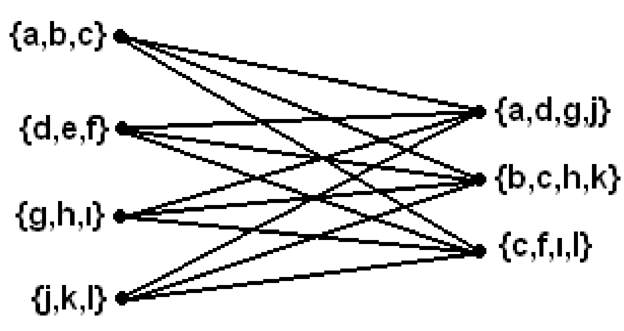
$$\mathcal{B} := \{\mu(v_i) : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\mu(u_j) : 1 \leq j \leq m\}$$

Sperner ailesi $K_{n,m}$'nin gerenidir.■

Örnek 2.23. Şekil 2.9'daki $K_{3,4}$ çizgesi, bir 2-çoklu tam çizgeye örnek olup Sperner sayısı 12'dir ve $K_{3,4}$'ün bu şartı sağlayan bir gereni

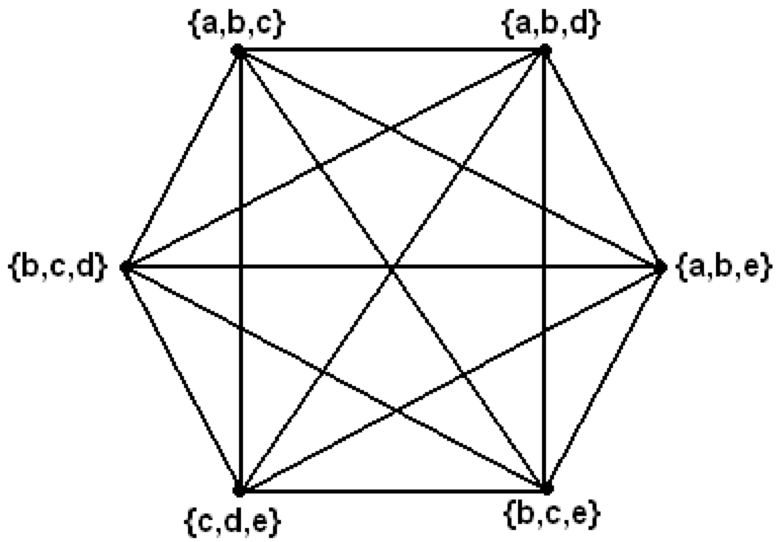
$$\{\{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{g, h, \imath\}, \{j, k, l\}, \{a, d, g, j\}, \{b, e, h, k\}, \{c, f, \imath, l\}\}$$

ailesidir.



Şekil 2.9. Bir gereni ile verilmiş $K_{3,4}$ iki-çoklu çizge

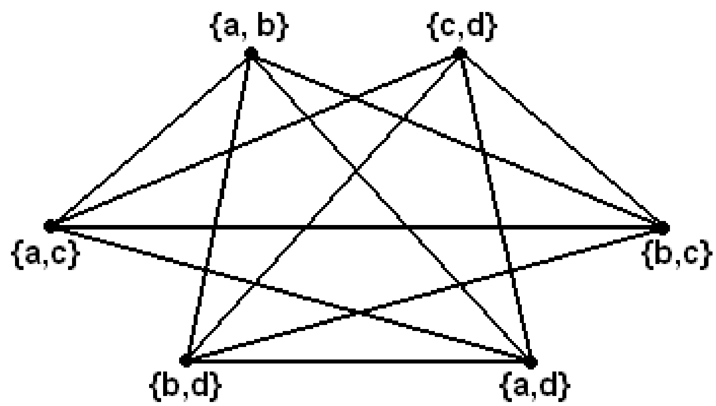
Örnek 2.24. Aşağıdaki çizge bir K_6 belirtir ve Teorem 2.22.(i)'den dolayı $Sp(K_6) = 5$'dir.



Şekil 2.10. Bir gereni ile verilmiş K_6 tam çizgesi

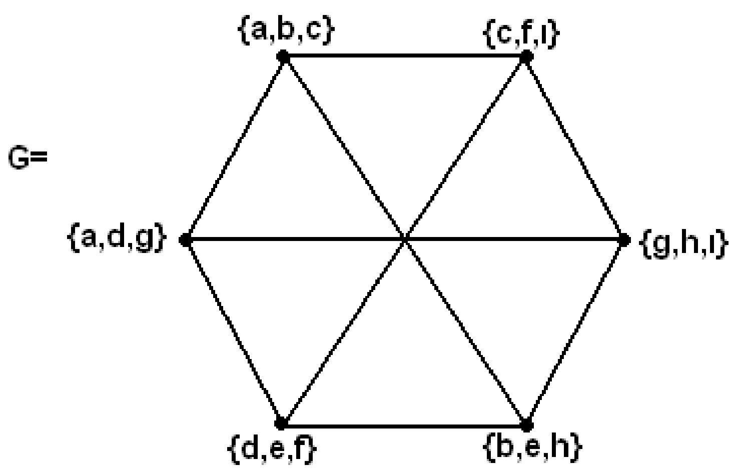
Uyarı: Teorem 1.1.19'dan s-elemanlı bir S kümesinin altkümelerinin bir $\mathcal{A}$ Sperner ailesi için $|\mathcal{A}| \leq \binom{s}{\lceil \frac{s}{2} \rceil}$ olduğunu biliyoruz. Bunun bir sonucu olarak, n-köşeli bir G çizgesi için $n \leq \binom{s}{\lceil \frac{s}{2} \rceil}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük s pozitif tamsayısı için $Sp(G) \geq s$ olduğu söylenebilir. Ayrıca s-elemanlı bir kümenin $\lceil \frac{s}{2} \rceil$-elemanlı altkümelerinden oluşan arakesit çizgesinin Sperner sayısı s'dir

Örnek 2.25. Yukarıdaki uyarıya göre 6-köşeli çizgeler arasında Sperner sayısı en küçük olan çizge $K_{2,2,2}$'dir.$n = 6 \leq \binom{4}{2} = 6$'dir ve 4-elemanlı bir X kümesi üzerinde $K_{2,2,2}$'yi geren, Şekil 2.11'de belirtildiği gibi bir Sperner ailesi bulunabilir. Bundan dolayı $Sp(K_{2,2,2}) = 4$ olur.



Şekil 2.11. 6-köşeli çizgeler arasında Sperner sayısı en küçük olan $K_{2,2,2}$ çizgesi

Örnek 2.26. G çizgesi Şekil 2.12'deki gibi verilmiş olsun. Burada, G çizgesi üçgen içermeyen bir çizgedir ve her kenarının derecesi birden büyüktür. Bu durumda, Teorem 2.15.'e göre $Sp(G) = \|G\| = 9$'dur.



Şekil 2.12. Sperner sayısı kenar sayısına eşit olan bir çizge

Tanım 2.27. $G = (V, E)$ basit bir çizge olsun. Verilen bir $v \in V$ köşesi için

$$d_{Sp}(v) := \min \{|A_v| \mid (X, \mathcal{A}, \psi) \text{ üçlüsü } G \text{ 'yi geren bir Sperner ailesi ve } \psi(v) = A_v\}$$

sayısına v köşesinin G çizgesindeki *Sperner derecesi* denir.

Teorem 2.28. G bir çizge olsun. Herhangi bir $v \in V(G)$ için

$$d_{Sp}(v) \geq k\left(G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]\right)$$

olur. Burada, $k(G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right])$ sayısı Tanım 1.1.14'de tanımlandığı gibi tamsal örtüm sayısıdır.

İspat: Kabul edelim ki $d_{Sp}(v) < k\left(G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]\right)$ olsun. $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir gereni ve $\psi(v) = d_{Sp}\left(v\right) = d$ olsun. Bu durumda
$\psi(v) = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$ diyelim. $k\left(G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]\right) = k$ sayısı $G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]$ altçizgesinin tamsal örtüm sayısı ise $G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]$'nin $\{K_1, K_2, \ldots, K_k\}$ şeklinde bir tamsal örtümü vardır. Buradaki herbir K_i çizgesi $G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]$'nin tamsalıdır ve her $i, j \in [k]\,, i \neq j$ için $K_i \nleq K_j$'dir. $d < k$ olduğundan $s, r \in [k]$ vardır öyle ki her $w \in V(K_s \cup K_r)$ için $x_i \in \psi(w)$ olacak şekilde bir $x_i \in \psi(v)$ vardır. Fakat, $K_s \nleq K_r$ ve $K_r \nleq K_s$ olduğundan en az bir $u_s \in V(K_s)$ vardır öyle ki her $u_r \in V(K_r)$ için $\psi(u_s) \cap \psi(u_r) = \varnothing$ olmalıdır. Ayrıca, $x_i \in \psi(u_s)$ ve $x_i \in \psi(u_r)$ olduğundan $\psi(u_s) \cap \psi(u_r) \neq \varnothing$ olur. Bu da çelişkidir. O halde, kabulümüz yanlıştır ve $d_{Sp}(v) \geq k\left(G\left[\mathcal{N}\left(v\right)\right]\right)$'dir.$\blacksquare$

3. ÇİZGELERİN REGÜLER SPERNER SAYILARI

Tanım 3.1. $G = (V, E)$ bir çizge ve $k \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir gereni ve her $A \in \mathcal{A}$ için $|A| = k$ ise $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsüne G'nin bir *k-regüler gereni* denir. Bir G çizgesinin gereni ile k-regüler gereninin karışmaması için G'nin k-regüler gerenini $(X, \mathcal{A}, \psi, k)$ dörtlüsü ile de göstereceğiz.

G bir basit çizge ve X boştan farklı bir küme olsun. Buna göre

$$RSp^k(G) := \begin{cases} \min|X|, & (X, \mathcal{A}, \psi) \text{ üçlüsü } G\text{'nin } k\text{-regüler gereni,} \\ \infty, & \text{aksi takdirde,} \end{cases}$$

sayısına G'nin *k-regüler Sperner sayısı* denir. Buradan da anlaşılacağı üzere her $A \in \mathcal{A}$ için $|A| = k$ olacak şekilde G çizgesine bir k-regüler gereni bulamıyorsak $RSp^k(G) = \infty$ olur. Bununla ilgili olarak aşağıdaki ifadeleri ispat edebiliriz.

Teorem 3.2. $RSp^1(G) < \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $G \cong \bar{K}_n$ olmasıdır.

İspat: İlk olarak yeter koşulu gösterelim, yani $RSp^1(G) < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda en az bir $(X, \mathcal{A}, \psi)$ gereni vardır öyle ki her $A \in \mathcal{A}$ için $|A| = 1$ 'dir. Buna göre $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir 1-regüler gereni olduğundan ve her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \neq B$ ve $A \cap B = \varnothing$ olduğundan G'nin hiç kenarı yoktur. Böylece $G \cong \bar{K}_n$ olur. Şimdi gerek koşulu gösterelim. Kabul edelim ki $G \cong \bar{K}_n$'dir. Buna göre $E(G) = \varnothing$'dir. G'nin her $(X, \mathcal{A}, \psi)$ gereni için her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \cap B = \varnothing$ olmalıdır. Buna göre her $A \in \mathcal{A}$ için $|A| = 1$ olacak şekilde bir $(X, \mathcal{A}, \psi)$ gereni bulabiliriz. Bu durumda $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin 1-regüler gereni olur. Buradan da $RSp^1(G) < \infty$'dir. Ayrıca $RSp^1(G) = |\mathcal{A}| = |G|$ olduğu kolayca görülebilir.■

Teorem 3.3. $k \geq \Delta(G)$ ise $RSp^k(G) < \infty$'dur.

İspat: $k > \Delta(G)$ olsun. G için en az bir k-regüler geren bulunabileceğini gösterelim. Her $v_i \in V$ için $d(v_i) = d_i$ olmak üzere

$$E(v_i) := \{e \in E \mid v_i \in e\} \cup \left\{a^i_{d_i+1}, a^i_{d_i+2}, \ldots, a^i_k\right\}$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamaya göre $|E(v_i)| \geq \Delta(G)$ olur. Buna göre $\varepsilon(G) := \{E(v_i) \mid v_i \in V\}$ olmak üzere $\mu_G : V \to \varepsilon(G)$ fonksiyonu $\mu_G(v_i) := E(v_i)$

olarak tanımlandığında, $(X, \varepsilon(G), \mu_G, k)$ ifadesi G için bir k-regüler gerendir. Burada

$$X = E \cup \left(\bigcup_{i=1}^{|V|} \left\{ a^i_{d_i+1}, a^i_{d_i+2}, \ldots, a^i_k \right\} \right)$$

olmalıdır. O halde $k \geq \Delta(G)$ olduğunda G için en az bir k-regüler geren bulunabilir. Bu da

$$RSp^k(G) < \infty$$

olduğunu gösterir.■

Tanım 3.4. Yukarıdaki teoremde kenar gereni tanımından yararlanarak tanımlanan $(X, \varepsilon(G), \mu_G, k)$ gerenine *k-regüler kenar gereni* denir.

