T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABA YAKINSAKLIK

Fatma GECİT

Danışman: Doç. Dr. Salih AYTAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2012

TEZ ONAYI

Fatma GECİT tarafından hazırlanan "**Kaba Yakınsaklık**" adlı tez çalışması aşağıdaki juri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Süleyman Demirel Üniversitesi **Matematik** Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Salih AYTAR
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :
Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mehmet Cengiz Kayacan
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KABA YAKINSAKLIK

Fatma GECİT

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Salih AYTAR

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konunun literatürdeki yerinin belirlenmesi amacıyla literatür özeti verilmiştir.

İkinci bölümde sonsuz boyutlu normlu uzaylardaki kaba yakınsaklık kavramı üç alt bölümde incelenmiştir. İlk olarak kaba yakınsaklık tanımı verilmiştir. Daha sonra kaba yakınsaklık ile klasik yakınsaklık arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak $r-$limit kümesinin r kabalık derecesine bağlılığı araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ise ilk olarak bulanık sayılar teorisinin temel kavramları hatırlatılmıştır. Sonra bulanık sayı dizilerinin kaba yakınsaklığı kavramı tanımlanmış ve $r-$limit kümesiyle dizinin limit infimumu, limit supremumu arasındaki ilişki incelenmiştir. Son olarak bulanık sayı dizilerinin kaba limit kümelerinin bazı özelliklerine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık sayı dizileri; Kaba Yakınsaklık; Kaba limit kümesi.

2012, 36 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ROUGH CONVERGENCE

Fatma GECİT

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Salih AYTAR

This thesis consists of third section.

In the first section, a summary of literature was given to determine place of the topic in the literature.

In the second chapter, the concept of rough convergence in infinite dimensional normed spaces was investigated in three sub-sections. Firstly, the definition of rough convergence of a sequence was given. Later, the relation between rough convergence and ordinary convergence was investigated. Then the dependence of the $r-$limit set on the roughness r was introduced.

In the third chapter, some of the basic consepts in the theory of fuzzy numbers were recalled. Then the definition of rough convergence of a sequence of fuzzy numbers was introduced. Later the relation between the rough limit set and the set of extreme limit points of a sequence of fuzzy numbers were investigated. Finally, some properties of the rough limit set of a sequence of fuzzy numbers were investigated.

Key Words: Sequence of fuzzy numbers; Rough convergence; Rough limit set.

2012, 36 pages

TEŞEKKÜR

Bu çalışma için beni yönlendiren, karşılaştığım her zorlukta bilgi ve tecrübelerini, manevi desteğini esirgemeyen, her konuda yardım aldığım değerli danışman hocam Doç. Dr. Salih AYTAR'a teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince maddi ve manevi olarak bana destek olan aileme ve yüksek lisanstan arkadaşım Öznur ÖLMEZ'e teşekkür ederim.

$2332-YL-10$ No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Fatma GECİT

ISPARTA, 2012

SİMGELER DİZİNİ

$\{x_i\} \subset X$	X uzayında bir dizi
$\{X_i\}$	Bulanık sayı dizisi
$int(A)$	A kümesinin içi
$cl(A)$	A kümesinin kapanışı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$	Bulanık sayılar kümesi
$x_i \to x$	$\{x_i\}$ dizisi x noktasına yakınsar
$x_i \xrightarrow{r} x$	$\{x_i\}$ dizisi x noktasına $r-$yakınsar
$\overline{B}_r(x_*)$	x_* merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar
$\mathrm{LIM}^r x_i$	$\{x_i\}$ dizisinin kaba limit noktalarının kümesi
$\overline{r}$	$r-$yakınsak dizinin en küçük yakınsaklık derecesi
L_x	$\{x_i\}$ dizisinin yığılma noktalarının kümesi
L_X	$\{X_i\}$ bulanık sayı dizisinin yığılma noktalarının kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
X^α	X bulanık sayısının $\alpha-$kesimi
X^0	X bulanık sayısının dayanağının kapanışı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda kaba yakınsaklık tanımı ilk olarak Phu (2001) tarafından verilmiştir. Fakat Burgin (2000) bu kavramı daha önce başka bir isimle (bulanık limit olarak) adlandırmıştır.

Bu tez çalışmasında Phu (2001)'nun gösterimleri kullanılmıştır. Phu (2001) sonlu boyutlu uzaylardaki çalışmasında bir $\{x_i\}$ dizisinin kaba limit kümesi olarak tanımlanan $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesinin sınırlı, kapalı ve konveks olduğunu göstererek kaba Cauchy dizisi kavramını tanımlamıştır. Phu (2002) bir başka makalesinde, lineer operatörlerin kaba sürekliliğini tanımlayarak, eğer Y uzayı sonlu boyutlu ise $f : X \to Y$ şeklindeki lineer operatörlerin X in her bir noktasında $r-$sürekli olduğunu ispatlamıştır. Phu (2003), kendisinin bu konuyla ilgili son çalışmasında ise sonlu boyutlu uzaylardaki sonuçları sonsuz boyutlu normlu uzaylara taşımıştır. Son yıllarda Aytar (2008a), bir reel sayı dizisinin çekirdeğinin $2q-$limit kümesine eşit olduğunu göstermiştir. Buradaki q reel sayısı, dizinin $r-$limit kümesi boş olmayacak şekildeki r sayılarının infimumu olarak tanımlıdır. Aytar (2008a) bu çalışmasında bir dizinin kaba yakınsaklığı ile klasik çekirdeği arasında ilişkiyi ortaya koymuştur. Ayrıca, Aytar (2008b), normlu uzaylarda kaba istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak, kaba istatistiksel limit kümesinin temel özelliklerini incelemiştir.

Kaba yakınsaklık teorisinde bir dizinin limit kümesi olarak adlandırılan kavram ortaya çıktığı için bu kümenin yapısı hakkındaki bilgiler oldukça değerlidir. Bu nedenle bu çalışmadaki ilk iki bölümde bu küme üzerine odaklanılmıştır. İlk olarak bu kümenin bazı topolojik ve analitik özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca yeni bir yakınsaklık kavramı ortaya çıktığında ilk akla gelen soru, bu yeni kavram ile klasik yakınsaklık arasındaki ilişkinin ne olduğudur. Bu sorunun cevabına da bu çalışmada yer verilmeye çalışılmıştır. İlk iki bölümün temel hedefi, sonlu ve sonsuz boyutlu normlu uzaylardaki kaba yakınsaklık ile ilgili sonuçları karşılaştırmaktır. Buraya kadar olan kısım genel olarak literatür taraması niteliğindedir.

Son bölümde, şu ana kadar sonsuz boyutlu normlu uzaylarda tanımlanmış olan kaba yakınsaklık fikri, vektör uzayı olmadığı için klasik normlu uzay kategorisinde değerlendirilemeyen bulanık sayılar uzayına taşınmıştır. İlk olarak bulanık sayı dizisinin yakınsaklık durumuna, yığılma noktalarına veya alt ve üst limit noktalarına göre limit kümesi karakterize edilmiştir. Daha sonra, bir bulanık sayı dizisinin kaba limit kümesinin temel özellikleri incelenmiştir.

2. NORMLU UZAYLARDA KABA YAKINSAKLIK

Tanım 2.1. $(X, \|.\|)$ ikilisi bir normlu uzay olmak üzere, $r \geq 0$ ve $\{x_i\}$ ise X uzayında bir dizi olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $i \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\|x_i - x_*\| < r + \varepsilon \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir i_ε sayısı bulunabiliyorsa veya buna denk olarak,

$$\limsup_{i \to \infty} \|x_i - x_*\| \leq r \tag{2.2}$$

koşulu sağlanıyor ise $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına $r-$*yakınsaktır* denir. $i \to \infty$ iken, $x_i \xrightarrow{r} x_*$ şeklinde gösterilir. Bu koşulu sağlayan bir x_* noktası, $\{x_i\}$ dizisinin bir $r-$*limit noktası* olarak adlandırılır (Phu, 2001). Ayrıca,

$$\text{LIM}^r x_i := \{x_* \in X : x_i \xrightarrow{r} x_*\}$$

kümesine $\{x_i\}$ dizisinin $r-$*limit kümesi* (*ya da kısaca* $r-$*limiti*) denir. Eğer $r-$limit kümesi boştan farklı ($\text{LIM}^r x_i \neq \varnothing$) ise $\{x_i\}$ dizisi $r-$yakınsak olarak adlandırılır. Burada r sayısı, $\{x_i\}$ dizisinin bir yakınsaklık derecesidir. Herhangi bir $S \subset X$ kümesindeki $r-$limitlerinin kümesi de aşağıdaki şekilde düşünülebilir:

$$\text{LIM}^{S,r} x_i := \{x_* \in S : x_i \xrightarrow{r} x_*\}.$$

Bu çalışmada işlemler genelde $r > 0$ durumu için yapılacaktır. Çünkü $r = 0$ durumu için $r-$limit kümesi boş küme ya da tek nokta kümesi olur. Bu halde böyle bir kümenin özelliklerini incelemenin bir anlamı yoktur.

Kaba yakınsaklığın ortaya çıkış nedenini şu şekilde açıklayabiliriz: Bir x_* noktasına yakınsak olduğu öngörülen bir $\{y_i\}$ dizisinin terimleri kesin olarak belirlenemeyebilir (yani, ölçülemeyebilir ya da hesaplanamayabilir). Terimleri kesin belirlenemeyen dizinin yerine, işlemleri kolaylaştıracak ve terimleri bilinen bir $\{x_i\}$ yaklaşım dizisinden yararlanılabilir. $\{x_i\}$ yaklaşım dizisi her i için $\|x_i - y_i\| \leq r$ olacak şekilde belirlenir. Burada $r > 0$ sayısı, yaklaşım hatasının bir üst sınırıdır.

$\{x_i\}$ dizisi klasik anlamda x_* noktasına yakınsak değildir. Fakat

$$\|x_i - x_*\| \leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - x_*\| \leq r + \|y_i - x_*\|$$

olduğundan $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına $r-$yakınsaktır.

2.1. Kaba Limit Kümesinin Bazı Özellikleri

Bir dizi klasik anlamda yakınsak ise sınırlıdır, limiti tektir ve yakınsak dizinin her bir altdizisi aynı limit noktasına yakınsar. Kaba yakınsaklık için bu özelliklerin karşılığı olarak aşağıdaki önerme verilecektir.

