T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(A)(C, α) TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Yılmaz ERDEM

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

II. Danışman: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2012

TEZ ONAYI

Yılmaz ERDEM tarafından hazırlanan **“(A)(C, α) Toplanabilme Metodu İçin Tauber Tipi Teoremler”** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

II. Danışman: Doç. Dr. İbrahim ÇANAK
Ege Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri:
Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI
Maltepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ali KÖKCE
Süleyman Demirel Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet ŞAHİNER
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Mevlüde Yakıt ONGUN
Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mehmet Cengiz KAYACAN
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Doktora Tezi

(A)(C, α) TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Yılmaz ERDEM

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kısaca toplanabilme metotları ve Tauber teorisinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, tez kapsamında kullanılacak olan tanım ve gösterimler, klasik Tauber tipi teoremler ve Pati (2005) nin yapmış olduğu teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (A)(C, α) toplanabilme metodu için Pati (2005) nin vermiş olduğu teoremlerin bir geliştirilmesi olan Tauber tipi teoremler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, (A)(C, α) toplanabilme metodu için genelleştirilmiş bir Tauber tipi teorem ve gerekli lemmalar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: (A)(C, α) toplanabilme metodu, (C, α) toplanabilme metodu, Abel toplanabilme metodu, Tauber tipi teoremler.

2012, 65 sayfa

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

TAUBERIAN THEOREMS FOR (A)(C, α) SUMMABILITY METHODS

Yılmaz ERDEM

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, historical development of classical Tauberian theory and summability theory are mentioned, shortly.

In the second chapter, the definitions and notations, which are going to be used throughout the thesis, are given. Classical Tauberian theorems and the theorems in Pati (2005) are investigated.

In the third chapter, Tauberian theorems, which are given in Pati (2005) for (A)(C, α) summability method, are generalized.

In the fourth chapter, a generalized Tauberian type theorem and necessary lemmas for (A)(C, α) summability method are given.

Keywords: (A)(C, α) summability method, (C, α) summability method, Abel summability method, Tauberian theorems.

2012, 65 pages

TEŞEKKÜR

Doktora aşaması boyunca engin bilgi ve tecrübeleriyle, çok değerli katkıları ve yol göstericiliğinden dolayı, tüm zorlukları kolaylaştıran danışman hocam Sayın Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU'NA;

Doktora süresince her zaman desteğini gördüğüm Prof. Dr. A. Ceylan ÇÖKEN'E;

Bir danışmandan ziyade her konuda desteğini gördüğüm, akademik yaşamımda bir örnek olarak gördüğüm İkinci Danışman'ım Doç. Dr. İbrahim ÇANAK'A;

Bu sürece birlikte başlayarak derslerde, sınavlarda, yollarda ve kazalarda hep beraber olduğum arkadaşım Dr. Ümit TOTUR'A;

Beni yetiştirerek bu günlere getiren, maddi manevi her türlü desteklerini üzerimde hissettiğim annem, babam ve ablama;

Bu zorlu süreçte hep yanımda olan, muzdarip olduğum dertleri dinleyerek sıkıntılarımı paylaşan sevgili eşim Mihrican'a ve oğlum Ömer Meriç'e

teşekkür ederim.

2768-D-11 numaralı proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Yılmaz ERDEM

ISPARTA, 2012

SİMGELER DİZİNİ

$\sigma_n^{(1)}(s)$	$s=(s_n)$ dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi
$s_n=O(1)$	(s_n) dizisinin sınırlı olması
$s_n=o(1)$	(s_n) dizisinin sıfıra yakınsak olması
Δs_n	(s_n) dizisinin geri farkı
$\sum a_n$	Reel sayıların bir serisi
$[\lambda n]$	λn sayısının tam kısmı
$\Gamma(x)$	x sayısının gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

XVIII. yüzyıldan beri pek çok çalışmayla gelişmekte olan toplanabilme teorisi, matematik analizin çok geniş bir alanıdır. Toplanabilme metotlarının genel amacı, belli koşullar altında ıraksak serilerin (dizilerin) yapıları hakkında bazı bilgiler elde edilmesini sağlamaktır. Yakınsak olan bir seri, yakınsadığı noktaya bir toplanabilme metodu tarafından da toplanabiliyorsa, o metoda regüler denir ve dolayısıyla yakınsak olan bir seri yakınsadığı noktaya regüler bir metot tarafından toplanabilir. Fakat bir metot tarafından toplanabilen bir serinin yakınsak olması gerekmez. Bunun sağlanabilmesi, uygun koşullar altında mümkündür. Bu türdeki ilk çalışmayı A. Tauber (1897) yapmıştır. Tauber (1897) in yapmış olduğu bu çalışma, yeni bir araştırma alanını ortaya çıkarmıştır. Tauber (1897), Abel toplanabilme metodu ile toplanabilen bir serinin yakınsak olabilmesi için gereken koşulları göstermiştir. Bu alanda ilk çalışmayı A. Tauber yaptığı için bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesini sağlayan koşullara Tauber koşulu ve bu türdeki teoremlere Tauber tipi teorem adı verilmektedir. Bu tez kapsamında toplanabilme metotlarından biri olan (A)(C, α) toplanabilme metodu ele alınacak ve bu metot için Tauber tipi teoremler verilecektir.

Literatürdeki klasik çalışmalarda amaç, Tauber (1897) in verdiği koşulları zayıflatmaktır. Bu alanda yapılan başlıca çalışmalar Hardy (1910), Littlewood (1910), Landau (1910), Hardy ve Littlewood (1914), Schmidt (1925) ve Szàsz (1935) olarak sıralanabilir.

Kogbetliantz (1931), Lord (1935) ve Jakimovski (1952) tarafından birbirinden bağımsız olarak (A)(C, α) toplanabilme metodu, farklı gösterimlerle tanımlanmış ve bu metot ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca, Bosanquet (1932), Szàsz (1952), Rajagopal (1958), Badiozzaman ve Thorpe (1996a, b) da (A)(C, α) toplanabilme metodu ile ilgili çalışmalar yapmıştır.

Pati (2005), Abel toplanabilme metodu için verilen klasik Tauber tipi teoremleri genelleştirerek $\alpha > -1$ olmak üzere (A)(C, α) toplanabilme metodunu için yeni

Tauber tipi teoremler vermiştir. Bu yeni teoremlerde $\alpha = 0$ için klasik teoremlerin gerçeklendiğini ispatlamıştır.

Yüzyılı aşkın bir süredir toplanabilme teorisi alanında yapılan çalışmalar günümüzde de birçok araştırmacının ilgisini çekmeye devam etmektedir.

Hazırlanan bu doktora tezinde (A)(C, α) toplanabilme metodu için yeni Tauber tipi teoremlerden bahsedilmiştir. Tezde ilk olarak (C, α), (C, 1), Abel ve (A)(C, α) toplanabilme metotları tanıtılıp, gerekli tanımlar ve notasyonlar verilmiş, Tauber teorisinin gelişiminden ve yapılan bazı klasik çalışmalardan bahsedilmiştir. Daha sonra Pati (2005) nin bazı teoremleri verilerek, bu teoremlerin ve klasik Tauber tipi teoremlerin bir genelleştirilmesi olan yeni Tauber tipi teoremler verilmiştir. Ayrıca elde edilen bu teoremlerin önceki çalışmalarla karşılaştırılması yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan tanım ve gösterimlere yer verilecek ve klasik Tauber teorisi özetlenecektir.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reel sayıların bir serisi için bu çalışma boyunca $\sum a_n$ gösterimi kullanılacaktır.

$\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right)$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.1. Herhangi bir $\alpha > -1$ için,

$$(1-x)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha} x^n \qquad (|x| < 1)$$

ifadesinden A_n^{α} üretilirse,

$$A_n^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$$

şeklinde bulunur. Gamma fonksiyonunun $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliğinden dolayı,

$$A_0^{\alpha} = 1 \quad \text{ve} \quad A_n^{\alpha} = \frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)}{n!} \quad n \geq 1,$$

elde edilir.

$$S_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_{\nu}$$

ve

$$s_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1} s_\nu = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha} a_\nu$$

olarak alındığında $n \to \infty$ iken $\left(s_n^\alpha\right)$ dizisi l ye yakınsıyorsa, $\sum a_n$ serisi l ye α *mertebeden Cesàro metodu ile toplanabilir* veya daha kısa olarak $\sum a_n$ *serisi* l *ye (C, α) toplanabilir* denir ve $\sum a_n \to l\ (C,\ \alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1 de $\alpha = 0$ alındığında adi yakınsaklık elde edilir. Yani (C, 0) toplanabilme metodu ile yakınsaklık birbirine eşdeğerdir.

Herhangi bir negatif olmayan n tamsayısı için $\tau_n = na_n = n\Delta s_n$ şeklinde tanımlansın. $\left(\tau_n\right)$ dizisinin (C, α) ortalaması olan, $\left(\tau_n^\alpha\right)$ dizisi de $\left(s_n^\alpha\right)$ dizisine benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1 de $\alpha = 1$ seçilirse, $\left(s_n\right)$ dizisinin aritmetik ortalamaları olan,

$$\left(\sigma_n^{(1)}\left(s\right)\right) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k\right)$$

dizisi bulunur.

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}\left(s\right) = l \tag{2.1}$$

ise $\left(s_n\right)$ dizisi l ye (C, 1) *toplanabilir* denir ve $s_n \to l\ \left(C,1\right)$ ile gösterilir (Hardy, 1991).

Tanım 2.2.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(1-x\right)\sum_{n=0}^{\infty} s_n, \quad |x|<1$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = l \tag{2.2}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye *Abel toplanabilir* denir ve kısaca $\sum a_n \to l \ (A)$ ile gösterilir (Hardy, 1991).

Borwein (1958), $\beta > \alpha >$ -1 için,

$$(\mathrm{C}, \alpha) \subset (\mathrm{C}, \beta)$$

olduğunu, yani (C, α) toplanabilmenin (C, β) toplanabilmeyi gerektirdiğini göstermiştir.

Borwein (1958), ayrıca $\alpha, \beta >$ -1 için,

$$(\mathrm{C}, \alpha)(\mathrm{C}, \beta) \cong (\mathrm{C}, \alpha + \beta)$$

olduğunu ispatlamıştır. Yani $(\mathrm{C}, \alpha)(\mathrm{C}, \beta)$ ile $(\mathrm{C}, \alpha + \beta)$ toplanabilme birbirine denktir.

Jakimovski (1952), her $\alpha >$ -1 için α ne kadar büyük olursa olsun,

$$(\mathrm{C}, \alpha) \subset (\mathrm{A})$$

olduğunu göstermiştir. Yani (C, α) toplanabilme Abel toplanabilmeyi gerektirir, fakat bunun tersi her zaman doğru değildir.