Teorem 3.5. G üçgen içermeyen bir çizge ise $k < \Delta(G)$ için $RSp^k(G) = \infty$'dur

İspat: G üçgen içermeyen bir çizge olsun. Bu durumda her $u \in V(G)$ için

$$\mathcal{N}_G(u) = \{v \in V(G) \mid (u, v) \in E(G)\}$$

kümesi G için bir bağımsız küme belirtir. $d(u) = \Delta(G)$ olsun. Buna göre $|\mathcal{N}_G(u)| = \Delta(G)$'dir. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir k-regüler gereni olsun. Keyfi $v, w \in \mathcal{N}_G(u)$ köşelerini alalım. Buna göre $(v, w) \notin E(G)$ olduğundan $\psi(v) \cap \psi(w) = \varnothing$ olmalıdır. Ayrıca her $v \in \mathcal{N}_G(u)$ için $\psi(v) \cap \psi(u) \neq \varnothing$'dir. O halde $\psi(u)$ 'da en az $|\mathcal{N}_G(u)|$ kadar eleman olmalıdır. Buna göre $k = |\psi(u)| \geq |\mathcal{N}_G(u)| = \Delta(G)$'dir. O halde $k < \Delta(G)$ için G'nin bir k-regüler gereni yoktur. Öyleyse $k < \Delta(G)$ için $RSp^k(G) = \infty$ olur.■

Teorem 3.6. G basit bir çizge olsun. Buna göre $r < maks \{k (G [\mathcal{N}_G(v)]) \mid v \in V(G)\}$ ise $RSp^r(G) = \infty$'dur.

İspat: $v_1 \in V(G)$ olmak üzere $maks \{k (G [\mathcal{N}_G(v)]) \mid v \in V(G)\} = k (G [\mathcal{N}_G(v_1)])$ ve $(X, \mathcal{A}, \psi, r)$ dörtlüsü G'nin r-regüler gereni olsun. Bu durumda Teorem 2.28'den $|\psi(v_1)| \geq d_{Sp}(v_1) \geq k (G [\mathcal{N}_G(v_1)])$ olması gerekir. Buna göre $(X, \mathcal{A}, \psi, r)$ dörtlüsü G'nin r-regüler gereni olduğundan her $v \in V(G)$ için $|\psi(v)| \geq k (G [\mathcal{N}_G(v_1)])$'dir. O halde $r \geq k (G [\mathcal{N}_G(v_1)])$ olduğunda $(X, \mathcal{A}, \psi, r)$ şeklinde bir r-regüler geren mevcuttur. Böylece $r < k (G [\mathcal{N}_G(v_1)])$ elde edilir ki bu çelişkidir. Buradan $RSp^r(G) = \infty$ olur.■

Not: Regüler Sperner sayısı tanımı ile Sperner sayısı tanımı karşılaştırıldığında, herhangi bir G çizgesi için $RSp^k(G) \geq Sp(G)$ olduğu söylenebilir.

Regüler Sperner sayısı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 3.7.

i) $G = P_2$ alalım.

Şekil 3.1. P_2 yolu

Buna göre $RSp^1(P_2) = \infty$ ve $RSp^2(P_2) = 3$'dür. Bu durumda $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesi P_2'nin bir 2-regüler gerenidir.

ii) $G = K_3$ alalım. Bu durumda $RSp^2(K_3) = 3$'dür. Buna göre $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$ ailesi K_3'ün bir 2-regüler gerenidir. Ayrıca $X' = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{A} = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ ailesi K_3 için bir 3-regüler geren olup $RSp^3(K_3) = 4$'dür.

Bu şekilde örnekleri çoğaltmamız mümkündür. Şimdi regüler Sperner sayısı ile Sperner sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyen teoremleri verelim.

Teorem 3.8. *G üçgen içermeyen bir çizge olsun. Buna göre G çizgesi r-regüler bir çizge ise $RSp^r(G) = Sp(G)$'dir.*

İspat: $|X| = Sp(G)$ olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir gereni olsun. G çizgesi r-regüler ise her $u \in V(G)$ için $d(u) = r$'dir. Her $u \in V(G)$ için $2 \leq |\psi(u)| \leq r$ dir. G üçgen içermeyen bir çizge olduğundan her $u \in V(G)$ için $\mathcal{N}_G(u)$ bağımsız küme belirtir. Keyfi $v, w \in \mathcal{N}_G(u)$ köşeleri aldığımızda, $(v, w) \notin E(G)$ olduğundan $\psi(v) \cap \psi(w) = \varnothing$ olmalıdır. Ayrıca, her $v \in \mathcal{N}_G(u)$ için $\psi(v) \cap \psi(u) \neq \varnothing$'dir. O halde $|\psi(u)| = |\mathcal{N}_G(u)| = r$ olmalıdır. Dolayısıyla her $u \in V(G)$ için $|\psi(u)| = r$ oluyorsa $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin aynı zamanda r-regüler gereni olur. Bu da $RSp^r(G) = Sp(G)$ olduğunu gösterir.■

Bu teoremi kullanarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.9.

i) n-köşeli C_n döngüsü 2-regülerdir ve üçgen içermeyen bir çizgedir. Buna göre $RSp^2(C_n) = Sp(C_n) = n$'dir.

$ii)$ n-köşeli P_n yolunu düşünelim.

$RSp^2(P_n) = Sp(P_n) = n+1$'dir fakat P_n regüler bir çizge değildir. Bu da bize gösterir ki yukarıdaki teoremin tersi daima doğru değildir.

Teorem 3.10. G, köşe sayısı $n > 2$ olan üçgen içermeyen bir çizge olsun. Buna göre $d_1 := |\{u \in V(G) \mid d(u) = 1\}|$ ve $k \geq \Delta(G)$ olmak üzere

$$RSp^k(G) \geq Sp(G) + (k-2)d_1$$

olur.

İspat: $Sp(G) = s$ olmak üzere $([s], \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir gereni olsun. Ayrıca $W = \{v \in V(G) \mid d(v) = 1\}$ diyelim. Her $u \in V(G)$ için $|\psi(u)| \geq 2$'dir. Bununla birlikte, $\mathcal{A}$ ailesi olabilecek en az elemanla inşaa edilen bir geren ailesi olduğundan her $u \in W$ için $|\psi(u)| = 2$'dir. (Derecesi 1 olan $u \in W$ köşesi için $|\psi(u)| = 2$ yeterlidir.)
$RSp^k(G) = r$ olmak üzere $([r], \mathcal{B}, \mu, k)$ dörtlüsü de G'nin k-regüler gereni olsun.
($k \geq \Delta(G)$ olduğundan Teorem 3.3'den dolayı böyle bir k-regüler geren mevcuttur.)
$r \geq s + (k-2)d_1$ olduğunu göstermeliyiz. $RSp^k(G) \geq Sp(G)$ olduğundan $r \geq s$ olup $[s] \subseteq [r]$ olur. Ayrıca $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ olduğunu biliyoruz. Bunun yanı sıra G üçgen içermeyen bir çizge olduğundan her $v \in V(G)$ için eğer $d(v) \geq 2$ ise $d(v) = |\psi(v)|$ ve eğer $d(v) = 1$ ise $|\psi(v)| = 2$'dir. Buna göre $|\psi(v)| \leq \Delta(G) \leq k = |\mu(v)|$ olur. Öyleyse her $v \in V(G)$ için $\psi(v) \subseteq \mu(v)$ olabileceğini gösterelim. $i_1, i_2, \ldots, i_p \in [s]$ olmak üzere $\psi(v) = \{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ diyelim. Buna göre, $\mathcal{N}(v) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ olmak üzere her $j \in [p]$ için $\psi(v) \cap \psi(v_j) = \{i_j\}$ olsun. (G üçgen içermeyen bir çizge olduğundan $\psi(v)$ ile herbir $\psi(v_j)$'nin arakesitinden farklı bir eleman gelir. Bu yüzden $\psi(v) \cap \psi(v_j) = \{i_j\}$ denilebilir.) Her $j, l \in [p]$ için $\mu(v) \cap \mu(v_j) \neq \mu(v) \cap \mu(v_l)$'dir. Buna göre $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\} \subseteq \mu(v)$ alınabilir. Bu durumda $\psi(v) \subseteq \mu(v)$ olur. Her $u \in W$ için $\mu(u) = k$ ve $\psi(u) = 2$ olduğuna göre $\psi(v) \subseteq \mu(v)$ olup $\mu(u) \backslash \psi(u) = A_u$ olacak şekilde bir $A_u \subset [r]$ vardır ve $|A_u| = k-2$'dir. Ayrıca $|G| > 2$ ise her $u, w \in W$ için $(u, w) \notin E(T)$ olup $A_u \cap A_w = \varnothing$'dir. Böylece her $u \in W$ için $A_u \cap [s] = \varnothing$'dir.
Kabul edelim ki $A_u \cap [s] \neq \varnothing$ olsun. En az bir $x \in [s]$ elemanı vardır öyle ki $x \in A_u \cap [s]$ dir ve $x \notin \psi(u)$'dir. Ayrıca $d(u) = 1$ olduğundan $(v, u) \in E(G)$ olacak şekilde bir ve yalnız bir $v \in V(G)$ köşesi vardır. Bu $v \in V(G)$ köşesi için $x \in \psi(v)$ 'dir. Ayrıca $v \notin W$ olduğundan $d(v) \geq 2$'dir. En az bir $z \in V(G)$ vardır öyle ki $(v, z) \in E(G)$ ve $z \neq u$'dur ve $x \in \psi(z)$'dir. Ancak $(z, u) \notin E(G)$ olduğundan $x \notin A_u$ olup $x \notin A_u \cap [s]$'dir. Buna

göre, $A_u \cap [s] = \varnothing$'dir. O halde her $u \in W$ için A_u kümesinde $[s]$'den ve diğer A_w kümelerinden ayrık $(k-2)$-eleman bulunur. Bu durumda

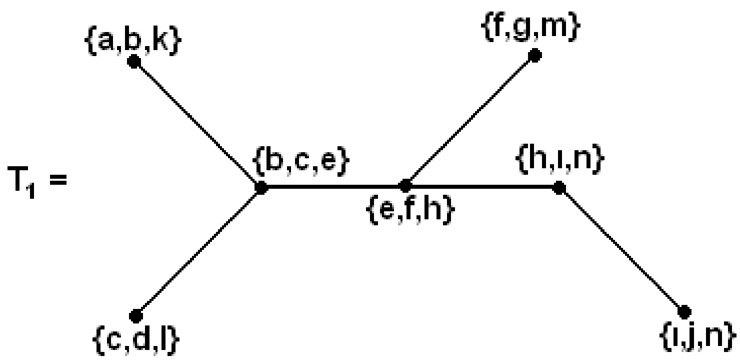
$$|[r]| \geq |[s]| + (k-2)\,|W| \Rightarrow r \geq s + (k-2)d_1$$

$$\Rightarrow RSp^k(G) \geq Sp(G) + (k-2)d_1$$

elde edilir.■

Örnek 3.11.

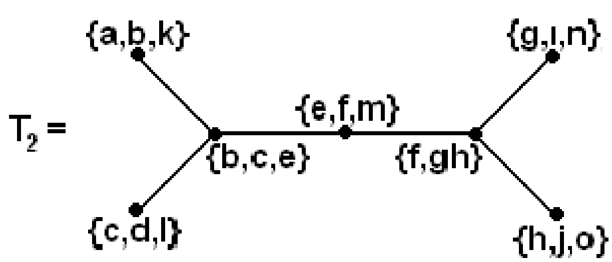
i) T_1, Şekil 3.2'deki gibi verilmiş olsun.



Şekil 3.2. 3-regüler gereni verilmiş T_1 ağacı

$RSp^3(T_1) = 14 \geq 10 + (3-2).4 = 14$ 'dür.

ii) T_2 ağacı aşağıdaki gibi verilsin. Buna göre $RSp^3(T_2) = 15 \geq 10 + (3-2).4 = 14$'dür.