Önerme 2.1.1. a) $r-$limit kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir. Genelde bir en küçük sınırı yoktur.

b) $\{x_{k_i}\}$, $\{x_i\}$ dizisinin bir altdizisi ise $\mathrm{LIM}^r x_i \subseteq \mathrm{LIM}^r x_{k_i}$ dir.

c) $\{x_i\}$ dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır.

d) Eğer $C \subset X$ göreceli kompakt ve $r \geq 0$ ise

$$\overline{B}_r(0) := \{z \in X : \|z\| \leq r\}$$

olmak üzere

$$C + \overline{B}_r(0) = \{x + z : x \in C, z \in B_r(0)\}$$

kümesindeki her bir $\{x_i\}$ dizisi, her $r' > r$ için

$$\mathrm{LIM}^r x_{i_j} \neq \varnothing \text{ ve } \mathrm{LIM}^{\{x_{i_j}\}, r'} x_{i_j} \neq \varnothing$$

özelliklerini sağlayan bir $\{x_{i_j}\}$ altdizisi içerir (Phu, 2003).

İspat: a)

$$diam(\mathrm{LIM}^r x_i) = \sup\{\|y - z\| : y, z \in \mathrm{LIM}^r x_i\} \leq 2r$$

olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bu önerme yanlış olsun, yani $diam(\mathrm{LIM}^r x_i) > 2r$ olsun. Bu durumda, supremum tanımından,

$$\exists y, z \in \mathrm{LIM}^r x_i \quad \text{öyle ki} \quad d := \|y - z\| > 2r$$

yazılabilir. Şimdi $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2} - r)$ keyfî (isteksel) olsun. $x_i \xrightarrow{r} y$ olduğundan,

$$\exists i_\varepsilon^{'} \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \text{ her } i \geq i_\varepsilon^{'} \text{ için } \|x_i - y\| < r + \varepsilon$$

yazılabilir ve $x_i \xrightarrow{r} z$ olduğu için

$$\exists i_\varepsilon^{''} \in \mathbb{N} \text{ öyle ki } \text{ her } i \geq i_\varepsilon^{''} \text{ için } \|x_i - z\| < r + \varepsilon$$

yazılabilir. $i_\varepsilon := \max\{i_\varepsilon^{''}, i_\varepsilon^{'}\}$ olmak üzere her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$\|y - z\| \leq \|x_i - y\| + \|x_i - z\| < r + \varepsilon + r + \varepsilon = 2(r + \varepsilon) < 2r + 2(\frac{d}{2} - r) = d,$$

yani $\|y - z\| < \|y - z\|$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde bir dizinin $r-$limitlerinin kümesinin çapı $2r$ den büyük olamaz.

Şimdi de bu kümenin genelde bir en küçük sınıra sahip olmadığını gösterelim. Yakınsak bir $\{x_i\}$ dizisi alınırsa,

$$\overline{B}_r(x_*) = \{y \in X : \|y - x_*\| \leq r\}$$

olmak üzere $y \in \overline{B}_r(x_*)$ için

$$\|x_i - y\| \leq \|x_i - x_*\| + \|x_* - y\| \leq \|x_i - x_*\| + r$$

dir. Burada $i \to \infty$ için $x_i \to x_*$ olduğundan yeterince büyük i ler için

$$\|x_i - y\| < \varepsilon + r$$

yazılabilir. Bu da her $y \in \overline{B}_r(x_*)$ için sağlandığından $\mathrm{LIM}^r x_i = \overline{B}_r(x_*)$ yazılabilir. $diam(\overline{B}_r(x_*)) = 2r$ olduğundan genelde $r-$limit kümesinin çapının üst sınırı olan $2r$ artık azalmayabilir. Daha açık söylemek gerekirse, $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesinin çapını $2r$ den küçük alamayız.

b) $x_* \in \mathrm{LIM}^r x_i$ olsun. O halde, yeterince büyük i ler için $\|x_i - x_*\| < r + \varepsilon$ yazılabilir. $\{x_{k_i}\}$, $\{x_i\}$ dizisinin altdizisi olduğundan yeterince büyük i ler için

$\|x_{k_i} - x_*\| < r + \varepsilon$ dur. Yani $x_* \in$LIM$^r x_{k_i}$ olur ve ispat tamamlanır.

c) 3. Bölümde bulanık sayı dizileri için verilen Teorem 3.2.9 un ispatına benzer şekilde ispatlanabilir.

d) $\{x_i\}$ dizisi, $C+\overline{B}_r(0)$ kümesine ait bir dizi olduğu için $x_i = y_i + z_i$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ olacak şekilde, $\{y_i\} \in C$ ve $\|z_i\| \leq r$ şartlarını sağlayan $\{y_i\}$ ve $\{z_i\}$ gibi iki dizi bulunabilir. C kümesi göreceli kompakt olduğundan $\{y_i\}$ dizisinin, $i_j \to \infty$ için

$$y_{i_j} \to y_* \in cl(C)$$

şartını sağlayan bir $\left\{y_{i_j}\right\}$ altdizisi vardır. O halde her bir $\varepsilon > 0$ için bir i_ε sayısı bulunabilir öyle ki her $i_j \geq i_\varepsilon$ için

$$\left\|x_{i_j} - y_*\right\| \leq \left\|x_{i_j} - y_{i_j}\right\| + \left\|y_{i_j} - y_*\right\| < r + \varepsilon$$

yazılabilir, yani $y_* \in$LIM$^r x_{i_j}$ dir. Ayrıca,

$$M := \{x_{i_j} : \left\|y_{i_j} - y_*\right\| < r' - r\}$$

kümesi, $\left\{x_{i_j}\right\}$ dizisinin boştan farklı bir alt kümesidir ve $i_j > i_\varepsilon$ ve $x_* \in M$ ise

$$\left\|x_{i_j} - x_*\right\| \leq \left\|x_{i_j} - y_*\right\| + \|y_* - x_*\| < r + \varepsilon + r' - r = r' + \varepsilon$$

olur, yani $\varnothing \neq M \subset$LIM$^{\{x_{i_j}\},r'} x_{i_j}$ dir. Böylelikle, her bir $\{x_i\}$ dizisinin bir altdizisi için $y_* \in$LIM$^r x_{i_j}$ ve $M \subset$LIM$^{\{x_{i_j}\},r'} x_{i_j}$ özelliklerinin sağlandığı gösterilmiş oldu.

Klasik anlamda yakınsak bir dizinin limit noktalarının kümesi, tek nokta kümesi olduğundan, bu kümenin özelliklerini incelemenin bir anlamı yoktur. Fakat kaba yakınsaklıkta limit noktalarının kümesi genelde tek nokta kümesinden farklı olduğu için aşağıdaki özellikler incelenebilir. Bu özellikleri incelemeye başlamadan önce Önerme 2.1.5 de yer verilecek olan kesin konvekslik ve düzgün konvekslik tanımları hatırlatılacaktır. Daha sonra, Önerme 2.1.5 in ispatında kullanılacak ve düzgün konvekslik tanımının denk ifadelerini içeren bir yardımcı teorem verilecektir.

Tanım 2.1.2. X uzayında $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$ ve $z_0 \neq z_1$ koşulunu sağlayan z_0 ve z_1 elemanları ve $0 < \lambda < 1$ skaleri için $\|(1-\lambda)z_0 + \lambda z_1\| < 1$ oluyorsa X uzayı *kesin konvekstir* denir (Morrison, 2000).

Tanım 2.1.3. X uzayında her bir $\varepsilon \in (0,2]$ reel sayısı ve $\|z_0\| = \|z_1\| = 1$, $\|z_0 - z_1\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $z_0, z_1 \in X$ için $\|2^{-1}(z_0 + z_1)\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa X uzayı *düzgün konvekstir* denir (Morrison, 2000).

Yardımcı Teorem 2.1.4. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) X uzayı düzgün konvekstir.

b) X uzayından alınan herhangi iki $\{z_{0i}\}$ ve $\{z_{1i}\}$ dizileri için

$$\|z_{0i}\| = \|z_{1i}\| = 1 \ (i = 1,2,3,...), \lim_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(z_{0i} + z_{1i})\right\| = 1 \text{ ise } \lim_{i\to\infty} \|z_{0i} - z_{1i}\| = 0$$

dır.

c) Her bir $r > 0$ ve X uzayından alınan herhangi iki $\{z_{0i}\}$ ve $\{z_{1i}\}$ dizileri için

$$\max\left\{\lim_{i\to\infty} \|z_{0i}\|, \lim_{i\to\infty} \|z_{1i}\|\right\} \leq \lim_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(z_{0i} + z_{1i})\right\| = r$$

ise

$$\lim_{i\to\infty} \|z_{0i} - z_{1i}\| = 0$$

dır.

d) Her bir $r > 0$ ve her $\varepsilon \in (0, 2r]$ için bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır öyle ki X uzayından alınan keyfî $\{z_{0i}\}$ ve $\{z_{1i}\}$ dizileri için $\limsup_{i\to\infty} \|z_{0i}\| \leq r$, $\limsup_{i\to\infty} \|z_{1i}\| \leq r$, $\|z_{0i} - z_{1i}\| \geq \varepsilon$ $(i = 1,2,3,...)$ ise $\limsup_{i\to\infty} \|2^{-1}(z_{0i} + z_{1i})\| < r - \delta(\varepsilon)$ dır (Phu, 2003).

Önerme 2.1.5. $\{x_i\}$, X uzayında bir dizi ve $r, r_0, r_1 \geq 0$ olsun. Bu durumda,

a) $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesi kapalı ve konvekstir.

b) Eğer $y_0 \in \mathrm{LIM}^{r_0} x_i$ ve $y_1 \in \mathrm{LIM}^{r_1} x_i$ ise $\lambda \in [0,1]$ için

$$y_\lambda := (1-\lambda)y_0 + \lambda y_1 \in \mathrm{LIM}^{(1-\lambda)r_0 + \lambda r_1} x_i$$

dir.

c) Eğer X sonlu boyutlu ve kesin konveks bir uzay ise $\mathrm{LIM}^r x_i$ kesin konvekstir.

d) Eğer X sonsuz boyutlu ve düzgün konveks bir uzay ise $\mathrm{LIM}^r x_i$ kesin konvekstir. Yani

$$y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^r x_i \text{ ve } y_0 \neq y_1 \text{ ise } \forall\lambda \in (0,1) \text{ için } y_\lambda \in int(\mathrm{LIM}^r x_i)$$

dir (Phu, 2001; 2003).