Burada akla gelebilecek soru bu metotların sınıfı ile adi yakınsaklık sınıfı arasında nasıl bir ilişki olduğudur. Bu soruya şu şekilde cevap verilebilir:

Bir sayıya yakınsak olan bir seri, aynı sayıya $\alpha > 0$ için (C, α) ve Abel toplanabilirdir. Fakat (C, α) veya Abel toplanabilir olan bir serinin yakınsak olması gerekmez (Hardy, 1991). (C, 1) ve Abel toplanabilir olan bir seri için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 2.1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi ıraksak bir seridir. Fakat hem (C, 1) hem de Abel toplanabilirdir. Gerçekten, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right)$ olsun. O zaman (s_n) dizisi,

$$(s_n) = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\right) = \begin{cases} 1, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir ve (s_n) dizisinin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\left(\sigma_n^{(1)}(s)\right) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k\right) = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2(n+1)}, & n \text{ çift ise} \\ \dfrac{1}{2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur. Buradan,

$$\lim_n \sigma_n^{(1)}(s) = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Yani $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi $\frac{1}{2}$ ye (C, 1) toplanabilirdir. Diğer taraftan, $0 \le x < 1$ için,

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+\mathrm{x}} = \frac{1}{2}$$

elde edilir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ serisi $\frac{1}{2}$ ye Abel toplanabilirdir.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi (2.1) veya (2.2) limitlerini gerçekleyen serilerin sınıfı yakınsak olan serilerin sınıfından daha geniştir.

Buna ek olarak, (C, 1) toplanabilir olan bir dizi aynı noktaya Abel toplanabilirdir. Fakat tersi doğru değildir. Aşağıda Abel toplanabilir olup, (C, 1) toplanabilir olmayan bir dizi, örnek olarak verilmiştir.

Örnek 2.2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ serisi ıraksak bir seridir. Bu seri Abel toplanabilirdir, fakat (C, 1) toplanabilir değildir. Gerçekten, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $(s_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\right)$ olsun. O zaman (s_n) dizisi,

$$(s_n)=\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\right)=\begin{cases}\frac{\mathrm{n}}{2}, & n \text{ çift ise}\\ \frac{-\mathrm{n}-1}{2}, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir, dolayısıyla (s_n) dizisinin ıraksak olduğu görülebilir. Eğer (s_n) dizisinin aritmetik ortalaması alınırsa,

$$\left(\sigma_n^{(1)}(s)\right)=\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}s_k\right)=\begin{cases}0, & n \text{ çift ise}\\ -\frac{1}{2}, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

elde edilir. Buradan $\left(\sigma_n^{(1)}(s)\right)$ dizisinin ıraksak olduğu görülür. Diğer taraftan, $0 \le x < 1$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

olduğundan, bu eşitlik terim terime türevlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

elde edilir. O halde,

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^n = \lim_{x\to 1^-}\left(-\frac{x}{(1+x)^2}\right) = -\frac{1}{4}$$

bulunur. Yani $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ serisi $-\frac{1}{4}$ e Abel toplanabilirdir.

Yukarıdaki Örnek 2.2 den de görüldüğü gibi (2.2) limitini gerçekleyen serilerin sınıfı (2.1) limitini gerçekleyen serilerin sınıfından daha geniştir.

Bu çalışmada negatif olmayan bir n tamsayısı için, (s_n) reel bir sayı dizisi iken, $s_n = O(1)$ gösterimi, (s_n) dizisinin sınırlılığını ve $s_n = o(1)$ gösterimi, (s_n) dizisinin sıfıra yakınsamasını ayrıca negatif olmayan bir H sayısı için $s_n > -H$ ise (s_n) dizisinin tek taraflı sınırlılığını ifade edecektir.

Bir (s_n) dizisi ve $m \geq 1$ tamsayısı için,

$$(n\Delta)_m s_n = n\Delta((n\Delta)_{m-1}s_n) = (n\Delta)_{m-1}(n\Delta s_n)$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$(n\Delta)_0 s_n = s_n$$

ve

$$(n\Delta)_1 s_n = n\Delta s_n = n\left(s_n - s_{n-1}\right)$$

olarak gösterilmektedir.

Abel (1826) tarafından yapılmış olan aşağıdaki teoremin tersi pek çok araştırmacı için merak konusu olmuştur.

Eğer $\sum a_n$ serisi l ye yakınsıyor ise bu seri aynı zamanda l ye Abel metodu ile toplanabilir.

(2.1) veya (2.2) limitini gerçekleyen serilerin sınıfından yakınsaklığa geçiş serinin genel terimi üzerine konulan uygun koşullar altında mümkündür. Bu türdeki ilk çalışma A. Tauber (1897) tarafından yapılmıştır. Bu yüzden genel olarak bir toplanabilme metodundan yakınsaklığın yeniden elde edilmesi için konulan koşullara *Tauber koşulları* ve bu koşulları içeren teoremlere de *Tauber tipi teoremler* denir. Bu çalışma alanı günümüze kadar devam eden bir araştırma konusu olmuştur.

Aşağıda Tauber teorisinin temelini oluşturan önemli teoremler verilmektedir.

Abel toplanabilir olan bir serinin yakınsaklığının elde edildiği ilk teoremler, Tauber (1897) tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremler literatürde *Tauber'in Birinci ve İkinci Teoremi* olarak bilinir.

Teorem 2.1. ***(Tauber'in Birinci Teoremi)*** Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve

$$\tau_n = na_n = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır. (Hardy, 1991; Boos, 2000; Korevaar, 2004).

Tauber (1897), Teorem 2.1 koşulundan daha zayıf bir koşul olan,

$$\left(\tau_n^1\right) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k a_k\right)$$

dizisinin sıfıra yakınsamasıyla değiştirilebileceğini göstermiştir.

Teorem 2.2. ***(Tauber'in İkinci Teoremi)*** Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve

$$\tau_n^1 = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır. (Peyerimhoff, 1969; Powell ve Shah, 1972; Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Bundan sonra yapılan çalışmalarda bir serinin Abel veya (C, α) toplanabilir olmasından yakınsaklığın elde edilmesini sağlayacak daha zayıf koşullar bulmak amaçlanmıştır. Hardy (1910), aşağıdaki önemli sonucu elde etmiştir.

Teorem 2.3. Herhangi bir $\alpha > 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilir ve

$$\tau_n = O(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır (Hardy, 1991).

Landau (1910), Teorem 2.3 deki koşulu H bir pozitif sabit olmak üzere $\tau_n > -H$ ile değiştirerek daha genel bir teorem elde etmiştir.

Teorem 2.4. Herhangi bir $\alpha > 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilir ve H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$\tau_n > -H$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Tauber'in Birinci Teoremi ile Teorem 2.3 ün bir genelleştirilmesi Littlewood (1910) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.5. Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve

$$\tau_n = O(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsar (Peyerimhof, 1969; Powel ve Shah, 1972; Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Ayrıca, Réyni (1946), $\tau_n = O(1)$ koşulu yerine $\tau_n^1 = O(1)$ alındığında Abel toplanabilmeden yakınsaklığın elde edilemediğini ispatlamıştır.

Littlewood (1911), yeterince büyük bir n sayısı için,

$$s_n = O(1)$$

olduğunda Abel toplanabilme ile (C, 1) toplanabilmenin denk olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 2.6. Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve

$$s_n = O(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, 1) toplanabilirdir.

Hardy ve Littlewood (1914), Landau (1910) nun verdiği koşul ile Abel toplanabilir bir serinin yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Bu teorem *Hardy-Littlewood Teoremi* olarak bilinir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Teorem 2.7. ***(Hardy-Littlewood Teoremi)*** Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$\tau_n > -H$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır.

Hardy ve Littlewood (1914), ayrıca her n için, $s_n \geq 0$ olduğunda Abel toplanabilme ile (C, 1) toplanabilmenin denk olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 2.8. Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve yeterince büyük bir n sayısı için,

$$s_n \geq 0$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, 1) toplanabilirdir.

Karamata (1930), yaptığı çalışmada Abel toplanabilme ile (C, 1) toplanabilme metotları arasındaki ilişkiyi incelemiş ve Abel toplanabilir bir serinin kısmi toplamlar dizisi üzerine koşul koyarak serinin (C, 1) toplanabilir olduğunu göstermiştir. Bu teorem *Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu* olarak bilinir.

Teorem 2.9. ***(Karamata'nın Temel Teoreminin Sonucu)*** Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$s_n > -H$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, 1) toplanabilirdir.

Szàsz (1935), Teorem 2.7 yi genelleştirerek aşağıdaki teoremi elde etmiştir.

Teorem 2.10. Eğer $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve H pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\tau_n^1 > -H$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, 1) toplanabilirdir.

Schmidt (1925), bir (s_n) dizisinin yavaş salınımlı olmasını aşağıdaki gibi tanımlamıştır (Hardy, 1991; Boos, 2000; Korevaar, 2004).

Tanım 2.3. $n > m \to \infty$ için $\dfrac{n}{m} \to 1$ olmak üzere, $s_n - s_m = o(1)$ sağlanıyorsa (s_n) dizisine *yavaş salınımlı dizi* denir.

Stanojević (1998), yavaş salınımlı dizi tanımını daha işlevsel olarak kullanabilmek için aşağıdaki gibi yeniden ifade etmiştir.

Tanım 2.4. Bir (s_n) dizisi için, $[\lambda n]$, λn nin tam kısmı olmak üzere,

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{n} \max_{n+1 \le k \le [\lambda n]} \left| \sum_{j=n+1}^{k} \Delta s_j \right| = 0$$

ise (s_n) dizisine *yavaş salınımlı dizi* denir.

Yavaş salınımlı dizilerin sınıfı, yakınsak olan dizilerin sınıfını kapsar. Yani her yakınsak dizi yavaş salınımlıdır. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $(s_n) = (\log n)$ dizisi yavaş salınımlıdır fakat yakınsak değildir. Gerçekten,

$$\sum_{j=n+1}^{k} \Delta log j = \sum_{j=n+1}^{k} log\left(\frac{j}{j-1}\right) = \log \prod_{j=n+1}^{k} \frac{j}{j-1} = \log\left(\frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{k}{k-1}\right)$$

olur. Buradan tanım uygulanırsa,

$$\max_{n+1\le k\le[\lambda n]} \log\left(\frac{k}{n}\right) = \log\left(\frac{[\lambda n]}{n}\right)$$

elde edilir. Önce $n \to \infty$ için üst limit alınıp ardından $\lambda \to 1^{+}$ için limit alındığında tanımın sağlandığı görülür. Ayrıca yavaş salınımlılığın tanımından, bir (s_n) dizisi yavaş salınımlı ise $\Delta s_n = o(1),\ n \to \infty$ olduğu kolayca görülebilir.

Klasik Tauber teorisinin temelini oluşturan çalışmaların ardından yakınsaklığın yeniden elde edilebilmesi için yeni araçlara ihtiyaç duyulmuştur. Yukarıda verilen yavaş salınımlılık tanımı bu araçlardan biridir. Schmidt (1925), Littlewood (1910) un verdiği koşulun (s_n) dizisinin yavaş salınımlı olması koşulu ile yer değiştirebileceğini göstermiştir. Bu teorem *Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi* olarak bilinir (Hardy, 1991; Korevaar, 2004).

Teorem 2.11. (Genelleştirilmiş Littlewood Teoremi) $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve (s_n) dizisi yavaş salınımlı ise $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

Stanojević (1999), bir $\sum a_n$ serisi l ye (C, 1) toplanabilir ve (s_n) dizisi Stanojević anlamında yavaş salınımlı ise $\sum a_n$ serisinin l ye yakınsak olduğunu ispatlamıştır.