Şekil 3.3. 3-regüler gereni ile verilmiş T_2 ağacı

Teorem 3.12. $k < \left\lceil \frac{Sp(K_n)+1}{2} \right\rceil$ olsun. Bu durumda t_2 doğal sayısı $n \leq \binom{t_2-1}{k-1}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayı olmak üzere $RSp^k(K_n) = t_2$'dir.

İspat: $(X, \mathcal{A}, \mu, k)$ dörtlüsü K_n'nin k-regüler gereni olsun. En az eleman sayısına sahip X kümesini bulmaya çalışalım ve bulmaya çalıştığımız bu X kümesinin eleman sayısına da t_2 diyelim. Ayrıca $k < \left\lceil \frac{Sp(K_n)+1}{2} \right\rceil$ olsun. $RSp^k(K_n) \geq Sp(K_n)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

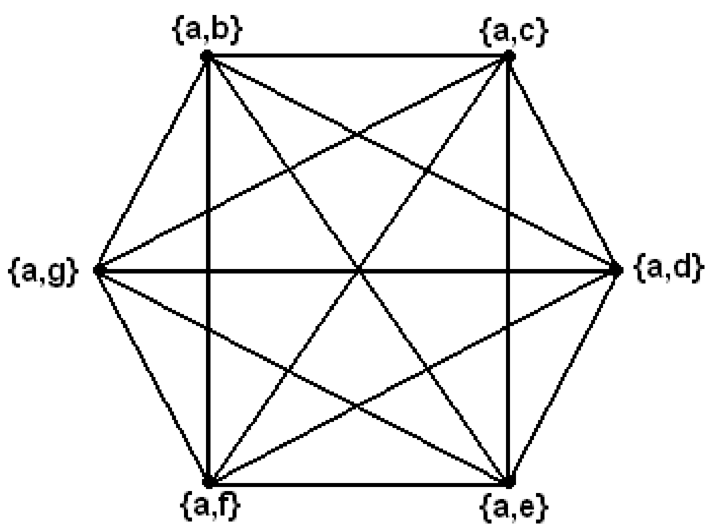
$$k < \left\lceil \frac{Sp(K_n)+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{RSp^k(K_n)+1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{t_2+1}{2} \right\rceil$$

olur. Buradan $k < \left\lceil \frac{t_2+1}{2} \right\rceil$ olduğundan $k \leq \frac{t_2}{2}$ yazılabilir. Buna göre $(X, \mathcal{A}, \mu, k)$ dörtlüsü K_n'nin k-regüler gereni olduğundan, $\mathcal{A}$ ailesi X üzerinde tanımlı her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \cap B \neq \varnothing$ şartını sağlayan bir k-regüler Sperner ailesidir ve her $A \in \mathcal{A}$ için $|A| = k \leq \frac{t_2}{2}$'dir. Öyleyse Teorem 1.1.22'nin şartları sağlandığından

$$|K_n| = |\mathcal{A}| = n \leq \binom{t_2-1}{k-1}$$

olur. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük t_2 değeri ise $RSp^k(K_n) = t_2$'yi verir.■

Örnek 3.13. K_6 tam çizgesini düşünelim. Buna göre $RSp^2(K_6) = 7$'dir.



Şekil 3.4. 2-regüler gereni ile verilmiş K_6 tam çizgesi

$k = 2 < \left\lceil \frac{Sp(K_6)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5+1}{2} \right\rceil = 3$ olduğundan yukarıdaki teoremi kullanabiliriz. Buna göre $|K_6| = 6 \leq \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$'dır.

Teorem 3.14. $k = \left\lceil \frac{Sp(K_n)+1}{2} \right\rceil$ ise bu durumda $RSp^k(K_n) = Sp(K_n)$'dir.

İspat: $Sp(K_n) = t$ diyelim ve $k = \lceil \frac{t+1}{2} \rceil$ olsun. Ayrıca $\mathcal{A}$ ailesi de K_n'nin bir k-regüler gereni olsun. $RSp^k(K_n) \geq Sp(K_n)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, Teorem 1.1.21 ve Teorem 2.22'den dolayı $n \leq \binom{t}{\lceil \frac{t+1}{2} \rceil} = \binom{t}{k}$'dır. Buna göre $|\mathcal{A}| = n$ olup $|\mathcal{A}| \leq \binom{t}{k}$ 'dir. Bu ise $\mathcal{A}$ ailesinin t-elemanlı bir kümenin k-elemanlı alt kümelerinden oluşturulabileceğini gösterir. Ayrıca her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A \cap B \neq \varnothing$ olur; yani $\mathcal{A}$ ailesinin arakesit Sperner ailesi olma özelliği de sağlanır. Böylece $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir kümenin k-elemanlı altkümelerinden inşaa edildiğinde K_n'nin bir k-regüler gereni olur. O halde $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir küme üzerinde tanımlı olduğundan $RSp^k(K_n) \leq t = Sp(K_n)$ olur. Buradan da $RSp^k(K_n) = Sp(K_n)$ elde edilir.■

Örnek 3.15. K_6 tam çizgesi için $k = 3$ alınırsa $\left\lceil \frac{Sp(K_6)+1}{2} \right\rceil = \lceil \frac{5+1}{2} \rceil = 3 = k$ olup Teorem 3.14'den $RSp^3(K_6) = Sp(K_6) = 5$'dir.

Teorem 3.16. $k > \left\lceil \frac{Sp(K_n)+1}{2} \right\rceil$ olsun. t_1 pozitif tamsayısı

i) $k \geq \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil$

ii) $n \leq \binom{t_1}{k}$

eşitsizliklerinin her ikisini de sağlayan en küçük tam sayı olmak üzere

$RSp^k(K_n) = t_1$'dir.

İspat: $(X, \mathcal{A}, \mu, k)$ dörtlüsü K_n'nin k-regüler gereni olsun. En az eleman sayısına sahip X kümesini bulmaya çalışalım ve bulmaya çalıştığımız bu X kümesinin eleman sayısına da t_1 diyelim. Ayrıca $Sp(K_n) = t$ diyelim ve $k > \lceil \frac{t+1}{2} \rceil$ olsun. Buna göre $\binom{t}{k} < \binom{t}{\lceil \frac{t+1}{2} \rceil}$ olur. Burada iki durum söz konusudur:

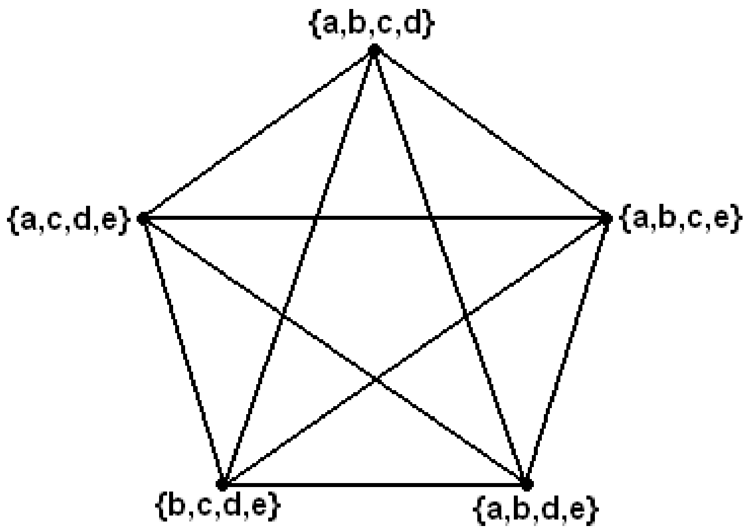
1. Durum: $n \leq \binom{t}{k} < \binom{t}{\lceil \frac{t+1}{2} \rceil}$ ise $|\mathcal{A}| \leq \binom{t}{k}$ olup $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir kümenin k-elemanlı alt kümelerinden inşaa edilebilir. Buna göre $t_1 = t$; yani $RSp^k(K_n) = Sp(K_n)$ olur.

2. Durum: $\binom{t}{k} < n \leq \binom{t}{\lceil \frac{t+1}{2} \rceil}$ ise t-elemanlı bir kümenin k-elemanlı altkümeleri $\mathcal{A}$ ailesini inşaa etmek için yeterli değildir. Buna göre $t_1 > t$'dir. Bu durumda, $k > \lceil \frac{t+1}{2} \rceil$ olduğundan $k \geq \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil$ olacak şekilde bir veya daha fazla $t_1 > t$ tansayıları vardır. Öyleyse $k \geq \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil$ eşitsizliğini sağlayan, tamsayıların kümesini $T = \left\{t_1 \in \mathbb{Z} \mid k \geq \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil\right\}$ ile gösterelim. Buna göre t_1-elemanlı bir kümenin k-elemanlı alt kümelerinden $\mathcal{A}$ ailesini oluşturabilmemiz için $|\mathcal{A}| = n \leq \binom{t_1}{k}$ olması gerekir. Şimdi $|\mathcal{A}| = n \leq \binom{t_1}{k}$ eşitsizliğini sağlayan en az bir $t_1 \in T$ elemanının mevcut olduğunu gösterelim. Her $t_1 \in T$ için $t_1 > t$ ve $\lceil \frac{t+1}{2} \rceil < \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil$'dir ve buradan $n \leq \binom{t}{\lceil \frac{t+1}{2} \rceil} < \binom{t_1}{\lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil}$ olur. Buna göre $k = \lceil \frac{t_1+1}{2} \rceil$ olduğunda $t_1 \in T$'dir ve $n \leq \binom{t_1}{k}$ şartı sağlanır. Öyleyse $n \leq \binom{t_1}{k}$

eşitsizliğini sağlayan en az bir $t_1 \in T$ bulabiliriz.

O halde $|\mathcal{A}| \leq \binom{t_1}{k}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük $t_1 \in T$ elemanı için t_1-elemanlı bir kümenin k-elemanlı altkümeleriyle $\mathcal{A}$ ailesi oluşturulabilir ve $\mathcal{A}$ arakesit Sperner ailesi olur. Bu durumda $RSp^k(K_n) = t_1$ olur.■

Örnek 3.17. K_5 tam çizgesini ele alalım.



Şekil 3.5. 4-regüler gereni ile verilmiş K_5 tam çizgesi

$k = 3$ olduğunda $\left\lceil \frac{Sp(K_5)+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{5+1}{2} \right\rceil = 3 = k$ olup $RSp^3(K_5) = Sp(K_5) = 5$'dir.

$k = 4$ olduğunda $k = 4 > \left\lceil \frac{Sp(K_5)+1}{2} \right\rceil = 3$'dür. Teorem 3.16.($i$)'den dolayı $k = 4 > \left\lceil \frac{5+1}{2} \right\rceil$ olduğuna göre $t_1 = 5$ olabilir. Buna göre $t_1 = 5$ değeri için Teorem 3.16.(ii)'nin sağlanıp sağlanmadığına bakalım. $n = 5 \leq \binom{5}{4} = 5$ olup (ii) sağlanır. Buna göre, $RSp^3(K_5) = Sp(K_5) = 5$'dir. Şekil 3.6'da da K_5'in bir 4-regüler gereni verilmiştir.

$k = 5$ için 5> $\left\lceil \frac{Sp(K_5)+1}{2} \right\rceil = 3$'dür. Yine Teorem 3.16'dan yararlanalım. $t_1 = 5$ değeri için $k > \left\lceil \frac{5+1}{2} \right\rceil = 3$'dür fakat $5 \nleq \binom{5}{5} = 1$ olduğundan $RSp^5(K_5) \neq 5$'dir. $t_1 = 6$ değeri için $5 \geq \left\lceil \frac{6+1}{2} \right\rceil = 4$ ve $5 \leq \binom{6}{5} = 6$ olup Teorem 3.16'nın şartları sağlanır. Buna göre $RSp^5(K_5) = 6$'dır.

Teorem 3.18. $m, n, k \in \mathbb{N}$ ve $k \geq m \geq n$ olmak üzere $RSp^k(K_{m,n}) = m.k$'dır.

