T.C
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Havva Şule TUNCER

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak oy biriliğiyle kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. Sadulla JAFAROV

(Pamukkale Üniv. Fen Edeb. Fak. Matematik Böl./ DENİZLİ)

Üye: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

(Danışman SDÜ Fen Edeb. Fakültesi Matematik Böl.)

Üye: Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN

(SDÜ Fen Edeb. Fak. Matematik Böl.)

ONAY

Bu tez 22/04/2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda, yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../2009

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU

Enstitü Müdürü

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI 'nda oy biriliğiyle YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. Sadulla JAFAROV
(Pamukkale Üniv. Fen Edeb. Fak. Matematik Böl./ DENİZLİ)

Üye: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
(Danışman SDÜ Fen Edeb. Fakültesi Matematik Böl.)

Üye: Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN
(SDÜ Fen Edeb. Fak. Matematik Böl.)

ONAY

Bu tez 22/04/2009 tarihinde yapılan tez savunma sınavı sonucunda, yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../2009

Prof. Dr. Mustafa KUŞCU
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUILLE OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

Havva Şule TUNCER

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Jüri: Prof.Dr. Sadulla JAFROV
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU (Danışman)
Yrd.Doç.Dr. Suna SALTAN

Bu tezde Sturm-Liouville diferansiyel denklemleri için sınır değer problemleri incelenmiştir. Regüler ve Singüler Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Singüler Sturm-Liouville denklemleri için kendine eş olan ve kendine eş olamayan sınır koşulları araştırılarak Green fonksiyonu kurulmuştur.

Daha sonra sınır değer problemlerine karşılık gelen operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonları araştırılmış ve özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Regüler ve singüler Sturm-Liouville Operatörleri, Kendine Eş Olmayan Sturm-Liouville Operatörleri, Sınır Değer Problemleri, Sturm-Liouville Operatörlerinin Spektrumu

2009, 54 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF NON SELF ADJOINT STURM-LIOUVILLE OPERATORS

Havva Şule TUNCER

Süleyman Demirel University Graduate School of Applied and Natural Sciences

Mathematics Department

Thesis Committee: Prof.Dr. Sadulla JAFAROV
Prof. Dr. Bilender PASAOGLU (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Suna SALTAN

In this thesis we examined the boundary value problems for Sturm-Liouville differantial equations. Regular and singular Sturm-Liouville boundary value problems are classificationed. Adjoint and self adjoint boundary condiations are studied for singular Sturm-Liouville equqtions. And obtained Green function.

Spectral property are studied to operator for boundary value problems. Eigenvalues and eigenfunctions are obtain for boundary value problems and examined their properties.

Key Words: Regular and singular Sturm-Liouville Operators, Non Self Adjoint Sturm-Liouville Operators, Boundary Value Problems, Spectrum of Sturm-Liouville Operators.

2009, 54 pages

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının belirlenmesinde, kaynakların bulunmasında ve temin edilmesinde, karşılaştığım her türlü problemin çözümünde yardımlarını esirgemeyen ve bana devamlı destek veren, ufkumu açan, geleceğe umutla bakmamı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na teşekkür ederim.

Ayrıca İngilizce kaynak kitaplarının temin edilmesinde destek ve yardımlarını gördüğüm başta Süleyman Demirel Üniversitesi olmak üzere, Orta Doğu Teknik Üniversitesi ve İstanbul Teknik Üniversitesi Kütüphanesi çalışanlarına da teşekkür ederim.

Havva Şule TUNCER

ISPARTA, 2009

SİMGELER DİZİNİ

R	: Reel sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
H	: Hilbert uzayı
Rez	: z-Kompleks sayısının reel kısmı
Imz	: z-Kompleks sayısının sanal kısmı
D(A)	: A nın tanım kümesi
R(A)	: A nın görüntü kümesi
l (y)	: Diferensiyel ifade
L	: Maksimal operatör
L_o	: Minimal simetrik operatör
G(x,y)	: Green fonksiyonu
m(λ)	: Weyl-Titchmarsh Fonksiyonu
$R_\lambda(A)$	: A Operatörünün rezolventi
λ_n	: Özdeğer

I. GİRİŞ

Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi Sturm-Liouville sınır değer problemleri ile bağlantılıdır. Genellikle kısmî türevli denklemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanıldıktan sonra Sturm-Liouville denklemleri ile bağlantılı sınır değer problemleri ortaya çıkmıştır.

Tezde regüler ve singüler Sturm-Liouville sınır değer problemlerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Kendine eş Sturm-Liouville operatörünün sınır koşulları, Green fonksiyonu kurulmuştur. Sınır değer problemine karşılık gelen operatörün spektral özellikleri incelenmiştir. Rezolvent küme, rezolvent operatör, spektrum işlenmiştir. Daha sonra problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir. Kendine eş olmayan Sturm-Liouville sınır değer probleminin spektrumu araştırılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Hilbert uzayı) : x,y,z elemanlarından oluşan herhangi bir küme H olsun ve aşağıdaki aksiyomları sağlasın.

1. H lineer kompleks bir uzay

2. H nin her x,y ikili elemanına karşılık gelen $\langle x, y\rangle$ kompleks sayısı için ,

a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

b) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$ $\qquad (x_1, x_2 \in H)$

c) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ $\qquad$ (Her λ kompleks sayısı için)

d) $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $(\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle})$

3. $d(x, y) = \|x - y\|$ metriği anlamında H tamdır.

4. Her n doğal sayısı için H de n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani H sonsuz boyutludur.

Bu taktirde, 1-4 şartlarını sağlayan uzaya Soyut Hilbert uzayı, 1-3 şartlarını sağlayan uzaya ise üniter Hilbert uzayı denir (Liusternik, 1961).

Tanım 2.2 (Lineer Operatör) : H Hilbert uzayının her hangi bir $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir L operatörü için,

$$L : D \subseteq H \to H$$

dönüşümü verilsin. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in C$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için,

$$L(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 L x_1 + \alpha_2 L x_2$$

eşitliği sağlanıyorsa L dönüşümüne lineer operatör, D ye ise L operatörünün tanım bölgesi denir ve D(L) ile gösterilir. L operatörünün değer kümesi de $\mathrm{Im}(L)$ veya R(L) ile gösterilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.3 : X ve Y birer normlu uzay ve $D(L) \subset X$ bir L operatörünün tanım kümesi olsun. Eğer,

$$\|Lx\| \leq C \|x\|$$

olacak şekilde bir C reel sayısı varsa L ye sınırlı operatör denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4 (Eşlenik Operatör) : H Hilbert uzayı ve L bu uzayda lineer bir operatör olmak üzere, L nin tanım kümesi D(L), H uzayında yoğun olsun. $f \in D(L)$ için,

$$\langle Lf, g \rangle = \langle f, L^* g \rangle$$

eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L nın adjoint (eşlenik) operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $g \in H$ vektörler kümesine L^* ın tanım kümesi denir ve D(L^*) ile gösterilir (Naimark, 1968).

Eğer $L = L^*$ ise L operatörüne self adjoint (kendine eş) operatör denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5 : [a,b] aralığında tanımlı, kompleks değerli ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan f(x) fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise f(x) fonksiyonuna [a,b] aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir.

(a,b) aralığının (sonlu veya sonsuz) üzerinde Lebesgue anlamında ölçülebilir ve kare integrallenebilir tüm komleks değerli f(x) fonksiyonlar kümesini $L^2(a,b)$ ile göstereceğiz.

Her $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$ için ;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanabilir [Jorgens, 1964].

Tanım 2.6: L, D(L) tanım bölgesinde sınırlı lineer bir operatör olmak üzere ,

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ vektörü mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, y vektörüne ise özvektörü denir [Kostyuchenko, Sargsyan 1979].

Tanım 2.7: p(x), q(x) ve s(x) fonksiyonları [a,b] aralığında ölçülebilir olmak üzere,

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$$

şeklinde tanımlı L ye Sturm-Liouville ifadesi,

$$L(y) + \lambda s(x) y = 0$$

şeklinde tanımlı denkleme ise Sturm-Liouville diferansiyel denklem denir.

Sturm-Liouville diferansiyel operatörünün spektral özellikleri araştırılırken genellikle aşağıdaki üç grup sınır şartları ele alınır.

a) Ayrılan sınır koşulları,

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0\,,\; y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0\,,$$

$$\alpha,\beta \in (-\infty,\infty).$$

b) Periyodik sınır koşulları,

$$y(a) = y(b) \quad , \quad y'(a) = y'(b)$$

antiperiyodik sınır koşulları,

$$y(a) = -y(b) \quad , \quad y'(a) = -y'(b).$$

c) Uçları bağlanmış sınır koşulları,

$$y(a) = y(b) = 0 \quad , \quad y'(a) = y'(b) = 0\,.$$

Tanım 2.8: [a,b] kapalı aralığı sonlu , $\dfrac{1}{p(x)}$ ve q(x) fonksiyonları [a,b] de integrallenebilir ise o zaman L Sturm-Liouville ifadesine regüler, aksi taktirde ise singüler Sturm-Liouville ifadesi denir.

Tanım 2.9: Sturm-Liouville ifadesi regüler iken ,

$$L(y) = -y'' + q(x)\,y = \lambda y \qquad a < x < b \tag{2.1}$$

denklemi ve

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \qquad 0 \le \alpha \le \pi \tag{2.2}$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \qquad 0 \le \beta \le \pi \tag{2.3}$$

sınır koşullarına birlikte Sturm-Liouville problemi denir. λ kompleks sayı olmak üzere (2.1)- (2.3) Sturm-Liouville probleminin çözümü olan ve sıfırdan farklı y(x) fonksiyonu varsa o zaman λ ya problemin özdeğeri, y(x) e ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

Tanım 2.10 (Simetrik Operatör): H-Hilbert uzayı olmak üzere , $A: D(A) \to H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olsun. Her f ,g $\in$ D(A) için,

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

ise A ya simetrik operatör denir.

Tanım 2.11 (Simetrik Operatörün Defekt Uzayları) : A , H Hilbert uzayında simetrik operatör ve λ keyfi kompleks sayı olsun. R_λ ve $R_{\bar{\lambda}}$ sırasıyla $(A - \lambda I)$ ve $(A - \bar{\lambda} I)$ operatörlerinin değer kümesi olmak üzere ,

$$N_\lambda = H \Theta R_\lambda \text{ ve } N_{\bar{\lambda}} = H \Theta R_{\bar{\lambda}}$$

uzaylarına defekt uzayları denir.

Tanım 2.12 (İndis Defekt): Im $\lambda > 0$ olmak üzere , $m = \dim N_\lambda$ ve $n = \dim N_{\bar{\lambda}}$ şeklinde ifade edildiğinde (m,n) ikilisine A operatörünün indis defekti denir.

Tanım 2.13 (Disipatif Operatör): H Hilbert uzayında dönüşüm yapan A lineer operatörünün D(A) tanım kümesi H de yoğun olmak üzere her f $\in$ D(A) için,

$$\operatorname{Im}\langle Af, f \rangle \geq 0$$

ise A operatörüne disipatif operatör denir.

3. REGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

3.1. Regüler Sturm-Liouville Probleminin Temel Özellikleri

Aşağıdaki Sturm-Liouville diferansiyel ifadesini ele alalım

$$\ell(y) := -y''(x) + q(x)y(x), \; -\infty < a \le x \le b < \infty \tag{3.1}$$

burada $q(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı, reel değerli ve bu aralıkta sürekli olduğunu kabul edelim. (3.1) ifadesi için aşağıdaki Sturm-Liouville problemini inceleyeceğiz.

$$\ell(y) = -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \quad , \quad x \in [a,b] \; , \tag{3.2}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \; , \tag{3.3}$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \; , \tag{3.4}$$

burada $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$

(3.2) denklemine indirgenebilen daha genel Sturm-Liouville denklemleri vardır. Örneğin;

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + h(x)y = \lambda r(x)y \quad , \qquad a \le x \le b \tag{3.5}$$

Sturm-Liouville denklemini ele alalım. Burada $p(x)>0, r(x)>0$, $x \in [a,b]$ ve $p(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ de birinci mertebeden türevi sürekli fonksiyon ve $p(x)\,r(x)$ in ikinci mertebeden türevi $[a,b]$ de sürekli fonksiyondur.

Bu durumda

$$z = \frac{1}{c}\int_a^x \left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{\frac{1}{2}} dx \; , \quad u = \left(r(x)\,p(x)\right)^{\frac{1}{4}} y \; , \qquad \mu = \lambda c \; ,$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_a^b \left(\frac{r(x)}{p(x)}\right)^{\frac{1}{2}} dx \tag{3.6}$$

dönüşümleri yardımıyla (3.5) denklemi

$$-\frac{d^2u}{dz^2} + q(z)u = \mu u \tag{3.7}$$

kanonik şekle indirgenebilir. Burada

$$q(z)=\frac{\theta''(z)}{\theta(z)}-c^2\frac{h(x)}{r(x)} \quad ,\theta(z)=\left(r(x)\,p(x)\right)^{\frac{1}{4}}$$

olmak üzere bu dönüşümler yapılırken $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$ aralığına dönüşmektedir.(Levitan, Sargsyan, 1991)

Böylece (3.2) – (3.4) Sturm-Liouville problemini ele aldığımızda genelliği bozmadan $a=0$,$b=\pi$ alınabilir. Gerçekten $t=\dfrac{x-a}{b-a}\pi$ dönüşümü $[a,b]$ aralığını $[0,\pi]$ aralığına dönüştürmekte olup, (3.3), (3.4) sınır koşullarının ifadeleri değişmemektedir.

Lemma 3.1.1 $\lambda_1\neq\lambda_2$ sayıları (3.2) – (3.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri olmak üzere bu özdeğerlere karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir, yani

$$\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)\,dx=0$$

dır.

İspat: $f(x)$ve $g(x)$ fonksiyonlarının ikinci mertebeden türevleri $[0,\pi]$ de sürekli olsun. O halde

$$Lf=f''(x)-g(x)\,f(x)$$

olmak üzere, iki defa kısmi integrasyonla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^{\pi} Lf\,.\,g(x)\,dx=W_\pi[f,g]-W_0[f,g]+\int_0^{\pi} f(x).Lg\,dx\ , \tag{3.8}$$

burada $W_x[f,g]=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$ dır. Bu ifadeye $f(x)$ve $g(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir.

$f(x)=y(x,\lambda_1)$ve $g(x)=y(x,\lambda_1)$olsun. (3.3) – (3.4) sınır koşullarına göre $W_0(f,g)=W_\pi(f,g)=0$ olduğu gösterilebilir. O halde (3.8) den

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_0^{\pi} y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)\,dx=0$$

bulunur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan Lemma 3.1.1 ispatlanmış olur.

Lemma 3.1.2: (3.2) – (3.3) sınır değer problemlerinin özdeğerleri reel sayılardır.

İspat: $\lambda_1 = u + iv$ kompleks sayısı (3.2) – (3.3) sınır değer problemlerinin özdeğeri olsun. $q(x)$ reel değerli fonksiyon ve α, β reel sayılar olduğundan $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da aynı sınır değer probleminin özdeğeri olup $y(x, \lambda_1)$ buna karşılık gelen özfonksiyondur. O halde Lemma 3.1.1 e göre

$$\int_0^\pi \left| y(x, \lambda_1) \right|^2 = 0$$

bulunur. Buradan da $y(x, \lambda_1) \equiv 0$ bulunur ve demek ki sınır değer probleminin kompleks özdeğerlerinin mevcut olmadığı görülür ve ispat tamamlanır.

3. 2 Sturm-Liouville Probleminin Özfonksiyonlarına Göre Fourier Açılımı

Aşağıdaki Sturm-Liouville problemini ele alalım.

$$y''(x) + \{\lambda - q(x)\} y(x) = 0, \ x \in [0, \pi] \quad , \tag{3.9}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \ , \tag{3.10}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 , \tag{3.11}$$

burada $\alpha, \beta \in (-\infty, \infty)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$

dir. (3.9) denkleminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ olsun.

$$u(0, \lambda) = \sin\alpha \ , \ \ u'(0, \lambda) = -\cos\alpha \ ,$$

$$v(0, \lambda) = \sin\beta \ , \ \ v'(0, \lambda) = -\cos\beta$$

$u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsız ise, yani $u(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.9) - (3.11) probleminin özfonksiyonu olmamakla birlikte $W[u, v] \neq 0$ bulunur. Eğer $W[u, v] = 0$ ise o halde $u(x, \lambda) = cv(x, \lambda)$ bulunur ve $u(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.9) - (3.11) probleminin özfonksiyonu olur. Böylece (3.9) - (3.11) probleminin özdeğerleri Wronskiyenin sıfırları ile çakışır. $W[u,v]$ Wronskiyeni x den bağımsız olup $W_x[u,v]=\omega(\lambda)$ bulunur.

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(x,\lambda)v(t,\lambda), & x\le t\\[2mm] \dfrac{1}{\omega(\lambda)}u(t,\lambda)v(x,\lambda), & x\ge t\end{cases}$$

olsun. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonuna (3.9) - (3.11) probleminin Green fonksiyonu denir. Bu fonksiyon x ve t ye göre simetrik olup her reel λ değeri için reel değerli fonksiyondur.

$$y(x,\lambda)=\int_0^{\pi}G(x,t,\lambda)\,f(t)dt \tag{3.12}$$

olsun. $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna (3.9) - (3.11) probleminin rezolventi denir. Bu fonksiyonun

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=f(x) \tag{3.13}$$

denklemini ve (3.10) - (3.11) koşullarını sağladığını gösterelim. Gerçekten $G(x,t,z)$ nın tanımına göre $y(x,\lambda)$ fonksiyonu için şu ifade yazılabilir

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)\,f(t)\,dt+u(x,\lambda)\int_x^{\pi}v(t,\lambda)\,f(t)\,dt\right\}.$$

Buradan ikinci mertebeden türev alınırsa,

$$y''(x,\lambda)=\frac{1}{\omega(\lambda)}\left\{v''(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)f(t)\,dt+u''(x,\lambda)\int_x^{\pi}v(t,\lambda)\,f(t)dt+v'(x,\lambda)u(x,\lambda)\,f(x)-\right.$$

$$\left.-u'(x,\lambda)v(x,\lambda)\,f(x)\right\}=\frac{q(x)-\lambda}{\omega(\lambda)}\left\{v(x,\lambda)\int_0^x u(t,\lambda)\,f(t)dt+u(x,\lambda)\int_x^{\pi}v(t,\lambda)\,f(t)dt\right\}+$$

$$+f(x)=\{q(x)-\lambda\}y(x,\lambda)+f(x)$$

bulunur. Buradan da,

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=f(x)$$

olduğu görülür. Ayrıca $y(x,\lambda)$ nın (3.10) - (3.11) sınır koşullarını sağladığı gösterilebilir. O halde aşağıdaki teorem ispat edilmiş olur.

Teorem 3.2.1: Eğer λ sayısı (3.9) - (3.11) sınır değer probleminin özdeğeri değilse, (3.10) - (3.11) , (3.13) homojen olmayan sınır değer probleminin her $f(x)$ için çözümü vardır ve bu çözüm (3.12) formülü ile ifade edilir.

$\lambda = 0$ sayısı (3.9) - (3.11) sınır değer probleminin özdeğeri olmasın. O halde $G(x,t,0) = G(x,t)$ olmak üzere

$$y(x) = \int_0^\pi G(x,t)\, f(t)dt$$

fonksiyonu

$$y'' - q(x)y = f(x)$$

denklemini ve (3.10) ve (3.11) sınır koşullarını sağlar. (3.13) denklemini

$$y'' - q(x)y = f(x) - \lambda y$$

şeklinde yazalım. O halde (3.10) , (3.11) ve (3.13) sınır değer problemi aşağıdaki integral denkleme eşdeğerdir.

$$y(x) + \lambda \int_0^\pi G(x,t)\, y(t)\, dt = \int_0^\pi G(x,t)\, f(t)\, dt.$$

Özel olarak homojen $\left(f(x) \equiv 0 \right)$ sınır değer problemi

$$y(x) + \lambda \int_0^\pi G(x,t)\, y(t) dt = 0 \tag{3.14}$$

İntegral denklemine eşdeğerdir.

(3.9)-(3.11) Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğerleri $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlar ise $v_0(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x), v_3(x), ..., v_n(x), ...$ olsun.

$$H(x,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x) v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

fonksiyonunu oluşturalım. O halde

$$Q(x,\xi) = G(x,\xi) + H(x,\xi)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon simetrik ve süreklidir. Bu durumda $Q(x,\xi) \not\equiv 0$ olduğunda λ_0 özdeğer olmak üzere,

$$u(x)+\lambda_0\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{3.15}$$

denkleminin $u(x)\not\equiv 0$ çözümü vardır.

Lemma 3.2.2:

$$G(x,\xi)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n} \tag{3.16}$$

formülü geçerlidir.

İspat: (3.13) denkleminden

$$\int_0^\pi G(x,\xi)v_n(\xi)d\xi=-\frac{1}{\lambda_n}v_n(x)\ ,\ \ n=0,1,2,3...$$

bulunur. Buradan da

$$\int_0^\pi Q(x,\xi)v_n(\xi)d\xi=0 \quad , \quad n=0,1,2,3,...$$

elde edilir, yani $Q(x,\lambda)$ fonksiyonun (3.9) - (3.11) sınır değer probleminin tüm özfonksiyonlarına ortogonal olur.