Ayrıca herhangi bir (s_n) dizisi için, H pozitif bir sabit olmak üzere, $n\Delta s_n = O(1)$ ise (s_n) dizisi yavaş salınımlı olduğu bilinmektedir (Boos, 2000).

Dik (2001), bir (s_n) dizisinin yavaş salınımlı olması için gerek ve yeter koşulun (τ_n^1) dizisinin yavaş salınımlı ve sınırlı olması gerektiğini göstermiştir. Buradan yavaş salınımlı bir dizinin, aritmetik ortalamalarının dizisinin de yavaş salınımlı olduğu söylenebilir.

Dik (2001), Abel toplanabilme metodu için H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$n\Delta\tau_n^1 > -H$$

ve

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(k\Delta)_2\tau_k^1 > -H$$

gibi bazı Tauber tipi koşulları elde ederek, tamsayı mertebeli salınım davranışlarının genel kontrol modülosunu tanıtmıştır.

2.1. (A)(C, α) Toplanabilme Metodu

(A)(C, α) toplanabilme metodu $\alpha \geq 0$ için, Kogbetliantz (1931) ve Lord (1935) tarafından ve $\alpha > -1$ için Jakimovski (1952) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 2.5. $0 \leq x < 1$ için,

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{\alpha} x^n$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = l$$

ise $\sum a_n$ *serisi* l *ye* (A)(C, α) *toplanabilir* denir ve kısaca $s_n \to l$ $(\mathrm{A})(\mathrm{C}, \alpha)$ şeklinde gösterilir.

Tanımdan kolayca görüleceği gibi $s_n \to l \ (\mathrm{A})(\mathrm{C}, \alpha)$ ise $s_n^\alpha \to l \ (\mathrm{A})$ dir. Ayrıca (A)(C, 0) toplanabilme ile Abel toplanabilme eşdeğerdir.

Pati (2005), (A)(C, α) toplanabilme metodu için yukarıda listelenen bazı klasik Tauber tipi teoremleri geliştirerek yeni Tauber tipi teoremleri ispatlamış ve verdiği sonuçların özel durumları olan bazı klasik Tauber tipi teoremler için kısa ispatlar yapmıştır.

2.2. Lemmalar

Bu bölümde, Pati (2005) nin çalışmasında kullandığı ve tezdeki teoremlerin ispatlarında faydalanılan lemmalar aşağıda listelenmektedir.

Kogbetliantz (1925, 1931), τ_n^α ile s_n^α arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Lemma 2.1. $\alpha > -1$ için,

$$\tau_n^\alpha = n\Delta s_n^\alpha = n\left(s_n^\alpha - s_{n-1}^\alpha\right)$$

dir.

Hardy (1910) ve Kogbetliantz (1931), $\tau_n^{\alpha+1}$ dizisinin s_n^α dizisi türünden olan eşitliğini vermiştir.

Lemma 2.2. $\alpha > -1$ için,

$$\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\left(s_n^\alpha - s_n^{\alpha+1}\right)$$

dir.

Lord (1935), (A)(C, α) ile (A)(C, β) arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Lemma 2.3. $\beta > \alpha > -1$ için,

$$(\mathrm{A})(\mathrm{C},\alpha) \subset (\mathrm{A})(\mathrm{C},\beta)$$

dir.

2.3. Pati (2005) nin Teoremleri

Bu kısımda, Pati (2005) nin bazı teoremleri verilmektedir. Bu teoremler (A)(C, α) toplanabilme metodundan (C, α) toplanabilme metoduna geçebilmek için gerekli koşulları içermektedir ve ayrıca yukarıda listelenen bazı klasik Tauber tipi teoremlerin bir genelleştirilmesidir.

Teorem 2.12. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha} > -H \tag{2.3}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $x \to 1^-$ iken,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n^{\alpha} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(s_n^{\alpha} - s_{n-1}^{\alpha}\right)x^n \to l, \quad s_{-1}^{\alpha} = 0$$

elde edilir. Ayrıca H pozitif bir sabit olmak üzere Lemma 2.1 ve (2.3) koşulundan,

$$n\left(s_n^{\alpha} - s_{n-1}^{\alpha}\right) = \tau_n^{\alpha} > -H$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Hardy-Littlewood Teoremi'nden,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(s_n^{\alpha} - s_{n-1}^{\alpha}\right)$$

ifadesi l ye yakınsar veya aynı anlama gelen ve $n \to \infty$ iken,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

bulunur. Bu da $\sum a_n$ serisinin l ye (C, α) toplanabilir olması demektir.□

Teorem 2.13. Herhangi bir $\alpha > -1$ için, $\sum a_n$ serisinin l ye (A)(C, α+1) toplanabilmesi, $\sum a_n$ serisinin l ye (C, α) toplanabilmesini gerektirmesi için gerek ve yeter şart,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o(1) \tag{2.4}$$

olmasıdır.

İspat:

a) Yeterlilik. Hipotezden α > -1 için, $x \to 1^-$ iken,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(s_n^{\alpha+1} - s_{n-1}^{\alpha+1} \right) x^n \to l$$

elde edilir. Lemma 2.1 ve (2.4) koşulundan,

$$n\left(s_n^{\alpha+1} - s_{n-1}^{\alpha+1} \right) = \tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, Tauber'in Birinci Teoremi'nden $n \to \infty$ iken,

$$s_n^{\alpha+1} \to l$$

bulunur. Lemma 2.2 den,

$$(\alpha+1)\left(s_n^{\alpha+1} - s_{n-1}^{\alpha+1} \right) = \tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

olduğundan dolayı $n \to \infty$ iken,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

elde edilir. Yani $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilir bulunur.

b) Gereklilik.

$\alpha > -1$ için,

$$s_n^{\alpha} \to l, \;\; n \to \infty$$

olduğundan dolayı,

$$s_n^{\alpha+1} \to l$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 2.2 ile $n \to \infty$ iken,

$$(\alpha+1)\left(s_n^{\alpha+1} - s_{n-1}^{\alpha+1}\right) = \tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

bulunur.□

Teorem 2.14. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, $\alpha+\beta$) toplanabilir,

$$S_n^{\alpha+\beta} \geq 0$$

ve H bir pozitif sabit olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha+1} > -H \tag{2.5}$$

ise, $\sum a_n$ serisi l ye (C, $\alpha+1$) toplanabilirdir.

İspat: Her n için, $S_n^{\alpha+\beta} \geq 0$ olduğundan, $s_n^{\alpha+\beta}$ nın tanımı gereği,

$$s_n^{\alpha+\beta} = \frac{S_n^{\alpha+\beta}}{A_n^{\alpha+\beta}}$$

olduğundan,

$$s_n^{\alpha+\beta} \geq 0$$

bulunur. Hipotezden,

$$s_n^{\alpha+\beta} \to l \ (\mathrm{A})$$

olduğu görülür. Dolayısıyla yukarıdaki iki ifade ve Teorem 2.8 ile,

$$s_n^{\alpha+\beta} \to l \ \ (\mathrm{C},1)$$

elde edilir ki bu,

$$s_n^{\alpha+1} \to l \quad (\mathrm{C},\beta), \ \beta > 0$$

olmasına denktir. Şimdi, (2.5) koşulu ve Lemma 2.1 den,

$$\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\left(s_n^{\alpha+1} - s_{n-1}^{\alpha+1}\right) > -H$$

olduğu görülür ve Teorem 2.4 ile $n \to \infty$ iken,

$$s_n^{\alpha+1} \to l$$

olur ki bu beklenen sonuçtur.□

Teorem 2.13 ün bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.15. Eğer $\alpha \geq 0$ için, $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve

$$\tau_n^{\alpha} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Pati (2005) nin teoremlerinde özel olarak $\alpha = 0$ alındığında Abel toplanabilme metodundan yakınsaklığın elde edildiği bazı klasik Tauber teoremlerinden sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

3. (A)(C, α) TOPLANABİLME METODU İÇİN TAUBER TİPİ TEOREMLER

Bu bölümde Pati (2005) tarafından (A)(C, α) toplanabilme metodu için verilen Tauber tipi teoremler genelleştirilerek yeni Tauber tipi teoremler elde edilmiştir. Teoremlerde kullanılan koşullar, (A)(C, α) toplanabilme metodundan, (C, α) toplanabilme metodunun ve hatta yakınsaklığın elde edilebildiği Tauber tipi koşullardır. Ayrıca bu bölümde, teoremlerin ispatlarında kullanılan ve Pati (2005) deki lemmaların bir genelleştirilmesi olan yeni lemmalar verilecektir.

3.1. Lemmalar

Lemma 3.1. $\alpha > -1$ için,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\left(\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1}\right)$$

dir.

İspat: Lemma 2.2 den,

$$n\Delta s_n^{\alpha} - n\Delta s_n^{\alpha+1} = n\Delta\frac{1}{\alpha+1}\tau_n^{\alpha+1}$$

bulunur. Buradan,

$$n\Delta s_n^{\alpha} - n\Delta s_n^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}n\Delta\tau_n^{\alpha+1}$$

elde edilir. Lemma 2.1 den,

$$\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha+1}n\Delta\tau_n^{\alpha+1}$$

olduğu görülür.□

Lemma 3.2. $\alpha > -1$ için,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^{\alpha+2} = (\alpha+2)(\alpha+1)\left(\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1}\right) - (\alpha+2)^2\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right)$$

dir.

İspat: Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2} = \frac{1}{\alpha+2} n\Delta\tau_n^{\alpha+2}$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın geri farkı alınıp, sonra her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^{\alpha+2} = (\alpha+2)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+1} - n\Delta\tau_n^{\alpha+2}\right)$$

bulunur. Lemma 3.1 ile,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^{\alpha+2} = (\alpha+2)(\alpha+1)\left(\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1}\right) - (\alpha+2)^2\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right)$$

elde edilir.□

Lemma 3.3. $\alpha \geq 0$ için,

$$(n\Delta)_3 \tau_n^{\alpha+3} = (\alpha+3)\left[(\alpha+2)n\Delta\tau_n^{\alpha+1} - (2\alpha+5)n\Delta\tau_n^{\alpha+2} + (\alpha+3)n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right]$$

dir.

İspat: Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} = (\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki tarafın geri farkı alınıp, sonra n ile çarpılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+2} = \left(\alpha+2\right)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+1} - n\Delta\tau_n^{\alpha+2}\right) \tag{3.1}$$

bulunur. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+2$ yazılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3} = \left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2} - \tau_n^{\alpha+3}\right) \tag{3.2}$$

elde edilir. (3.2) eşitliğinin her iki tarafının geri farkı alınıp, sonra her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+3} = \left(\alpha+3\right)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+2} - n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right) \tag{3.3}$$

olur. Son olarak (3.3) eşitliğinde her iki tarafın geri farkı aldındıktan sonra her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_3 \tau_n^{\alpha+3} = \left(\alpha+3\right)\left(\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+2} - \left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+3}\right)$$

elde edilir. (3.1) ve (3.3) ifadeleri yukarıdaki eşitlikte yerine konursa,

$$\left(n\Delta\right)_3 \tau_n^{\alpha+3} = \left(\alpha+3\right)\left[\left(\alpha+2\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+1} - \left(2\alpha+5\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+2} + \left(\alpha+3\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right]$$

bulunur.□

3.2. Teoremler

Şimdi, (A)(C, α) toplanabilme metodu için genelleştirilmiş olan yeni Tauber tipi teoremler verilecektir.