İspat: $K_{m,n}$ çizgesinin köşelerini $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ve $V(G) = U \cup W$ olarak tanımlayalım ve $m \geq n$ olsun. Ayrıca $(X, \mathcal{A}, \mu, k)$ dörtlüsü

$K_{m,n}$'nin k-regüler gereni olmak üzere her $v \in V(G)$ için $|\mu(v)| = k$'dır. Her $u_i, u_j \in U$ için $\mu(u_i) \cap \mu(u_j) = \varnothing$ olduğundan

$$\left| \bigcup_{i=1}^{m} \mu(u_i) \right| = \sum_{i=1}^{m} |\mu(u_i)| = m.k$$

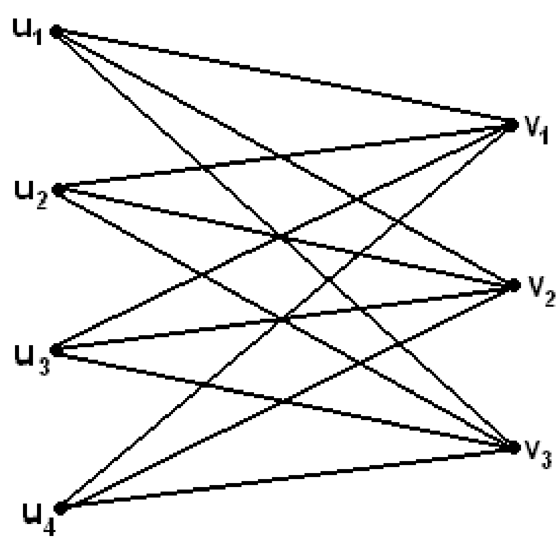
olur. Bu durumda $|X| \geq m.k$ olur.

Benzer şekilde her $w_i, w_j \in W$ için $\mu(w_i) \cap \mu(w_j) = \varnothing$ olduğundan

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} \mu(w_i) \right| = \sum_{i=1}^{n} |\mu(w_i)| = n.k$$

elde edilir. Buna göre W'nin köşelerine karşılık gelen kümeler için toplam $(n.k)$-eleman gerekir. Bunun yanı sıra $n \leq m$ olduğundan her $w_j \in W$ ve her $u_i \in U$ için $\mu(u_i) \cap \mu(w_j) \neq \varnothing$ olduğundan bu $\mu(w_j)$ kümelerini, $\mu(u_i)$ kümelerini inşaa ettiğimiz $(m.k)$-elemandan oluşturabiliriz. Buna göre her $u_i \in U$ için $\mu(u_i) := \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik}\}$ olarak tanımlanırsa her $w_j \in W$ için $\mu(w_j) := \{a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj,} a_{jm+1}, \ldots, a_{jk}\}$ biçiminde alınır. Bu durumda X kümesi için $m.k$-eleman yeterli olur. Yani $RSp^k(K_{m,n}) = m.k$ elde edilir.■

Örnek 3.19.



Şekil 3.6. $K_{4,3}$ iki-çoklu çizge

$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}$ kümesi üzerindeki $\mathcal{A}$ Sperner ailesi $\mathcal{A} = \{\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}, \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}, \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\},$ $\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\}, \{a_1, b_1, c_1, d_1, a_5\}, \{a_2, b_2, c_2, d_2, b_5\}, \{a_3, b_3, c_3, d_3, c_5\}\}$ olarak tanımlandığında, $K_{4,3}$ için bir geren ailesi belirtir ve $RSp^5(K_{4,3}) = 4.5 = 20$'dir.

4. SPERNER SAYISI İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde; bir çizgenin Sperner sayısı için bulululnan alt sınırlar verilecektir. Bunun için bir çizgenin bağımsızlık sayısı ve çeşitli çizge operasyonları kullanılmıştır. Ayrıca, bir çizgenin Sperner sayısı ile bütünleyeninin kromatik sayısı arasındaki ilişkiye de değinilmiştir.

Teorem 4.1. Herhangi bir G çizgesi için

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G)$$

olur.

İspat: G keyfi bir çizge ve $\alpha(G) = \alpha$ olmak üzere $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ en geniş bağımsız küme olsun. X kümesi üzerinde tanımlı, G'yi geren Sperner ailesine de $\mathcal{A}$ diyelim. Buna göre, $\mathcal{A}$ ailesinde U kümesindeki köşelere karşılık gelen kümeler vardır. Bu kümelerin her biri en az iki elemanlıdır ve U bağımsız küme olduğundan bu kümeler ayrıktır. Bu kümelerde toplam en az $2|U| = 2\alpha(G)$ eleman vardır. O halde

$$|X| \geq 2\alpha(G) \Rightarrow Sp(G) \geq 2\alpha(G)$$

olduğu görülür.■

Elde edilen bu alt sınırdan sonra akla gelen "bir çizgenin Sperner sayısı bağım-sızlık sayısının iki katına ne zaman eşit olur?" sorusudur. Şimdi aşağıdaki teoremlerle yukarıdaki alt sınırın eşitlik durumunu irdelemeye çalışalım.

Teorem 4.2. $G = (V, E)$ üçgen içermeyen bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$ ve U en geniş bağımsız küme olsun. Buna göre $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olması için gerek ve yeter koşul
$i)$ G çizgesi iki-çoklu çizge,
$ii)$ Her $u \in U$ için $d(u) \leq 2$,
$iii)$ Her $v \in V \backslash U$ için $d(v) \geq 2$
şartlarının sağlanmasıdır.

İspat: Önce teoremin ilk kısmının doğru olduğunu kabul edelim ve $i)$,$ii)$,$iii)$'nin doğruluğunu gösterelim. G üçgen içermeyen bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$ ve U en geniş bağımsız küme ve $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olsun.

$i)$ G çizgesinin iki-çoklu çizge olduğunu göstereceğiz. Bunun için $V\backslash U$'nun bağımsız küme olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $V\backslash U$ bağımsız küme olmasın. Bu durumda $v, w \in V\backslash U$ köşeleri vardır öyleki $(v, w) \in E$'dir. Buna göre $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin gereni olmak üzere $\psi(v) \cap \psi(w) \neq \varnothing$'dır. Bu durumda bir $a \in \psi(v) \cap \psi(w)$ elemanı vardır.

$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$'deki köşelere karşılık gelen kümeler $\psi(u_1), \psi(u_2), \ldots, \psi(u_\alpha)$ kümeleridir ve $1 \leq i, j \leq \alpha$ için $\psi(u_i) \cap \psi(u_j) = \varnothing$'dir. Ayrıca $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olduğundan her $u_i \in U$ için $|\psi(u_i)| = 2$ ve $\left|\bigcup_{i=1}^{\alpha}\psi(u_i)\right| = 2\alpha$'dır. Buna göre en az bir $i \in [\alpha]$ vardır öyle ki $a \in \psi(u_i)$'dir. O halde $\psi(u_i) \cap \psi(v) \neq \varnothing$ ve $\psi(u_i) \cap \psi(w) \neq \varnothing$'dır. Bu durumda G'de bir (u_i, v, w) üçgeni oluşur. Bu ise G'nin üçgen içermeyen bir çizge oluşuyla çelişir. Öyleyse $V\backslash U$ bağımsız kümedir.

$ii)$ Her $u_i \in U$ için $d(u_i) \leq 2$ olduğunu gösterelim.

$d(u_i) > 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $v_1, v_2, v_3 \in V\backslash U$ köşeleri vardır öyle ki $(u_i, v_1), (u_i, v_2), (u_i, v_3) \in E$'dir. Buna göre $V\backslash U$ bağımsız küme olduğundan v_1, v_2, v_3 köşeleri arasında hiç kenar yoktur, bu nedenle $\psi(v_1), \psi(v_2), \psi(v_3)$ kümeleri ayrıktır. Öyleyse $\psi(u_i) \cap \psi(v_1) \neq \varnothing, \psi(u_i) \cap \psi(v_2) \neq \varnothing, \psi(u_i) \cap \psi(v_3) \neq \varnothing$ olup bu üç arakesitteki elemanlar birbirinden farklıdır. Buna göre bu kesişimlerden dolayı $|\psi(u_i)| \geq 3$ olur. Bu ise çelişkidir, çünkü $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olduğundan $|\psi(u_i)| = 2$ olması gerekir. O halde her $u_i \in U$ için $d(u_i) \leq 2$'dir.

$iii)$ Her $v \in V\backslash U$ için $d(v) \geq 2$ olduğunu gösterelim.

$d(v) = 1$ olsun. Bu durumda sadece bir $u_i \in U$ köşesi için $(u_i, v) \in E$'dir ve $\psi(u_i) \cap \psi(v) \neq \varnothing$'dır Bu arakesitteki elemana $a \in \psi(u_i) \cap \psi(v)$ diyelim. Buna göre $|\psi(v)| \geq 2$ olması gerektiğinden en az bir $b \in \psi(v)$ vardır öyle ki $a \neq b$'dir. Fakat her $u_i \in U$ için $b \notin \psi(u_i)$'dir. Buna göre $Sp(G) > 2\alpha(G)$ olur. Bu bir çelişki olup $d(v) = 1$ kabulümüz yanlıştır. Öyleyse her $v \in V\backslash U$ için $d(v) \geq 2$'dir.

G çizgesi teoremin $i)$,$ii)$, $iii)$ şartlarını sağlasın. Göstermemiz gereken $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olduğudur. Yani $\mathcal{A}$ ailesi X kümesi üzerinde tanımlı, G'yi geren Sperner ailesi olmak üzere $|X| = 2\alpha$ olduğunu göstermeliyiz.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2\alpha}\}$ kümesini alalım ve bu küme ile G'yi geren bir $\mathcal{A}$ Sperner ailesi inşaa etmeye çalışalım. Her $u_i \in U$ için $A_i = \{x_i, x_{\alpha+i}\}$ kümesini karşılık getirelim. $V\backslash U$'daki köşelere karşılık gelecek şekilde $B_1, B_2, \ldots, B_m$ kümeleri tanımlayalım.

($m = |G| - \alpha$). Her bir $v_j \in V \backslash U$ köşesine karşılık gelen küme

$$\begin{aligned} B_j \ : &= \{x_i \mid i \in [2\alpha], (u_i, v_j) \in E, d(u_i) = 1\} \\ &\cup \{x_r \mid r \in [\alpha], (u_r, v_j) \in E, d(u_r) = 2, \mathcal{N}(u_r) = \{v_j, v_k\}, j < k\} \\ &\cup \{x_{\alpha+l} \mid l \in [\alpha], (u_l, v_j) \in E, d(u_l) = 2, \mathcal{N}(u_l) = \{v_j, v_k\}, k < j\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_\alpha, B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ şeklindedir. Şimdi $\mathcal{A}$'nın G'yi gerdiğini göstermeliyiz.

U bağımsız küme olduğundan A_i'ler ayrık olmalı ve her $u_i \in U$ için $d(u_i) \leq 2$ olduğundan $|A_i| = 2$ olmalıdır. Her $i, j \in [\alpha]$ için $i \neq j$ olduğunda $(x_i, x_{\alpha+i}), (x_j, x_{\alpha+j})$ ikilileri birbirinden farklıdır ve ortak elemanları yoktur. Buna göre A_i 'ler ayrıktır, ayrıca $|A_i| = 2$'dir.

$V \backslash U$'nun bağımsız küme olduğunu biliyoruz. O halde $B_1, B_2, \ldots, B_m$ kümelerinin ayrık olduğunu göstermeliyiz. Keyfi $B_j, B_k \in \mathcal{A}$ kümelerini alalım. Bu kümeleri sırasıyla $v_j, v_k \in V \backslash U$ köşelerine karşılık gelen kümeler olarak tanımlamıştık. Buna göre $\mathcal{N}(v_j) \cap \mathcal{N}(v_k) = \varnothing$ ise B_j'lerin tanımına göre $B_j \cap B_k = \varnothing$'dır. $\mathcal{N}(v_j) \cap \mathcal{N}(v_k) \neq \varnothing$ ise hem v_j hem de v_k ile kenar yapan en az bir $u_i \in U$ vardır öyle ki

$$\begin{aligned} j > k &\Rightarrow x_{\alpha+i} \in B_j, x_i \in B_k \\ k > j &\Rightarrow x_{\alpha+i} \in B_k, x_i \in B_j \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla B_j ile B_k'nın ortak elemanı yoktur, yani ayrıktır. Her $v_j \in V \backslash U$ için $d(v_j) \geq 2$ ve $V \backslash U$ ile U bağımsız küme olduklarından $|B_j| = d(v_j) \geq 2$ olmalıdır. Gerçekten B_j'nin tanımına göre v_j'nin kenar yaptığı köşe sayısı kadar elemanı vardır. Bu da $|B_j| \geq 2$ olduğunu gösterir. Ayrıca, herbir B_j kümesi A_i'deki en fazla bir elemanı içerdiğinden $B_j \nsubseteq A_i$ ve $A_i \nsubseteq B_j$'dir. O halde herbir $u_i \in U$ köşesine $A_i \in \mathcal{A}$ ve herbir $v_j \in V \backslash U$ köşesine $B_j \in \mathcal{A}$ karşılık getirildiğinde $\mathcal{A}$ ailesi G'yi gerer diyebiliriz. $\mathcal{A}$ ailesi de X kümesi üzerinde tanımlandığına göre $|X| = 2\alpha$ olduğundan $Sp(G) = 2\alpha(G)$ elde edilir.■

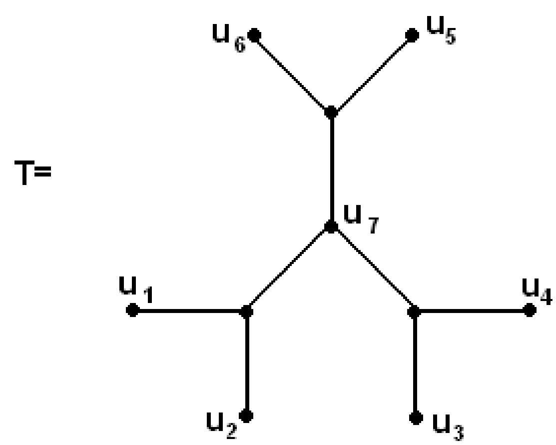
Örnek 4.3.

i) $n = 2k$ olmak üzere $\alpha(C_n) = k$ ve C_n iki çoklu çizgedir. Her $u \in V(C_n)$ için $d(u) = 2$'dir. Buna göre $Sp(C_n) = 2k$'dır.