İspat: a) 3. Bölümde bulanık sayı dizileri için verilecek olan Teorem 3.2.10 ve Teorem 3.2.11 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

b) $y_0 \in\mathrm{LIM}^{r_0} x_i$ ve $y_1 \in\mathrm{LIM}^{r_1} x_i$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $i > i_\varepsilon$ için $\|x_i - y_0\| < r_0 + \varepsilon$ ve $\|x_i - y_1\| < r_1 + \varepsilon$ olacak şekilde bir i_ε sayısı bulunabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \|x_i - y_\lambda\| &\leq (1-\lambda)\|x_i - y_0\| + \lambda\|x_i - y_1\| \\ &< (1-\lambda)(r_0+\varepsilon) + \lambda(r_1+\varepsilon) \\ &= (1-\lambda)r_0 + \lambda r_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $y_\lambda \in\mathrm{LIM}^{(1-\lambda)r_0+\lambda r_1} x_i$ olur.

c) $y_0, y_1 \in\mathrm{LIM}^r x_i$ ve $y_0 \neq y_1$ elemanları için

$$y_{0.5} = \frac{1}{2}(y_0 + y_1) \in int\,(\mathrm{LIM}^r x_i)$$

olduğu gösterilirse $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesinin kesin konveksliği ispatlanmış olur. Çünkü $0 < \lambda < 1$ aralığındaki her bir λ sayısına karşılık gelen y_λ noktaları için $y_0^{'} \neq y_1^{'}$ ve $y_\lambda = \frac{1}{2}\left(y_0^{'} + y_1^{'}\right)$ olacak şekilde $y_0^{'}, y_1^{'} \in\mathrm{LIM}^r x_i$ bulunabilir.
L_x kümesi $\{x_i\}$ dizisinin yığılma noktalarının kümesi olsun. L_x kümesi kapalıdır. $\{x_i\}$ dizisi, $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesi boş küme olmadığından sınırlıdır. X bir sonlu boyutlu normlu uzay ve $\{x_i\}$ dizisi sınırlı olduğundan L_x boş olmayan ve sınırlı bir kümedir. O halde bir $\widetilde{c} \in L_x$ elemanı için

$$\|\widetilde{c} - y_{0.5}\| = \max_{c\in L_x} \|c - y_{0.5}\|$$

yazılabilir. Ayrıca $y_0, y_1 \in$LIM$^r x_i$ olduğundan

$$\|\widetilde{c} - y_0\| \leq r \quad \text{ve} \quad \|\widetilde{c} - y_1\| \leq r$$

olur. X uzayı kesin konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{c} - y_{0.5}\| &= \|0.5\,(\widetilde{c} - y_0) + 0.5\,(\widetilde{c} - y_1)\| \\ &< \max\{\|\widetilde{c} - y_0\|\,, \|\widetilde{c} - y_1\|\} \leq r \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $\sigma := r - \|\widetilde{c} - y_{0.5}\| > 0$ şeklinde tanımlansın. Böylece her $c \in L_x$ ve her $y \in B_\sigma\,(y_{0.5})$ için

$$\begin{aligned} \|c - y\| &\leq \|c - y_{0.5}\| + \|y_{0.5} - y\| \\ &\leq \|\widetilde{c} - y_{0.5}\| + \sigma = r \end{aligned}$$

olur. Buradan $y \in$LIM$^r x_i$ elde edilir. Sonuç olarak, $y_{0.5}$ noktasının, LIM$^r x_i$ kümesinin bir iç noktası olduğu söylenebilir. Dolayısıyla LIM$^r x_i$ kümesi kesin konvekstir.

d) LIM$^r x_i$ kümesinin kesin konveks olduğunu ispatlamak için

$$y_0, y_1 \in \text{LIM}^r x_i \quad \text{ve} \quad y_0 \neq y_1 \tag{2.3}$$

ise

$$2^{-1}(y_0 + y_1) \in int(\text{LIM}^r x_i)$$

olduğu gösterilmelidir. Çünkü $0 < \lambda < 1$ olduğunda her bir y_λ için

$$y_0^{'} \neq y_1^{'} \text{ ve } y_\lambda = 2^{-1}(y_0^{'} + y_1^{'})$$

olacak şekilde $y_0^{'}, y_1^{'} \in$LIM$^r x_i$ vardır.

$z_{0i} = y_0 - x_i$ ve $z_{1i} = y_1 - x_i$ şeklinde tanımlarsak (2.2) eşitsizliği ve (2.3) ifadesinden

$$\limsup_{i\to\infty} \|z_{0i}\| \le r, \quad \limsup_{i\to\infty} \|z_{1i}\| \le r, \quad \|z_{0i} - z_{1i}\| = \|y_0 - y_1\| > 0 \quad (i = 1, 2, 3, ...)$$

olur. Yardımcı Teorem 2.1.2 (d) gereğince,

$$\limsup_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(y_0 + y_1) - x_i\right\| = \limsup_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(z_{0i} + z_{1i})\right\| \le r - \delta$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır. Yine (2.2) eşitsizliğinden,

$$y_{0.5} = 2^{-1}(y_0 + y_1) \in \mathrm{LIM}^{r-\delta} x_i$$

ifadesi elde edilir. Böylece Önerme 2.2.1 e göre $\|y - y_{0.5}\| \le \delta$ olacak şekilde tüm y elemanları için $y \in \mathrm{LIM}^r x_i$ olduğu söylenebilir. O halde $y_{0.5} \in int(\mathrm{LIM}^r x_i)$ dir.

Kaba limit kümesinin her zaman kesin konveks olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilebilir.

Örnek 2.1.6. $\mathbb{R}^2$ uzayında $x_i := ((-1)^i, 0)$ şeklinde tanımlanan $\{x_i\}$ dizisini göz önüne alalım. $\mathbb{R}^2$ üzerinde, maksimum normu tanımlı ise

$$\mathrm{LIM}^r x_i = \{(0, \eta) \in \mathbb{R}^2 : |\eta| \le 1\}$$

kümesi kesin konveks değildir. Aslında, $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (0, -1)$, $x_1 \ne x_2$ ve $x_1, x_2 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ dir. Fakat $\lambda = \frac{1}{2}$ için $\lambda x_1 + \lambda x_2 = (0, 0)$ noktası bu kümenin bir iç noktası değildir. Hatta bu kümenin hiçbir iç noktası yoktur (Phu, 2003).

2.2. Kaba Yakınsaklığın Klasik Yakınsaklık ile İlişkisi

Bu bölümde kaba yakınsaklık ve klasik yakınsaklık arasındaki ilişkiler araştırılacaktır.

Önerme 2.2.1. $r_1 \ge 0$ ve $r_2 > 0$ olsun. X uzayındaki bir $\{x_i\}$ dizisinin, x_* noktasına $(r_1+r_2)-$yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $y_i \xrightarrow{r_1} x_*$ ve $\|x_i - y_i\| \le r_2$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ olacak şekilde, X uzayında bir $\{y_i\}$ dizisinin var olmasıdır (Phu, 2003).

İspat: $(\Leftarrow)$ $y_i \xrightarrow{r_1} x_*$ ve $\|x_i - y_i\| \leq r_2$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ olsun. $y_i \xrightarrow{r_1} x_*$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $i \geq i_\varepsilon$ için $\|y_i - x_*\| < r_1 + \varepsilon$ olacak şekilde bir i_ε sayısı bulunabilir. $\|x_i - y_i\| \leq r_2$ olduğundan, her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} \|x_i - x_*\| &\leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - x_*\| \\ &< (r_1 + r_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan $\{x_i\}$ dizisinin x_* noktasına $(r_1 + r_2)-$yakınsak olduğu görülür.

$(\Rightarrow)$ $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına $(r_1 + r_2)-$yakınsak olsun. $\{y_i\}$ dizisini

$$y_i := \begin{cases} x_* & , \|x_i - x_*\| \leq r_2 \\ x_i + r_2 \frac{x_* - x_i}{\|x_* - x_i\|} & , \|x_i - x_*\| > r_2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\|y_i - x_*\| \leq \begin{cases} 0 & , \|x_i - x_*\| \leq r_2 \\ \|x_i - x_*\| - r_2 & , \|x_i - x_*\| > r_2 \end{cases}$$

dir. Burada $\|x_i - x_*\| \leq r_2$ kısmında $\|x_i - y_i\| = \|x_i - x_*\| \leq r_2$ ve $\|x_i - x_*\| > r_2$ kısmında $\|x_i - y_i\| = r_2$ olduğundan her i için $\|x_i - y_i\| \leq r_2$ yazılabilir. (2.2) eşitsizliğinden $x_* \in \mathrm{LIM}^{r_1 + r_2} x_i$ olduğundan

$$\limsup_{i \to \infty} \|x_i - x_*\| \leq r_1 + r_2$$

dir. $\|x_i - y_i\| \leq r_2$ olduğundan $\limsup\limits_{i \to \infty} \|y_i - x_*\| \leq r_1$ dir. O halde $y_i \xrightarrow{r_1} x_*$ yazılabilir.

$r_1 = 0$ ve $r_2 = r > 0$ alınması durmunda, eğer her bir $i = 1, 2, 3, ...$ için $y_i \to x_*$ ve $\|x_i - y_i\| \leq r$ olacak şekilde bir $\{y_i\}$ dizisi varsa $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına $r-$yakınsaktır sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde, eğer $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına $r-$yakınsak ise $\{x_i\}$ nin civarında (her i için $\|x_i - y_i\| \leq r$) x_* noktasına klasik anlamda yakınsak olan bir $\{y_i\}$

dizisi vardır sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.2.2. **a)** $\{x_i\} \subset X$ olmak üzere $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına yakınsak ise $\mathrm{LIM}^r x_i = \overline{B}_r(x_*)$ dir.

b) $\{x_i\}$ dizisi, X uzayının bazı kompakt kümeleri tarafından içeriliyorsa ve $\mathrm{LIM}^r x_i = \overline{B}_r(x_*)$ ise $\{x_i\}$ dizisi x_* noktasına yakınsaktır.

c) $\{x_i\}$ dizisi, sonlu boyutlu kesin konveks bir X uzayında bir dizi ve $y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ olmak üzere $\|y_0 - y_1\| = 2r$ ise $\{x_i\}$ dizisi, $2^{-1}(y_0 + y_1)$ noktasına yakınsaktır.

d) $\{x_i\}$ dizisi, sonsuz boyutlu düzgün konveks bir X uzayında bir dizi ve $y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ olmak üzere $\|y_0 - y_1\| = 2r$ ise $\{x_i\}$ dizisi, $2^{-1}(y_0 + y_1)$ noktasına yakınsaktır (Phu, 2001; 2003).