Teorem 3.1. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve H pozitif bir sabit olmak üzere,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+1} > -H \tag{3.4}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha} \to l \ (\mathrm{A})$dir. Lemma 2.3 ten dolayı $s_n^{\alpha+1} \to l \ (\mathrm{A})$ elde edilir ve dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

bulunur. Lemma 3.1 ve (3.4) koşulundan, H_1 pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1} > -H_1$$

elde edilir ve Lemma 2.1 den,

$$\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1} = n\Delta\left(s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1}\right) > -H_1 \tag{3.5}$$

olduğu için Hardy-Littlewood Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1} = o(1)$$

olduğu görülür. Lemma 2.2 den,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

bulunur. (3.5) ifadesinden ve her yakınsak dizi sınırlı olduğu için H_2 bir pozitif sayı olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha} > -H_2$$

elde edilir. Bu son ifade ile Teorem 2.12 nin (2.3) koşulu sağlanmaktadır. Böylece ispat Teorem 2.12 nin ispatı ile devam edilerek tamamlanır.□

(3.4) koşulu, (2.3) koşulundan daha geneldir. Bu nedenle Teorem 3.1 in, Teorem 2.12 nin bir genelleştirilmesi olduğu görülmektedir.

Teorem 3.1 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Eğer Teorem 3.1 de $\alpha = 0$ alınırsa Dik (2001) in aşağıdaki sonucu elde edilmiş olur.

Sonuç 3.2. Bir $\sum a_n$ serisi l ye Abel toplanabilir ve H pozitif bir sabit olmak üzere,

$$n\Delta\tau_n^1 > -H$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır.

Teorem 3.2. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve H pozitif bir sabit olmak üzere,

$$(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+2} > -H \tag{3.6}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha} \to l\ (\mathrm{A})$ dir. Lemma 2.3 ten dolayı $s_n^{\alpha+1} \to l\ (\mathrm{A})$ ve $s_n^{\alpha+2} \to l\ (\mathrm{A})$ elde edilir. Buradan,

$$s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.7}$$

ve

$$s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.8}$$

bulunur. Lemma 3.2 ve (3.6) hipotezinden,

$$(\alpha+2)(\alpha+1)\left(\tau_n^{\alpha}-\tau_n^{\alpha+1}\right)-(\alpha+2)^2\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)>-H \tag{3.9}$$

elde edilir. Lemma 2.1 den,

$$\tau_n^{\alpha}-\tau_n^{\alpha+1}=n\Delta\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)$$

ve

$$\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}=n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)$$

olur. (3.9) ifadesinden,

$$n\Delta\left[(\alpha+2)(\alpha+1)\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)-(\alpha+2)^2\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)\right]>-H$$

bulunur. (3.7), (3.8) ifadeleri ve son eşitsizlik, Hardy-Littlewood Teoremi'nde kullanılırsa,

$$(\alpha+2)(\alpha+1)\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)-(\alpha+2)^2\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

elde edilir. Dolayısıyla, Lemma 2.2 ile,

$$(\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

bulunur ve buradan da,

$$\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}=n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

elde edilir. Son eşitlik ve (3.8) ifadesi ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}=o(1)$$

bulunur. Lemma 3.2 den,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

elde edilir. Yukarıdaki son iki eşitlik (3.9) ifadesinde kullanılırsa ve her yakınsak dizinin sınırlı olmasından dolayı, herhangi bir H_1 pozitif sabiti için,

$$\tau_n^{\alpha} > -H_1$$

bulunur. O halde, Teorem 2.12 nin (2.3) koşulu sağlanmaktadır. Dolayısıyla Teorem 3.2 nin ispatı tamamlanmış olur.□

Teorem 3.2 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.3. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, *α*) toplanabilir ve

$$(n\Delta)_2 \tau_n^{\alpha+2} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, *α*) toplanabilirdir.

Teorem 3.3. Herhangi bir $\alpha > -1$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, *α*+1) toplanabilir ve

$$n\Delta \tau_n^{\alpha+2} = o(1) \qquad (3.10)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, *α*) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha+1} \to l\ (\mathrm{A})$ dir. Lemma 2.3 ten dolayı $s_n^{\alpha+2} \to l\ (\mathrm{A})$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2} \to 0\ (\mathrm{A}) \qquad (3.11)$$

bulunur. Lemma 3.1 ve (3.10) koşulundan,

$$n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

olduğu görülür. Yakınsak olan bir dizi sınırlı olduğundan,

$$n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=O(1)$$

elde edilir ki bu eşitlik ve (3.11) ifadesi ile Teorem 2.5 den,

$$s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}=o(1)$$

bulunur. Lemma 3.2 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa yukarıdaki son ifadeden,

$$\tau_n^{\alpha+2}=o(1)$$

olduğu görülür. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa, (3.10) hipotezinden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2}=(\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\tau_n^{\alpha+1}=o(1)$$

bulunur. Teorem 2.13 ün (2.4) koşulu sağlanmaktadır. Bundan dolayı Teorem 3.3 ün ispatı tamamlanmış olur.□

(3.10) koşulunun (2.4) koşulundan daha genel olduğu açıktır. Dolayısıyla Teorem 2.13 ün (3.11) koşulu yardımıyla Teorem 3.4 olarak geliştirilmiş olduğu söylenebilir.

Teorem 3.4. Herhangi bir $\alpha>-1$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+1) toplanabilir ve

$$(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+3}=o(1) \tag{3.12}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha+1} \to l\ (\mathrm{A})$ dir. Lemma 2.3 ten dolayı $s_n^{\alpha+2} \to l\ (\mathrm{A})$ ve $s_n^{\alpha+3} \to l\ (\mathrm{A})$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.13}$$

ve

$$s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.14}$$

bulunur. Lemma 3.2 ve (3.12) hipotezi kullanılarak,

$$(\alpha+2)(\alpha+3)\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right) - (\alpha+3)^2\left(\tau_n^{\alpha+2} - \tau_n^{\alpha+3}\right) = o(1) \tag{3.15}$$

elde edilir. Lemma 2.1 ile,

$$\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2} = n\Delta\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right)$$

ve

$$\tau_n^{\alpha+2} - \tau_n^{\alpha+3} = n\Delta\left(s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3}\right)$$

ifadeleri bulunur. (3.15) eşitliği kullanılarak,

$$n\Delta\left[(\alpha+2)(\alpha+3)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) - (\alpha+3)^2\left(s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3}\right)\right] = o(1)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (3.13), (3.14) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$(\alpha+2)(\alpha+3)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) - (\alpha+3)^2\left(s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3}\right) = o(1)$$

bulunur. Lemma 2.2 den,

$$\left(\alpha+2\right)\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=\tau_n^{\alpha+2}$$

ve

$$\left(\alpha+3\right)\left(s_n^{\alpha+2}-s_n^{\alpha+3}\right)=\tau_n^{\alpha+3}$$

elde edileceğinden,

$$\left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}\right)=o\left(1\right)$$

olması,

$$\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}=n\Delta\left(s_n^{\alpha+2}-s_n^{\alpha+3}\right)=o\left(1\right)$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla, son eşitlik ve (3.14) ifadesi ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+2}-s_n^{\alpha+3}=o\left(1\right)$$

elde edilir. Lemma 2.2 ile,

$$\tau_n^{\alpha+2}=o\left(1\right)$$

bulunur. Lemma 2.3 ten dolayı,

$$\tau_n^{\alpha+3}=o\left(1\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.15) eşitliğinde yukarıdaki son iki eşitlik kullanılacak olursa,

$$\tau_n^{\alpha+1}=o\left(1\right)$$

olduğu görülür. Teorem 2.13 ün (2.4) koşulu sağlanmaktadır. Bu yüzden Teorem 3.4 ün ispatı tamamlanmış olur.□

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+1) toplanabilir ve $1 \leq m \leq 3$ tamsayıları için,

$$(n\Delta)_{m-1} \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Şimdi Teorem 2.14 ün bir genelleştirmesi olan ve (A)(C, α+β) toplanabilme metodundan (C, α+1) toplanabilme metodunun elde edilebildiği yeni Tauber tipi bir teoremi ele alalım.

Teorem 3.5. Eğer, $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ için $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+β) toplanabilir,

$$S_n^{\alpha+\beta} \geq 0$$

ve

$$n\Delta \tau_n^{\alpha+1} > -H \tag{3.16}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α+1) toplanabilirdir.

İspat: Her n için, hipotezde $S_n^{\alpha+\beta} \geq 0$ verildiğinden ve $s_n^{\alpha+\beta}$ nin tanımından dolayı,

$$s_n^{\alpha+\beta} \geq 0$$

elde edilir. Hipotezden ayrıca, $\sum a_n$ serisinin l ye (A)(C, α+β) toplanabilir olması $\left(s_n^{\alpha+\beta}\right)$ dizisinin l ye Abel toplanabilir olması olduğu için Teorem 2.8 ile,

$$s_n^{\alpha+\beta} \to l \ (\mathrm{C},1)$$

bulunur ki, bu,

$$s_n^{\alpha} \to l \ (\mathrm{C},\beta+1) \qquad (3.17)$$

ifadesine denktir. $\beta+1>0$ için $(\mathrm{C},\beta+1)\subset(A)$ olduğu için, (3.17) ifadesinden,

$$s_n^{\alpha} \to l(\mathrm{A})$$

olur ve Lemma 2.3 ten,

$$s_n^{\alpha+1} \to l \ (\mathrm{A})$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

bulunur, Lemma 2.2 den,

$$\tau_n^{\alpha+1} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

elde edilir. Bu son ifade ve (3.16) eşitsizliği ile Hardy-Littlewood Teoremi'nden,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

bulunur ki bu eşitlik, (3.16) hipotezi ve Lemma 3.1 ile H_2 pozitif bir sabit olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha} > -H_2$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 2.14 ün (2.5) koşulu sağlanmış olur. Bu yüzden Teorem 3.5 in ispatı tamamlanmış olur.□

Teorem 2.14 ün ikinci bir genelleştirmesi aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.6. $\alpha \geq 0$ ve $\beta > 0$ için, $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+β) toplanabilir olsun. Eğer,

$$S_n^{\alpha+\beta} \geq 0$$

ve

$$(n\Delta)_2 \, \tau_n^{\alpha+2} > -H \tag{3.18}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α+1) toplanabilirdir.