(3.14) denkleminin çözümü $u(x)$ olsun. $u(x)$ fonksiyonunun tüm $v_n(x)$ fonksiyonlarına ortogonal olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.15) den

$$0=\int_0^\pi u(x)v_n(x)dx+\lambda_0\int_0^\pi v_n(x)\left\{\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)d\xi\right\}dx$$

$$=\int_0^\pi u(x)v_n(x)dx+\lambda_0\int_0^\pi u(\xi)\left\{\int_0^\pi Q(x,\xi)v_n(x)dx\right\}d\xi=\int_0^\pi u(x)v_n(x)dx$$

bulunur. Buradan da

$$0=u(x)+\lambda_0\int_0^\pi Q(x,\xi)u(\xi)d\xi=u(x)+\lambda_0\int_0^\pi G(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

elde edilir. O halde sonuncu eşitliğe göre u(x) fonksiyonunun (3.9)-(3.11) probleminin özfonksiyonu olduğu görülür. $u(x)$ fonksiyonu tüm $v_n(x)$ özfonksiyonlarına ortogonal olduğundan, kendine de ortogonal olur ve buradan

$u(x) \equiv 0$ bulunur. Bu durumda (3.15) nin özfonksiyonu mevcut değildir. O halde $Q(x,\lambda) \equiv 0$ bulunur ve buradan

$$G(x,\xi) = -H(x,\xi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n(x)v_n(\xi)}{\lambda_n}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3 : f(x) fonksiyonun ikinci mertebeden türevi [0,π] de sürekli fonksiyon olmak üzere f(x) fonksiyonu (3.3)-(3.4) sınır koşullarını sağlasın. O halde f(x) fonksiyonu (3.2)-(3.4) Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlarının Fourier serisine açılabilir ,yani

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x)\,,\, a_n = \int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx \tag{3.17}$$

seri açılımı geçerlidir.

İspat : $f''(x) - q(x)f(x) = h(x)$ olsun. O halde (3.12) ve (3.16) e göre

$$f(x) = \int_0^{\pi} G(x,\xi)h(\xi)d\xi =$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi} v_n(\xi)h(\xi)d\xi = \sum_{n=0}^{\pi} a_n v_n(x)$$

bulunur. $v_n(x)$ fonksyonlarının ortonormal sistem oluşturduğundan dolayı

$$a_n = \int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.4: Her $f \in L^2[0,\pi]$ fonksiyonu için

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \tag{3.18}$$

Parseval eşitliği sağlanır.

İspat : $f(x)$ fonksiyonu Teorem 3.2.2 nin koşullarını sağlarsa (3.18) eşitliğinin sağlandığı kolayca görülebilir, yani

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} f(x)v_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \tag{3.19}$$

bulunur.

Şimdi bu eşitliğin keyfi $f \in L^2[0,\pi]$ fonksiyonu için geçerli olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla $L^2[0,\pi]$ metriğinde $f(x)$ e yakınsak olan $f_k(x)$ (k=1,2,…) fonksiyon dizisi seçebiliriz. Buradaki $f_k(x)$ (k=1,2,…) fonksiyonlarının her mertebeden türevi vardır ve bu fonksiyonlar 0 ve π noktalarının komşuluklarında özdeş olarak sıfıra eşitler (Levitan, Sargsjan,1991). O halde (3.19) e göre

$$\int_0^{\pi} \left(f_k(x) - f_\ell(x) \right)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)} \right)^2 \tag{3.20}$$

bulunur. Burada

$$a_n^{(k)} = \int_0^{\pi} f_k(x)v_n(x) \quad , \quad \text{(n=0,1,2,… ; k=1,2,…)}$$

(3.20) nin sol tarafındaki ifadede $k,l \to \infty$ olmak üzere limite geçilirse bu ifade sıfıra yakınsar; o halde sağ taraftaki ifade de sıfıra yakınsar.

Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre

$$\left| a_n - a_n^{(k)} \right| \le \left(\int_0^{\pi} \left(f(x) - f_k(x) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. O halde $L^2[0,\pi]$ normuna göre $f_k(x)$ dizisinin $f(x)$ e yakınsadığını dikkate alırsak, $\lim\limits_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$, $n = 0,1,2,...$ bulunur. N> 0 olmak üzere , (3.20) ye göre

$$\sum_{n=0}^{N} \left(a_n^{(k)} - a_n^{(\ell)} \right)^2 \le \int_0^{\pi} \left(f_k(x) - f_\ell(x) \right)^2 dx$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limite geçilirse

$$\sum_{n=0}^{N} \left(a_n - a_n^{(\ell)} \right)^2 \le \int_0^{\pi} \left(f(x) - f_\ell(x) \right)^2 dx$$

bulunur. Burada $N \to \infty$ için limite geçilirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - a_n^{(\ell)} \right)^2 \le \int_0^{\pi} \left(f(x) - f_\ell(x) \right)^2 dx$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

serisinin yakınsaklığı elde edilebilir. Öte yandan Cauchy-Schwartz eşitsizliğine göre

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^{(\ell)}\right)^2\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n - a_n^{(\ell)}\right)\left(a_n + a_n^{(\ell)}\right)\right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n - a_n^{(\ell)}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n + a_n^{(\ell)}\right|^2\right)^{1/2}$$

bulunur. Bu eşitsizlikten $\ell \to \infty$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^{(\ell)}\right)^2 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

olduğu görülür. $L^2\left[0,\pi\right]$ normuna göre $\ell \to \infty$ için $f_\ell(x) \to f(x)$ olduğuna göre

$$\int_0^{\pi} f_\ell^2(x)dx \to \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$$

bulunur. O halde

$$\int_0^{\pi} f_\ell^2(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n^{(\ell)}\right)^2$$

eşitliğinde $\ell \to \infty$ için limite geçilirse

$$\int_0^{\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4. SİNGÜLER STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

4.1. Weyl Limit-Çemberi ve Weyl Limit –Noktası

Aşağıdaki singüler Sturm-Liouville denklemini ele alalım, $-y'' + q(x)y = \lambda y$, $0 \le x < +\infty$, burada [0,∞] aralığında tanımlı q(x) fonksiyonun her bir sonlu aralıkta sürekli olduğunu varsayalım.

f(x) ve g(x) fonksiyonları sırasıyla,

$$\frac{d^2 f}{dx} + \{\lambda - q(x)\} f = 0 ,$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \{\lambda^{'} - q(x)\} g = 0 \tag{4.1}$$

diferansiyel denkleminin çözümleri olsun. O halde kısmı integrasyon yardımıyla,

$$(\lambda^{'} - \lambda)\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b \Big[f(x)\big\{q(x)g(x) - g^{''}(x)\big\} - g(x)\big\{q(x)f(x) - f^{''}(x)\big\}\Big]dx$$

$$= -\int_a^b \big\{ f(x)g^{''}(x) - g(x)f^{''}(x)\big\} dx = W_a(f,g) - W_b(f,g) \tag{4.2}$$

olduğu gösterilebilir.

Burada $W(f,g)$, f ve g fonksiyonlarının Wronski determinantını (Wronskiyenini) gösterir.

Eğer $\lambda = \mu + iv$, $\lambda' = \overline{\lambda} = \mu - iv$, $a = 0$ ve $g = \overline{f}$ ise o zaman (4.2) den,

$$2v\int_0^b |f(x)|^2 dx = iW_0(f,\overline{f}) - iW_b(f,\overline{f}) \tag{4.3}$$

elde edilir.

(4.1) denkleminin $\phi(x)=\phi(x,\lambda)$, $\theta(x)=\theta(x,\lambda)$ çözümleri,

$$\phi(0)=\sin\alpha \quad , \quad \phi'(0)=-\cos\alpha$$

$$\theta(0)=\cos\alpha \quad , \quad \theta'(0)=\sin\alpha \tag{4.4}$$

başlangıç koşullarında sağlasın. Burada $\alpha\in[0,\pi]$ dir. O zaman, $W_x(\phi,\theta)$ Wronskiyeni için

$$W_x(\phi,\theta)=W_0(\phi,\theta)=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

bulunur.

(4.1) denkleminin genel çözümü $\theta(x)+l\phi(x)$ şeklindedir. x=b noktasında ,

$$\{\theta(b)+l\phi(b)\}\cos\beta+\{\theta^{'}(b)+l\phi(b)\}\sin\beta=0$$

sınır koşulunu sağlayan bu çözümü göz önüne alalım. Burada $\beta\in[0,\pi]$ dir. Bu denklemden,

$$l=l(\lambda)=-\frac{\theta(b)\cot\beta+\theta^{'}(b)}{\phi(b)\cot\beta+\phi^{'}(b)} \tag{4.5}$$

elde edilir.

Her b için $\cot\beta$ değişirken l kompleks düzlemde C_b ile gösterilen bir çember belirtir. $\cot\beta$ yerine z kompleks değişkeni konursa,

$$l=l(\lambda,z)=-\frac{\theta(b)z+\theta^{'}(b)}{\phi(b)z+\phi^{'}(b)}$$

bulunur.

Burada $l=\infty$ iken,

$$z=-\frac{\phi^{'}(b)}{\phi(b)}$$

olur.

O halde kesir, lineer dönüşümün bilinen özelliğinden C_b nin merkezi z nin eşleniğine karşılık gelir [Conway, 1978].

$$\bar{z}=-\frac{\overline{\phi^{'}}(b)}{\overline{\phi}(b)}$$

Bu eşitlik l de yerine konulursa;

$$l=-\frac{W_b(\theta,\phi)}{W_b(\phi,\overline{\phi})}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$Im\left\{-\frac{\phi^{'}(b)}{\phi(b)}\right\}=\frac{1}{2}i\left\{\frac{\phi^{'}(b)}{\phi(b)}-\frac{\overline{\phi^{'}}(b)}{\overline{\phi}(b)}\right\}=-\frac{1}{2}i\frac{W_b(\phi,\overline{\phi})-W_0(\phi,\overline{\phi})}{|\phi(b)|^2}$$

$$=-\frac{1}{2}i\frac{W_b(\phi,\overline{\phi})}{|\phi(b)|^2}$$

olduğundan $f=\phi$ iken sonuncu ifade v ile aynı işarete sahiptir.

Burada $W_0(\phi,\overline{\phi})=0$ olduğunu göz önünde bulundurulmuştur.

Böylece aşağıdaki lemma ispatlanmış oldu.

Lemma 4.1.1: Eğer $v > 0$ ise C_b çemberinin dışı, z düzleminin üst yarı düzlemine karşılık gelir.

$-\dfrac{\phi^{'}(b)}{\phi(b)}$ noktası C_b çemberi üzerinde (z = 0 için) olduğundan C_b nin yarıçapı r_b için,

$$r_b = \left|\frac{\theta^{'}(b)}{\phi(b)} - \frac{W_b(\theta,\overline{\phi})}{W_b(\phi,\overline{\phi})}\right| = \left|\frac{W_b(\theta,\phi)}{W_b(\phi,\overline{\phi})}\right| = \frac{1}{2v\int_0^b |\phi(x)|^2\, dx} \tag{4.6}$$

formülü geçerlidir.

Eğer $Im\, z < 0$ veya $i(z - \overline{z}) > 0$ ise;

$$i\left\{-\frac{l\phi^{'}(b)+\theta^{'}(b)}{l\phi(b)+\theta(b)} + \frac{\overline{l}\overline{\phi}^{'}(b)+\overline{\theta}^{'}(b)}{\overline{l}\overline{\phi}(b)+\overline{\theta}(b)}\right\} > 0 \quad ,$$

bulunur. Buradan da

$$i\left\{|l|^2 W_b(\phi,\overline{\phi}) + lW_b(\phi,\overline{\theta}) + \overline{l}W_b(\theta,\overline{\phi}) + W_b(\theta,\overline{\theta})\right\} =$$

$$= iW_b(\theta + l\phi, \overline{\theta} + l\overline{\phi}) > 0$$

elde edilir. O halde (4.1.3) de $f = \theta + l\varphi$ alınırsa ,

$$2v\int_0^b |\theta + l\phi|^2\, dx < iW_0(\theta + l\phi, \overline{\theta} + \overline{l}\overline{\phi})$$

elde edilir.