$n = 2k + 1$ ise C_n iki çoklu çizge değildir. Bu nedenle $V(C_n)$'den $\alpha(C_n) = k$-elemanlı bağımsız bir U kümesi aldığımızda $V(C_n) \backslash U$ bağımsız küme değildir.

$Sp(C_n) = n = 2k + 1 \neq 2\alpha(C_n)$'dir.

ii) T ağacı Şekil 4.1'deki gibi verilmiş olsun.



Şekil 4.1. Sperner sayısı bağımsızlık sayısının iki katına eşit olmayan bir çizge

$\alpha(T) = 7$'dir ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ kümesi T'nin en geniş bağımsız kümesidir. $V(T)\backslash U$ kümesi de T'nin bir bağımsız kümesidir. Ancak $u_7 \in U$ için $d(u_7) = 3 > 2$ olduğundan $Sp(T) \neq 2\alpha(T)$'dir ve $Sp(T) = 15$'dir.

iii) P_n iki-çoklu çizgedir. Burada $n = 2k$ olsun. Bu durumda $\alpha(P_n) = k$'dır.

Şekil 4.2. n-köşeli yol

P_n'nin en geniş bağımsız kümesi olarak $U = \{u_1, u_3, u_5, \ldots, u_{n-1}\}$ kümesini alalım. Bu durumda $u_n \in V(P_n)\backslash U$ için $d(u_n) = 1$'dir.
En geniş bağımsız kümesi olarak $U' = \{u_2, u_4, u_6, \ldots, u_n\}$ kümesi alınırsa $u_1 \in V(P_n)\backslash U'$ için $d(u_1) = 1$'dir. Bu yüzden $Sp(P_n) \neq 2\alpha(P_n)$'dir ve $Sp(P_n) = 2k + 1$'dir.

Teorem 4.4. $G = (V, E)$ üçgen içeren bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$ ve U en geniş bağımsız küme olsun. Buna göre $Sp(G) = 2\alpha(G)$ ise

i) Her $(v, w) \in E(G[V\backslash U])$ kenarı için en az bir $u \in U$ vardır öyle ki $(u, v), (u, w) \in E$, diğer bir ifadeyle $G[V\backslash U]$'daki her kenarın U'da bir komşusu vardır,

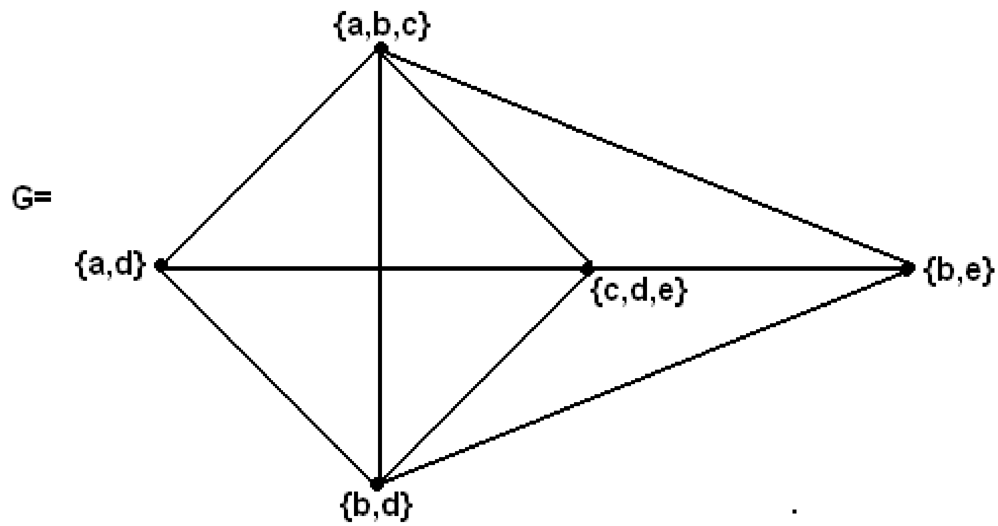
ii) Her $v \in V \backslash U$ için $u_i, u_j \in U$ köşeleri vardır öyle ki $(v, u_i), (v, u_j) \in E$, diğer bir ifadeyle $V \backslash U$'nun her köşesinin U'da en az iki komşusu vardır,
iii) $W \subset V \backslash U$ bağımsız küme olmak üzere her $u \in U$ köşesi için $|\mathcal{N}_W(u)| \leq 2$'dir, diğer bir ifadeyle U'nun her köşesinin W'de en fazla iki komşusu vardır.
(Burada $\mathcal{N}_W(u) = \{v \in W \mid (u, v) \in E\}$'dir.)

İspat: $G = (V, E)$ üçgen içeren bir çizge olsun. Bu durumda $u, v, w \in V$ köşeleri vardır öyle ki (u, v, w) üçlüsü G'de bir üçgen belirtir. $\alpha(G) = \alpha$ olmak üzere $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ ve $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olsun. Ayrıca $\mathcal{A}$ ailesi 2α-elemanlı X kümesi üzerinde tanımlı bir Sperner ailesi olmak üzere
$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \in \mathcal{A}$ kümeleri U'daki köşelere karşılık gelen kümeler olsun. Öncelikle *i*)'nin doğruluğunu gösterelim.
i) Keyfi bir $(v, w) \in E(G[V \backslash U])$ kenarı alalım. Buna göre $v, w \in V \backslash U$ köşelerine karşılık gelen kümeler $B_v, B_w \in \mathcal{A}$ olmak üzere $B_v \cap B_w \neq \varnothing$'dır. O halde bir $a \in B_v \cap B_w$ elemanı vardır. Buna göre $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olduğundan en az bir $u_i \in U$ vardır öyle ki $a \in A_i$'dir. (A_i kümesi u_i köşesine karşılık gelen kümedir.) Buradan $B_v \cap A_i \neq \varnothing, B_w \cap A_i \neq \varnothing$ olur. Böylece $(u_i, v), (u_i, w) \in E$'dir.
ii) $v \in V \backslash U$ alalım ve v köşesine karşılık gelen kümeye $B_v \in \mathcal{A}$ diyelim. Buna göre $B_v \neq \varnothing$ olduğundan bir $b \in B_v$ vardır. $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olduğundan $\left|\bigcup_{i=1}^{\alpha} A_i\right| = 2\alpha$'dır. Bundan dolayı en az bir A_j vardır öyle ki $b \in A_j$'dir. Buna göre $B_v \cap A_j \neq \varnothing$ olup $(v, u_j) \in E$'dir. $|B_v| \geq 2$ olduğundan en az bir $c \in B_v$ vardır öyle ki $c \neq b$'dir ve böylece en az bir A_k vardır öyle ki $c \in A_k \neq A_j$ olduğundan $B_v \cap A_k \neq \varnothing$'dir. O halde $(v, u_k) \in E$'dir. *iii*) $W \subset V \backslash U$ altkümesi G'nin bağımsız bir kümesi olsun ve $u_i \in U$ alalım. Bu köşeye karşılık gelen küme A_i olup $|A_i| = 2$'dir. Bu durumda $A_i = \{a, b\}$ diyebiliriz. $|\mathcal{N}_W(u_i)| > 2$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{N}_W(u_i)$ diyebiliriz. Bu köşelere karşılık gelen kümeler B_1, B_2, B_3 olsun. Bu durumda W bağımsız küme olduğunda bu üç küme ayrıktır. Öyleyse $B_1 \cap A_i \neq \varnothing, B_2 \cap A_i \neq \varnothing, B_3 \cap A_i \neq \varnothing$ olup üç kesişimde de birbirinden farklı elemanlar vardır. Bu da $|A_i| > 2$ olduğunu gösterir. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $|\mathcal{N}_W(u_i)| \leq 2$ olmalıdır.■

Uyarı: Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir, yani bir çizge için *i*), *ii*), *iii*) sağlandığında $Sp(G) = 2\alpha(G)$ olmak zorunda değildir. Fakat bu teoremden *i*), *ii*), *iii*) sağlanmıyorsa $Sp(G) > 2\alpha(G)$ olduğu söylenebilir.

Örnek 4.5.

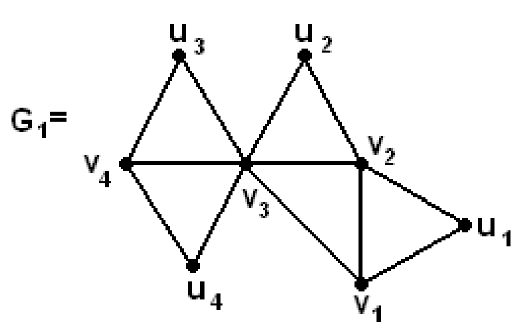
i) Şekil 4.3'deki G çizgesi *i*), *ii*), *iii*)'yi sağlar fakat $Sp(G) \neq 2\alpha(G)$'dir.



Şekil 4.3. Teorem 4.4'ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren bir çizge

$\alpha(G) = 2, Sp(G) = 5 > 4$'dür.

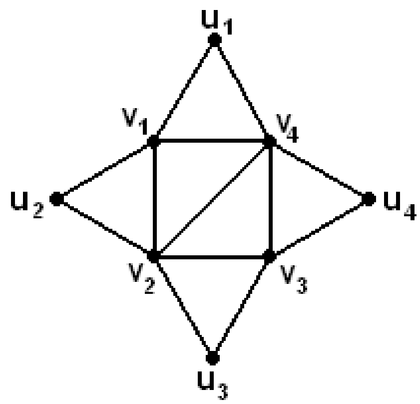
ii) G_1 çizgesi Şekil 4.4'deki gibi olsun. Buna göre G_1 üçgen içeren bir çizgedir.



Şekil 4.4. Üçgen içeren ve Teorem 4.4'ün bir şartını sağlamayan bir çizge

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ en geniş bağımsız küme ve $v_1 \in V(G_1)\backslash U$ için $(u_1, v_1) \in E(G_1)$'dir ve U'da v_1 ile kenar yapan başka bir köşe yoktur. Buna göre $Sp(G_1) = 9 \neq 2.\alpha(G_1)$'dir.

$iii)$ G_2 çizgesi Şekil 4.5'deki gibi olsun.



Şekil 4.5. Üçgen içermeyen ve Teorem 4.4'ün bir şartını sağlamayan bir çizge

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ en geniş bağımsız küme ve $(v_2, v_4) \in E(G_2)$'dir, fakat $(u_i, v_2), (u_i, v_4) \in E(G_2)$ olacak şekilde bir $u_i \in U$ yoktur. $Sp(G_2) = 9 \neq 2.\alpha(G_2)$'dir.

Teorem 4.6. $G = (V, E)$ bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$ ve U bir en geniş bağımsız küme olsun. $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k_1}\} \subset E(G[V \backslash U])$ kenar kümesi $1 \leq i, j \leq k_1, i \neq j$ için her bir $\{e_i, e_j\}$ farklı tamsalların kenarları olacak şekildeki kenarlardan oluşan en geniş küme olsun. Her $i \in [k_1]$ için $e_i = (y_i, z_i)$ olmak üzere $(y_i, u), (z_i, u) \in E$ olacak şekilde bir $u \in U$ bulunamıyorsa

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_1$$

olur.