İspat: Teorem 3.5 den,

$$s_n^{\alpha} \to l \; (\mathrm{C}, \beta+1)$$

olduğunu biliyoruz. (3.17) ifadesinden dolayı $k = 0, 1$ ve 2 için,

$$s_n^{\alpha+k} \to l \; (\mathrm{A})$$

olmaktadır. Dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1} \to 0 \; (\mathrm{A}) \tag{3.19}$$

ve

$$s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2} \to 0 \; (\mathrm{A}) \tag{3.20}$$

elde edilir. Lemma 3.2 ve (3.18) hipotezi ile,

$$(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha} - \tau_n^{\alpha+1}\right) - (\alpha+2)^2\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right) > -H \tag{3.21}$$

bulunur, burada H bir pozitif sabittir. Lemma 2.1 de α yerine sırasıyla $\alpha+1$ ve $\alpha+2$ yazılarak,

$$\tau_n^{\alpha}-\tau_n^{\alpha+1}=n\Delta\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)$$

ve

$$\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}=n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)$$

elde edilir, dolayısıyla (3.21) ifadesi,

$$n\Delta\left[(\alpha+1)(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)-(\alpha+2)^2\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)\right]>-H \tag{3.22}$$

şekline gelir. (3.19), (3.20) ifadeleri ve (3.22) eşitsizliği ile Hardy-Littlewood Teoremi'nden,

$$(\alpha+1)(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha}-s_n^{\alpha+1}\right)-(\alpha+2)^2\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=o(1) \tag{3.23}$$

elde edilir. Lemma 2.2 de α yerine $\alpha+1$ yazılarak,

$$(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=\tau_n^{\alpha+2} \tag{3.24}$$

bulunur. Lemma 2.2, (3.23) ve (3.24) eşitliklerinden,

$$\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}=n\Delta\left(s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}\right)=o(1)$$

elde edilir. (3.20) ve (3.22) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+1}-s_n^{\alpha+2}=o(1)$$

bulunur. Bu eşitlik ve (3.24) eşitliğinden,

$$\tau_n^{\alpha+2}=o(1) \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.23) ifadesinden,

$$\left(\alpha+2\right)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=o\left(1\right)$$

bulunur ve (3.25) eşitliği burada kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1}=o\left(1\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlik ile (3.25) ifadesi, (3.21) eşitsizliğinde kullanılırsa ve H_1 bir pozitif sabit olmak üzere,

$$\tau_n^{\alpha}>-H_1$$

elde edilir ki bulunan bu son eşitsizlik Teorem 2.14 ün (2.5) koşulunu vermektedir. Bundan dolayı Teorem 3.6 nın ispatı tamamlanmış olur.□

Teorem 3.7. Herhangi bir $\alpha\geq 0$ için, eğer $\left(\tau_n\right)$ dizisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve

$$\left(n\Delta\right)_3\tau_n^{\alpha+3}=o\left(1\right) \tag{3.26}$$

ise $\left(s_n\right)$ dizisi (C, α) yavaş salınımlıdır.

İspat: $\left(\tau_n\right)$ dizisinin l ye (A)(C, α) toplanabilir olması $\tau_n^{\alpha}\rightarrow l\ \left(\mathrm{A}\right)$ demektir. Lemma 2.3 ten dolayı $\tau_n^{\alpha+1}\rightarrow l\ \left(\mathrm{A}\right)$, $\tau_n^{\alpha+2}\rightarrow l\left(\mathrm{A}\right)$ ve $\tau_n^{\alpha+3}\rightarrow l\ \left(\mathrm{A}\right)$ dır. Lemma 3.1 de α yerine sırasıyla $\alpha+1$ ve $\alpha+2$ yazılırsa,

$$\left(\alpha+2\right)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+2} \tag{3.27}$$

$$\left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.28}$$

elde edilir. $k=1,2\,\mathrm{ve}\,3$ için $\tau_n^{\alpha+k}\rightarrow l\ \left(\mathrm{A}\right)$ olduğu için son iki eşitlikten,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.29}$$

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.30}$$

bulunur. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+2$ yazılıp, her iki tarafın geri farkı alındıktan sonra yine her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$(\alpha+3)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+2} - n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right) = (n\Delta)_2\, \tau_n^{\alpha+3} \tag{3.31}$$

bulunur. (3.29) ve (3.30) ifadeleri (3.31) eşitliğinde yerine konursa,

$$(n\Delta)_2\, \tau_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

elde edilir. Bu ifade ve (3.26) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$(n\Delta)_2\, \tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.32}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.30) ve (3.32) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.33}$$

eşitliği bulunur. Bu işleme devam edersek $\tau_n^{\alpha+3} \to l \ (\mathrm{A})$ olduğundan ve (3.33) eşitliğinden dolayı,

$$\tau_n^{\alpha+3} \to l \tag{3.34}$$

bulunur. (3.32) ve (3.33) ifadeleri, (3.31) eşitliğinde yerine konursa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} = o(1) \tag{3.35}$$

elde edilir. (3.33) ve (3.34) ifadeleri (3.28) eşitliğinde yerine konursa,

$$\tau_n^{\alpha+2} \to l$$

olması sağlanır. Bu ifade ve (3.35) eşitliği, (3.27) eşitliğinde yerine konursa,

$$\tau_n^{\alpha+1} \to l \tag{3.36}$$

bulunur. (3.26), (3.33) ve (3.35) bilgileri Lemma 3.3 te yerleştirilirse,

$$n\Delta \tau_n^{\alpha+1} = o(1)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (3.36) ifadesi Lemma 3.1 de yerine yerleştirildiğinde,

$$\tau_n^{\alpha} \to l$$

olur. Lemma 2.1 den,

$$n\Delta s_n^{\alpha} \to l$$

bulunur. Bu son ifade ile $n\Delta s_n^{\alpha} = O(1)$ olduğu görülür ki Boos (2000) den de (s_n) dizisinin (C, α) yavaş salınımlı olması elde edilir. Buradan da ispat biter.□

Teorem 3.8. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve H bir pozitif sabit iken,

$$(n\Delta)_3 \tau_n^{\alpha+3} > -H \tag{3.37}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha} \to l \ (\mathrm{A})$ dir. Lemma 2.3 ten, $s_n^{\alpha+1} \to l \ (\mathrm{A})$, $s_n^{\alpha+2} \to l \ (\mathrm{A})$ ve $s_n^{\alpha+3} \to l \ (\mathrm{A})$ elde edilir. Dolayısıyla, Lemma 2.2 de α yerine sırasıyla $\alpha+1$ ve $\alpha+2$ yazılırsa,

$$(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) = \tau_n^{\alpha+2}$$

$$\left(\alpha+3\right)\left(s_n^{\alpha+2}-s_n^{\alpha+3}\right)=\tau_n^{\alpha+3}$$

elde edilir. Lemma 2.2 ve son iki eşitlikte $k=0,1,2\,\text{ve}\,3$ için $s_n^{\alpha+k}\to l\ \left(\text{A}\right)$ bilgileri kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1}\to 0\ \left(\text{A}\right) \tag{3.38}$$

$$\tau_n^{\alpha+2}\to 0\ \left(\text{A}\right) \tag{3.39}$$

$$\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ \left(\text{A}\right) \tag{3.40}$$

bulunur ve Lemma 3.1 ile de,

$$\left(\alpha+2\right)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+2} \tag{3.41}$$

$$\left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.42}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.38), (3.39) ve (3.40) ifadelerinden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2}\to 0\ \left(\text{A}\right) \tag{3.43}$$

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ \left(\text{A}\right) \tag{3.44}$$

Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+2$ yazılıp, her iki tarafın geri farkı alındıktan sonra da her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$\left(\alpha+3\right)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+2}-n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right)=\left(n\Delta\right)_2\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.45}$$

olur. (3.43) ve (3.44) ifadeleri (3.45) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_2\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ \left(\text{A}\right)$$

bulunur. Bu ifade ve (3.37) hipotezi ile Hardy-Littlewood Teoremi'nden,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.46}$$

elde edilir. (3.44) ve (3.46) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$n\Delta \tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.47}$$

olur. (3.46) ve (3.47) ifadeleri (3.45) eşitliğinde kullanırsa,

$$n\Delta \tau_n^{\alpha+2} = o(1) \tag{3.48}$$

bulunur. (3.40) ve (3.47) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$\tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.49}$$

olur. (3.47) ve (3.49) ifadeleri (3.42) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+2} = o(1) \tag{3.50}$$

elde edilir. (3.48) ve (3.50) ifadeleri (3.41) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1} = n\Delta s_n^{\alpha+1} = o(1) \tag{3.51}$$

bulunur. $s_n^{\alpha+1} \to s \ (\mathrm{A})$ ve (3.51) ifadesi ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+1} \to l \tag{3.52}$$

olur. (3.51) ve (3.52) ifadeleri Lemma 2.2 de kullanılırsa,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

elde edilir ki bu da ispatı bitirir.□

Teorem 3.8 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.5. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve

$$(n\Delta)_3 \tau_n^{\alpha+3} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Teorem 3.9. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+1) toplanabilir ve

$$(n\Delta)_3 \tau_n^{\alpha+3} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha+1} \to l \ (\mathrm{A})$ elde edilir. Lemma 2.3 ten dolayı, $s_n^{\alpha+2} \to l \ (\mathrm{A})$, $s_n^{\alpha+3} \to l \ (\mathrm{A})$ ve $s_n^{\alpha+4} \to l \ (\mathrm{A})$ bulunur. Dolayısıyla,

$$s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

$$s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

$$s_n^{\alpha+3} - s_n^{\alpha+4} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

olur. Lemma 2.2 de α yerine sırasıyla $\alpha+1$, $\alpha+2$ ve $\alpha+3$ yazılırsa,

$$(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) = \tau_n^{\alpha+2}$$

$$(\alpha+3)\left(s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3}\right) = \tau_n^{\alpha+3}$$

$$\left(\alpha+4\right)\left(s_n^{\alpha+3}-s_n^{\alpha+4}\right)=\tau_n^{\alpha+4}$$

elde edilir. $k=1,2,3$ ve 4 için $s_n^{\alpha+k}\to l\ (\mathrm{A})$ olduğundan, yukarıdaki son eşitliklerden,

$$\tau_n^{\alpha+2}\to 0\ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^{\alpha+4}\to 0\ (\mathrm{A})$$

bulunur. Lemma 3.1 de yukarıdaki şekilde benzer işlemler yapılırsa,

$$\left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.53}$$

$$\left(\alpha+4\right)\left(\tau_n^{\alpha+3}-\tau_n^{\alpha+4}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+4} \tag{3.54}$$

elde edilir ve $k=2,3$ve 4 için $\tau_n^{\alpha+k}\to 0\ (\mathrm{A})$ olduğundan,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.55}$$

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+4}\to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.56}$$

olur. (3.54) eşitliğinde her iki tarafın geri farkı alındıktan sonra, her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$\left(\alpha+4\right)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+3}-n\Delta\tau_n^{\alpha+4}\right)=\left(n\Delta\right)_2\tau_n^{\alpha+4}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte (3.55) ve (3.56) ifadeleri kullanılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_2\tau_n^{\alpha+4}\to 0\ (\mathrm{A}) \tag{3.57}$$

bulunur.