$W_0(\phi,\overline{\theta}) = 1$, $W_0(\varphi,\overline{\varphi}) = 0$, $W_0(\theta,\overline{\theta}) = 0$, $W_0(\theta,\overline{\varphi}) = 1$ olduğundan

$$W_0\left(\theta + l\phi, \overline{\theta} + \overline{l\phi}\right) = l - \overline{l} = 2i\ Im\ l$$

olur.

O halde eğer $v > 0$ ise

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2\, dx < -\frac{Im\, l}{v} \tag{4.7}$$

bulunur. Aynı sonuç $v < 0$ için de geçerlidir. Her durumda $Im\, l$ nin işareti v nin işaretinin tersidir.

Bu durumda l, C_b nin içindeyse ve $0 < b' < b$ ise, o halde

$$\int_0^{b'} |\theta + l\phi|^2\, dx < \int_0^b |\theta + l\phi|^2\, dx < -\frac{Im\ l}{v}$$

bulunur.

O halde l noktası , C_b nin de içindedir. Dolayısıyla eğer $b' < b$ ise $C_{b'}$ çemberi , C_b yi içine alır.

Buradan anlaşıldığı gibi $b \to \infty$ iken C_b çemberi limit noktası veya limit çemberine yakınsar. Eğer $m = m(\lambda)$, limit noktası ya da limit çemberinde herhangi bir nokta ise b nin tüm değerleri için,

$$\int_0^b |\theta + m\phi|^2\, dx \le -\frac{Im\, m}{v} \tag{4.8}$$

bulunur. Buradan,

$$\int_0^{b'} |\theta + m\phi|^2 \, dx < -\frac{Im\, m}{v} \tag{4.9}$$

elde edilir.

O halde aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.1.2 : Reel değerlerden farklı her λ için (4.1) denklemi

$$\psi(x,\lambda) = \theta(x,\lambda) + m(\lambda)\phi(x,\lambda)$$

çözümüne sahiptir ve bu çözüm $L^2(0,\infty)$ uzayına aittir.

Limit çember durumunda r_b, $b \to \infty$ iken pozitif limite sahiptir. Buradan ve (4.6) dan $\phi(x)$ fonksiyonunun $L^2(0,\infty)$ a ait olduğu görülür. Bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü $L^2(0,\infty)$ a aittir.

4.2. Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonun Özellikleri

Teorem 4.1.2. de sözü geçen $\psi(x,\lambda)$ çözümüne Weyl çözümü denir. Görüldüğü gibi her bir β için $l = l(\lambda)$, λ nın analitik fonksiyonudur. Aslında reel eksende kutup noktaları hariç $l(\lambda)$ holomorf fonksiyondur. $l(\lambda)$ nın kutup noktaları da,

$$\phi(b,\lambda)\cos\beta + \phi'(b,\lambda)\sin\beta$$

fonksiyonuna sıfır yapan değerlerdir.

Ayrıca, C_b $(v > 0)$ çemberinde,

$$\int_0^{b} |\theta + l\phi|^2 \, dx = -\frac{Im\, l}{v} \le \frac{|l|}{v}$$

eşitsizliği ve

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2\, dx \;\geq \frac{1}{2}|l|^2 \int_0^b |\phi|^2\, dx - \int_0^b |\theta|^2\, dx$$

eşitsizliği sağlanır.

Bunu ispatlayalım;

$$|\theta + l\phi|^2 = (\theta + l\phi)\left(\overline{\theta} + \overline{l}\overline{\phi}\right) = |\theta|^2 + \theta\overline{l}\overline{\phi} + \overline{\theta}l\phi + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\theta\overline{l}\overline{\phi}\right) + |l\phi|^2$$

$$\geq |\theta|^2 - 2\left(\theta\overline{l}\overline{\phi}\right) + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 - 2|\theta||l\phi| + |l\phi|^2$$

$$= |\theta|^2 - 2|\theta|^2 - \frac{|l\phi|^2}{2} + |l\phi|^2$$

$$= \frac{|l\phi|^2}{2} - |\theta|^2$$

bulunur. O halde

$$|\theta + l\phi|^2 \geq \frac{|l\phi|^2}{2} - |\theta|^2$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_0^b |\theta + l\phi|^2\, dx \geq \frac{1}{2}|l|^2 \int_0^b |\phi|^2\, dx - \int_0^b |\theta|^2\, dx$$

elde edilir.

Bu eşitsizlik $|l|$ ya göre çözülürse;

$$|l| \leq \frac{1}{v\int_a^b |\phi|^2 \, dx} + \left\{ \frac{2\int_o^b |\theta|^2 \, dx}{\int_0^b |\phi|^2 \, dx} + \frac{1}{v^2 \left(\int_0^b |\phi|^2 \, dx \right)^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Fakat λ değeri için yukarıdaki eşitsizlik C_b çemberiyle kaplı l düzlem bölgesinin, b artarken daralacağını gösterir. Böylece $l(\lambda)$, λ düzleminin üst veya alt yarısına ait her bir sınırlı bölgesinde $b \to \infty$ iken bir limite yakınsar. O halde limit noktası durumunda, limiti olan $m(\lambda)$ her iki bölgede de analitiktir. Limit çemberi durumunda, limit çemberi üzerindeki $m(\lambda)$ noktaları $b \to \infty$ iken $l(\lambda, b, \beta)$ nın limiti şeklinde yazılabilir. Burada β , b nin uygun bir fonksiyonudur. Limit noktası durumuna Weyl noktası, limit çemberi durumuna ise Weyl çemberi denir. $m(\lambda)$ fonksiyonuna ise Weyl-Titchmarsh fonksiyonu denir.

$v \to 0$ iken yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı her hangi sabit b değeri için $o(1/v)$ mertebesinde olduğu için $m(\lambda) = o(1/v)$ olduğu görülmektedir.

Lemma 4.2.1: Reel olmayan herhagi λ ve $\lambda^{'}$ sayıları için

$$\lim_{x \to \infty} W\left\{ \psi(x,\lambda), \psi(x,\lambda^{'}) \right\} = 0 \tag{4.10}$$

olur.

İspat:

$\theta(x,\lambda)+l(\lambda)\phi(x,\lambda)$ ifadesi x = b de λ nın her değeri için aşağıdaki sınır koşulunu sağlar.

$$W_b\left\{\theta(x,\lambda)+l(\lambda)\phi(x,\lambda),\theta(x,\lambda^{'})+l(\lambda^{'})\phi(x,\lambda^{'})\right\}=0$$

veya

$$W_b\left\{\psi(x,\lambda)+\left\{l(\lambda)-m(\lambda)\right\}\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})+\left\{l(\lambda^{'})-m(\lambda^{'})\right\}\phi(x,\lambda^{'})\right\}=0 \qquad (4.11)$$

buradan

$$W_b\left\{\psi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})\right\}+\left\{\left\{l(\lambda)-m(\lambda)\right\}\right\}W_b\left\{\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})\right\}+$$

$$+\left\{l(\lambda^{'})-m(\lambda^{'})\right\}W_b\left\{\psi(x,\lambda),\phi(x,\lambda^{'})\right\}+$$

$$+\left\{l(\lambda)-m(\lambda)\right\}\left\{l(\lambda^{'})-m(\lambda^{'})\right\}W_b\left\{\phi(x,\lambda),\phi(x,\lambda^{'})\right\}=0$$

elde edilir.

$b\to\infty$ iken λ ve λ' sabit tutulduğunda,

$$W_b\left\{\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})\right\}=(\lambda-\lambda^{'})\int_0^b\phi(x,\lambda)\psi(x,\lambda^{'})dx+W_0\left\{\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})\right\}$$

$$=o\left\{\int_0^b\left|\phi(x,\lambda\right|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}+o(1)$$

bulunur. Weyl nokta durumunda,

$$\left|l(\lambda)-m(\lambda)\right| \le 2r_b = \left\{ v\int_0^b |\phi(x,\lambda|^2\, dx \right\}^{-1}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{b\to\infty}\left\{l(\lambda)-m(\lambda)\right\}W_b\left\{\phi(x,\lambda),\psi(x,\lambda^{'})\right\}=0$$

eşitliği Weyl çember durumunda da sağlanır. Eğer $l(\lambda)\to m(\lambda)$ ise o zaman $\int_0^b |\phi(x,\lambda|^2\, dx$ integrali yakınsaktır.

Lemma 4.2.2 : $f_n(x)$ (n=1,2,…) fonksiyonlar dizisinin,

$$\int_0^\infty |\,f_n(x)|^2\, dx \le K \quad , \qquad\qquad (\text{n} = 1,2,3,\ldots)$$

olmak üzere her sonlu aralıkta kuadratik anlamda formuna göre f(x) fonksiyonuna yakınsadığını varsayalım. Bu takdirde f(x) fonksiyonu $L^2(0,\infty)$ uzayına aittir ve $g(x)\in L^2(0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)g(x)dx=\int_0^\infty f(x)g(x)dx$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Her sonlu x>0 için,

$$\int_0^x |\,f(x)|^2\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^x |\,f(x)|^2\, dx \le K$$

bulunur. Buradan $f(x)\in L^2(0,\infty)$ olduğu görülür. Diğer taraftan

$$\left|\int_0^{\infty}(f-f_n)g\,dx\right| \le \left|\int_0^{x}\quad\right| + \left|\int_x^{\infty}\quad\right| \le \left\{\int_0^{x}|f-f_n|^2\,dx\int_0^{\infty}|g|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_0^{\infty}|f-f_n|^2\,dx\int_x^{\infty}|g|^2\,dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada ikinci terim tüm n değerleri için x in seçimiyle verilen bir ε değerinden daha küçük yapılabilir. x sabit tutularak birinci terim $n\to\infty$ iken sıfıra yakınsar. Böylece ispat tamamlanır.

(4.2) den ,

$$(\lambda'-\lambda)\int_0^{b}\psi(x,\lambda)\psi(x,\lambda') = W_0\left\{\psi(x,\lambda),\psi(x,\lambda')\right\} - W_b\left\{\psi(x,\lambda),\psi(x,\lambda')\right\}$$

bulunur.

Sağdaki ilk terim,

$$\begin{aligned}&\left\{\cos\alpha\ +\mathrm{m}(\lambda)\sin\alpha\right\}\left\{\sin\alpha-\mathrm{m}(\lambda')\cos\alpha\right\}-\\&\left\{\cos\alpha\ +\mathrm{m}(\lambda')\sin\alpha\right\}\left\{\sin\alpha-\mathrm{m}(\lambda)\cos\alpha\right\}=\mathrm{m}(\lambda)-\mathrm{m}(\lambda')\end{aligned}$$

ifadesine eşittir.

Eğer λ ve λ' reel değil ise, ikinci terim Lemma (4.1) den $b\to\infty$ iken sıfıra gider. Öyleyse,

$$\int_0^{\infty}\psi(x,\lambda)\psi(x,\lambda')dx = \frac{m(\lambda)-m(\lambda')}{\lambda'-\lambda} \tag{4.12}$$

bulunur.