İspat: **a)** Önerme 2.1.1 in (a) maddesi gereğince ispatı açıktır.

b) Tersini kabul edelim, yani $\mathrm{LIM}^r x_i = \overline{B}_r(x_*)$ olsun fakat $\{x_i\}$ dizisi, x_* noktasına yakınsak olmasın. Bu durumda $\{x_i\}$ dizisi en az bir kompakt küme tarafından içerildiği için x_* noktasından farklı bir $x_*^{'}$ yığılma noktasına sahiptir.

$$\overline{x}_* := x_* + \frac{r}{\|x_* - x_*^{'}\|}(x_* - x_*^{'})$$

şeklinde tanımlanan $\overline{x}_*$ noktası,

$$\left\|\overline{x}_* - x_*^{'}\right\| = r + \left\|x_* - x_*^{'}\right\| > r$$

eşitsizliğini sağlar. $x_*^{'}$ bir yığılma noktası olduğu için $\overline{x}_* \notin \mathrm{LIM}^r x_i$ dir. Bu ise $\mathrm{LIM}^r x_i = \overline{B}_r(x_*)$ ve $\|\overline{x}_* - x_*\| = r$ eşitlikleri ile çelişir. Böylece x_* noktası, bazı kompakt kümeler tarafından içerilen $\{x_i\}$ dizisinin tek yığılma noktasıdır. Sonuç olarak, $\{x_i\}$ dizisi, x_* noktasına yakınsaktır.

c) c noktası, $\{x_i\}$ dizisinin bir yığılma noktası olsun. Bu durumda $y_1, y_2 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ için

$$\|y_1 - c\| \leq r \quad \text{ve} \quad \|y_2 - c\| \leq r$$

yazılabilir. Öte yandan,

$$2r = \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - c\| + \|y_2 - c\|$$

dir. O halde

$$\|y_1 - c\| = \|y_2 - c\| = r$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}((c - y_1) + (y_2 - c)) \quad \text{ve} \quad \left\| \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \right\| = r$$

olduğundan, uzayın kesin konveks olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{1}{2}(y_2 - y_1) = c - y_1 = y_2 - c$$

yazılabilir. Böylece, $c = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ olur. Bu ise c noktasının, $\{x_i\}$ dizisinin tek yığılma noktası olması anlamına gelir. $\mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing$ olduğundan $\{x_i\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısıyla, uzayın sonlu boyutlu olduğu dikkate alınırsa $i \to \infty$ için $x_i \to \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ elde edilir.

d) $z_{0i} := y_0 - x_i$ ve $z_{1i} := x_i - y_1$ olarak tanımlansın. (2.2) eşitsizliğinden, $y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ ve $\|y_0 - y_1\| = 2r$ için

$$\limsup_{i\to\infty} \|z_{0i}\| \leq r, \quad \limsup_{i\to\infty} \|z_{1i}\| \leq r,$$

$$\left\|2^{-1}(z_{0i} + z_{1i})\right\| = 2^{-1}\|y_0 - y_1\| = r, \quad (i = 1, 2, 3, ...)$$

yazılabilir. Yardımcı Teorem 2.1.2 (c) gereğince,

$$\lim_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(y_0 + y_1) - x_i\right\| = 2^{-1} \lim_{i\to\infty} \|z_{0i} - z_{1i}\| = 0$$

olup, $\{x_i\}$ dizisi, $2^{-1}(y_0 + y_1)$ noktasına yakınsaktır.

Özel olarak, yukarıdaki önermenin (b) maddesi, sonlu boyutlu normlu uzaylarda göz önüne alındığında, dizinin kompakt bir küme tarafından içerilmesi şartına gerek duyulmaz. Bu şart, sonsuz boyutlu normlu uzaylarda dizinin bir başka yığılma noktasına sahip olduğunu söyleyebilmek için gereklidir. Sonlu boyutlu normlu uzaylarda bu şart olmaksızın dizi bir başka yığılma noktasına sahip olur ve ispatın devamı benzer şekilde yapılır.

Örnek 2.2.3. $\mathbb{R}^2$ uzayında genel terimi $x_i := ((-1)^i, 0)$ olan bir dizi verilsin ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde maksimum normu tanımlansın. O halde $y_1 = (0, 1)$ ve $y_2 = (0, -1)$ için $y_1, y_2 \in$LIM$^1 x_i$ ve $\|y_1 - y_2\| = 2$ dir. Fakat $\{x_i\}$ dizisi yakınsak değildir. Bunun nedeni, Önerme 2.2.2 de kabul edilen düzgün konveksliğin, $\mathbb{R}^2$ uzayında maksimum normuna göre sağlanmamasıdır (Phu, 2003).

Önerme 2.2.2 de yakınsak bir diziyle o dizinin $r-$limit noktaları arasındaki ilişki incelenmişti. Şimdi ise bir dizinin yığılma noktaları ile bu dizinin $r-$limit noktaları arasındaki ilişki incelenecektir.

Önerme 2.2.4. $\{x_i\} \subset X$ olmak üzere, $\{x_i\}$ dizisinin yığılma noktalarının kümesi L_x olsun. Bu durumda,

a) $L_x \neq \varnothing$ ise

$$\text{LIM}^r x_i \subset \bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_r(c) \tag{2.4}$$

dir.

b) $\{x_i\}$ dizisi, X uzayının bazı kompakt kümeleri tarafından içeriliyorsa

$$\text{LIM}^r x_i = \bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_r(c) = \{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\} \tag{2.5}$$

dir (Phu, 2003).

İspat: **a)** $\{x_i\}$ dizisinin her bir yığılma noktası c ve her $x_* \in$LIM$^r x_i$ için

$$\|x_* - c\| \leq r$$

dir. Aksi takdirde, sonsuz sayıda x_i için $\varepsilon := (\|x_* - c\| - r)/2 > 0$ olduğunda

$$\|x_* - x_i\| > r + \varepsilon$$

olur. Bu ise (2.1) ifadesi ile çelişir. O halde (2.4) bağıntısı sağlanır.

b) Eğer $y \in \bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_r(c)$ ise her $c \in L_x$ için $\|y - c\| \leq r$ dir, yani $L_x \subset \overline{B}_r(y)$ olup,

$$\bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_r(c) \subseteq \{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\}$$

dir. Eğer $y \notin$LIM$^r x_i$ ise en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ve sonsuz sayıdaki x_i için $\|x_i - y\| \geq r + \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. $\{x_i\}$ dizisi bazı kompakt kümeler tarafından içerildiğinden dolayı, $\|y - c\| \geq r + \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde bir c yığılma noktası vardır. Yani $L_x \nsubseteq \overline{B}_r(y)$ ve $y \notin \{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\}$ dir. Böylelikle, $y \in \{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\}$ olduğundan $y \in$LIM$^r x_i$ dir, yani

$$\{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\} \subseteq \text{LIM}^r x_i$$

olup (a) maddesi gereğince,

$$\text{LIM}^r x_i = \bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_r(c) = \{x_* \in X : L_x \subseteq \overline{B}_r(x_*)\}$$

dir.

Önerme 2.2.4 ün (b) maddesi sonlu boyutlu normlu uzaylarda, dizinin kompakt bir küme tarafından içerilmesi şartına gerek duyulmadan ifade edilip ispatlanabilir.

2.3. Kaba Limit Kümesi ve Kabalık Derecesi

Bu kesimde sabit bir $\{x_i\}$ dizisinin değişen $r-$parametrelerine göre LIM$^r x_i$ kümesi incelenecektir.

Önerme 2.3.1. a) Eğer $0 \leq r' < r$ ise LIM$^{r'} x_i \subseteq$LIM$^r x_i$ dir.
b) Eğer $r \geq 0$ ve $\sigma > 0$ ise LIM$^r x_i + \overline{B}_\sigma(0) \subseteq$LIM$^{r+\sigma} x_i$ dir.
c) Eğer $\{x_i\}$ dizisi, X uzayının bazı kompakt kümeleri tarafından içeriliyorsa ve $\overline{B}_\sigma(y) \subseteq$LIM$^r x_i$ ise $y \in$LIM$^{r-\sigma} x_i$ dir (Phu, 2001; 2003).

İspat: a) $x_* \in$LIM$^{r'} x_i$ ise her bir $\varepsilon > 0$ için $i \geq i_\varepsilon$ olduğunda

$$\|x_i - x_*\| < r' + \varepsilon < r + \varepsilon \quad (0 \leq r' < r)$$

olacak şekilde bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunabildiğinden $x_* \in$LIM$^r x_i$ olur.

b) $y \in$LIM$^r x_i$ ve $z \in \overline{B}_\sigma(0)$ olsun. Tanımdan, her bir $\varepsilon > 0$ için $i \geq i_\varepsilon$ olduğunda $\|x_i - y\| < r + \varepsilon$ olacak şekilde bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Aynı zamanda, $z \in \overline{B}_\sigma(0)$ olduğundan $\|z\| \leq \sigma$ dır. Böylece her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$\|x_i - (y+z)\| \leq \|x_i - y\| + \|z\| < r + \varepsilon + \sigma$$

elde edilir. Dolayısıyla, $y + z \in$LIM$^{r+\sigma} x_i$ dir.

c) X sonsuz boyutlu uzayında $\{x_i\}$ dizisi kompakt bir küme tarafından içerildiğinden yığılma noktalarının kümesi boştan farklıdır. c noktası, $\{x_i\}$ dizisinin keyfî bir yığılma noktası olsun. Eğer $\|y - c\| > r - \sigma$ ise

$$x_* := y + \frac{\sigma}{\|y - c\|}(y - c)$$

noktası için

$$\|x_* - c\| = \sigma + \|y - c\| > \sigma + (r - \sigma) = r$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4) bağıntısı gereğince, LIM$^r x_i \subseteq \overline{B}_r(c)$ olduğundan $x_* \notin$LIM$^r x_i$ olmalıdır. Bu ise $\|x_* - y\| = \sigma$ ve $\overline{B}_\sigma(y) \subseteq$LIM$^r x_i$ olması ile çelişir. Böylece her $c \in L_x$ yığılma noktası için $\|y - c\| \leq r - \sigma$ yazılabilir. Sonuç olarak, (2.5) eşitliği gereğince,

$$y \in \bigcap_{c \in L_x} \overline{B}_{r-\sigma}(c) = \mathrm{LIM}^{r-\sigma} x_i$$

yazılabilir.

Önerme 2.3.2. **a)** $cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i\right) \subseteq \mathrm{LIM}^r x_i = \bigcap_{r' > r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ dir.

b) $r = \overline{r} := \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : \mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing\}$ olması için gerek ve yeter koşul,

$$\mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing \quad \text{ve} \quad int\,(\mathrm{LIM}^r x_i) = \varnothing \tag{2.6}$$

olmasıdır.

c) X uzayı, sonlu boyutlu kesin konveks bir uzay olmak üzere;

$$r = \overline{r} := \inf \left\{ r \in \mathbb{R}^+ : \mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing \right\}$$

olması için gerek ve yeter koşul, $\mathrm{LIM}^r x_i$ kümesinin tek nokta kümesi olmasıdır.

d) Eğer X düzgün konveks ve $y \in int(\mathrm{LIM}^r x_i)$ ise $y \in \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ olacak şekilde bir $r' \in [0, r)$ vardır (Phu, 2001; 2003).