Hipotezde $(n\Delta)_3\,\tau_n^{\alpha+3}=o(1)$ ve $\alpha<\beta$ için $(\mathrm{C},\alpha)\subset(\mathrm{C},\beta)$ olduğu için,

$$(n\Delta)_3\,\tau_n^{\alpha+4}=o(1) \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.57) ifadesi ve (3.58) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+4}=o(1) \tag{3.59}$$

olması sağlanır. (3.56) ifadesi ve (3.59) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+4}=o(1) \tag{3.60}$$

bulunur, bu şekilde benzer işleme devam edilerek, $\tau_n^{\alpha+4}\to 0\ (\mathrm{A})$ ve (3.60) ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$\tau_n^{\alpha+4}=o(1)$$

elde edilir. Bu eşitlik ve (3.60) ifadesi, (3.54) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+3}=o(1) \tag{3.61}$$

bulunur. (3.54) eşitliğinin her iki tarafının $n\Delta$ sı alınırsa,

$$(\alpha+4)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+3}-n\Delta\tau_n^{\alpha+4}\right)=(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+4} \tag{3.62}$$

olur. (3.59) ve (3.60) ifadeleri, (3.62) eşitliğinde kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3}=o(1) \tag{3.63}$$

elde edilir. (3.62) eşitliğinde her iki tarafın $n\Delta$ sı alınırsa,

$$(\alpha+4)\left((n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+3}-(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+4}\right)=(n\Delta)_3\,\tau_n^{\alpha+4}$$

ortaya çıkar. (3.59) ve (3.58) ifadeleri, son eşitlikte kullanılırsa,

$$\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+3} = o\left(1\right) \tag{3.64}$$

bulunur. (3.61) ve (3.63) ifadeleri, (3.53) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+2} = o\left(1\right) \tag{3.65}$$

elde edilir. (3.53) eşitliğinde her iki tarafın $n\Delta$ sı alınırsa,

$$\left(\alpha+3\right)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+2} - n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right) = \left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{\alpha+3}$$

bulunur. (3.63) ve (3.64) ifadeleri yukarıdaki son eşitlikte kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} = o\left(1\right) \tag{3.66}$$

elde edilir. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa,

$$\left(\alpha+2\right)\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right) = n\Delta\tau_n^{\alpha+2}$$

bulunur. Bu eşitlikte (3.65) ve (3.66) ifadeleri kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o\left(1\right) \tag{3.67}$$

olur. Lemma 2.1 den,

$$n\Delta s_n^{\alpha+1} = o\left(1\right)$$

bulunur. $s_n^{\alpha}+1 \to l$ $\left(\mathrm{A}\right)$ ve $n\Delta s_n^{\alpha+1} = o\left(1\right)$ ifadeleri ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+1} \to l \tag{3.68}$$

elde edilir. Son olarak (3.67) ve (3.68) ifadeleri Lemma 2.2 de kullanılırsa,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

bulunur, bu da teoremin ispatını bitirir.□

Teorem 3.9 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.6. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α+1) toplanabilir ve $0 \leq m < 3$ tamsayısı için,

$$(n\Delta)_{\mathrm{m}}\, \tau_n^{\alpha+m} = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Teorem 3.10. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve

$$(n\Delta)_3\, \tau_n^3 = o(1) \tag{3.69}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsar.

İspat: Hipotezden, $s_n^{\alpha} \to l\ (\mathrm{A})$ dir. Lemma 2.3 ile $s_n^{\alpha+1} \to l\ (\mathrm{A})$, $s_n^{\alpha+2} \to l\ (\mathrm{A})$ ve $s_n^{\alpha+3} \to l\ (\mathrm{A})$ dir. Dolayısıyla Lemma 2.2 ile,

$$(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) = \tau_n^{\alpha+2}$$

$$(\alpha+3)\left(s_n^{\alpha+2} - s_n^{\alpha+3}\right) = \tau_n^{\alpha+3}$$

elde edilir. $k = 1, 2$ ve 3 için $s_n^{\alpha+k} \to l\ (\mathrm{A})$ olduğundan Lemma 2.2 ve yukarıdaki iki eşitlikten,

$$\tau_n^{\alpha+1} \to 0\ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^{\alpha+2} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.70}$$

bulunur. Lemma 3.1 de yukarıdaki şekilde benzer işlemler yapılırsa,

$$(\alpha+2)\left(\tau_n^{\alpha+1} - \tau_n^{\alpha+2}\right) = n\Delta\tau_n^{\alpha+2} \tag{3.71}$$

$$(\alpha+3)\left(\tau_n^{\alpha+2} - \tau_n^{\alpha+3}\right) = n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.72}$$

elde edilir. $k = 1, 2$ ve 3 için $\tau_n^{\alpha+k} \to l \ (\mathrm{A})$ olduğundan (3.71) ve (3.72) eşitliklerinden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.73}$$

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.74}$$

bulunur. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+2$ yazılıp, her iki tarafın geri farkını aldıktan sonra her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$(\alpha+3)\left(n\Delta\tau_n^{\alpha+2} - n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\right) = (n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+3} \tag{3.75}$$

olur. (3.73) ve (3.74) ifadeleri, (3.75) eşitliğinde kullanılırsa,

$$(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+3} \to 0 \ (\mathrm{A})$$

bulunur. Bu ifade ve (3.69) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi’nden,

$$(n\Delta)_2\,\tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.76}$$

bulunur. (3.74) ifadesi ve (3.76) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi’nden,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3} = o(1) \tag{3.77}$$

olur. (3.76) ve (3.77) ifadeleri, (3.75) eşitliğinde kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2} = o(1) \tag{3.78}$$

elde edilir. (3.70) ifadesi ve (3.77) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$\tau_n^{\alpha+3} = o(1)$$

bulunur. Bu eşitlik ve (3.77) eşitliği, (3.72) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+2} = o(1) \tag{3.79}$$

olur. (3.78) ve (3.79) ifadeleri, (3.71) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha+1} = n\Delta s_n^{\alpha+1} = o(1) \tag{3.80}$$

elde edilir. $s_n^{\alpha+1} \to l \ (\mathrm{A})$ ve (3.80) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha+1} \to l \tag{3.81}$$

bulunur. (3.80) ve (3.81) ifadeleri Lemma 2.2 de kullanılırsa,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

elde edilir ki buradan da,

$$s_n \to l \ (\mathrm{A})$$

olduğu görülür. Lemma 2.3 ile, $s_n^1 \to l \ (\mathrm{A})$, $s_n^2 \to l \ (\mathrm{A})$ ve $s_n^3 \to l \ (\mathrm{A})$ elde edilir. Dolayısıyla Lemma 2.2 de α yerine sırasıyla 0, 1, 2 ve 3 yazılırsa,

$$\left(s_n - s_n^1\right) = \tau_n^1 \tag{3.82}$$

$$2\left(s_n^1 - s_n^2\right) = \tau_n^2$$

$$3\left(s_n^2 - s_n^3\right) = \tau_n^3$$

eşitlikleri bulunur. $k = 0,1,2$ ve 3 için $s_n^k \to l \ (\mathrm{A})$ olduğundan yukarıdaki son eşitliklerden,

$$\tau_n^1 \to 0 \ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^2 \to 0 \ (\mathrm{A})$$

$$\tau_n^3 \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.83}$$

elde edilir. Lemma 3.1 de yukarıdaki şekilde benzer işlemler yapılırsa,

$$2\left(\tau_n^1 - \tau_n^2\right) = n\Delta\tau_n^2 \tag{3.84}$$

$$3\left(\tau_n^2 - \tau_n^3\right) = n\Delta\tau_n^3 \tag{3.85}$$

olur. $k = 1,2$ ve 3 için $\tau_n^k \to 0 \ (\mathrm{A})$ olduğundan, yukarıdaki son eşitliklerden,

$$n\Delta\tau_n^2 \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.86}$$

$$n\Delta\tau_n^3 \to 0 \ (\mathrm{A}) \tag{3.87}$$

elde edilir. Lemma 3.1 de α yerine 2 yazılıp, her iki tarafın geri farkı alındıktan sonra her iki taraf n ile çarpılırsa,

$$3\left(n\Delta\tau_n^2 - n\Delta\tau_n^3\right) = \left(n\Delta\right)_2 \tau_n^3 \tag{3.88}$$

bulunur. (3.86) ve (3.87) ifadeleri, (3.88) eşitliğinde kullanılırsa,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^3 \to 0 \ (\mathrm{A})$$

olur. Bu ifade ve (3.69) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$(n\Delta)_2 \tau_n^3 = o(1) \tag{3.89}$$

elde edilir. (3.87) ifadesi ve (3.89) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$n\Delta \tau_n^3 = o(1) \tag{3.90}$$

bulunur. (3.89) ve (3.90) ifadeleri, (3.88) eşitliğinde kullanılırsa,

$$n\Delta \tau_n^2 = o(1) \tag{3.91}$$

elde edilir. (3.83) ifadesi ve (3.90) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$\tau_n^3 = o(1)$$

olur. Bu eşitlik ve (3.90) eşitliği, (3.85) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^2 = o(1)$$

bulunur. Bu son eşitlik ve (3.91) eşitliği, (3.84) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\tau_n^1 = n\Delta s_n^1 = o(1) \tag{3.92}$$

elde edilir. $s_n^1 \to l \ (\mathrm{A})$ ve (3.92) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^1 \to l \tag{3.93}$$

olur. (3.92) ve (3.93) ifadeleri, (3.82) eşitliğinde kullanılırsa,

$$s_n \to l$$

elde edilir ki bu da teoremin ispatını bitirir.□

Teorem 3.10 için aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.7. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve $0 \leq m \leq 3$ tamsayıları için,

$$\left(n\Delta\right)_m \tau_n^m = o\left(1\right)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır.

Bu bölümdeki teoremlerde, $\alpha = 0$ alınırsa Abel toplanabilme metodundan yakınsaklık elde edilir. Böylece bu teoremlerin, ikinci bölümde verilen bazı klasik Tauber teoremlerinden daha genel olduğu kolaylıkla görülebilir.

4. (A)(C, α) TOPLANABİLME METODU İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BİR TAUBER TİPİ TEOREM

İkinci bölümde açıklandığı gibi Pati (2005) $\alpha > 0$ için $\sum a_n$ serisinin l ye (A)(C, α+1) toplanabilir olmasından $\sum a_n$ serisinin l ye (C, α) toplanabilir olmasını sağlayacak gerek ve yeter koşul olan $\tau_n^{\alpha+1} = o(1)$ koşulunu vermiştir. Bu teoremden, Teorem 2.15 kolaylıkla görülebilir. Üçüncü bölümde ise (A)(C, α) toplanabilir olan herhangi bir serinin (C, α) toplanabilir veya yakınsak olması için gerek koşullar verilmiş ve bu koşullar ile Pati (2005) nin teoremleri genelleştirilmiştir. Teoremlerden elde edilen sonuçlardan görülebilir ki $m = 1, 2$ ve 3 tamsayıları için $(n\Delta)_m \tau_n^{\alpha+m} = \mathrm{o}(1)$ eşitliği koşul olarak kullanılmıştır.

Bu bölümdeki amaç, ikinci ve üçüncü bölümdeki (A)(C, α) toplanabilme metodu için verilen bazı Tauber tipi teoremlerin bir genellemesi olan aşağıdaki teoremin ispatını vermektir.

