T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OLASILIKSAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TİPLERİ

Mualla Birgül HUBAN

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2012

TEZ ONAYI

Mualla Birgül HUBAN tarafından hazırlanan "**Olasılıksal 2-normlu uzaylarda bazı yakınsaklık tipleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğ~~u ile Süleyman Demirel Üniversitesi **Matematik** Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri :
Yrd. Doç. Dr. Faruk UÇAR
Marmara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN
Süleyman Demirel Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Mehmet Cengiz Kayacan
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

OLASILIKSAL 2-NORMLU UZAYLARDA BAZI YAKINSAKLIK TİPLERİ

Mualla Birgül HUBAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi, literatür özeti ve konunun amacı ifade edilmiştir. İkinci olarak olasılıksal normlu uzaylar, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık teorileri ile beraber 2-normlu uzaylar ve rassal 2-normlu uzaylar teorileri ile ilişkili bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü olarak rassal 2-normlu uzaylarda çift indisli dizilerin $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları ile $\mathcal{I}$-Cauchy kavramları ve bunlara ilişkin bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak, rassal 2-normlu uzaylarda limit noktaları ve $\mathcal{I}$-yığılma noktaları arasındaki bağıntılar incelenmiş ve bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Olasılıksal 2-normlu uzay, rassal 2-normlu uzay, F-topoloji, istatistiksel yakınsaklık, ideal yakınsaklık, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$-çift indisli Cauchy dizileri, $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-limit ve $\mathcal{I}$-yığılma noktaları

2012, 42 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME TYPES OF CONVERGENCE IN PROBABILISTIC 2-NORMED SPACES

Mualla Birgül HUBAN

Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL

In the first section, the aim of the topic is presented following the brief information on how the topic has evolved diachronically and the relevant literature review. In the second section, with probabilistic normed spaces, theories of statistical and ideal convergent, some basic principles and results of the theories of 2-normed spaces and random 2-normed spaces are given. In the third section, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergents of double sequence in RTN are given. $\mathcal{I}$-Cauchy and some results of this notation are presented. In the last section, the relation between $\mathcal{I}$-limit and $\mathcal{I}$-cluster points is given and some results are presented.

Key Words: probabilistic 2-normed space, random 2-normed space, F-topology, statistical convergence, ideal convergence, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$- double Cauchy sequences, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$-convergence, $\mathcal{I}$-limit and $\mathcal{I}$-cluster points.

2012, 42 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mehmet GÜRDAL'a teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimim süresince bana ekonomik olarak destek olan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

2947-YL-11 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Yönetim Birimi Başkanlığı'na teşekkür ederim.

Mualla Birgül HUBAN
ISPARTA, 2012

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
D	: Dağılım fonksiyonlarının kümesi
D^+	: Uzaklık dağılım fonksiyonu
H_a	: Birim basamak fonksiyonu
$*$	: Üçgen norm
τ	: Üçgen fonksiyon
$\delta(E)$	: E kümesinin yoğunluğu
$st-\lim x_n$	: x dizisinin istatistiksel limiti
$\mathcal{I}$	: Pozitif tamsayıların alt kümelerinin ideali
$\mathcal{F}(I)$	: Pozitif tamsayıların alt kümelerinin süzgeci
$\Vert .,. \Vert$	: 2-normlu uzay
(X, F, τ)	: Olasılıksal 2-normlu uzay (PNS)
$(X, F, *)$	: Rassal 2-normlu uzay (RTN)
$\mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)$	: θ nın (ε, λ) komşuluklar sistemi
AP	: Sonlu toplamsallık özelliği
L_x^2	: RTN uzayında x dizisinin limit noktaları kümesi
Λ_x^2	: RTN uzayında x dizisinin istatistiksel limit noktaları kümesi
Γ_x^2	: RTN uzayında x dizisinin istatistiksel yığılma noktaları kümesi
$\mathcal{I}(\Lambda_x^2)$	: RTN uzayında x dizisinin $\mathcal{I}$-limit noktaları
$\mathcal{I}(\Gamma_x^2)$	: RTN uzayında x dizisinin $\mathcal{I}$-yığılma noktaları