İspat: a) Önerme 2.3.1 (a) gereğince ve $r-$limit kümesinin kapalılığından,

$$cl \left(\bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i \right) \subseteq \mathrm{LIM}^r x_i \subseteq \bigcap_{r' > r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$$

yazılır. Keyfî bir $y \in X - \mathrm{LIM}^r x_i$ seçelim. Tanım gereği, en az bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır öyle ki herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ verildiğinde bir $i \geq k$ $(i \in \mathbb{N})$ bulunabilir ve bu i doğal sayısı için $\|x_i - y\| \geq r$ olur. Bu durumda $r' < r + \varepsilon$ için $\varepsilon' := r + \varepsilon - r' > 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için en az bir $i \geq k$ bulunabilir öyle ki $\|x_i - y\| \geq r' + \varepsilon'$ yazılabilir. Böylece $r' < r + \varepsilon$ için $y \notin \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ yazılabilir. Buradan $y \notin \bigcap_{r' > r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ elde edilir. Dolayısıyla, $\mathrm{LIM}^r x_i = \bigcap_{r' > r} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ dir.

b) $(\Rightarrow)$ $r = \overline{r}$ olsun. Önermenin (a) maddesi gerğince, $\mathrm{LIM}^r x_i = \bigcap_{r' > \overline{r}} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$ dir. Dolayısıyla $r' > \overline{r}$ için $\mathrm{LIM}^{r'} x_i \neq \varnothing$ olup bu küme kapalıdır. Önerme 2.3.1 (a) gereğince,

$$\bigcap_{r' > \overline{r}} \mathrm{LIM}^{r'} x_i = \bigcap_{\overline{r} < r' \leq \overline{r}+1} \mathrm{LIM}^{r'} x_i$$

yazılabilir ve $\mathrm{LIM}^{r'} x_i$, $r' \in (\overline{r}, \overline{r}+1]$ sonlu kesişim özelliğine sahip $\mathrm{LIM}^{\overline{r}+1} x_i$ kompakt kümesinde boştan farklı kapalı kümelerin bir ailesidir. Böylece onların kesişimleri de boş değildir. Dolayısıyla $\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i \neq \varnothing$ olur.

Şimdi $int\,(\mathrm{LIM}^r x_i) = \varnothing$ olduğunu gösterelim. Tersine, $int\,(\mathrm{LIM}^r x_i) \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu küme, $\sigma > 0$ yarıçaplı bir $\overline{B}_\sigma(y)$ yuvarını içerir. Önerme 2.3.1 (c) gereğince $\mathrm{LIM}^{r-\sigma} x_i \neq \varnothing$ yazılabilir. Buradan $r > \overline{r}$ olduğu görülür. Böylece $r = \overline{r}$ olması, $int\,(\mathrm{LIM}^r x_i) = \varnothing$ olmasını gerektirir.

($\Leftarrow$) (2.6) sağlansın. $\mathrm{LIM}^r x_i \neq \varnothing$ olduğundan $r \geq \overline{r}$ dir. Diğer taraftan, $int\,(\mathrm{LIM}^r x_i) = \varnothing$ ise $r \leq \overline{r}$ olduğundan $r = \overline{r}$ dir.

c) ($\Rightarrow$) $r = \overline{r}$ ise (b) maddesi gereğince (2.6) sağlanır. X uzayı, sonlu boyutlu kesin konveks bir uzay olduğundan $\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i$ kümesi de kesin konvekstir. Yani

$$y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i \ \text{ ve } \ y_0 \neq y_1 \ \text{ için } y_\lambda := \lambda y_0 + (1-\lambda) y_1 \in int\left(\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i\right)$$

dir. $int\left(\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i\right) = \varnothing$ olduğundan böyle bir $y_\lambda \in int\left(\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i\right)$ bulunamaz. Yani $\mathrm{LIM}^{\overline{r}} x_i$ kümesinde birbirinden farklı iki tane eleman olamaz.

($\Leftarrow$) Eğer $\mathrm{LIM}^r x_i$ tek nokta kümesi ise (2.6) sağlanır. Dolayısıyla $r = \overline{r}$ dir.

d) $\mathrm{LIM}^r x_i$ nin bir iç noktası y ise $\|y_0 - y_1\| > 0$ ve $y = 2^{-1}(y_0 + y_1)$ olacak biçimde $y_0, y_1 \in \mathrm{LIM}^r x_i$ vardır. $z_{0i} := y_0 - x_i$ ve $z_{1i} := y_1 - x_i$ şeklinde tanımlanarak (2.2) eşitsizliğinden $\limsup\limits_{i\to\infty} \|z_{0i}\| \leq r$, $\limsup\limits_{i\to\infty} \|z_{1i}\| \leq r$, $\|z_{0i} - z_{1i}\| = \|y_0 - y_1\| > 0$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ elde edilir. X uzayı düzgün konveks olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.2 (d) gereğince bir $r^{'} \in [0, r)$ vardır öyle ki

$$\limsup_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(y_0 + y_1) - x_i\right\| = \limsup_{i\to\infty} \left\|2^{-1}(z_{0i} - z_{1i})\right\| \leq r^{'}$$

yazılabilir. Buradan $y = 2^{-1}(y_0 + y_1) = 2^{-1}(z_{0i} - z_{1i}) \in \mathrm{LIM}^{r^{'}} x_i$ elde edilir.

3. BULANIK SAYI DİZİLERİNİN KABA YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, normlu bir uzay olmayan bulanık sayılar uzayındaki diziler için kaba yakınsaklık kavramı tanımlanacak ve kaba limit kümesinin temel özellikleri incelenecektir. Orijinal sonuçlara geçmeden önce, bulanık sayılarla ilgili bazı ön bilgilere yer verilecektir.

3.1. Bulanık Kümeler Teorisinin Bazı Temel Kavramları

Tanım 3.1.1. Reel sayılar kümesinden $[0,1]$ aralığına tanımlı ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir X fonksiyonuna *bulanık sayı* denir:

▶ X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır,

▶ X bulanık konvekstir, yani her $x, y \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $X(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\}$ dir,

▶ X üstten yarı süreklidir,

▶ $\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ biçiminde tanımlanan X^0 kümesinin kapanışı kompakttır (Chang ve Zadeh, 1972).

Yukarıdaki dört özellik, her $\alpha \in (0,1]$ için, X bulanık sayısının $\alpha-$kesimi olarak tanımlanan $X^\alpha := \{x \in \mathbb{R} : X(x) \geq \alpha\} = \left[\underline{X}^\alpha, \overline{X}^\alpha\right]$ kümesinin, $\mathbb{R}$ nin boş olmayan kompakt ve konveks bir altkümesi olması anlamını taşır. Benzer durum X^0 için de söylenebilir. Ayrıca $X^0 = \lim_{\alpha \to 0^+} X^\alpha$ şeklinde de yazılabilir (Diamond ve Kloeden, 1994). Tüm bulanık sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Her bir reel sayıya bir karakteristik fonksiyon karşılık getirilebilir. Ayrıca yukarıdaki bulanık sayı tanımına göre, her bir karakteristik fonksiyonun bir bulanık sayı olduğu açıktır. Bu düşünce yardımıyla reel sayılar kümesi, bulanık sayılar kümesi içine gömülebilir. Bu nedenle, bulanık sayılar için verilen bütün sonuçlar reel sayılar için verilen sonuçların bir genellemesi olacaktır ve bulanık sayılar için sağlanan bütün özellikler, reel sayılar (karakteristik fonksiyonları göz önüne alınarak) için de sağlanacaktır. Fakat bulanık sayılar kümesi kısmî sıralı olup grup yapısı oluşturmayan bir küme olduğundan bazı sonuçlar $\mathbb{R}$ deki sonuçlardan farklı çıkacaktır. Bu farklılıklar da bu çalışmayı özgünleştirmektedir.

$L(\mathbb{R})$ üzerindeki supremum metriği olarak adlandırılan metrik,

$$D(\mu,\nu) := \sup_{\alpha\in[0,1]} \max(\left|\underline{\mu}^\alpha - \underline{\nu}^\alpha\right|, |\overline{\mu}^\alpha - \overline{\nu}^\alpha|)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Puri ve Ralescu (1983), $(L(\mathbb{R}), D)$ ikilisinin bir tam metrik uzay olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca bu metriğin, karakteristik fonksiyonlar göz önüne alındığında $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğine indirgendiği görülebilir. Bu nedenle, D metriğinin, $\mathbb{R}$ üzerindeki mutlak değer metriğinin iyi bir genişlemesi olduğu söylenebilir.

Bulanık sayılar kümesi üzerinde çok farklı sıralama bağıntılarıyla karşılaşmak mümkündür. Bu çalışmada, bulanık sayılar teorisinde en çok benimsenen tanımlamalar kullanılmıştır. Bu sıralama bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$\mu,\nu \in L(\mathbb{R})$ için

$$\mu \preceq \nu \;:\Leftrightarrow\; \forall\alpha\in[0,1]\;\; \overline{\mu}^\alpha \le \overline{\nu}^\alpha \text{ ve } \underline{\mu}^\alpha \le \underline{\nu}^\alpha$$

şeklinde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı bir kısmî sıralama bağıntısıdır. Kesin küçüklük bağıntısı ise

$$\mu \prec \nu \;:\Leftrightarrow\; \mu \preceq \nu \text{ ve } \exists\alpha\in[0,1] \text{ öyle ki } \overline{\mu}^\alpha < \overline{\nu}^\alpha \text{ veya } \underline{\mu}^\alpha < \underline{\nu}^\alpha$$

şeklindedir (Diamond ve Kloeden, 1994). Eğer $\mu \preceq \nu$ ve $\nu \preceq \mu$ bağıntılarından her ikisi de gerçeklenmiyor ise μ ve ν *karşılaştırılamaz* denir ve $\mu \nsim \nu$ sembolüyle gösterilir.

Şimdi $E \subset L(\mathbb{R})$ olsun. Eğer her $X \in E$ için $X \preceq \mu$ olacak şekilde bir μ bulanık sayısı varsa E kümesi *üstten sınırlıdır* denir ve μ bulanık sayısı, E kümesinin bir *üst sınırıdır* denir. Eğer E kümesinin bütün μ' üst sınırları için $\mu \preceq \mu'$ oluyorsa μ bulanık sayısına E kümesinin *en küçük üst sınırı* (*supremumu*) denir. Alttan sınırlılık ve en büyük alt sınır kavramları da benzer şekilde tanımlanır (Nanda, 1989). Congxin ve Cong (1997) sınırlı bir $E \subset L(\mathbb{R})$ kümesinin infimum ve supremumunun mevcut olduğunu ve nasıl hesaplanabileceğini göstermişlerdir.