Teorem 4.1. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve negatif olmayan bir m tamsayısı için,

$$(n\Delta)_m \tau_n^{\alpha+m} = o(1) \tag{4.1}$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye (C, α) toplanabilirdir.

Bu teoremin ispatında kullanılmak üzere aşağıda ispatları ile verilen iki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 4.1. $\alpha > -1$ olsun, $m \geq 2$ tamsayısı için,

$$(n\Delta)_m \tau_n^{\alpha+m} = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \mathcal{A}_m^{(j)}(\alpha) n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)}$$

dir. Burada,

$$\mathcal{A}_m^{(j)}(\alpha)=a_m^{(j-1)}(\alpha)+a_m^{(j)}(\alpha), \qquad a_m^{(0)}(\alpha)=0$$

ve $j=1,2,3,...,m$ olmak üzere,

$$a_m^{(j)}(\alpha)=\prod_{k=j+1}^{m}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m \\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-1})\right]$$

dir. Aşağıdaki lemma ise Lemma 4.1. de kullanılacaktır.

Lemma 4.2. $j=1,2,3,...,m$ olmak üzere,

$$(\alpha+j)\mathcal{A}_m^{(j-1)}(\alpha+1)+(\alpha+j+1)\mathcal{A}_m^{(j)}(\alpha+1)=\mathcal{A}_{m+1}^{(j)}(\alpha)$$

dir.

4.1. Lemma 4.2 nin İspatı

Yukarıdaki eşitliği ispatlamak için eşitliğin sol tarafından harakete başlanıp sağ taraf elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için ilk önce Lemma 4.1. de verilen $\mathcal{A}_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{j})}(\alpha)$ nın tanımından yararlanılacaktır.

$$\begin{aligned}(\alpha+j)\mathcal{A}_m^{(j-1)}(\alpha+1)&+(\alpha+j+1)\mathcal{A}_m^{(j)}(\alpha+1)\\ &=(\alpha+j)\left[a_m^{(j-2)}(\alpha+1)+a_m^{(j-1)}(\alpha+1)\right]\\ &\qquad+(\alpha+j+1)\left[a_m^{(j-1)}(\alpha+1)+a_m^{(j)}(\alpha+1)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Lemma 4.1 deki $a_m^{(j)}(\alpha)$ nın eşiti yazılırsa, yukarıdaki eşitlik,

$$(\alpha+j)\prod_{k=j-1}^{m}(\alpha+1+k)\left[\sum_{\substack{j-1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-3}\le m\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+1+t_1)(\alpha+1+t_2)\ldots(\alpha+1+t_{j-3})\right]$$

$$+(\alpha+j)\prod_{k=j}^{m}(\alpha+1+k)\left[\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+1+t_1)(\alpha+1+t_2)\ldots(\alpha+1+t_{j-2})\right]$$

$$+(\alpha+1+j)\prod_{k=j}^{m}(\alpha+1+k)\left[\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+1+t_1)(\alpha+1+t_2)\ldots(\alpha+1+t_{j-2})\right]$$

$$+(\alpha+1+j)\prod_{k=j+1}^{m}(\alpha+1+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+1+t_1)(\alpha+1+t_2)\ldots(\alpha+1+t_{j-1})\right]$$

şekline gelir.Yukarıdaki çarpım ifadelerinde indis değişikliği yapılırsa,

$$(\alpha+j)\prod_{k=j}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-3}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-3})\right]$$

$$+(\alpha+j)\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right]$$

$$+(\alpha+1+j)\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right]$$

$$+(\alpha+1+j)\prod_{k=j+2}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+2\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-1})\right]$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler aşağıdaki gibi yapılırsa,

$$(\alpha+j)\prod_{k=j}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-3}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-3})\right]$$

$$+\prod_{k=j}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right]$$

$$+(\alpha+1+j)\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right]$$

$$+\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+2\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-1})\right]$$

olduğu görülür. İşlemlere devam edilirse,

$$\prod_{k=j}^{m+1}(\alpha+k)\left[(\alpha+j)\left\{\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-3}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-3})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right\}\right]$$

$$+\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[(\alpha+1+j)\left\{\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\substack{j+2\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-1})\right\}\right]$$

$$=\prod_{k=j}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-2}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-2})\right]$$

$$+\prod_{k=j+1}^{m+1}(\alpha+k)\left[\sum_{\substack{j+1\le t_1,t_2,\ldots,t_{j-1}\le m+1\\ r<s\Rightarrow t_r\le t_s}}(\alpha+t_1)(\alpha+t_2)\ldots(\alpha+t_{j-1})\right]$$

bulunur. $a_m^{(j)}(\alpha)$ nın Lemma 4.1. deki tanımına bakılırsa, yukarıdaki son eşitliğin sağ tarafının,

$$a_{m+1}^{(j)}(\alpha)+a_{m+1}^{(j+1)}(\alpha)$$

ifadesine eşit olduğu görülür ki bu da yine Lemma 4.1. deki tanımlamadan,

$$\mathcal{A}_{m+1}^{(j)}(\alpha)$$

ifadesine eşittir. Dolayısıyla,

$$(\alpha+j)\mathcal{A}_m^{(j-1)}(\alpha+1)+(\alpha+j+1)\mathcal{A}_m^{(j)}(\alpha+1)=\mathcal{A}_{m+1}^{(j)}(\alpha)$$

elde edilir ki, buradan Lemma 4.2. nin ispatı tamamlanmış olur.□

4.2. Lemma 4.1 in İspatı

Bu Lemmanın ispatında tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$m=2$ için eşitlikler kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{(\alpha+2)} &= \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_2^{(j)}(\alpha)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&= \mathcal{A}_2^{(1)}(\alpha)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} - \mathcal{A}_2^{(2)}(\alpha)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+2)} \\
&= \left(a_2^0(\alpha)+a_2^1(\alpha)\right) n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} - \left(a_2^1(\alpha)+a_2^2(\alpha)\right) n\Delta\tau_n^{(\alpha+2)} \\
&= n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)}\prod_{k=2}^{2}(\alpha+k) - n\Delta\tau_n^{(\alpha+2)}\prod_{k=2}^{2}(\alpha+k) \\
&= (\alpha+2)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} - (\alpha+2)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+2)} \\
&= (\alpha+2)\left[n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} - n\Delta\tau_n^{(\alpha+2)}\right]
\end{aligned}
$$

olduğundan dolayı Lemma 2.2 den de görülebilir ki bu eşitlik doğrudur.

$m = p$ için,

$$
\left(n\Delta\right)_p \tau_n^{(\alpha+p)} = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \tag{4.2}
$$

eşitliğinin doğru olduğu kabul edilsin.

$m = p+1$ için,

$$
\left(n\Delta\right)_{p+1} \tau_n^{(\alpha+p+1)} = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(j)}(\alpha)\, n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)}
$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösterilmesi gerekir. Bunun için (4.2) eşitliğinin her iki tarafının geri farkı alınıp yine her iki tarafı n ile çarpılırsa,

$$
\left(n\Delta\right)_{p+1} \tau_n^{(\alpha+p)} = \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha)\left(n\Delta\right)_2 \tau_n^{(\alpha+j)}
$$

olduğu görülür. Yukarıdaki son eşitlikte α yerine $\alpha+1$ yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
(n\Delta)_{p+1}\tau_n^{(\alpha+1+p)} &= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)(n\Delta)_2\,\tau_n^{(\alpha+1+j)} \\
&= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)\left\{(\alpha+1+j)\left(n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)}-n\Delta\tau_n^{(\alpha+1+j)}\right)\right\} \\
&= \sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad -\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j+1}(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1+j)} \\
&= (-1)^2(\alpha+2)\mathcal{A}_p^{(1)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} \\
&\qquad +\sum_{j=2}^{p}(-1)^{j+1}(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad -\sum_{j=1}^{p-1}(-1)^{j+1}(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1+j)} \\
&\qquad -(-1)^{p+1}(\alpha+p+1)\mathcal{A}_p^{(p)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1+p)} \\
&= (\alpha+2)\mathcal{A}_p^{(1)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)} \\
&\qquad +\sum_{j=2}^{p}(-1)^{j+1}(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad -\sum_{j=2}^{p}(-1)^{j}(\alpha+j)\mathcal{A}_p^{(j-1)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad -(-1)^{(p+1)}(\alpha+p+1)\mathcal{A}_p^{(p)}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1+p)} \\
&= \mathcal{A}_{p+1}^{(1)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)}+\sum_{j=2}^{p}(-1)^{j+1}\Big[(\alpha+j)\mathcal{A}_p^{(j-1)}(\alpha+1) \\
&\qquad\qquad +(\alpha+1+j)\mathcal{A}_p^{(j)}(\alpha+1)\Big]n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad +(-1)^{(p+1)+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(p+1)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+p+1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte Lemma 4.2. kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(1)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+1)}+\sum_{j=2}^{p}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(j)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)} \\
&\qquad +(-1)^{(p+1)+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(p+1)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+p+1)} \\
&= \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_{p+1}^{(j)}(\alpha)n\Delta\tau_n^{(\alpha+j)}=(n\Delta)_{p+1}\tau_n^{(\alpha+p+1)}
\end{aligned}$$

elde edilir ki, bu sonuç ile Lemma 4.1 in ispatı tamamlanmış olur.□

4.3. Teorem 4.1 in İspatı

Hipotezden, $s_n^{\alpha} \to l\ (\mathrm{A})$ dır. Lemma 2.3 ile, $s_n^{\alpha+1} \to l\ (\mathrm{A})$, $s_n^{\alpha+2} \to l\ (\mathrm{A}),\ldots,$ $s_n^{\alpha+m} \to l\ (\mathrm{A})$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left(s_n^{\alpha} - s_n^{\alpha+1}\right) \to 0\ (\mathrm{A})$$

$$\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) \to 0\ (\mathrm{A})$$

$$\vdots$$

$$\left(s_n^{\alpha+m-1} - s_n^{\alpha+m}\right) \to 0\ (\mathrm{A})$$

bulunur. Lemma 2.2 ile,

$$(\alpha+2)\left(s_n^{\alpha+1} - s_n^{\alpha+2}\right) = \tau_n^{\alpha+2}$$

$$\vdots$$

$$(\alpha+m)\left(s_n^{\alpha+m-1} - s_n^{\alpha+m}\right) = \tau_n^{\alpha+m}$$

bulunur. Lemma 2.2 ve bu eşitliklerden,

$$\tau_n^{\alpha+1} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{4.3}$$

$$\tau_n^{\alpha+2} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{4.4}$$

$$\vdots$$

$$\tau_n^{\alpha+m} \to 0\ (\mathrm{A}) \tag{4.5}$$

olduğu ortaya çıkar. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+1$ yazılırsa,

$$\left(\alpha+2\right)\left(\tau_n^{\alpha+1}-\tau_n^{\alpha+2}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+2}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte (4.3) ve (4.4) ifadeleri kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+2}\to 0\ \left(\mathrm{A}\right)$$

bulunur. Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+2$ yazılırsa,

$$\left(\alpha+3\right)\left(\tau_n^{\alpha+2}-\tau_n^{\alpha+3}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+3}$$