1. GİRİŞ

Başvurulan bilimsel çalışmalarda sıkça karşılaşılan belirsizliklerden bazıları uzaklık, uzunluk, konum, vb kavramlara ilişkin olarak ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla bu tip belirsizliklerin geometrik olarak modellenmesi gerekmektedir. Bunu gerçekleştiren araçlardan biri olasılıksal metrik uzaylar teorisidir. Olasılıksal metrik uzay kavramı ilk olarak klasik metrik uzayların bir genellemesi olacak şekilde, "istatistiksel metrik uzay" adı altında Menger tarafından tanımlanmıştır (Menger, 1942). Olasılıksal metrik uzaylar teorisinde uzaklık ölçümü belirsiz bir sayı olarak düşünülüp istatistiksel (olasılıksal) olarak ele alınır. Böylelikle, p ve q gibi iki nokta arasındaki uzaklığı, bir reel sayı ile belirtmek yerine bir F_{pq} dağılım fonksiyonu ile belirtmek gerektiği düşünülür ve herhangi bir pozitif x değeri için $F_{pq}(x)$ değeri, " p ile q arasındaki uzaklığın x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanır.

Olasılıksal metrik uzayların özel bir biçimi olan olasılıksal normlu uzay kavramı da klasik normlu uzayın doğal bir genellemesi olacak şekilde tanımlanmıştır. Bir olasılıksal normlu uzayda vektörlerin normları kesin sayısal değerler yerine olasılık dağılım fonksiyonları ile ifade edilirler. Örneğin p bir vektör olmak üzere p nin normu N_p dağılım fonksiyonu ile gösterilir ve $x \in [0, \infty]$ olmak üzere $N_p(x)$ değeri, "p nin normunun x den küçük olma olasılığı" olarak yorumlanır. Olasılıksal normlu uzaylar ilk olarak Šerstnev tarafından tanımlanmıştır (Šerstnev, 1963) fakat daha sonraki süreçte bu tanımın bazı kısıtlayıcı özelliklerinin olduğu anlaşılmış ve Alsina vd. tarafından, Šerstnev 'in tanımını da kapsayacak şekilde yeni bir olasılıksal normlu uzay tanımı verilmiştir (Alsina vd., 1993). Bu yeni tanım önemli bir olasılıksal normlu uzay sınıfı olan Menger olasılıksal normlu uzaylarını elde etmeye olanak tanımıştır. Olasılıksal normlu uzaylarla ilgili temel nitelikteki çalışmalardan bazıları Guill´en vd. ne aittir (Guill´en vd., 1999; Guill´en ve Sempi, 2003). Olasılıksal normlu uzaylar teorisinin 2006 yılına kadar olan gelişimi Sempi tarafından detaylı bir biçimde ele alınmıştır (Sempi, 2006). Daha sonra çeşitli alanlarda çalışmalar yapılmıştır (Asadollah ve Nourouzi, 2008; Constantin ve Istrătescu, 1989; Rahmat ve Guill´en, 2009).

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ise ilk kez Steinhaus tarafından Wroclaw Üniversitesi'nde katıldığı bir konferansta verilmiştir (Steinhaus, 1951). Bu konudaki ilk makale ise bildiğimiz kadarıyla, Fast tarafından yayınlanmıştır (Fast, 1951). İstatistiksel yakınsaklık, toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde önemli bir yer tutmaktadır. İstatistiksel yakınsaklığın reel ve kompleks diziler ile ilişkisi Buck (Buck, 1953) tarafından ve toplanabilme teorisi ile ilişkisi Schoenberg (Schoenberg, 1959) tarafından verildi. Daha sonra 1985 yılında Fridy ve 1994 yılında Rath ve Tripathy istatistiksel Cauchy dizileri kavramını incelediler (Fridy, 1985; Rath ve Tripathy, 1994). Ayrıca Fridy, klasik limit noktası kavramından yola çıkarak, bir reel dizinin istatistiksel limit noktası ve istatistiksel yığılma noktası kavramlarını tanımlamıştır (Fridy, 1993).