Zadeh'in Genişleme Prensibi yardımıyla μ ve ν bulanık sayılarının toplamı

$$\left(\mu+\nu\right)(x) := \sup_{x=y+z} \min\{\mu(y), \nu(z)\} \tag{3.1}$$

ve farkı

$$\left(\mu-\nu\right)(x) := \sup_{x=y-z} \min\{\mu(y), \nu(z)\} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Dubois ve Prade, 1980). $\alpha-$kesimlere göre toplam ve fark ise

$$\text{Her } \alpha\in[0,1] \text{ için } \underline{(\mu+\nu)}^{\alpha} := \underline{\mu}^{\alpha}+\underline{\nu}^{\alpha} \quad \text{ve} \quad \overline{(\mu+\nu)}^{\alpha} := \overline{\mu}^{\alpha}+\overline{\nu}^{\alpha}, \tag{3.3}$$

$$\text{Her } \alpha\in[0,1] \text{ için } \underline{(\mu-\nu)}^{\alpha} := \underline{\mu}^{\alpha}-\overline{\nu}^{\alpha} \quad \text{ve} \quad \overline{(\mu-\nu)}^{\alpha} := \overline{\mu}^{\alpha}-\underline{\nu}^{\alpha} \tag{3.4}$$

biçiminde tanımlanır. Burada (3.1) ile (3.3) ve (3.2) ile (3.4) tanımları birbirlerine denktir (Diamond ve Kloeden, 1994).

$\mu\in L(\mathbb{R})$ bulanık sayısının karakteristik fonksiyonla toplam ve farkı da, yukarıdaki işlemde ν bulanık sayısı bir karakteristik fonksiyon şeklinde alınarak aşağıdaki gibi tanımlanır: $a\in\mathbb{R}$ sayısına karşılık gelen karakteristik fonksiyon

$$a_1(x)=\begin{cases} 1 & , \text{ eğer } x=a \text{ ise} \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\left(\mu+a_1\right)^{\alpha} := \left[\underline{\mu}^{\alpha},\overline{\mu}^{\alpha}\right]+[a,a]=\left[\underline{\mu}^{\alpha}+a,\overline{\mu}^{\alpha}+a\right],$$

$$\left(\mu-a_1\right)^{\alpha} := \left[\underline{\mu}^{\alpha},\overline{\mu}^{\alpha}\right]-[a,a]=\left[\underline{\mu}^{\alpha}-a,\overline{\mu}^{\alpha}-a\right]$$

dir (Kaufmann ve Gupta, 1984). Burada $\left(\mu+a_1\right),\left(\mu-a_1\right)\in L(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca, sıralamanın tanımına göre, eğer $a>0$ ise $\mu-a_1\prec\mu\prec\mu+a_1$ yazılabilir. Bu ise $D\left(\mu,\mu+a_1\right)=D\left(\mu,\mu-a_1\right)=a$ demektir.

$X,Y\in L(\mathbb{R})$ olmak üzere, $L(\mathbb{R})$ kümesinde bir sıralama aralığı

$$[X,Y] := \{Z\in L(\mathbb{R}) : X\preceq Z\preceq Y\} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki sıralama aralığı, elemanları bulanık sayılar (yani özel fonksiyonlar) olan klasik bir kümedir, yani bulanık küme değildir. Dolayısıyla bu kümenin kapalılığı ve konveksliği için klasik teorideki kavramlar kullanılacaktır.

Klasik teoride olduğu gibi, bulanık sayılardan oluşan bir E kümesinin konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $\lambda \in [0,1]$ ve $\mu_1, \mu_2 \in E$ için

$$\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\,\mu_2 \in E$$

olmasıdır (Rockafellar ve Tyrrell, 1997). O halde $L(\mathbb{R})$ nin konveks ve kapalı kümelerinin (3.5) formunda olduğu söylenebilir.

Şimdi de bulanık sayı dizileri için tanımlanmış bazı kavramlar verilecektir.

Tanım 3.1.2. Eğer $\{X_i \in L(\mathbb{R}) : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi sınırlı ise $\{X_i\}$ bulanık sayı dizisine *sınırlıdır* denir (Matloka, 1986).

Tanım 3.1.3. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ için $i \geq i_\varepsilon$ olduğunda $D(X_i, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir i_ε sayısı bulunabiliyorsa $\{X_i\}$ bulanık sayı dizisi X_0 bulanık sayısına *yakınsaktır* denir ve $\lim\limits_{i} X_i = X_0$ veya $i \to \infty$ için $X_i \to X_0$ yazılır (Kaleva, 1985; Matloka, 1986).

Tanım 3.1.4. $L(\mathbb{R})$ kümesinde bir $\{X_i\}$ dizisinin limit infimum ve limit supremum kavramları,

$$\begin{aligned}
A_X &:= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{i \in \mathbb{N} : X_i \prec \mu\} \quad \text{kümesi sonsuz elemanlıdır } \} \\
B_X &:= \{\mu \in L(\mathbb{R}) : \{i \in \mathbb{N} : X_i \succ \mu\} \quad \text{kümesi sonsuz elemanlıdır } \}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\liminf_{i\to\infty} X_i &:= \inf A_X \\
\limsup_{i\to\infty} X_i &:= \sup B_X
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Aytar, 2008).

3.2. Bulanık Sayı Dizilerinde Temel Sonuçlar

İlk olarak Phu (2001) tarafından normlu uzaylarda tanımlanan kaba yakınsaklık kavramı bulanık sayı dizileri için tanımlanacaktır. Bu kısımda $r \geq 0$ alınacak ve $\{X_i\}$ dizisi de $L(\mathbb{R})$ uzayında bir dizi olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.2.1. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir i_ε sayısı bulunabiliyor ve her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, X_*) < r + \varepsilon \tag{3.6}$$

oluyorsa, ya da

$$\limsup_{i\to\infty} D(X_i, X_*) \leq r \tag{3.7}$$

koşulu sağlanıyor ise $\{X_i\}$ dizisi, X_* bulanık sayısına $r-$*yakınsaktır* denir ve $i \to \infty$ için $X_i \xrightarrow{r} X_*$ yazılır. Buradaki X_* noktası, $\{X_i\}$ dizisinin bir $r-$*limit noktası* olarak adlandırılır.

$$\mathrm{LIM}^r X_i := \{X_* \in L(\mathbb{R}) : X_i \xrightarrow{r} X_*, i \to \infty\}$$

kümesine, $\{X_i\}$ dizisinin $r-$*limit kümesi* denir. Eğer $\mathrm{LIM}^r X \neq \varnothing$ ise $\{X_i\}$ dizisi $r-$yakınsak olarak adlandırılır. Bu durumda r sayısı, $\{X_i\}$ dizisinin bir yakınsaklık derecesidir.

Buradaki işlemler genellikle $r > 0$ durumu için yapılacaktır.

Örnek 3.2.2. $\{X_i\}$ dizisi

$$X_i(x) := \begin{cases} \eta(x) & , \; i \text{ tek ise} \\ \mu(x) & , \; \text{diğer} \end{cases}$$

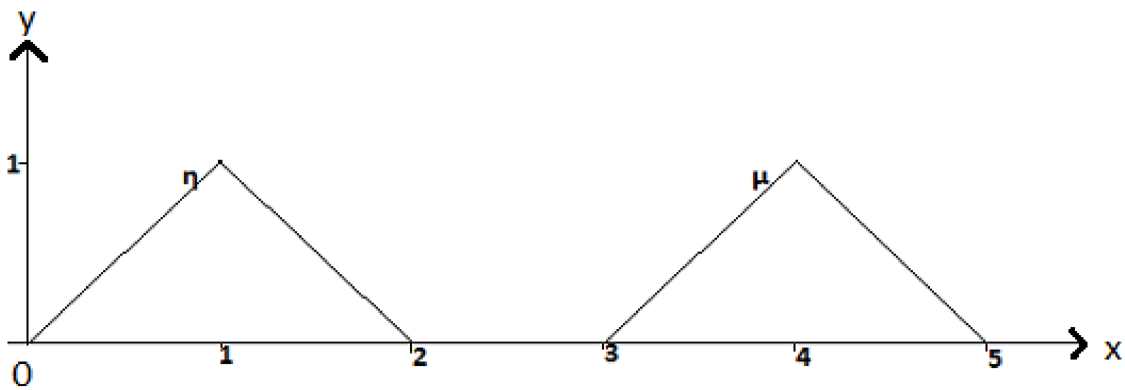
şeklinde tanımlansın buradaki η ve μ bulanık sayıları

$$\eta(x) := \begin{cases} x & , \; x \in [0,1] \\ -x+2 & , \; x \in (1,2] \\ 0 & , \; \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$\mu(x) := \begin{cases} x-3 & , \ x \in [3,4] \\ -x+5 & , \ x \in (4,5] \\ 0 & , \ \text{diğer} \end{cases} .$$

eşitlikleri ile verilsin. η ve μ bulanık sayılarının grafikleri Şekil 3.1 deki gibidir.



Şekil 3.1: μ ve η bulanık sayıları

$\{X_i\}$ dizisinin $r-$limit kümesi,

$$\mathrm{LIM}^r X_i = \begin{cases} \varnothing & , \ r < 3/2 \\ [\mu - r_1, \eta + r_1] & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçimindedir.

Bulanık sayı dizilerinin kaba yakınsaklığına neden ihtiyaç duyulduğu şu şekilde açıklanabilir. Bir X_* bulanık sayısına yakınsak olan herhangi bir $\{Y_i\}$ dizisinin elemanları ile işlemler yapmak, üçgensel bulanık sayılarla işlemler yapmaktan daha zor olabilir. Dolayısıyla bu dizinin herbir elemanı için $D(X_i, Y_i) \leq r$ olacak şekilde üçgensel bulanık sayılardan oluşan bir $\{X_i\}$ yaklaşım dizisi elde edilebilir. Burada $r > 0$ yaklaşım hatasının bir üst sınırıdır ve $\{X_i\}$ dizisi X_* noktasına yakınsak değildir. Fakat

$$D(X_i, X_*) \leq D(X_i, Y_i) + D(Y_i, X_*) \leq r + D(Y_i, X_*)$$

eşitsizliği sağlandığından $\{X_i\}$ dizisi X_* noktasına $r-$yakınsaktır. Sonuç olarak üçgensel bulanık sayıların $\{X_i\}$ yaklaşım dizisini elde etmek işlemleri oldukça kolaylaylaştırır.

Teorem 3.2.5 in ispatında kullanılacak olan bir dizinin $r-$limit noktalarıyla limit supremumu ve limit infumumu arasındaki ilişkiyi veren bir yardımcı teorem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 3.2.3. Her $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ için $D(\limsup X_i, X_*) \leq r$ ve $D(\liminf X_i, X_*) \leq r$ dir.