elde edilir. (4.5) ifadesinde $m=3$ alınarak (4.4) ile birlikte yukarıdaki son eşitlikte kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+3}\to 0\ \left(\mathrm{A}\right)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse Lemma 3.1 de α yerine $\alpha+m$ yazıldığında,

$$\left(\alpha+m\right)\left(\tau_n^{\alpha+m-1}-\tau_n^{\alpha+m}\right)=n\Delta\tau_n^{\alpha+m}$$

elde edilir. Burada da (4.3) ile (4.5) ifadeleri arasındaki bilgiler kullanılırsa,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+m}\to 0\ \left(\mathrm{A}\right)$$

bulunur. Lemma 4.1. de α yerine $\alpha+1$ ve m yerine de $m-1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\left(n\Delta\right)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m}&=\sum_{j=1}^{m-1}\left(-1\right)^{j+1}\mathcal{A}_{m-1}^{j}\left(\alpha+1\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+j+1}\\&=\mathcal{A}_{m-1}^{1}\left(\alpha+1\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+2}-\mathcal{A}_{m-1}^{2}\left(\alpha+1\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+3}+\ldots+\left(-1\right)^{m}\mathcal{A}_{m-1}^{m-1}\left(\alpha+1\right)n\Delta\tau_n^{\alpha+m}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $j=2,3,...,m$ için $n\Delta\tau_n^{\alpha+j}\to 0\ \left(\mathrm{A}\right)$ olduğundan dolayı,

$$\left(n\Delta\right)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m}\to 0\ \left(\mathrm{A}\right)\tag{4.6}$$

bulunur. (4.1) ve (4.6) ifadeleri, Tauber'in Birinci Teoremi'nde kullanılırsa,

$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m}=o(1) \tag{4.7}$$

elde edilir. Lemma 3.1 ile,

$$(\alpha+m)\left((n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m-1}-(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m}\right)=(n\Delta)_m\tau_n^{\alpha+m} \tag{4.8}$$

eşitliği bulunur. (4.1) ve (4.7) ifadeleri, (4.8) eşitliğinde kullanılırsa,

$$(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m-1}=o(1) \tag{4.9}$$

elde edilir. Lemma 4.1. de α yerine $\alpha+1$ ve m yerine de $m-2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-1}&=\sum_{j=1}^{m-2}(-1)^{j+1}\mathcal{A}_{m-2}^{j}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+j+1}\\&=\mathcal{A}_{m-2}^{1}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+2}-\mathcal{A}_{m-2}^{2}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+3}+\cdots+(-1)^{m-1}\mathcal{A}_{m-2}^{m-2}(\alpha+1)n\Delta\tau_n^{\alpha+m-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $j=2,3,\ldots,(m-1)$ için $n\Delta\tau_n^{\alpha+j}\to 0\ (\mathrm{A})$ olduğundan dolayı,

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-1}\to 0\ (\mathrm{A}) \tag{4.10}$$

bulunur. (4.9) ve (4.10) ifadeleri, Tauber'in Birinci Teoremi'nde kullanılırsa,

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-1}=o(1) \tag{4.11}$$

elde edilir. Lemma 3.1 ile,

$$(\alpha+m-1)\left((n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-2}-(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-1}\right)=(n\Delta)_{m-1}\tau_n^{\alpha+m-1}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikte (4.9) ve (4.11) ifadeleri kullanılırsa,

$$(n\Delta)_{m-2}\tau_n^{\alpha+m-2}=o(1)$$

bulunur. Bu işlemlere devam edilirse,

$$n\Delta\tau_n^{\alpha+1} = o(1) \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.3) ifadesi ve (4.12) ile birlikte Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$\tau_n^{\alpha+1} = o(1) \tag{4.13}$$

bulunur. (4.12) ve (4.13) ifadeleri, Lemma 3.1 de kullanılırsa,

$$\tau_n^{\alpha} = o(1) \tag{4.14}$$

olduğu görülür. (4.14) ifadesi, Lemma 2.1 de kullanılırsa,

$$n\Delta s_n^{\alpha} = o(1) \tag{4.15}$$

bulunur. Varsayımdan $s_n^{\alpha} \to l \ (\mathrm{A})$ olduğundan ve (4.15) eşitliği ile Tauber'in Birinci Teoremi'nden,

$$s_n^{\alpha} \to l$$

elde edilir ki bu teoremin ispatını bitirir.□

(4.1) koşulunda $\alpha = 0$ alınırsa Teorem 4.1 için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. Herhangi bir $\alpha \geq 0$ için, eğer $\sum a_n$ serisi l ye (A)(C, α) toplanabilir ve negatif olmayan bir m tamsayısı için,

$$(n\Delta)_m \tau_n^m = o(1)$$

ise $\sum a_n$ serisi l ye yakınsaktır.

5. SONUÇLAR

Tezin 3. bölümünde, Pati (2005) te verilen teoremlerin genelleştirmesi olan teoremler incelenerek yeni sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Yeni sonuç olarak elde edilen Teorem 3.1, Teorem 3.2 ve Teorem 3.8, Teorem 2.12 nin; Teorem 3.3, Teorem 3.4 ve Teorem 3.9, Teorem 2.13 ün; Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 ise Teorem 2.14 ün bir genelleştirmesidir. Teorem 3.7, serinin kendisinin değil, (τ_n) dizisinin l ye (A)(C, α) toplanabilir olması durumunun incelenmesiyle ortaya çıkmıştır. Teorem 3.10 ise (A)(C, α) toplanabilme metodundan, yakınsaklığın elde edilmesi için gerekli koşulların araştırılmasıyla bulunmuştur.

Tezin 4. bölümünde, yeni sonuç olarak, Teorem 4.1 verilmiştir ki bu teorem, Teorem 2.15, Sonuç 3.1, Sonuç 3.3, Sonuç 3.5 in bir genelleştirmesidir. Sonuç 4.1 ile de Teorem 4.1 in, Teorem 3.10 un bir genelleştirmesi olduğu görülür. Bunlara ek olarak Teorem 4.1 de özel olarak $\alpha = 0$ ve $m = 0$ seçilirse, bu teoremin Tauber’in Birinci Teoremi’nin aynısı olduğu görülebilir. Ayrıca ispatlar yapılırken kullanılan Lemma 3.1, Lemma 3.2, Lemma 3.3, Lemma 4.1 ve Lemma 4.2 bu çalışmada elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

Abel, N. H., 1826. Recherches sur la série $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\ldots$, J. für Math. 1 311-339.

Badiozzaman, A. J., Thorpe B., (1996a). Some Best Possible Tauberian Results for Abel and Cesàro Summability: In memory of B. Kuttner, 1908-1992. Bulletin London Mathematical Society, 28 (3), 283-290.

Badiozzaman, A. J., Thorpe B., (1996b). Some Best Possible Tauberian Results for Abel and Cesàro Summability II. Journal London Mathematical Society, 53(3), 529-538.

Boos, J., 2000. Classical and modern methods in summability. Oxford University Press, 586 s. New York.

Borwein, D., 1958. Theorems on some methods of summability. Quarterly Journal of Mathematics 9 (1), 310-316.

Dik, M., 2001. Tauberian theorems for sequences with moderately oscillatory control moduli. Mathematica Moravica, 5, 57-94.

Hardy, G. H., 1910. Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series. Proceedings of the London Mathematical Society, 8 (2), 301-320.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1914. Tauberian theorems concerning power series and Dirichlet's series whose coefficients are positive. Proceedings of the London Mathematical Society, 13 (2), 174-191.

Hardy, G. H., 1991. Divergent series. Second Edition, AMS Chelsea Publishing, 396s. USA.

Jakimovski, A., 1952. On a converse of Abel’s theorem. Proceedings of the American Mathematical Society, 3, 244–256.

Karamata, J., 1930. Über die Hardy-Littlewoodschen Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. Mathematische Zeitschrift, 32, 319-320.

Kogbetliantz, E., 1925. Sur le sèries absolument sommables par la mèthode des moyennes arihtmètiques. Bulletin Soc. Math., 49 (2), 234-251.

Kogbetliantz, E., 1931. Sommation des sèries et intègrals divergents par les moyennes arithmètiques et typiques. Memorial Sci. Math., 51, 1-84.

Korevaar, J., 2004. Tauberian Theory–A century of developments. Springer-Verlag, 483s. New York.

Landau, E., 1910. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace Mat - Fiz, 21, 97-177.

Littlewood, J. E., 1911. The converse of Abel's theorem on power series. Proceedings of the London Mathematical Society, 9 (2), 434-448.

Lord, R. D., 1935. On Some Relations Between the Abel, Borel, and Cesàro Methods of Summation. Proceedings of the London Mathematical Society, 38 (2), 241-256.

Pati, T., 2005. On Tauberian Theorems. In: D. Rath, S. Nanda (Eds.), Sequences, Summability and Fourier Analysis, Narosa Publishing House, 84-96.

Peyerimhoff, A., 1969. Lecture Notes in Mathematics. Springer- Verlag, 111 s., New York.

Powell, R. E., Shah, S. M., 1972. Summability theory and its applications. Van Nostrand Reinhold Company Limited, 178 s. London.

Rajagopal, C. T., 1958. On Tauberian theorems for Abel-Cesàro summability. Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, 3, 176-181.

Rényi, A., 1946. On a Tauberian Theorem of O. Szász. Acta Univ. Szeged Sect. Sci. Math., XI, 119-123.

Schmidt, R., 1925. Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen. Mathematische Zeitschrift, 22, 89-152.

Stanojević, Č. V., 1998. Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Process, Graduate Research Seminar Lecture Notes, Edited by İ. Çanak. University of Missouri-Rolla, Fall 1998, 56s. USA.

Stanojević, Č. V., 1999. Analysis of Divergence: Applications to the Tauberian Theory. Graduate Research Seminar, University of Missouri–Rolla.

Szàsz, O., 1935. Generalization of two theorems of Hardy and Littlewood on power series, Duke Math. J., 1, 105-111.

Szász, O., 1952. On products of summability methods. Proceedings of the American Mathematical Society, 3 (2), 257-263.

Tauber, A., 1897. Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. Monatshefte für Mathematik und Physik, 8, 273-277.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yılmaz ERDEM

Doğum Yeri ve Yılı : Batman, 1977

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Aydın Teknik Lisesi, Elektronik, (1995)

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi, Matematik Eğitimi, (2000)

Yüksek Lisans : Adnan Menderes Ünv. Fen Bil. Enst. Matematik A.B.D. (2005)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Adnan Menderes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2001-…)

Yayınları (SCI ve diğer makaleler)

1. Çanak İ., Erdem Y., Totur Ü., 2010. Some Tauberian theorems for (A)(C, α) summability method. Mathematical and Computer Modelling, 52 (5-6), 738-743. (SCI Exp.)

2. Erdem Y., Çanak İ., 2010. A Tauberian theorem for (A)(C, α) summability. Computers and Mathematics with Applications, 60 (11), 2920-2925. (SCI)

3. Çanak İ., Erdem Y., 2011. On Tauberian theorems for (A)(C, α) summability method. Applied Mathematics and Computation, 218 (6), 2829-2836. (SCI)