İstatistiksel yakınsaklığın, pozitif tamsayı kümelerinin doğal yoğunluğuna ilişkin olması ve doğal yoğunluğu sıfır olan pozitif tamsayı kümelerinin ailesinin bir ideal oluşturması gerçeğinden yola çıkılarak, istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesi olacak biçimde "ideal yakınsaklık ($\mathcal{I}$-yakınsaklık)", kavramı tanımlanmıştır. $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramı, ilk olarak Kostyrko vd (2000) tarafından verilmiş olup istatistiksel yakınsaklığın da ötesinde oldukça genel bir yakınsaklık tipidir. Ayrıca Kostyrko vd, istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktalarının bir genellemesi olacak biçimde bir dizinin $\mathcal{I}$-limit ve $\mathcal{I}$-yığılma noktası kavramlarını tanımlamıştır. Bunun yanı sıra bir $\mathcal{I}$ idealine ilişkin filtre yardımıyla $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramını da tanımlamışlardır. 2004 yılında doktora tezinde Gürdal; $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy kavramlarını tanımlayarak bazı önemli sonuçlar elde etmiştir (Gürdal, 2004).

İlk olarak 1963 yılında Gähler tarafından tanıtılan ve yine iki yıl sonra Gähler tarafından geliştirilen "2-Normlu Uzaylar" kavramını, sonrasında pek çok araştırmacı çalışmış ve önemli sonuçlar ortaya çıkarmıştır (Gähler, 1963; 1965). Örneğin, 2-Metrik Uzaylar (Gähler, 1965; Ehret, 1969), 2-Banach Uzaylar (White, 1969); son zamanlarda İstatistiksel yakınsaklık (Gürdal ve Pehlivan, 2004), n-Normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve n-Banach Uzaylar (Gunawan ve Mashadi, 2001a) gibi matematiğin temel alanlarıyla ve klasik Fonksiyonel Analiz ile olan ilişkisi nedeniyle bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. Özellikle 2001 yılında Gunawan ve Mashadi tarafından "2-normlu Uzaylarda Yakınsaklık ve Cauchy" kavramı verilerek bir çeşit yeni bir analiz kavramı ortaya konulmuştur (Gunawan ve Mashadi, 2001b). Bununla birlikte yine aynı yılda Gunawan ve Mashadi (Gunawan ve Mashadi, 2001a) yaptıkları çalışmada "n-normlu uzaylar ve n-Banach Uzaylar" kavramlarını vererek 2-normlu uzayları daha da genelleştirmişlerdir. 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramı Gürdal ve Pehlivan (Gürdal ve Pehlivan, 2004) tarafından incelenerek yeni bir çalışma alanı oluşturulmuştur ve bu alandaki çalışmalar çeşitli alanlara uygulanarak devam etmektedir (Gürdal, 2006; Şahiner vd., 2007; Gürdal ve Açık, 2008; Gürdal vd., 2009; Savaş, 2011). Özellikle son zamanlarda Golet'in bir çalışmasıyla olasılıksal ve rassal 2-normlu uzaylar kavramının verilmesiyle bu alanda Mursaleen, Karakuş, Mohiuddine ve Alotaibi tarafından bir dizi çalışmalar yapılmıştır ve yapılmaya devam etmektedir (Golet, 2005, Karakuş, 2007; Mursaleen, 2010; Mursaleen ve Mohiuddine, 2012; Mursaleen ve Lohani, 2011; Şencimen, 2008; Tripathy vd., 2012).

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında rassal 2-normlu uzaylar tarafından indirgenmiş topolojide çift indisli dizilerin $\mathcal{I}$-yakınsak ve $\mathcal{I}$-Cauchy tanımları verilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bunun dışında rassal 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklığa göre dizilerin limit ve $\mathcal{I}$-yığılma noktaları kavramları arasındaki bağıntılar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak, dağılım fonksiyonları ve olasılıksal metrik uzayların özel biçimleri olan olasılıksal normlu uzaylar ifade edilecektir.

İkinci olarak istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık teorilerine ilişkin bazı temel tanımlar ve sonuçlar incelenecektir.

Son olarak, 2-normlu uzaylar ve rassal 2-normlu uzaylar teorisine ilişkin bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilecektir.