İspat: Tersine, $D(\limsup X_i, X_*) > r$ olduğunu kabul edelim. $\widetilde{\varepsilon} := \frac{D(\limsup X_i, X_*) - r}{2}$ seçelim. Limit supremum tanımından

$$D(\limsup X_i, X_i) < \widetilde{\varepsilon}$$

olacak şekilde, her bir $i'_{\widetilde{\varepsilon}} \in \mathbb{N}$ den daha büyük en az bir i vardır. Diğer taraftan, $r-$yakınsaklık tanımından en az bir $i''_{\widetilde{\varepsilon}} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i''_{\widetilde{\varepsilon}}$ için

$$D(X_i, X_*) < r + \widetilde{\varepsilon}$$

yazılabilir. $i_{\widetilde{\varepsilon}} := \max\left\{i'_{\widetilde{\varepsilon}}, i''_{\widetilde{\varepsilon}}\right\}$ olmak üzere $i \geq i_{\widetilde{\varepsilon}}$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ vardır ve bu i için

$$\begin{aligned} D(\limsup X_i, X_*) &\leq D(\limsup X_i, X_i) + D(X_i, X_*) < r + 2\widetilde{\varepsilon} \\ &= r + D(\limsup X_i, X_*) - r = D(\limsup X_i, X_*) \end{aligned}$$

yazılabilir. $D(\limsup X_i, X_*) < D(\limsup X_i, X_*)$ çelişkisi ispatı tamamlar.

Yukarıdaki yardımcı teoremin tersinin doğru olmadığı basit bir örnekle görülebilir.

Örnek 3.2.4. $\{X_i\} \subset L(\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$X_i := \begin{cases} (1)_1 & , \ i \text{ tek ise} \\ (-1)_1 & , \ \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\limsup X_i = (1)_1$ ve $\liminf X_i = (-1)_1$ dir. $r = \frac{3}{2}$ ve $X_* = (\frac{5}{2})_1$ olduğunda $D(\limsup X_i, X_*) = \frac{3}{2} \leq r$ dir. Fakat $X_* = (\frac{5}{2})_1 \notin \mathrm{LIM}^{\frac{3}{2}} X_i$ dir.

Aşağıda, bir bulanık sayı dizisinin $r-$limit kümesiyle alt ve üst limit noktaları arasındaki ilişkiyi veren teorem verilmiştir.

Teorem 3.2.5. Eğer $\mathrm{LIM}^r X_i \neq \varnothing$ ise $\mathrm{LIM}^r X_i \subseteq [\limsup X_i - r_1, \liminf X_i + r_1]$ dir.

İspat: Keyfî bir $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ için $X_* \in [\limsup X_i - r_1, \liminf X_i + r_1]$, yani $\limsup X_i - r_1 \preceq X_* \preceq \liminf X_i + r_1$ olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak, $\limsup X_i - r_1 \preceq X_*$ eşitsizliğinin sağlanmadığını kabul edelim. Bu durumda en az bir $\alpha_0 \in [0,1]$ için

$$\underline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - r > \underline{X_*}^{\alpha_0} \qquad \text{veya} \qquad \overline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - r > \overline{X_*}^{\alpha_0}$$

olmalıdır. Buradan

$$\underline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - \underline{X_*}^{\alpha_0} > r \qquad \text{veya} \qquad \overline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - \overline{X_*}^{\alpha_0} > r$$

yazılabilir. Diğer taraftan Yardımcı Teorem 3.2.3 e göre, her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|\underline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - \underline{X_*}^{\alpha_0}\right| \leq r \ \text{ ve } \ \left|\overline{\limsup X_i}^{\alpha_0} - \overline{X_*}^{\alpha_0}\right| \leq r$$

olduğundan bir çelişki elde edilir. O halde $\limsup X_i - r \preceq X_*$ olmalıdır.
Şimdi ise $X_* \preceq \liminf X_i + r_1$ olmadığını kabul edelim. Yani en az bir $\alpha_0 \in [0,1]$ için

$$\underline{X_*}^{\alpha_0} > \underline{\liminf X_i}^{\alpha_0} + r \qquad \text{veya} \qquad \overline{X_*}^{\alpha_0} > \overline{\liminf X_i}^{\alpha_0} + r$$

olsun. Buradan

$$\underline{X_*}^{\alpha_0} - \underline{\liminf X_i}^{\alpha_0} > r \qquad \text{veya} \qquad \overline{X_*}^{\alpha_0} - \overline{\liminf X_i}^{\alpha_0} > r$$

yazılabilir. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 3.2.3 e göre, her $\alpha \in [0,1]$ için

$$\left|\underline{\liminf X_i}^{\alpha_0} - \underline{X_*}^{\alpha_0}\right| \leq r \;\; \text{ve} \;\; \left|\overline{\liminf X_i}^{\alpha_0} - \overline{X_*}^{\alpha_0}\right| \leq r$$

olduğundan bir çelişki elde edilir. Bu durumda $X_* \preceq \liminf X_i + r_1$ olmalıdır.

O halde $\mathrm{LIM}^r X_i \subseteq [\limsup X_i - r_1, \liminf X_i + r_1]$ dir.

Yukarıdaki teoremin tersi reel sayı dizileri için doğru olmasına rağmen aşağıdaki örnekten görüleceği üzere bulanık sayı dizileri için doğru değildir.

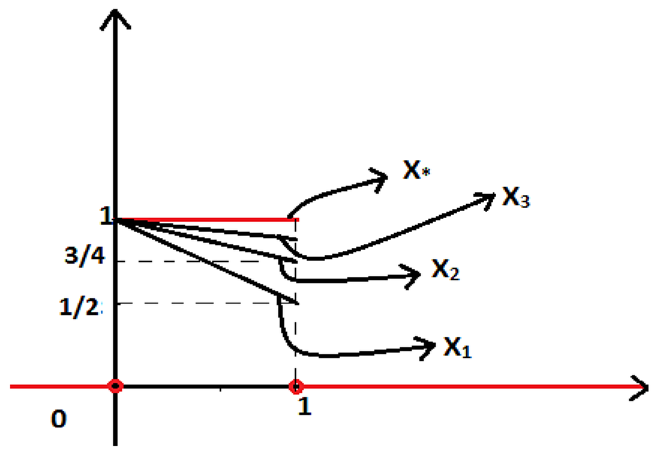
Örnek 3.2.6. $\{X_i\}$ bulanık sayı dizisini,

$$X_i(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2i}x + 1 & , \; x \in [0,1] \\ 0 & , \; \text{diğer} \end{cases}$$

ve X_* bulanık sayısını,

$$X_*(x) := \begin{cases} 1 & , \; x \in [0,1] \\ 0 & , \; \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\{X_i\}$ dizisinin ilk 3 teriminin ve X_* bulanık sayısının grafikleri Şekil 3.2 deki gibidir.



Şekil 3.2: X_1, X_2, X_3, X_* bulanık sayıları

Her $i \in \mathbb{N}$ için $\left|\overline{X}_*^1 - \overline{X}_i^1\right| = |1-0| = 1$ olduğundan $D(X_i, X_*) \geq 1$ dir. Dolayısıyla $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına yakınsak değildir. $\limsup X_i = \liminf X_i = X_*$ olduğundan $X_* \in [\limsup X_i - (1/2)_1, \liminf X_i + (1/2)_1]$ dır. Fakat $X_* \notin \mathrm{LIM}^{1/2} X_i$ dir.

Teorem 3.2.7. $r-$limit kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

İspat: $\sup\{D(Y,Z) : Y, Z \in \mathrm{LIM}^r X_i\} \leq 2r$ olduğunu gösterelim. Tersini kabul edersek, supremum tanımından $Y, Z \in \mathrm{LIM}^r X_i$ vardır öyle ki

$$\lambda := D(Y,Z) > 2r$$

yazılabilir. $\varepsilon \in \left(0, \frac{\lambda}{2} - r\right)$ keyfî olsun. $i \to \infty$ için $X_i \xrightarrow{r} Y$ olduğundan en az bir $i'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i'_\varepsilon$ için

$$D(X_i, Y) < r + \varepsilon$$

ve $i \to \infty$ için $X_i \xrightarrow{r} Z$ olduğundan bir $i_\varepsilon^{''} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon^{''}$ için

$$D(X_i, Z) < r + \varepsilon$$

yazılabilir. $i_\varepsilon := \max\{i_\varepsilon^{'}, i_\varepsilon^{''}\}$ olmak üzere her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} D(Y,Z) &\leq D(X_i,Y) + D(X_i,Z) < r + \varepsilon + r + \varepsilon = 2(r+\varepsilon) \\ &< 2r + 2\left(\frac{\lambda}{2} - r\right) = \lambda = D(Y,Z) \end{aligned}$$

olur. $D(Y,Z) < D(Y,Z)$ bulunduğundan bir çelişki elde edilir. O halde bir dizinin $r-$limitlerinin kümesinin çapı $2r$ den büyük olamaz.

Bulanık sayıların klasik yakınsaklığı gereğince bir bulanık sayı dizisinin limit noktası, bu dizinin bir altdizisinin de limit noktasıdır. Kaba yakınsaklıkta da dizinin her $r-$limiti bir altdizinin $r-$limiti olmasına rağmen, altdizi, dizinin $r-$limit noktalarından başka $r-$limitlere sahip olabilir.

Teorem 3.2.8. $\{X_{k_i}\}$ dizisi, $\{X_i\}$ dizisinin bir altdizisi ise $\mathrm{LIM}^r X_i \subseteq \mathrm{LIM}^r X_{k_i}$ dir.

İspat: $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ olsun. Buradan her $\varepsilon > 0$ için bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için $D(X_i, X_*) < r + \varepsilon$ yazıbilir. $\{X_{k_i}\}$ dizisi, $\{X_i\}$ dizisinin altdizisi olduğundan $k_i > i_\varepsilon$ için $D(X_{k_i}, X_*) < r + \varepsilon$ olur. Yani $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_{k_i}$ dir.

Aşağıdaki teoremde bir dizinin $r-$yakınsak olabilmesi için bir kriter verilmiştir.

Teorem 3.2.9. Bir $\{X_i\}$ dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter koşul, $\mathrm{LIM}^r X_i \neq \varnothing$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ sayısının var olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\{X_i\}$ dizisi sınırlı olsun. O halde $s := \sup\{D(X_i, 0_1) : i \in \mathbb{N}\} < \infty$ yazılabilir. $r = s$ alınırsa $0_1 \in \mathrm{LIM}^r X_i$ olur. Yani $\mathrm{LIM}^r X_i \neq \varnothing$ dir.

$(\Leftarrow)$ En az bir $r \geq 0$ için $\mathrm{LIM}^r X_i \neq \varnothing$ ise $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ yazıbilir. Tanımdan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, X_*) < r + \varepsilon$$

dir, yani $\{X_i\}$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer terimleri X_* merkezli $r+\varepsilon$ yarıçaplı yuvarın içerisindedir.

$$t := \max\{D(X_*, 0_1), D(X_1, 0_1), D(X_2, 0_1), ..., D(X_{i_\varepsilon}, 0_1)\}$$

şeklinde tanımlanırsa $\{X_i\}$ dizisi 0_1 merkezli t yarıçaplı yuvar ile sınırlandırılır.