İspat: $Sp(G) = t$ diyelim ve $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir X kümesi üzerindeki G'yi geren bir Sperner ailesi olsun. Bununla birlikte $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ kümesindeki köşelere karşılık gelen kümeler $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \in \mathcal{A}$ olsun. Her $i \in [\alpha]$ için $|A_i| = 2$ olduğunda $t \geq 2\alpha$ olduğunu biliyoruz. Şimdi $t \geq 2\alpha+1$ olduğunu göstermeliyiz. $F = \{e_1, e_2, \ldots, e_{k_1}\}$ olsun ve $e_i \in F$ alalım. Ayrıca $e_i = (y_i, z_i)$ kenarındaki köşelere karşılık gelen kümelere $B_{y_i}, B_{z_i} \in \mathcal{A}$ diyelim. Bu durumda $B_{y_i} \cap B_{z_i} \neq \varnothing$'dır. Buna göre en az bir $a \in X$ vardır öyle ki $a \in B_{y_i} \cap B_{z_i}$'dir. $e_i \in F$ için $(y_i, u), (z_i, u) \in E$ olacak şekilde bir $u \in U$ olmadığından her $j \in [\alpha]$ için $a \notin A_j$'dir. O halde $|X| = t \geq 2\alpha + 1$'dir. Yani $e_i \in F$ kenarının Sperner sayısına etkisi 1'dir.

Keyfi $e_i, e_j \in F$ kenarları alındığında iki durum söz konusudur:

1.Durum: e_i, e_j kenarlarının köşeleri birbirinden farklıdır, yani ayrıktır.

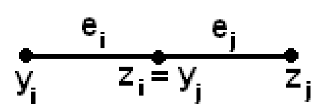
2.Durum: e_i, e_j kenarlarının bir köşeleri ortaktır.

Önce e_i ile e_j'nin ayrık olduğunu kabul edelim.

Şekil 4.6. Bir çizgenin ayrık iki kenarı

$e_i = (y_i, z_i), e_j = (y_j, z_j)$ olmak üzere $B_{y_i}, B_{z_i}, B_{y_j}, B_{z_j} \in \mathcal{A}$ sırasıyla e_i ve e_j'nin köşelerine karşılık gelen kümeler olsun. Buna göre $B_{y_i} \cap B_{z_i} \neq \varnothing, B_{y_j} \cap B_{z_j} \neq \varnothing$'dır ve bu dört kümenin kendi aralarındaki diğer arakesitleri boştur. En az iki $a, b \in X$ elemanı vardır öyle ki $a \in B_{y_i} \cap B_{z_i}.b \in B_{y_j} \cap B_{z_j}$'dir. Ayrıca e_i ve e_j ayrı tamsallarda olduğundan $a \neq b$'dir ve her $l \in [\alpha]$ için $a, b \notin A_l$'dir. e_i'nin t'ye etkisi 1'di, e_i'den ayrık olan bir e_j kenarının t'ye etkisi de yine 1 olup $t \geq 2\alpha + 2$ olur.

Şimdi e_i ile e_j'nin ortak bir köşesi olduğunu düşünelim.



Şekil 4.7. Bir çizgenin ortak köşeleri olan iki kenarı

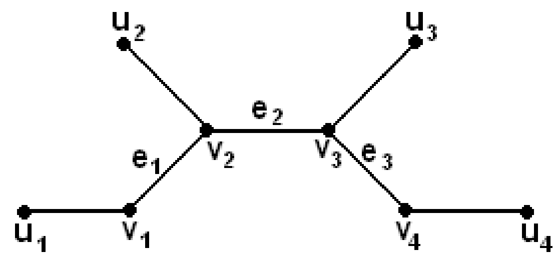
Bu durumda, $B_{z_i} = B_{y_j}$ olup $B_{y_i} \cap B_{z_i} \neq \varnothing$ ve $B_{z_i} \cap B_{z_j} \neq \varnothing$'dır. Bu iki arakesitteki elemanlar birbirinden farklıdır. Yine, $a \in B_{y_i} \cap B_{z_i}$, $b \in B_{z_i} \cap B_{z_j}$ olup e_i ve e_j ayrı tamsallarda olduğundan $a \neq b$'dir.

Buna göre, e_i'den farklı bir e_j kenarının t'ye etkisi 1'dir. F'de k_1-tane kenar vardır, herbirinin t'ye etkisi 1 olduğuna göre $t \geq 2\alpha + k_1$'dir.■

Örnek 4.7.

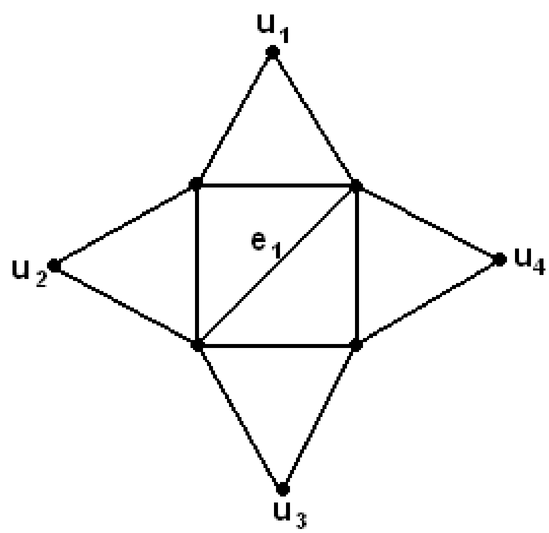
i) G çizgesi Şekil 4.8'deki gibi ve $F = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun.

$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ en geniş bağımsız küme olmak üzere $\alpha(G) = 4$'dür. Öyleyse $Sp(G) \geq 2.4 + 3 = 11$'dir.



Şekil 4.8. Teorem 4.6'yı sağlayan bir ağaç

$ii)$ G çizgesi aşağıdaki gibi olsun.



Şekil 4.9. Teorem 4.6'yı sağlayan üçgen içeren bir çizge

$F = \{e_1\}$ ve $\alpha(G) = 4$'dür. $Sp(G) \geq 2.4 + 1 = 9$'dur.

Teorem 4.8. $G = (V, E)$ bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$, U en geniş bağımsız küme ve $W \subseteq V \backslash U$ altkümesi G 'nin bir bağımsız kümesi olsun. Ayrıca $\mathcal{N}_W(u_i) = \{v \in W \mid (u_i, v) \in E\}$ olmak üzere $t_i = |\mathcal{N}_W(u_i)|$ olsun. Bu durumda $k_2 = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ t_i \neq 0,1}}^{\alpha} (t_i - 2)$ olmak üzere

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_2$$

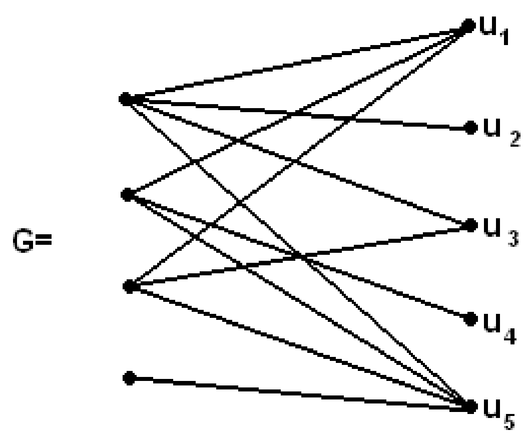
olur.

İspat: $Sp(G) = t$ olmak üzere $t \geq 2\alpha$ olduğunu biliyoruz. $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir X kümesi üzerindeki G'yi geren bir Sperner ailesi, $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ kümesindeki köşelere karşılık gelen kümeler $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \in \mathcal{A}$ olsun. Buna göre, $1 \leq i, j \leq \alpha, i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$'dir. $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\} \subseteq V \backslash U$ altkümesi G'nin bağımsız bir kümesi olsun. Herbir $w_i \in W$ köşesine karşılık gelen kümeyi $B_i \in \mathcal{A}$ ile gösterelim. Buna göre $1 \leq i, j \leq \alpha, i \neq j$ için $B_i \cap B_j = \varnothing$'dir. Ayrıca $t_i = |\mathcal{N}_W(u_i)|$ diyelim. Bu durumda A_i kümesinin B_j kümelerinden t_i-tanesiyle arakesiti boştan farklıdır ve herbir arakesitde birbirinden farklı elemanlar vardır.(Çünkü B_j'ler ayrıktır.) O halde $|A_i| \geq t_i$'dir. Buna göre $t_i > 2$ ise Sperner sayısı $t_i - 2$ artar. Bu durumda 2'den büyük veya eşit olan bütün t_i'ler düşünüldüğünde

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \neq 0,1}}^{\alpha} (t_i - 2)$$

olur. ($t_i = 0$ veya 1 ise t_i toplama katılmaz. Çünkü 0 veya 1 olması durumunda yine $|A_i| \geq 2$'dir.)■

Örnek 4.9. G iki çoklu çizgesi Şekil 4.10'daki gibi verilsin.



Şekil 4.10. Teorem 4.8'i sağlayan bir iki-çoklu çizge

$\alpha(G) = 5$ ve $t_1 = 3, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = 1, t_5 = 4$'dür Buna göre, $t_2 = t_4 = 1$ olduğundan toplama katılmaz. Öyleyse $Sp(G) = 14 \geq 2.5 + (3-2) + (2-2) + (4-2) = 13$'dür.

Teorem 4.10. $G = (V, E)$ bir çizge, $\alpha(G) = \alpha$ ve U en geniş bağımsız küme olmak üzere $k_3 = |\{v \in V \backslash U \mid d(v) = 1\}|$ olsun. Bu durumda

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_3$$

olur.

İspat: $Sp(G) = t$ olmak üzere, $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir X kümesi üzerinde tanımlı G'yi geren bir Sperner ailesi ve $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ kümesindeki köşelere karşılık gelen kümeler de $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \in \mathcal{A}$ olsun. Ayrıca $Z = \{v \in V \backslash U \mid d(v) = 1\} \subseteq V \backslash U$ olsun. $z_j \in Z$ alalım ve $\mathcal{A}$ ailesinde z_j'ye karşılık gelen kümeye B_j diyelim. Bu durumda $|B_j| = 2$'dir. Ayrıca $Sp(G) \geq 2\alpha(G)$ olduğundan $2\alpha(G)$ eleman var ve bunlar A_i kümelerinde bulunan elemanlardır. Buna göre $d(z_j) = 1$ olduğundan en az bir $a_j \in B_j$ vardır öyle ki her $A \in \mathcal{A}, (A \neq B_j)$ için $a_j \notin A$'dır. O halde herbir $j \in [k_3]$ için sadece B_j'de olan bir a_j elemanı vardır. Yani bu şekilde k_3-tane $a_1, a_2, \ldots, a_{k_3}$ elemanları vardır. Öyleyse

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_3$$

elde edilir.■

Teorem 4.11. Bir $G = (V, E)$ çizgesi Teorem 4.6, 4.8, 4.10'daki durumların hepsini gerçekliyorsa, k_1, k_2, k_3 yukarıda tanımlandığı gibi olmak üzere

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_1 + k_2 + k_3$$

olur.

İspat: $Sp(G) = t$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ailesi t-elemanlı bir X kümesi üzerinde tanımlı G'yi geren bir Sperner ailesi ve $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_\alpha\}$ kümesindeki köşelere karşılık gelen kümeler de $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha \in \mathcal{A}$ olsun. Teorem 4.6'daki F kümesindeki elemanların köşelerine karşılık gelen kümeler B_i'ler olsun. Bu durumda F'deki kenarlara göre B_i'lerdeki elemanların hepsi A_i'lerde bulunmaz. A_i'lerde bulunmayan en az $|F| = k_1$-tane eleman vardır. $W \subset V \backslash U$ bağımsız bir küme olmak üzere Teorem 4.8'e göre W'daki köşeler A_i'lerin e-leman sayısını etkiler ve $2\alpha(G)$'den farklı olarak $k_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \neq 0,1}}^{\alpha} (t_i - 2)$ eleman bulunduğunu görürüz.
F'den gelen k_1-elemanla bu k_2-eleman birbirinden farklıdır. Çünkü k_1-tane eleman A_i'lerde bulunmayan elemanlardır, k_2-eleman ise A_i'lerdeki elemanlardır. Bu durumda

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_1 + k_2$$

elde edilir. $Z = \{v \in V \backslash U \mid d(v) = 1\} \subseteq V \backslash U$ olmak üzere bir $z_i \in Z$ alalım. Buna göre z_i için sadece bir $e = (z_i, u) \in E$ kenarı vardır ve burada $u \in U$'dur. (Eğer $u \notin U$

olursa $U \cup \{z_i\}$ en geniş bağımsız küme olur.) O halde $e \notin F$'dir. Herbir $z_i \in Z$ için sadece B_{z_i}'de olan bir $a_i \in X$ vardır. (Burada B_{z_i} kümesi z_i köşesine karşılık gelen kümedir.) Bu şekilde k_3-eleman vardır ve bu elemanlar diğer köşelere karşılık gelen kümelerde bulunmazlar. Çünkü $z_i \in Z$ elemanı ne F'deki kenarlara ait bir köşedir, ne de U'ya aittir. O halde bu k_3-eleman $k_1 + k_2$-elemandan farklıdır. Dolayısıyla

$$Sp(G) \geq 2\alpha(G) + k_1 + k_2 + k_3$$

olur.■

Teorem 4.12. G bir çizge ve $\alpha(G) = \alpha$ olmak üzere $U = \{v_1, v_2, \ldots, v_\alpha\}$ kümesi G'nin en geniş bağımsız kümesi olsun. Bu durumda

$$Sp(G) \geq \sum_{i=1}^{\alpha} k\left(G\left[\mathcal{N}_G(v_i)\right]\right)$$

olur.