Özel olarak $\lambda' = \overline{\lambda}$ alınırsa,

$$\int_0^\infty |\psi(x,\lambda)|^2\, dx = -\frac{Im\{m(\lambda)\}}{v} \tag{4.13}$$

bulunur. Buradan (4.9) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi λ_n özdeğer olsun. $v \to 0$ iken $\lambda^{'} = \lambda_n + iv$ olduğunu kabul edelim. O halde herhangi sabit x için,

$$\int_0^x \left| v\psi(x,\lambda^{'}) + ir_n\phi(x,\lambda_n) \right|^2 dx \to 0$$

bulunur. Sol taraftaki ifade

$$\int_0^x \left| v\theta(x,\lambda^{'}) + \left\{ vm(\lambda^{'}) + ir_n \right\} \phi(x,\lambda^{'}) - ir_n \left\{ \phi(x,\lambda^{'}) - \phi(x,\lambda_n) \right\} \right|^2 dx$$

ifadesine eşittir. Burada her terimin sıfıra gittiği açıktır. Ayrıca (4.13) den $v \to 0$ iken,

$$\int_0^\infty \left| v\psi(x,\lambda^{'}) \right|^2 dx \le \left| vm(\lambda^{'}) \right| = o(1)$$

bulunur. $m(\lambda^{'})$ nin λ_n deki kutupları basit kutuptur.

(4.2.4) eşitliğini, iv/r_n ile çarpıp, $v \to 0$ için ve Lemma (4.10) i kullanarak $\phi(x,\lambda_n)$ nın $L^2(0,\infty)$ a ait olduğu görülür ve

$$\int_0^\infty \psi(x,\lambda)\phi(x,\lambda_n)dx = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \tag{4.14}$$

olur. Eğer λ sayısını λ_m özdeğerine yakınsatırsak (4.14) i iv/r_m ile çarpıp $v \to 0$ a götürerek,

$$\int_0^\infty \phi(x,\lambda_m)\phi(x,\lambda_n)dx = 0 \qquad (4.15)$$

bulunur.

Eğer λ sayısını λ_n özdeğerine yakınsatırsak

$$\int_0^\infty \left\{\phi(x,\lambda_n)\right\}^2 dx = \frac{1}{r_n} \qquad (4.16)$$

elde ederiz.

Buradan,

$$\psi(x) = r_n^{\frac{1}{2}}\phi(x,\lambda_n) \qquad (4.17)$$

fonksiyonlarının ortonormal sistem oluşturduğu görülür.

O halde (4.14) i

$$\int_0^\infty \psi(x,\lambda)\psi_n(x)dx = \frac{r_n^{\frac{1}{2}}}{\lambda-\lambda_n} \qquad (4.18)$$

şeklinde yazabiliriz.

$f(y)$ fonksiyonu $L^2(0,\infty)$ uzayına ait olsun ve

$$\Phi(x,\lambda) = \psi(x,\lambda)\int_0^x \phi(y,\lambda) f(y)dy + \phi(x,y)\int_x^\infty \phi(y,\lambda) f(y)dy \qquad (4.19)$$

olarak tanımlansın. Buradaki ϕ ve ψ yukarıda tanımlanmıştır.

Her x için $\Phi(x,y)$ fonksiyonu , λ nın analitik fonksiyonudur. Ayrıca $Im\,\lambda > 0$ veya $Im\,\lambda < 0$ için bu fonksiyon regülerdir. Ayrıca f(y) sürekli ise

$$\Phi'(x,\lambda) = \psi'(x,\lambda)\int_0^x \phi(y,\lambda)\, f(y)dy + \phi'(x,y)\int_x^\infty \psi(y,\lambda)\, f(y)dy$$

bulunur. Buradan da

$$\Phi''(x,\lambda) = \psi''(x,\lambda)\int_0^x \phi(y,\lambda)\, f(y)dy + \phi''(x,y)\int_x^\infty \psi(y,\lambda)\, f(y)dy \ +$$

$$+\left\{\psi'(x,\lambda)\phi(x,\lambda) - \phi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right\} f(x)$$

$$= \left\{q\left(x\right) - \lambda\right\}\Phi(x,\lambda) + f(x) \qquad (4.20)$$

elde edilir.

O halde $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\Phi(0,\lambda) = \phi(0,\lambda)\int_0^\infty \psi(y,\lambda) f(y)dy \ ,$$

$$\Phi^{'}(0,\lambda) = \phi^{'}(0,\lambda)\int_0^\infty \psi(y,\lambda) f(y)dy$$

başlangıç koşullarını ve diferansiyel denklemi sağlar. Bu durumda Φ fonksiyonu

$$\Phi(0,\lambda)\cos\alpha + \Phi'(o,\lambda)\sin\alpha = 0 \qquad (4.21)$$

sınır koşulunu sağlar.

Eğer $\Phi_x(x,\lambda)$; $y > x$ için f(y) = 0 a karşı gelen fonksiyon ise; o halde,

$$\Phi_x(x,\lambda)=\theta(x,\lambda)\int_0^x\phi(y,\lambda)f(y)dy+\phi(x,\lambda)\int_x^x\phi(y,\lambda)f(y)dy+$$

$$+m(\lambda)\phi(x,\lambda)\int_0^x\phi(y,\lambda)f(y)dy$$

bulunur.

Fonksiyonun ifadesinden açıkça görülür ki, bu fonksiyon; $\lambda=\lambda_0,\lambda_1,...$ noktaları hariç bütün düzlemde regülerdir. Ayrıca bu fonksiyon $r_n\phi(x,\lambda_n)\int_0^x\phi(y,\lambda_n)f(y)dy$ rezüdüleriyle basit kutuplara sahiptir.

C ile λ_n ları içermeyen $\xi_1\le Rez\le\xi_2$, $-\eta\le Imz\le\eta_1$ dikdörtgen bölgeyi gösterelim. Eğer λ, C nin içindeyse Cauchy in integral formülüne göre,

$$\Phi_x(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi_x(x,z)}{z-\lambda}dz$$

bulunur. Eğer λ reel değilse $\Phi_x(x,\lambda)\to\Phi(x,\lambda)$ ve λ özdeğer olmayan bir değerse (4.13) den $v=Im\lambda\to0$ iken ;

$$\Phi_x(x,\lambda)=O\left\{\int_x^\infty\psi(y,\lambda)f(y)dy\right\}=O\left\{\int_0^\infty|\psi(y,\lambda)|^2dy\right\}^{\frac{1}{2}}=O(v^{-\frac{1}{2}})$$

bulunur. Böylece $x\to\infty$ iken,

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Phi_x(x,z)}{z-\lambda}dz$$

elde edilir.

Buradan gözükür ki $\Phi(x,\lambda)$, C boyunca analitiktir. Yani üst ve alt yarı düzlemde tanımlanan fonksiyonlar birbirlerinin analitik devamlarıdır. Eğer C, bir λ_n noktası içeriyorsa, rezüdüsü orada $\Phi(x,\lambda)$ nın rezüdüsünün limitine eşit olduğundan benzer şekilde $\Phi(x,\lambda)$ nın λ_n noktasında basit kutuba sahip olduğunu bulabiliriz ve $\Phi_x(x,\lambda)$ nın rezüdüsünün limiti $\Phi(x,\lambda)$ nın rezüdüsüne eşittir. Yani,

$$r_n\phi(x,\lambda_n)\int_0^\infty \phi(y,\lambda_n)\,f(y)dy=\psi_n(x)\int_0^\infty \psi_n(y)\,f(y)dy=c_n\psi_n(x)$$

bulunur.

5. SINIR KOŞULUNDA SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

5.1 Sturm-Liouville Probleminin Temel Özellikleri

Aşağıdaki singular Sturm-Liouville diferansiyel ifadesini ele alalım.

$$l(y) := \frac{1}{w(x)}\left[-(py')(x) + q(x)y(x)\right] \ , \ x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty) \ . \tag{5.1}$$

Burada w, p ve q reel değerli, $\mathbb{R}_+$ da Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve $w, \frac{1}{p}, q \in L_{loc}^{1}(\mathbb{R}_+)$, $p(x) > 0$, $w(x) > 0$ olsun. l diferansiyel ifadesinden operatöre geçmek için

$$(y, z) = \int_0^\infty y(x)\overline{z(x)}w(x)dx$$

iç çarpımını sağlayan;

$$\int_0^\infty |y(x)|^2 \, w(x)dx < \infty$$

şeklindeki kompleks değerli tüm y fonksiyonlarının oluşturduğu $L_w^2(\mathbb{R}_+)$ Hilbert uzayını oluşturalım.

(5.1) ifadesi ile gösterilen minimal simetrik operatörü L_0 ile gösterelim. D_0 bölgesi L_0 operatörünün tanım bölgesi olsun. D ile $L_w^2(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki y fonksiyonlarının oluşturduğu öyle küme olsun ki y, py' lokal mutlak sürekli, $l(y) \in L_w^2(\mathbb{R}_+)$ olsun. O halde D kümesi L maksimal operatörünün tanım bölgesi olup, $L = L_0^*$ dır [Naimark, 1968].

L_0 minimal operatörünün indis defektinin (2,2) olduğunu kabul edelim. Yani l diferansiyel ifadesi için Weyl limit-çember durumu sağlansın. Weyl limit-çember durumunu gerçekleştiren bir çok uygun yeterli şartlar mevcuttur (Titchmarsh 1946, Akhizer ve Glazman 1963, Atkinson 1964, Jorgens 1964, Naimark 1968, Weidman 1980, Levitan ve Sargsjan 1991, Stakgold 1998).

$$l(y) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

denklemini aşağıdaki başlangıç

$$u(0) = 1\,, (pu')(0) = 0\,,\ v(0) = 0\,,\ (pv')(0) = 1 \tag{5.2}$$

koşullarını sağlayan çözümleri $u(x)$ ve $v(x)$ ile gösterelim. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız ve Wronskiyenlerinin 1 olduğu açıktır. Yani,

$$W_x(u,v) := \left(upv' - pu'v\right)\Big|_x = W_0[u,v] = 1 \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

olur. L_0 operatörünün indis defekti (2,2) olduğundan u, $v \in D$ dir.

Tanım 5.1.1: Her $y, z \in D$ için

$$(Ly,z)_{L^2} - (y,Lz)_{L^2} = \int_0^x l(y)\overline{z}wdt - \int_0^x y\overline{l(z)}wdt = W_x\left[y,\overline{z}\right] - W_0\left[y,\overline{z}\right]$$

eşitliği sağlanır ve bu formüle Green formülü adı verilir. Ayrıca

$$W\left[y,\overline{z}\right]_\infty := \lim_{x\to+\infty} W_x\left[y,\overline{z}\right]$$

sonlu limitlerinin var olduğu gösterilebilir.

Lemma 5.1.2 : Her $y, z \in D$ fonksiyonları için

$$W_x\left[y,\overline{z}\right] = W_x[y,u]W_x\left[\overline{z},v\right] - W_x[y,v]W_x\left[\overline{z},u\right] \quad , \quad x \in \mathbb{R}_+$$

eşitliği sağlanır.