Klasik limit kümeleri ya tek noktadan oluşacağından ya da boş küme olacağından bu kümelerin özelliklerini incelemenin bir anlamı yoktur. Fakat $r > 0$ için $r-$limit kümesinin genellikle tek nokta kümesi olmadığı bilinmektedir. Bu sebeple aşağıda ifade edilen özellikleri incelemekte fayda vardır.

Teorem 3.2.10. $\mathrm{LIM}^r X_i$ kapalı bir kümedir.

İspat: $\mathrm{LIM}^r X_i$ kümesinde yakınsak keyfî bir $\{Y_j\}$ dizisi alınması durumunda, bu dizinin limiti, $\mathrm{LIM}^r X_i$ kümesinin elemanı olursa $\mathrm{LIM}^r X_i$ kümesinin kapalı olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bir $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\{Y_j\}$ dizisi Y_* bulanık sayısına yakınsak olsun. O halde bir $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $j \geq j_\varepsilon$ için

$$d(Y_j, Y_*) \leq \varepsilon/2$$

yazılabilir. $\{Y_j\} \subset \mathrm{LIM}^r X_i$ olduğundan $Y_{j_\varepsilon} \in \mathrm{LIM}^r X_i$ dir. Bu durumda bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, Y_{j_\varepsilon}) < r + \varepsilon/2$$

olur. Böylece $\widetilde{i}_\varepsilon := \max\{j_\varepsilon, i_\varepsilon\}$ olmak üzere her $i \geq \widetilde{i}_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} D(X_i, Y_*) &\leq D(X_i, Y_{j_\varepsilon}) + D(Y_{j_\varepsilon}, Y_*) \\ &< r + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = r + \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $Y_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathrm{LIM}^r X_i$ kümesi kapalı bir kümedir.

Teorem 3.2.11. $\mathrm{LIM}^r X_i$ konveks bir kümedir.

İspat: $\delta, \lambda \in \mathrm{LIM}^r X_i$ keyfî olsun. $r-$yakınsaklık tanımından her $\varepsilon > 0$ için bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, \delta) < r + \varepsilon \ \text{ ve } D(X_i, \lambda) < r + \varepsilon$$

yazılabilir. Eğer $i \geq i_\varepsilon$ ve $t \in [0,1]$ için $D(X_i, t\delta + (1-t)\lambda) < r + \varepsilon$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır:

$$\begin{aligned}
D(X_i, t\delta + (1-t)\lambda) &= D(X_i - tX_i + tX_i, t\delta + (1-t)\lambda) \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \underline{(X_i - tX_i + tX_i)}^\alpha - \underline{(t\delta + (1-t)\lambda)}^\alpha \right|, \right. \\
&\qquad \left. \left| \overline{(X_i - tX_i + tX_i)}^\alpha - \overline{(t\delta + (1-t)\lambda)}^\alpha \right| \right\} \\
&= \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \underline{(X_i - tX_i)}^\alpha + \underline{(tX_i)}^\alpha - \underline{((1-t)\lambda)}^\alpha - \underline{(t\delta)}^\alpha \right|, \right. \\
&\qquad \left. \left| \overline{(X_i - tX_i)}^\alpha + \overline{(tX_i)}^\alpha - \overline{((1-t)\lambda)}^\alpha - \overline{(t\delta)}^\alpha \right| \right\} \\
&\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \max \left\{ \left| \underline{(X_i - tX_i)}^\alpha - \underline{((1-t)\lambda)}^\alpha \right| + \left| \underline{(tX_i)}^\alpha - \underline{(t\delta)}^\alpha \right|, \right. \\
&\qquad \left. \left| \overline{(X_i - tX_i)}^\alpha - \overline{((1-t)\lambda)}^\alpha \right| + \left| \overline{(tX_i)}^\alpha - \overline{(t\delta)}^\alpha \right| \right\} \\
&\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ \max \left\{ \left| \underline{(X_i - tX_i)}^\alpha - \underline{((1-t)\lambda)}^\alpha \right|, \left| \overline{(X_i - tX_i)}^\alpha - \right. \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. \left. \overline{((1-t)\lambda)}^\alpha \right| \right\} + \max \left\{ \left| \underline{(tX_i)}^\alpha - \underline{(t\delta)}^\alpha \right|, \left| \overline{(tX_i)}^\alpha - \overline{(t\delta)}^\alpha \right| \right\} \right\} \\
&\leq \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ (1-t) \max \left\{ \left| \underline{X_i}^\alpha - \underline{\lambda}^\alpha \right|, \left| \overline{X_i}^\alpha - \overline{\lambda}^\alpha \right| \right\} \right\} \\
&\quad + \sup_{\alpha \in [0,1]} \left\{ t \max \left\{ \left| \underline{X_i}^\alpha - \underline{\delta}^\alpha \right|, \left| \overline{X_i}^\alpha - \overline{\delta}^\alpha \right| \right\} \right\} \\
&\leq (1-t) D(X_i, \lambda) + t D(X_i, \delta) \\
&< (1-t)(r+\varepsilon) + t(r+\varepsilon) = r + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Aşağıdaki teoremlerde bulanık sayı dizilerinin kaba yakınsaklığı ve klasik yakınsaklığı arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Teorem 3.2.12. $Y_i \to X_*$ olmak üzere her $i \in \mathbb{N}$ için $D(X_i, Y_i) \leq r$ $(i = 1, 2, 3, ...)$ olacak şekilde bir $\{Y_i\}$ dizisi varsa $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına $r-$yakınsaktır.

İspat: $i \to \infty$ için $Y_i \to X_*$ olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(Y_i, X_*) < \varepsilon$$

yazılabilir. Hipotezden $D(X_i, Y_i) \leq r$ olduğundan her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, X_*) \leq D(X_i, Y_i) + D(Y_i, X_*) < r + \varepsilon$$

olur. Sonuç olarak $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına $r-$yakınsaktır.

Aşağıdaki teoremde, yakınsak bir bulanık sayı dizisinin $r-$limit kümesi karakterize edilmiştir.

Teorem 3.2.13. Eğer $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına yakınsak ise $\text{LIM}^r X_i = \overline{B_r}(X_*)$ dir.

İspat: $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına yakınsak olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için bir $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, X_*) < \varepsilon$$

yazılabilir. Keyfî bir $Y \in \overline{B}_r(X_*) := \{\mu \in L(\mathbb{R}) : D(\mu, X_*) \leq r\}$ alınırsa, $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(X_i, Y) \leq D(X_i, X_*) + D(X_*, Y) < \varepsilon + r$$

elde edilir. Böylece $Y \in \text{LIM}^r X_i$ dir. Şimdi de keyfî bir $Y \in \text{LIM}^r X_i$ elemanı alalım. O halde her bir $\varepsilon > 0$ için bir $i_\varepsilon^{'} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon^{'}$ için

$$D(X_i, Y) < r + \varepsilon$$

yazılabilir. Aynı zamanda $\{X_i\}$ dizisi X_* bulanık sayısına yakınsak olduğundan bir $i_\varepsilon^{''} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $i \geq i_\varepsilon^{''}$ için

$$D(X_i, X_*) < \varepsilon$$

yazılabilir. $i_\varepsilon := \max\left\{i'_\varepsilon, i''_\varepsilon\right\}$ şeklinde tanımlanırsa her $i \geq i_\varepsilon$ için

$$D(Y, X_*) \leq D(X_i, Y) + D(X_i, X_*) < r + 2\varepsilon$$

elde edilir. ε sayısı keyfî olduğundan $D(Y, X_*) \leq r$ dir. Dolayısıyla $Y \in \overline{B}_r(X_*)$ dir. O halde $\mathrm{LIM}^r X_i = \overline{B}_r(X_*)$ dir.

Teorem 3.2.14. $\{X_i\}$ dizisinin yığılma noktalarının kümesi L_X olsun. $L_X \neq \varnothing$ ise

$$\mathrm{LIM}^r X_i \subset \bigcap_{c \in L_X} \overline{B}_r(c) \tag{3.8}$$

dir.

İspat: $\{X_i\}$ dizisinin her bir yığılma noktası c ve her $X_* \in \mathrm{LIM}^r X_i$ için

$$D(X_*, c) \leq r$$

dir. Aksi takdirde, $\varepsilon := (D(X_*, c) - r)/2 > 0$ olmak üzere sonlu sayıda X_i için

$$D(X_*, X_i) \geq r + \varepsilon$$

olur. Bu ise (3.6) ifadesi ile çelişir. Yani (3.8) bağıntısı sağlanır.

4. KAYNAKLAR

Aytar, S., Pehlivan, S., Mammadov, M.A., 2008. The core of a sequence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 159, $3369-3379$.

Aytar, S., 2008a. The rough limit set and the core of a real sequence. Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 29, $283-290$.

Aytar, S., 2008b. Rough statistical convergence. Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 29, $291-303$.

Burgin, M., 2000. Theory of fuzzy limit. Fuzzy Set and Systems, 115, $433-443$.

Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., 1972. On fuzzy mapping and control. IEEE Trans. Systems Man. Cybernet, 2, $30-34$.

Congxin, W., Cong, W., 1997. The supremum and infimum of the set of fuzzy numbers and its application. Journal Math. Anal. Appl., 210, $499-511$.

Diamond, P., Kloeden, P., 1994. Metric Spaces of Fuzzy Sets: Theory and Applications. World Scientific, Singapore.

Dubois, D., Prade, H., 1980. Fuzzy Sets and Systems. Academic Press, New York.

Kaleva, O., 1985. On the convergence of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 17, $53-65$.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1984. Introduction to Fuzzy Arithmetic. Van Nostrand Reinhohld.

Matloka, M., 1986. Sequence of fuzzy numbers. Busefal, 28, $28-37$.

Morrison, T., J., 2000. Functional Analysis. Gustavus Adolphus College, St. Peter, Minnesota.

Nanda, S., 1989. On sequence of fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 33, 123-126.

Phu, H.X., 2001. Rough convergence in normed linear spaces. Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 22, 201 – 224.

Phu, H.X., 2002. Rough continuity of linear operators. Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 23, 139 – 146.

Phu, H.X., 2003. Rough convergence in infinite dimensional normed spaces. Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 24, 285 – 301.

Puri, M.L., Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions. J. Math. Anal. Appl., 91, 552 – 558.

Rockafellar, R., Tyrrell, R., 1997. Convex Analysis, Princeton University Press, New Jersey.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Fatma GECİT
Doğum Yeri ve Yılı	:	İzmir, 1987
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	:	Özel Betül Lisesi, 2001-2004
Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2005-2009
Yüksek Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2009-

Yayınları (Bildiriler):

1) **Gecit, F.**, Aytar, S., 2011. Rough Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers. The Fourth Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), Bakü, Azerbaycan.

2) **Gecit, F.**, Ölmez, Ö., Aytar, S., 2011. Konik Normlu Uzaylarda Kaba Yakınsaklık. 24. Ulusal Matematik Sempozyumu, Bursa, Türkiye.