İspat: $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin keyfi bir gereni olsun. U kümesi G'nin en geniş bağımsız kümesi olduğundan, U'nun köşelerine karşılık gelen $\psi(v_1), \psi(v_2), \ldots, \psi(v_\alpha)$ kümeleri ayrıktır. Ayrıca bir köşenin Sperner derecesi tanımı (Tanım 2.27) ve Teorem 2.28'den her $i \in [\alpha]$ için $\psi(v_i) \geq d_{Sp}(v_i) \geq k\left(G\left[\mathcal{N}_G(v_i)\right]\right)$'dir. Buna göre,

$$|X| \geq \left|\bigcup_{i=1}^{\alpha} \psi(v_i)\right| = \sum_{i=1}^{\alpha} |\psi(v_i)| \geq \sum_{i=1}^{\alpha} k\left(G\left[\mathcal{N}_G(v_i)\right]\right)$$

olur. O halde

$$Sp(G) \geq \sum_{i=1}^{\alpha} k\left(G\left[\mathcal{N}_G(v_i)\right]\right)$$

elde edilir.■

Bu bölümde şu ana kadar, bir çizgenin Sperner sayısının bağımsızlık sayısı kullanılarak elde edilen altsınırları verildi. Bundan sonra ise bir çizgenin bir kenarının büzülmesiyle ve atılmasıyla Sperner sayısının nasıl değişiklik göstereceğine bakacağız. Ardından da bir çizgenin Sperner sayısı ile bütünleyeninin kromatik sayısı arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Teorem 4.13. $G = (V, E)$ basit bir çizge ve $e \in E$ olsun. Eğer e kenarı G'de bir üçgen içerisinde bulunmuyorsa

$$Sp(G/e) \leq Sp(G)$$

olur.

İspat: $e = (u, v) \in E$ olmak üzere $uv \in V(G/e)$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}_{G/e}(uv) = \mathcal{N}_G(u) \cup \mathcal{N}_G(v) \setminus \{u, v\}$$

dir. Buna göre

$$d(uv) \leq d(u) - 1 + d(v) - 1 = d(u) + d(v) - 2$$

olacaktır. Ayrıca e kenarı G 'de bir üçgen içerisinde bulunmadığından $\mathcal{N}_G(u) \cap \mathcal{N}_G(v) = \varnothing$'dir. Bundan dolayı

$$\left|\mathcal{N}_{G/e}(uv)\right| = d(uv) = d(u) + d(v) - 2$$

elde edilir.

Bu durumda $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsü G'nin bir gereni olmak üzere her $w_1 \in \mathcal{N}_G(u)$ için $\mu(w_1) \cap \mu(v) = \varnothing$ ve her $w_2 \in \mathcal{N}_G(v)$ için $\mu(w_2) \cap \mu(u) = \varnothing$ olduğundan her $w \in \mathcal{N}_G(u) \cup \mathcal{N}_G(v) \setminus \{u, v\}$ için $\mu(w) \nsubseteq \mu(u) \cup \mu(v)$ olur. Buna göre G/e üzerindeki ψ germe fonksiyonunu her $w \in V(G/e) \setminus \{uv\}$ için $\psi(w) = \mu(w)$ ve $\psi(uv) = \mu(u) \cup \mu(v)$ olarak tanımlayabiliriz. Bu da

$$Sp(G/e) \leq Sp(G)$$

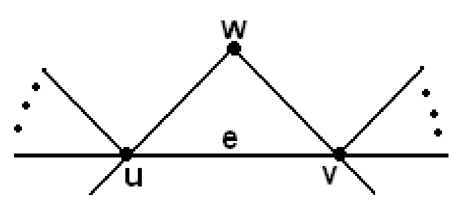
olduğunu gösterir.■

Teorem 4.14. $G = (V, E)$ basit bir çizge ve $e \in E$ olsun. Eğer e kenarı G'de sadece bir üçgenin içerisinde ise

$$Sp(G/e) \leq Sp(G)$$

olur.

İspat: e kenarı G'de sadece bir üçgenin içerisinde bulunsun. Bu durumda $e = (u, v) \in E$ olmak üzere $|\mathcal{N}_G(u) \cap \mathcal{N}_G(v)| = 1$'dir. Öyleyse $w \in \mathcal{N}_G(u) \cap \mathcal{N}_G(v)$ diyelim.



Şekil 4.11. Bir çizgenin ortak komşuları olan iki köşesi

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsü G'nin bir gereni olsun. Buna göre $\mu(u) \cap \mu(v) \neq \varnothing, \mu(u) \cap \mu(w) \neq \varnothing, \mu(v) \cap \mu(w) \neq \varnothing$'dır.

Eğer $\mu(u) \cap \mu(v) \cap \mu(w) \neq \varnothing$ ise en az bir $a \in X$ vardır öyle ki $a \in \mu(u) \cap \mu(v) \cap \mu(w)$'dir ve $\mu(w) \nsubseteq \mu(u), \mu(w) \nsubseteq \mu(v)$ olduğundan $\mu(w) \nsubseteq \mu(u) \cup \mu(v)$'dir. Bu durumda G/e için ψ germe fonksiyonunu her $w \in V(G/e) \setminus \{uv\}$ için $\psi(w) = \mu(w)$ ve $\psi(uv) = \mu(u) \cup \mu(v)$ olarak tanımlayabiliriz. Böylece $(X, \mathcal{B}, \psi)$ üçlüsü G/e için bir gerendir ve $Sp(G/e) \leq Sp(G)$ olur.

Eğer $\mu(u) \cap \mu(v) \cap \mu(w) = \varnothing$ ise $a, b, c \in X$ elemanları vardır öyle ki

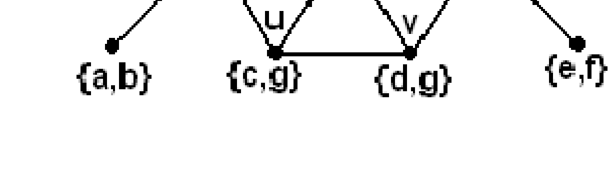
$$a \in \mu(u) \cap \mu(v), b \in \mu(u) \cap \mu(w), c \in \mu(v) \cap \mu(w)$$

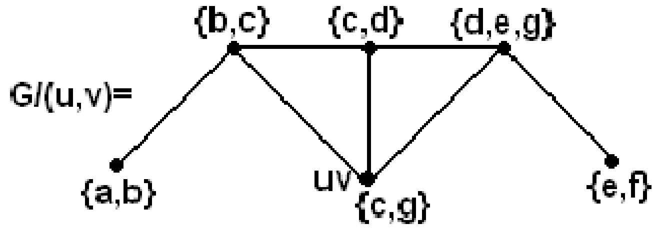
olur. Buna göre

$$a, b \in \mu(u); a, c \in \mu(v); b, c \in \mu(w)$$

olup $a, b, c \in \mu(u) \cup \mu(v)$'dir, buradan $\mu(w) \subseteq \mu(u) \cup \mu(v)$ olma ihtimali vardır. Bu durumda $\psi(uv) = \mu(u) \cup \mu(v) \setminus \{b\}$ ve $\psi(w) = \mu(w)$ alırsak $\psi(w) \nsubseteq \psi(uv)$ olur, hatta $\psi(w) \cap \psi(uv) \neq \varnothing$ durumu da korunur. Ancak $b \in \mu(y)$ olacak şekilde bir $y \in V(G)$ varsa $(y, u), (y, w) \in E$'dir ve aynı zamanda $(y, uv), (y, w) \in E(G/e)$'dir. Bu durumda $\psi(y) \cap \psi(uv) \neq \varnothing$ olması için $\psi(y) = \mu(y) \cup \{a\}$ olarak tanımlanabilir. (a sadece $\psi(uv)$ kümesinde bulunan elemandır. Çünkü $e = (u, v)$ kenarı yalnız bir üçgende bulunur. a elemanının $\psi(uv)$ kümesi dışında başka bir kümede daha bulunması e'nin iki farklı üçgende bulunması anlamına gelir.) a sadece $\psi(uv)$ kümesinde bulunduğundan $\psi(y) = \mu(y) \cup \{a\}$ şeklinde tanımlanmasında bir sakınca yoktur. Hatta $b \in \mu(y)$ olan her $y \in V(G/e)$ için bu şekilde tanımlanabilir. Bu durumda $b \notin \mu(y)$ olan her $y \in V(G/e)$ için $\psi(y) = \mu(y)$ olarak tanımlamak yeterlidir. Buna göre $(X, \mathcal{B}, \psi)$ üçlüsü G/e için bir geren olur. Böylece $Sp(G/e) \leq Sp(G)$'dir.■

Örnek 4.15. G ve $G/(u, v)$ çizgeleri Şekil 4.12'deki gibi olsun. Buna göre $Sp(G) = 7$ ve $Sp(G/(u, v)) = 7$'dir.

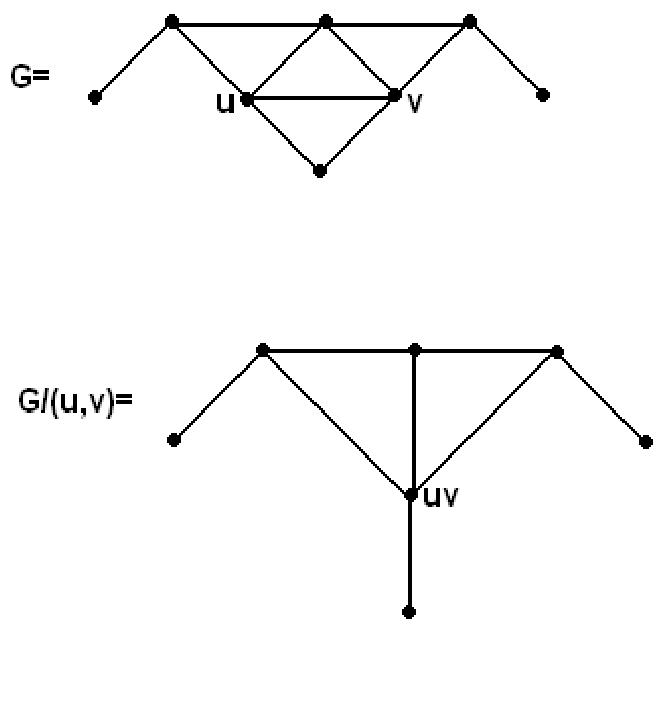




Şekil 4.12. Gerenleri verilen G çizgesinin bir kenarı büzülerek elde edilen çizge

Uyarı: e kenarı G'de birden fazla üçgenin içerisinde ise $Sp(G/e) \leq Sp(G)$ eşitsizliği her zaman doğru değildir.

Örnek 4.16. G ve $G/(u,v)$ çizgeleri Şekil 4.13'deki gibi olduğunda
$Sp(G) = 8 < Sp(G/(u,v)) = 9$'dur.



Şekil 4.13. G çizgesinin bir kenarının büzülmesiyle oluşan çizge

Teorem 4.17. $G = (V, E)$ basit bir çizge ve $e \in E$ olsun.
$d_1(G) := |\{v \in V \mid d_G(v) = 1\}|$ olarak tanımlansın.
i) $d_1(G - e) > d_1(G)$ ise $Sp(G - e) \geq Sp(G)$,

$ii)$ $d_1(G-e) < d_1(G)$ ise $Sp(G-e) \leq Sp(G)$,

$iii)$ G üçgen içermeyen çizge ve $d_1(G-e) = d_1(G)$ ise $Sp(G-e) = Sp(G) - 1$'dir.