İspat : u ve v reel değerli fonksiyonlar olduğundan, $W_x[u,v]=1$ ve $x\in\mathbb{R}_+$ için

$$W_x[y,u]W_x[\overline{z},v]-W_x[y,v]W_x[\overline{z},u]=(ypu'-py'u)(\overline{z}pv'-p\overline{z}'v)\Big|_x$$

$$-(ypv'-py'v)(\overline{z}pu'-p\overline{z}'u)\Big|_x$$

$$=(ypu'\overline{z}pv'-ypu'p\overline{z}'v-py'u\overline{z}pv'$$

$$+py'up\overline{z}'v-ypv'\overline{z}pu'+ypv'p\overline{z}'u+py'v\overline{z}pu'-py'vp\overline{z}'u)$$

$$=\left(-yp\overline{z}'+py'\overline{z}\right)(pu'v-upv')\Big|_x$$

$$=W_x[y,\overline{z}]$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$l(y)=\lambda y \quad , \quad y\in D \quad , \quad x\in\mathbb{R}_+ \tag{5.3}$$

$$(py')(0)-hy(0)=0, \qquad \mathrm{Im}h>0 \tag{5.4}$$

$$\alpha_1W[y,v]_\infty-\alpha_2W[y,u]_\infty=\lambda\left(\alpha_1'W[y,v]_\infty-\alpha_2'W[y,u]_\infty\right) \tag{5.5}$$

burada λ, kompleks spektral parametre, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1',\alpha_2'\in\mathbb{R}:=(-\infty,\infty)$ ve

$$\alpha:=\begin{vmatrix}\alpha_1' & \alpha_1\\ \alpha_2' & \alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_1'\alpha_2-\alpha_2'\alpha_1>0$$

alınmıştır. (M.Y. Ongun, 2004). Bu bölümde M.Y.Ongun'un doktora tezinden (M.Y.Ongun,2004) faydalanılmıştır.

Aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$R_\infty(y) := \alpha_1 W[y,v]_\infty - \alpha_2 W[y,u]_\infty$$

$$B_1^0(y) := y(0)$$

$$B_2^0(y) := (py^{'})(0)$$

$$B_1^\infty(y) := W[y,v]_\infty$$

$$B_2^\infty(y) := W[y,u]_\infty$$

$$R_0(y) = B_2^0(y) - hB_1^0(y).$$

Her $y, z \in D$ için $R_\infty(\overline{z}) = \overline{R_\infty(z)}$, $R_\infty^{'}(\overline{z}) = \overline{R_\infty^{'}(z)}$, $B_1^0(\overline{z}) = \overline{B_1^0(z)}$, $B_2^0(\overline{z}) = \overline{B_2^0(z)}$ olmak üzere,

$$W[y,\overline{z}]_\infty = -\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y)\overline{R_\infty^{'}(z)} - R_\infty^{'}(y)\overline{R_\infty(z)}\right] \tag{5.6}$$

$$W[y,\overline{z}]_0 = B_1^0(y)B_2^0(\overline{z}) - B_1^0(\overline{z})B_2^0(y) \tag{5.7}$$

eşitlikleri sağlanır. Gerçekten

$$-\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y)\overline{R_\infty^{'}(z)} - R_\infty^{'}(y)\overline{R_\infty(z)}\right]$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\Big[\Big(\alpha_1 W[y,v]_\infty-\alpha_2 W[y,u]_\infty\Big)\Big(\alpha_1^{'} W\big[\bar{z},v\big]_\infty\Big)-\Big(\alpha_2^{'} W\big[\bar{z},u\big]_\infty\Big)$$

$$-\Big(\alpha_1^{'} W[y,v]_\infty-\alpha_2^{'} W[y,u]_\infty\Big)\Big(\alpha_1 W\big[\bar{z},v\big]_\infty\Big)-\Big(\alpha_2 W\big[\bar{z},u\big]_\infty\Big)\Big]$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\Big[\alpha_1^{'}\alpha_2\Big(W[y,v]_\infty W\big[\bar{z},u\big]_\infty-W[y,u]_\infty W\big[\bar{z},v\big]_\infty\Big)$$

$$-\alpha_1\alpha_2^{'}\Big(W[y,v]_\infty W\big[\bar{z},u\big]_\infty-W[y,u]_\infty W\big[\bar{z},v\big]_\infty\Big)\Big]$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\Big[\Big(\alpha_1^{'}\alpha_2-\alpha_1\alpha_2^{'}\Big)\Big(W[y,v]_\infty W\big[\bar{z},u\big]_\infty-W[y,u]_\infty W\big[\bar{z},v\big]_\infty\Big)\Big]$$

$$=W\big[y,\bar{z}\big]_\infty$$

bulunur ve buradan

$$W_0\big[y,\bar{z}\big]=\begin{vmatrix} y(0) & \bar{z}(0) \\ py^{'}(0) & p\bar{z}^{'}(0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_1^0(y) & B_1^0\big(\bar{z}\big) \\ B_2^0(y) & B_2^0\big(\bar{z}\big)\end{vmatrix}$$

$$=B_1^0(y)B_2^0\big(\bar{z}\big)-B_1^0\big(\bar{z}\big)B_2^0(y)$$

elde edilir.

5.2. Sınır Değer Probleminin Hilbert Uzayında Ürettiği Lineer Operatör

$f_1(x)\in L_w^{\,2}(\mathbb{R}_+)$, $f_2(x)\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\hat{f}=\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}$ şeklindeki iki bileşenli vektörlerinin lineer uzayını $H=L_w^{\,2}(\mathbb{R}_+)\oplus\mathbb{C}$ şeklinde gösterelim.

$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1' & \alpha_1 \\ \alpha_2' & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0$ olmak üzere,

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2 \end{pmatrix} \in H$$

vektörleri için

$$\left(\hat{f}, \hat{g} \right)_H = \int_0^\infty f_1(x)\overline{g_1(x)}w(x)dx + \frac{1}{\alpha} f_2 \overline{g_2} \tag{5.8}$$

formülü H lineer uzayında bir iç çarpım tanımlar. Bu iç çarpıma göre H lineer uzayı bir Hilbert uzayı olur.

(5.3)-(5.5) sınır değer problemine karşılık gelen

$$A_h : H \to H$$

operatörünün tanım kümesini

$$D(A_h) = \left\{ \begin{pmatrix} f_1(x) \\ R_\infty'(f_1) \end{pmatrix} \in H \,\middle|\, f_1(x) \in D, R_0(f_1) = 0,\ f_2 = R_\infty'(f_1) \right\} \tag{5.9}$$

olmak üzere

$$A_h \hat{f} = \tilde{l}\left(\hat{f} \right) := \begin{pmatrix} l(f_1) \\ R_\infty'(f_1) \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 5.2.1: $H = L_w^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında (5.9) ve (5.10) eşitlikleri ile tanımlanmış A_h operatörü için

$$\left(A_h\,\hat{f},\hat{g}\right)-\left(\hat{f},A_h\,\hat{g}\right)=W\left[f_1,\overline{g_1}\right]_{\infty}-W\left[f_1,\overline{g_1}\right]_0$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[R_{\infty}\left(f_1\right)\overline{R_{\infty}'\left(f_1\right)}-R_{\infty}'\left(f_1\right)\overline{R_{\infty}\left(f_1\right)}\right]$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: A_h operatörünün tanımına göre

$$\left(A_h\,\hat{f},\hat{g}\right)=\int_0^{\infty}\left(-(pf_1')'+qf_1\right)\overline{g_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}$$

$$=-\int_0^{\infty}\left(pf_1'\right)'\overline{g_1}dx+\int_0^{\infty}qf_1\overline{g_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}$$

bulunur. Bu eşitliğinin sağ tarafındaki iki integrale iki defa kısmi integral uygularsak

$$\left(A_h\,\hat{f},\hat{g}\right)=-(pf_1')(x)\overline{g_1(x)}+f_1(x)\overline{(pg_1')(x)}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}f_1(pg_1')'dx+\int_0^{\infty}qf_1\overline{g_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}$$

$$=-(pf_1')(x)\overline{g_1(x)}+f_1(x)\overline{(pg_1')(x)}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}-\left((pg')'+qg_1\right)\overline{f_1}dx+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}$$

$$=-(pf_1')(x)\overline{g_1(x)}+f_1(x)\overline{(pg_1')(x)}\Big|_0^{\infty}+(\hat{f},A_h\,\hat{g})-\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}+\frac{1}{\alpha}f_2\overline{g_2}$$

elde edilir. O halde

$$\left(A_h\,\hat{f},\hat{g}\right)-(\hat{f},A_h\,\hat{g})=f_1\overline{(pg_1')}-\left(pf_1'\right)\overline{g_1}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{\alpha}\left[f_2\overline{g_2}-\overline{f_2}g_2\right]$$

$$=W\left[f_1,\overline{g_1}\right]_\infty - W\left[f_1,\overline{g_1}\right]_0$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(f_1).\overline{R_\infty'(g_1)} - R_\infty'(f_1).\overline{R_\infty(f_1)}\right] \tag{5.11}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.2 : A_h operatörü H uzayında disipatiftir.

İspat : $\hat{y}\in D(A_h)$ ve $\overline{D(A_h)}=H$ olmak üzere (5.7) ve (5.11) eşitliklerinden

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=W\left[y_1,\overline{y_1}\right]_\infty - W\left[y_1,\overline{y_1}\right]_0$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[R_\infty(y_1)\overline{R_\infty'(y_1)} - R_\infty'(y_1)\overline{R_\infty(y_1)}\right]$$

$$=-W\left[y_1,\overline{y_1}\right]_0$$

$$=-B_1^0(y_1)B_2^0\left(\overline{y_1}\right)+B_1^0\left(\overline{y_1}\right)B_2^0(y_1)$$

bulunur. Buradan da $R_0(y_1)=0$ ise $B_2^0(y_1)=hB_1^0(y_1)$ olacağından,

$$\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)-\left(\hat{y},A_h\hat{y}\right)=-\overline{h}B_1^0\left(\overline{y_1}\right)B_1^0(y_1)+hB_1^0(y_1)B_1^0\left(\overline{y_1}\right) \tag{5.12}$$

$$=\left(h-\overline{h}\right)\left|B_1^0(y_1)\right|^2$$

$$=2i\ \mathrm{Im}\,h\left|B_1^0(y_1)\right|^2$$

elde edilir. O halde buradan

$$\operatorname{Im}\left(A_h\hat{y},\hat{y}\right)=\operatorname{Im}h\left|B_1^0\left(y_1\right)\right|^2\geq 0$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

5.3. A_h Operatörünün Özdeğerleri ve Özvektörleri

(5.3) denkleminin aşağıdaki koşulları sağlayan

$$B_1^0\left(\phi_\lambda\right)=\phi_\lambda(0)=1 \tag{5.13}$$

$$B_2^0\left(\phi_\lambda\right)=\left(p\phi_\lambda^{'}\right)(0)=h$$

$$B_1^\infty\left(\chi_\lambda\right)=\alpha_2-\lambda\alpha_2^{'} \tag{5.14}$$

$$B_2^\infty\left(\chi_\lambda\right)=\alpha_1-\lambda\alpha_1^{'}$$

çözümleri ϕ_λ ve χ_λ olsun.

O halde (5.7) den, sıfırdaki Wronskiyen $\Delta_0\left(\lambda\right)$ için ,

$$\Delta_0\left(\lambda\right):=W\left[\chi_\lambda,\phi_\lambda\right]\Big|_0=-W\left[\phi_\lambda,\chi_\lambda\right]\Big|_0$$

$$=-B_1^0\left(\phi_\lambda\right).B_2^0\left(\chi_\lambda\right)+B_1^0\left(\chi_\lambda\right).B_2^0\left(\phi_\lambda\right)$$

$$=-B_2^0\left(\chi_\lambda\right)+hB_1^0\left(\chi_\lambda\right)$$

$$=-R_0\left(\chi_\lambda\right)$$

bulunur. Benzer şekilde (5.6) dan sonsuzdaki Wronskiyen $\Delta_\infty\left(\lambda\right)$ için

$$\Delta_{\infty}(\lambda) := W[\chi_{\lambda}, \phi_{\lambda}]\|_{\infty} = -W[\phi_{\lambda}, \chi_{\lambda}]\|_{\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[R_{\infty}(\phi_{\lambda}).R_{\infty}^{'}(\chi_{\lambda}) - R_{\infty}^{'}(\phi_{\lambda}).R_{\infty}(\chi_{\lambda})\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha_1 B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) - \alpha_2 B_2^{\infty}(\phi_{\lambda})\right)\left(\ \alpha_1^{'} B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) - \alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\chi_{\lambda})\right)\right.$$

$$= \left(\alpha_1 B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) - \alpha_2 B_2^{\infty}(\phi_{\lambda})\right)\left(\ \alpha_1^{'} B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) - \alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\chi_{\lambda})\ \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\alpha_1\alpha_1^{'} B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) - \alpha_1\alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\chi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\phi_{\lambda})\right.$$

$$-\alpha_1^{'}\alpha_2 B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) + \alpha_2\alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_2^{\infty}(\chi_{\lambda})$$

$$-\alpha_1\alpha_1^{'} B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) + \alpha_1^{'}\alpha_2 B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_2^{\infty}(\chi_{\lambda})$$

$$\left.+\alpha_1\alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\chi_{\lambda}) - \alpha_2\alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_2^{\infty}(\chi_{\lambda})\ \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\left(\alpha_1^{'}\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2^{'}\right)\left(B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}).B_2^{\infty}(\chi_{\lambda}) - B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) B_1^{\infty}(\chi_{\lambda})\right)\right]$$

$$= B_1^{\infty}(\phi_{\lambda})\left(\alpha_1 - \lambda\alpha_1^{'}\right) - B_2^{\infty}(\phi_{\lambda})\left(\alpha_2 - \lambda\alpha_2^{'}\right)$$

$$= \alpha_1 B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) - \alpha_2 B_2^{\infty}(\phi_{\lambda}) - \lambda\left(\alpha_1^{'} B_1^{\infty}(\phi_{\lambda}) - \alpha_2^{'} B_2^{\infty}(\phi_{\lambda})\right)$$

$$= R_{\infty}(\phi_{\lambda}) - \lambda R_{\infty}^{'}(\phi_{\lambda})$$

eşitliği bulunur.

Lemma 5.3.1: (5.3)- (5.5) sınır değer problemlerinin özdeğeri ile $\Delta(\lambda)$ nın sıfır yerleri çakışırlar. $\left(\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)=\Delta_\infty(\lambda)\right)$

İspat: λ_0 sayısı $\Delta_0(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. Bu durumda,

$\Delta_0(\lambda_0)=\phi_{\lambda_0}(x)\left(p\chi_{\lambda_0}^{'}\right)(x)-\left(p\phi_{\lambda_0}^{'}\right)(x)\chi_{\lambda_0}(x)=0$

bulunur. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonu $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni olduğundan sonuncu eşitlik gereği $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ lineer bağımlıdır. O halde

$$\phi_{\lambda_0}(x)=k.\chi_{\lambda_0}(x) \tag{5.15}$$

olacak şekilde $k\neq 0$ sabit sayısı vardır. (5.13) gereği $\phi_{\lambda_0}(x)$ (5.4) şartını, (5.14) gereği $\chi_{\lambda_0}(x)$ (5.5) şartını sağlayacağından (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin $\lambda=\lambda_0$ için bir çözümü olur. O halde $\lambda=\lambda_0$ bir özdeğerdir. Benzer şekilde $\Delta_\infty(\lambda)$ nın sıfır yerlerinin (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu gösterilebilir.

Bunun tersinin de doğru olduğunu gösterebiliriz. Yani $\lambda=\lambda_0$ özdeğer ise $\Delta_0(\lambda_0)=0$ veya $\Delta_\infty(\lambda_0)=0$ olduğunu gösterelim.

$\lambda=\lambda_0$ özdeğerleri için $\Delta_0(\lambda_0)\neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0)\neq 0$ olsun. $\Delta_0(\lambda_0)\neq 0$ ve $\Delta_\infty(\lambda_0)\neq 0$ olduğundan $\phi_{\lambda_0}(x)$ ve $\chi_{\lambda_0}(x)$ çözümleri lineer bağımsız olur. Bu durumda (5.3) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda_0)=c_1(\lambda_0)\phi_{\lambda_0}(x)+c_2(\lambda_0)\chi_{\lambda_0}(x)$$

şeklinde yazılabilir. (5.4) sınır koşulu sağlanacağından

$$\left(py^{'}\right)(0)-hy(0)=0$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$c_1\left(\left(p\phi_{\lambda_0}^{'}\right)(0)-h\phi_{\lambda_0}(0)\right)+c_2\left(\left(p\chi_{\lambda_0}^{'}\right)(0)-h\chi_{\lambda_0}^{'}(0)\right)=0$$

bulunur. Bu eşitlikte $\phi_{\lambda_0}(x)$ çözümünün (5.4) sınır koşulunu sağladığı göz önünde bulundurulursa

$$c_2\left(\left(p\chi_{\lambda_0}^{'}\right)(0)-h(0)\chi_{\lambda_0}(0)\right)=-c_2\Delta_0\left(\lambda_0\right)=0$$

elde edilir. Kabulümüze göre $\Delta_0\left(\lambda_0\right)\neq 0$ olduğundan $c_2=0$ olur. (5.5) koşulundan ve $c_2=0$ olduğundan

$$c_1\left(\lambda_0\right)\left\{W\left[\phi_{\lambda_0},v\right]_\infty\left(\alpha_1-\lambda_0\alpha_1^{'}\right)-W\left[\phi_{\lambda_0},u\right]_\infty\left(\alpha_2-\lambda_0\alpha_2^{'}\right)\right\}$$

$$=c_1\left(\lambda_0\right).\Delta_\infty\left(\lambda_0\right)=0$$

bulunur. Buradan da $\Delta_\infty\left(\lambda_0\right)\neq 0$ olduğundan $c_1=0$ olur.

Bu durumda $y\left(x,\lambda_0\right)=0$ olur. Bu ise λ_0 ın özdeğer olması ile çelişir. O halde ispat tamamlanır.

$\Delta_0\left(\lambda\right)$ ve $\Delta_\infty\left(\lambda\right)$ fonksiyonlarının sıfırlarını $\lambda_n(n=0,1,2,...)$ ile gösterirsek

$$\hat{\phi}_n=\begin{pmatrix}\phi_{\lambda_n}(x)\\ R_\infty^{'}\left(\phi_{\lambda_n}\right)\end{pmatrix}\in D(A_h)$$

vektörleri $A_h\hat{\phi}_n=\lambda_n\hat{\phi}_n$ eşitliğini sağlar. Yani $\hat{\phi}_n$ ler A_h operatörünün özvektörleridir.

Tanım 5.3.2: λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, ..., y_n$ vektörleri

$$l(y_0) = \lambda_0 y_0$$

$$R_\infty(y_0) - \lambda_0 R_\infty^{'}(y_0) = 0$$

$$R_0(y_0) = 0 \qquad (5.16)$$

$$l(y_s) - \lambda_0 y_s - y_{s-1} = 0$$

$$R_\infty(y_s) - \lambda_0 R_\infty^{'}(y_s) - R_\infty^{'}(y_{s-1}) = 0$$

$$R_0(y_s) = 0, s = 1, 2, ..., n$$

koşullarını sağlıyorsa $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ vektörler sistemine (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin öz ve birleştirilmiş (asosye) vektörler zinciri denir.

Lemma 5.3.3 : (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin özdeğerleri ile A_h disipatif operatörünün özdeğerleri çakışır. Yani (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin λ_0 özdeğerine karşılık gelen her bir özvektörler zinciri ve birleştirilmiş özvektörleri, A_h disipatif operatörünün aynı λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ birleştirilmiş vektörler ve özvektörler zincirine karşılık gelir. Bu durumda

$$\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R_\infty^{'}(y_k) \end{pmatrix}, k = 0, 1, 2, ..., n \qquad (5.17)$$

eşitliği sağlanır.

İspat : Eğer $\hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0$ ise $l(y_0) = \lambda_0 y_0$, $R_\infty(y_0) - \lambda_0 R_\infty^{'}(y_0) = 0$, $R_0(y_0) = 0$ bulunur. O halde (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin özvektörü y_0 olur.

Tersine eğer (5.16) koşulu sağlanırsa, buradan $\begin{pmatrix} y_0 \\ R_\infty^{'}(y_0) \end{pmatrix} = \hat{y}_0 \in D(A_h)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0$ bulunur. O halde $\hat{y}_0$, A_h operatörünün özvektörüdür.

Bunun dışında, eğer A_h operatörünün λ_0 özdeğerine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ özvektörleri ve birleştirilmiş vektörleri zinciri ise buradan $\hat{y}_k \in D(A_h)$ $(k = 0,1,2,...,n)$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_0 \hat{y}_0$, $A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + \hat{y}_{s-1}$, s = 1,2,…,n koşulları ile birlikte (5.16) eşitliği bulunur. Buradaki $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ ler $\hat{y}_0, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_n$ vektörlerinin birinci bileşenleridir. Tersine (5.3)-(5.5) problemine karşılık gelen $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ bileşenleri $\hat{y}_k = \begin{pmatrix} y_k \\ R_\infty^{'}(y_k) \end{pmatrix} \in D(A_h)$, $k = 0,1,2,...,n$ ve $A_h \hat{y}_0 = \lambda_n \hat{y}_0$, $A_h \hat{y}_s = \lambda_0 \hat{y}_s + y_{s-1}$, $s = 1,2,...,n$ eşitliklerinden elde edilebilir. O halde Lemma 5.2.3 ispatlanır.

5.4. Sınır Değer Problemin Green Fonksiyonu

(5.3) denklemi ve (5.13) ve (5.15) koşullarını sağlayan çözümleri ϕ_λ ve x_λ olsun.