İspat: $i)$ $e = (u,v) \in E$ ve $d_1(G-e) > d_1(G)$ olsun. Buna göre G 'den e kenarını attığımızda derecesi 1 olan köşe sayısı artıyorsa $d_{G-e}(u) = 1$ veya $d_{G-e}(v) = 1$'dir. Bu durumda $d_G(u) = 2$ veya $d_G(v) = 2$'dir. Şimdi $G-e$'nin her gereninin G'nin de gereni olabileceğini gösterelim. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsü $G-e$'nin bir gereni olsun.

1. Durum: $d_{G-e}(u) = 1$ ve $d_{G-e}(v) > 1$ olsun. Buna göre en az bir $a \in X$ vardır öyle ki $a \in \mu(u)$ ve her $w \in V(G-e) \setminus \{u\}$ için $a \notin \mu(w)$'dir. Şimdi G için X üzerinde bir ψ germe fonksiyonu tanımlamaya çalışalım. $E(G) \setminus \{e\} = E(G-e)$ olduğundan her $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$ için $\psi(w) = \mu(w)$ olmasının bir sakıncası yoktur. Ayrıca $e = (u,v) \in E$ olduğundan $\psi(u) \cap \psi(v) \neq \varnothing$ olması gerekir. Buna göre $\psi(u) = \mu(u)$ ve $\psi(v) = \mu(v) \cup \{a\}$ olarak tanımlanırsa $a \in \psi(u) \cap \psi(v)$ olur. Böylece G çizgesi için X üzerinde tanımlı bir ψ germe fonksiyonu oluşturulmuş olur. Buradan $Sp(G-e) \geq Sp(G)$ elde edilir.

2. Durum: $d_{G-e}(u) = d_{G-e}(v) = 1$ olsun. Bu durumda da en az iki $a, b \in X$ elemanı vardır öyle ki $a \in \mu(u), b \in \mu(v)$ $(a \notin \mu(v), b \notin \mu(u))$ ve her $w \in V(G-e) \setminus \{u,v\}$ için $a, b \notin \mu(w)$'dir. Yine G için X üzerinde tanımlamaya çalıştığımız ψ germe fonksiyonunda her $w \in V(G) \setminus \{u,v\}$ için $\psi(w) = \mu(w)$ alınabilir Ayrıca,. $d_{G-e}(u) = d_{G-e}(v) = 1$ ve $e = (u,v) \in E$ olduğundan, $\psi(u) = \mu(u)$ ve $\psi(v) = (\mu(v) \setminus \{b\}) \cup \{a\}$ şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda ψ germe fonksiyonu $X - \{b\}$ üzerinde tanımlanmış olur. Buna göre $Sp(G-e) > Sp(G)$ olur. O halde $d_1(G-e) < d_1(G)$ olduğunda $Sp(G-e) \leq Sp(G)$ olur.

$ii)$ $e = (u,v) \in E$ ve $d_1(G-e) < d_1(G)$ olsun. Buna göre iki durum söz kunusudur:

1. Durum: $d_G(u) = d_G(v) = 1$ ve

2. Durum: $d_G(u) = 1, d_G(v) > 2$ veya $d_G(u) > 2, d_G(v) = 1$

olmasıdır. Önce 1. duruma sonra 2. duruma bakalım.

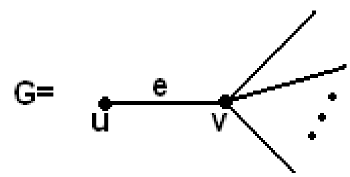
1. Durum: $d_G(u) = d_G(v) = 1$ olsun. $e = (u,v) \in E$ olduğundan $G = K_2$'dir.

Şekil 4.14. İki köşesinin de derecesi 1 olan kenar ve

bu kenarın silinmesiyle oluşan yeni çizge

$Sp(K_2) = 3 > Sp(K_2 - e) = 2$'dir.

2. Durum: $d_G(u) = 1, d_G(v) > 2$ olsun.



Şekil 4.15. Bir köşesinin derecesi 1 olan bir kenar

$(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin bir gereni olsun. Bu durmda $e \in E(G)$ olduğundan $\psi(u) \cap \psi(v) \neq \varnothing$'dır. Buna göre en az bir $a \in X$ vardır öyle ki $a \in \psi(u) \cap \psi(v) \neq \varnothing$'dir. Ayrıca $d_G(u) = 1$ olduğundan u'nun tek komşusu vardır, o da v'dir. Öyleyse $a \in \psi(u)$ olduğundan her $w \in V(G-e) \setminus \{u, v\}$ için $a \notin \mu(w)$'dir. Şimdi $G - e$ için X üzerinde bir μ germe fonksiyonu tanımlamaya çalışalım. Her $f \in E(G), f \neq e$ için $f \in E(G-e)$ olduğundan $\mu(w) = \psi(w)$ alınabilir. Ayrıca $e \notin E(G-e)$ olduğundan $\mu(u) \cap \mu(v) = \varnothing$'dır. Buna göre $\mu(v) = \psi(v)$ ve $\mu(u) = \psi(u) \setminus \{a\}$ alınırsa $\mu(u)$ ile $\mu(v)$ ayrık olur. Buradan da $Sp(G-e) \leq Sp(G)$ olduğu görülür.

iii) G üçgen içermeyen bir çizge ve $d_1(G-e) = d_1(G)$ olsun. Ayrıca G üçgen içermeyen bir çizge ise $Sp(G) = \|G\| + d_1(G)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $d_1(G-e) = d_1(G)$ olduğundan

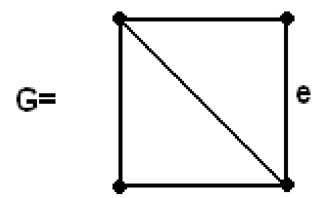
$$\begin{aligned} Sp(G-e) &= \|G\| - 1 + d_1(G) \\ &= \|G\| + d_1(G) - 1 = Sp(G) - 1 \end{aligned}$$

elde edilir.■

Örnek 4.18.

i) n-köşeli C_n döngüsü alalım. Bu durumda $e \in E(C_n)$ olmak üzere $C_n - e \cong P_n$ 'dir. Öyleyse $d_1(C_n) = 0 < d_1(P_n) = 2$'dir ve $Sp(C_n) = n \leq Sp(C_n - e) = Sp(P_n) = n + 1$'dir.

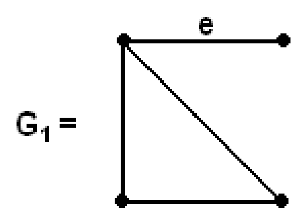
$ii)$ G çizgesi Şekil 4.16'daki gibi olsun.



Şekil 4.16. e kenarının silinmesiyle Sperner sayısı artan çizge

Buna göre $d_1(G) = 0 < d_1(G - e) = 1$ olup $Sp(G) = 4 < Sp(G - e) = 5$'dir.

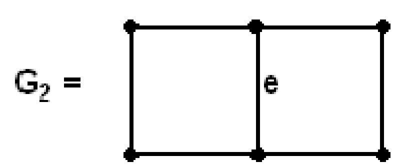
$iii)$ G_1 çizgesi aşağıdaki gibi olsun.



Şekil 4.17. e kenarının silinmesiyle Sperner sayısı azalan çizge

Buna göre $d_1(G_1) = 1 > d_1(G_1 - e) = 0$ olup $Sp(G_1) = 5 > Sp(G_1 - e) = 4$'dür.

$iv)$ Şekil 4.18'deki gibi verilmiş olan G_2 çizgesi için $d_1(G_2) = d_1(G_2 - e) = 0$ olup $Sp(G_2) = 7$ ve $Sp(G_2 - e) = 6$'dır.



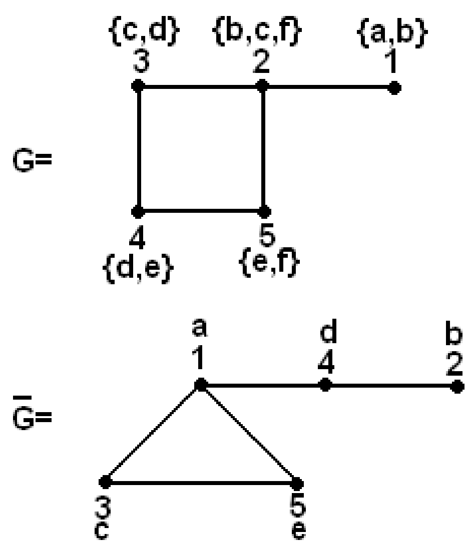
Şekil 4.18. Bir kenarı silindiğinde Sperner sayısı 1 azalan çizge

Uyarı: Sperner sayısı ile kromatik sayısı arasında da bir ilişki kurulabilir. $Sp(G) \geq \chi(\bar{G})$ olduğunu görmek kolaydır. Bunun için $(X, \mathcal{A}, \psi)$ üçlüsü G'nin keyfi bir gereni olmak üzere $v \in V(G) = V(\bar{G})$ köşesine karşılık gelen $\psi(v)$ kümesinden bir a elemanı $\bar{G}$'de v köşesine atanırsa ve bu atama her v köşesi için tekrarlanırsa $\bar{G}$'nin her

köşesine bir eleman atanmış olur. Bu atamaya göre her $(u, v) \in E(\bar{G})$ kenarı için u köşesine atanan elemanla v köşesine atanan eleman aynı değildir. Çünkü $(u, v) \in E(\bar{G})$ ise $(u, v) \notin E(G)$ olur ve buradan da $\psi(u) \cap \psi(v) = \varnothing$'dir. Bundan dolayı u ile v'ye atanan elemanlar birbirinden farklıdır. Böylece G'nin $(X, \mathcal{A}, \psi)$ gereni yardımıyla $\bar{G}$'nin bir renklendirmesini elde etmiş oluruz. Buradan $|X| \geq \chi(\bar{G})$'dir. O halde G'nin her gereni için $\bar{G}$'nin bir renklendirmesi oluşturulabileceğinden
$Sp(G) \geq \chi(\bar{G})$'dir.

Uyarı: Bir çizgenin tamsal örtüm sayısı, bütünleyeninin kromatik sayısına eşit olduğundan; yani $k(G) = \chi(\bar{G})$ olduğundan yukarıdaki uyarıdan yola çıkarak $Sp(G) \geq k(G)$ olduğu görülür.

Örnek 4.19. G çizgesi ve bütünleyeni Şekil 4.19'daki gibi olsun. $Sp(G) = 6$ ve $\chi(\bar{G}) = 3$'dür. Buna göre $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere G 'nin bir gereni
$\mathcal{A} = \{\{a, b\}, \{b, c, f\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$ ailesidir. Bu aileye göre $\bar{G}$'nin bir 5-renklendirilmesi şekildeki gibidir.



Şekil 4.19. Bir gereni verilmiş G çizgesi ve 5-renklendirilmesi verilmiş bütünleyeni

5. KAYNAKLAR

Anderson, I., 2002. Combinatorics of Finite Sets. Dover Publications, 250. New York.

Balakrishnan, R., Ranganathan, K., 2000. A Textbook of Graph Theory. Springer, 227. New York.

Bey, C., Engel, K., Katona, G.O.H., Leck, U., 2002. On the Average Size of Sets in Intersecting Sperner Families. Discrete Mathematics, 257, 259-266.

Hamburger, P., Por, A., Walsh, M., 2009. Kneser Representations of Graphs. SIAM Journal on Discrete Mathematics, Volume 23, No:2, 1071-1081.

Jukna, S., 2009. On Set Intersection Representations of Graphs. Journal of Graph Theory, Volume 61, Issue 1, 55-75.

Katona, G.O.H., 1997. Extremal Problems for Finite Sets and Conveks Hulls. Discrete Mathematics, 164, 175-185.

Katona, G.O.H., 1998. A Simple Proof of a Theorem of Milner. Journal of Combinatorial Theory, A83, 138-140.

Kong, J., Yaokun, W., 2009. On Economical Set Representations of Graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Volume 11:2, 71-96.

Milner, E.C., 1968. A Combinatorial Theory on System of Sets. Journal of the London Mathematical Society, 43,204-206.

Scott, A.D., 1999. Another Simple Proof of a Theorem of Milner. Journal of Combinatorial Theory, A87, 379-380.

West, D.B., 1996. Introduction to Graph Theory. Prentice Hall, 512. USA.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gülnur Başer

Doğum Yeri ve Yılı : ISPARTA 1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Antalya Gazi Lisesi 1999-2002

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü 2003-2007

Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü 2007-…

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)
1-Başer, G. and Taylan, D. "Linear N-graphs" Undergraduate Math. Journal, RHIT, Vol. 8, No:1, (2007), 1-6.