$\lambda \in \mathbb{C}$ parametresi (5.3)-(5.5) probleminin bir özdeğeri değilse, $\Delta(\lambda) \neq 0$ olur. O halde ϕ_λ ve χ_λ fonksiyonları lineer bağımsız olacağından, (5.3) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1(\lambda)\phi_\lambda(x) + c_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{5.18}$$

şeklinde yazılabilir. Sabitin değişimi yöntemini uygularsak

$$-(py')' + q(x)y = \lambda y - f(x) \tag{5.19}$$

denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\lambda)=c_1\left(x,\lambda\right)\phi_\lambda(x)+c_2\left(x,\lambda\right)\chi_\lambda(x) \tag{5.20}$$

şeklinde arayabiliriz. (5.19) ifadesinin x-e göre türevi alınırsa

$$y^{'}(x,\lambda)=c_1^{'}\left(x,\lambda\right)\phi_\lambda(x)+c_1\left(x,\lambda\right)\phi_\lambda^{'}(x)+c_2^{'}\left(x,\lambda\right)\chi_\lambda(x)+c_2\left(x,\lambda\right)\chi_\lambda^{'}(x)$$

bulunur. Buradaki $c_i(x,\lambda),\ i=1,2$ fonksiyonlarını öyle seçilebilir ki

$$c_1'\left(x,\lambda\right)\phi_\lambda(x)+c_2'\left(x,\lambda\right)\chi_\lambda(x)=0 \tag{5.21}$$

eşitliği sağlansın. $y'(x,\lambda)$ ifadesinin bir kez daha türevini alıp $l(y)=\lambda y$ diferansiyel denkleminde yerine yazıp düzenlersek

$$c_1'\left(x,\lambda\right)\phi_\lambda'(x)+c_2'\left(x,\lambda\right)\chi_\lambda'(x)=f(x) \tag{5.22}$$

bulunur. (5.4.4) ve (5.4.5) ifadelerine, $c_1'\left(x,\lambda\right)$ve $c_2'\left(x,\lambda\right)$değişkenlerine göre lineer denklem sistemi olarak alınırsa

$$c_1'\left(x,\lambda\right)=-\frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)}\chi_\lambda(x)f(x)$$

$$c_2'\left(x,\lambda\right)=\frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)}\phi_\lambda(x)f(x)$$

bulunur. Buradan da

$$c_1\left(x,\lambda\right)=\frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)}\int_x^0\chi_\lambda(x)f(x)dx+c_1\left(\lambda\right)$$

$$c_2\left(x,\lambda\right)=\frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)}\int_x^0\phi_\lambda(x)f(x)dx+c_2\left(\lambda\right)$$

elde edilir.

$c_i(x,\lambda), i=1,2$ ler λ nın keyfi fonksiyonu olduğundan

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)\,f(\xi)d\xi+\chi_\lambda(x)\int_0^\pi \phi_\lambda(\xi)\,f(\xi)d\xi\right\}$$

$$+c_1(\lambda)\phi_\lambda(x)+c_1(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{5.23}$$

olur. Bu genel çözümü sınır şartlarında yerine yazarak $c_i(\lambda)$ fonksiyonları bulunabilir. Bunun için (5.23) ifadesinin x e göre türevi alınırsa

$$y'(x,\lambda)=c_1(\lambda)\phi_\lambda'(x)+c_2(\lambda)\chi_\lambda'(x)$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda'(x)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)\,f(\xi)d\xi+\chi_\lambda'(x)\int_0^\pi \phi_\lambda(\xi)\,f(\xi)d\xi\right\}$$

$$+c_1(\lambda)\phi_\lambda(x)+c_2(\lambda)\chi_\lambda(x) \tag{5.24}$$

bulunur. Buradan ve (5.1.4) koşulundan $(py')(0)-hy(0)=0$ eşitliğinin sağlandığı görülür. O halde

$$c_1(\lambda)\left\{\left(p\phi_\lambda'\right)(0)-h\phi_{\lambda_0}(0)\right\}+c_2(\lambda)\left\{\left(p\chi_\lambda'\right)(0)-h\chi_\lambda'(0)\right\} \tag{5.25}$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\left(\left(p\phi_\lambda'\right)(0)-h\phi_{\lambda_0}(0)\right)\int_x^0 \chi_\lambda(\xi)\,f(\xi)d\xi\right\}=0$$

olur. $R_0(\phi_\lambda)=0$ olduğundan yukarıdaki ifade $-c_2(\lambda)\Delta_0(\lambda)=0$ şeklini alır. λ bir özdeğer olmadığından ve $\Delta_0(\lambda)\neq 0$ olacağından

$$c_2(\lambda)=0 \tag{5.26}$$

bulunur. (5.5) koşuluna göre

$$c_1(\lambda)\left\{W[\phi_\lambda,v]_\infty(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-W[\phi_\lambda,u]_\infty(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\right\}$$

$$+c_2(\lambda)\left\{W[\chi_\lambda,v]_\infty(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-W[\chi_\lambda,u]_\infty(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\right\}$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\chi_\lambda,v]_\infty(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-W[\chi_\lambda,u]_\infty(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\int_x^0\phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\}=0$$

Bulunur. Buradan $c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda)=0$ elde edilir ve λ bir özdeğer olmadığından $\Delta_\infty(\lambda)\neq 0$ olmak üzere

$$c_1(\lambda)=0 \tag{5.27}$$

bulunur. Böylece (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0\chi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi+\chi_\lambda(x)\int_0^\pi\phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\} \tag{5.28}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$G(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\phi_\lambda(x).\chi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)}, & x\le\xi\\[2ex] \dfrac{\chi_\lambda(x).\phi_\lambda(\xi)}{\Delta(\lambda)}, & \xi\le x\end{cases} \tag{5.29}$$

olarak alırsak (5.23) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir

$$y(x,\lambda)=\int_0^\infty G(x,\varepsilon,\lambda)f(\varepsilon)d\varepsilon := R_\lambda \tag{5.30}$$

Bu durumda (5.3)-(5.5) sınır değer probleminin Green fonksiyonu oluşturulmuş olur ve $G(x,.,\lambda)$ fonksiyonu (5.3) denklemini ve (5.4)-(5.5) sınır koşullarını sağlar.

5.5. A_h Operatörünün Rezolventi

A_h operatörünün rezolventini hesaplamak amacıyla

$$\left(\lambda - A_h\right)\hat{\phi}=\hat{y} \tag{5.31}$$

denklemini göz önünde bulunduralım. Burada

$$\hat{\phi}=\begin{pmatrix}\phi(x)\\ R_\infty^{'}(\phi)\end{pmatrix}\in D\left(A_h\right) \quad \text{ve} \quad \hat{y}=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2\end{pmatrix}\in H$$

olmak üzere (5.31) denklemini

$$\lambda\phi - l\left(\phi\right)=y_1(x) \tag{5.32}$$

$$-\lambda R_\infty{}'(\phi)+R_\infty(\phi)=y_2 \tag{5.33}$$

sınır değer problemi şeklinde yazabiliriz. (5.32)-(5.33) probleminin çözümünü bulabiliriz. Bu problemin genel çözümü (5.23) şeklindedir. $\hat{\phi}\in D\left(A_h\right)$ olduğundan $\phi(x)$ fonksiyonu (5.4) ve (5.33) koşullarını sağlar. (5.4) koşulu gereği $(py')(0)-(hy)(0)=0$ olacağından Green fonksiyonunun hesaplanmasındaki yöntemi uygularsak

$$c_2(\lambda)=0$$

bulunur. (5.33) koşuluna göre

$$c_1(\lambda)\Big\{W[\phi_\lambda,v]_\infty(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-W[\phi_\lambda,u]_\infty(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\Big\}$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{W[\chi_\lambda,v]_\infty(\alpha_1-\lambda\alpha_1')-W[\chi_\lambda,u]_\infty(\alpha_2-\lambda\alpha_2')\int_0^x\phi_\lambda(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon\right\}=y_2$$

elde edilir. Buradan $c_1(\lambda)\Delta_\infty(\lambda)=y_2$ olmak üzere

$$c_1(\lambda)=\frac{y_2}{\Delta_\infty(\lambda)}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$R_\infty'\big(G(x,.,\lambda)\big)=R_\infty'\left(\frac{\chi_\lambda(x).\phi_\lambda(.)}{\Delta(\lambda)}\right)=\frac{\chi_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}R_\infty'(\phi_\lambda)=\frac{\chi_\lambda(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha$$

elde edilir. O halde (5.32) ve (5.33) ifadelerini (5.23) da yerine yazarsak

$$\phi_\lambda(x,\lambda)=\frac{y_2}{\Delta_\infty(\lambda)}\phi_\lambda(x)$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\phi_\lambda(x)\int_x^0\chi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi+\chi_\lambda(x)\int_0^\pi\phi_\lambda(\xi)f(\xi)d\xi\right\}$$

$$\phi_\lambda(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi+\frac{1}{\alpha}y_2R_\infty'\big(G(x,.,\lambda)\big)$$

bulunur. (5.8) iç çarpımı gereği

$$\phi_\lambda(x,\lambda)=\langle\tilde{G}_x,\ \lambda,\hat{y}\rangle$$

elde edilir. Burada

$$\tilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ R_{\infty}'\left(G(x,.,\lambda)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,.,\lambda) \\ \dfrac{\chi_{\lambda}(x)}{\Delta(\lambda)}.\alpha \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda (5.5.1)-(5.5.3) probleminin çözümü

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \langle \tilde{G}_{x,\lambda}, \hat{y} \rangle \\ R_{\infty}'\left(\tilde{G}_{x},\ \lambda, \hat{y} \right) \end{pmatrix} = R(\lambda; A_h)\,\hat{y}$$

şeklinde bulunmuş olur.

5. KAYNAKLAR

Akhizer, N.I., and Glazman, I.M., (1963), Theory of Lineer Operators in Hilbert Space , New York

Atkinson, F.V., (1964), Discrete and Continuous Boundary Problems, Acad. Pres Inc., New York.

Conway, B., (1978) Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag, New York

Jorgens, K., (1964) Spectral Theory of Second-Order Ordinary Differential Operators, Aarhus, Denmark.

Kostyuchenko, A.G. and Sargsyan, I.S., (1979), Distribution of Eigenvalues, Nauka, Moskow (Russian).

Kral A. M., (2002). Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials, Berlin.

Kreyszig, E., (1978) ,Introductory Functional Analysis with Applications. New-York.

Levitan, B.M and Sargsyan, I.S., (1991), Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluwer, Dordrecht.

Liusternik, L.A. and Sobelev, V.J., (1961) Elements of Functional Analysis. Frederick Ungar Publishink Company, New York.

Naimark, M.A., (1968). Linear differential Operators, 2 nd edn, Moscow, Nauka.

Ongun, M., (2004). Sınır Koşullarında Spektral Parametre Bulunduran İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler için, Sınır Değer Problemi, Isparta, Doktora Tezi.

Stakgold, I., (1998), Green's Functions and Boundary Value Problems, Newark, Denmark.

Titchmarsh, E.C., (1946), Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differantial Equations , Clarendon Press. Oxford.

Turan, A., (2001). Singülar Sturm-Liouville Probleminin Bazı Spektral Özellikleri, İstanbul, Yüksek Lisans Tezi.

Zettl, A., (2005). Sturm-Liouville theory. Mathematical Surveys and Monographs, 121. American Mathematical Society, Providence

Weidmann, J., (1980), Spectral Theory of Ordinary Differential Opertors, Springer Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Havva Şule TUNCER

Doğum Yeri ve Yılı : Alanya 1982

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : 1996-2000 Alanya Süper Lisesi

Lisans : 2000-2004 Atatürk Üniversitesi K. K. Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

Yozgat-Aydıncık Şehit Dursun İlköğretim Okulu (2006-2007)

Yozgat-Aydıncık 75. Yıl İlköğretim Okulu (2007-2007)

Antalya- Alanya Sugözü Cemal Coşkun İlköğretim Okulu (2007-2009)