2.1 Dağılım Fonksiyonları ve Olasılıksal Normlu Uzaylar

İlk olarak, dağılım fonksiyonları, üçgen fonksiyonları ve üçgen normları incelenecektir.

Tanım 2.1.1. Bir dağılım fonksiyonu, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ ile tanımlı , azalmayan ve $\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t) = 0$ ve $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) = 1$ koşullarını sağlayan soldan sürekli bir f fonksiyonudur (Schweizer ve Sklar, 1983).

Soldan sürekli tüm dağılım fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim.

Dağılım fonksiyonları $f(0) = 0$ koşulunu gerçeklemesi halinde uzaklık dağılım fonksiyonu adını alır ve D^+ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}_0^+$ için a noktasındaki birim basamak olarak ifade edilen $H_a \in D$ fonksiyonu

$$H_a(t) = \begin{cases} 1, & t > a \text{ ise} \\ 0, & t \leq a \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Her $f \in D$ için $H_0 \geq f$ olduğu açıktır (Schweizer ve Sklar, 1983).

Tanım 2.1.3. Bir $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ ikili işlemi

i) Her $a \in [0,1]$ için $a * 1 = a$,

ii) Her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = b * a$,

iii) Her $a, b, c, d \in [0,1]$ için $c \leq a$ ve $d \leq b$ ise $c * d \leq a * b$,

iv) Her $a, b, c \in [0,1]$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$

koşullarını sağlıyorsa $*$ işlemine bir üçgen norm veya t-norm denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Örnek 2.1.4. $[0,1]$ üzerindeki $a * b = \max\{a + b - 1, 0\}$, $a * b = ab$ ve $a * b = \min\{a, b\}$ biçiminde tanımlı $*$ işlemleri t-normlara (üçgen normlara) birer örnektir.

Tanım 2.1.5. Bir $\tau : D^+ \times D^+ \longrightarrow D^+$ ikili işlemi,

i) $\tau(F, H_0) = F$,

ii) $\tau(F, G) = \tau(G, F)$,

iii) $F \leq H$ ve $G \leq K$ ise $\tau(F, G) \leq \tau(H, K)$,

iv) $\tau(\tau(F, G), H) = \tau(F, \tau(G, H))$

koşullarını sağlıyorsa τ işlemine üçgen fonksiyon denir (Schweizer ve Sklar, 1983).

Şimdi ise ilk olarak Śerstnev tarafından tanımlanan olasılıksal normlu uzay kavramını verelim (Śerstnev, 1963).

Tanım 2.1.6. Eğer X bir reel vektör uzayı, $F : X \to D$, τ sürekli bir üçgen fonksiyonu ve her $x, y \in X$ ve $s, t \in \mathbb{R}_0^+$ için

i) $F_x(0) = 0$,

ii) Her $t > 0$ için $F_x(t) = 1$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x = 0$ olmasıdır,

iii) Her $\alpha \neq 0$ için $F_{\alpha x}(t) = F_x\left(\frac{t}{|\alpha|}\right)$,

iv) $F_{x+y}(s + t) \geq \tau(F_x(s), F_y(t))$

koşullarını sağlıyorsa (X, F, τ) üçlüsüne olasılıksal normlu uzay (PNS) denir.

Eğer, $*$ sürekli bir t-norm olmak üzere iv) koşulu

v) $F_{x+y}(s + t) \geq F_x(s) * F_y(t)$

koşulu ile yer değiştirirse $(X, F, *)$ üçlüsüne rassal normlu uzay (RNS) denir.

Örnek 2.1.7. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $a * b = ab$ (veya $a * b = \min\{a, b\}$)

olsun. $x \in X$ ve $t \geq 0$ için

$$F_x(t) = \frac{t}{t + \|x\|}$$

ifadesi tanımlansın. O zaman $(X, F, *)$ üçlüsü bir rassal normlu uzaydır.

Şimdi, olasılıksal normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizisi kavramlarını hatırlatalım.

Tanım 2.1.8. (X, F, τ) olasılıksal normlu uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ verildiğinde $n \geq k_0$ için $F_{x_n - L}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı mevcut ise o zaman $x = (x_n)$ dizisine, F olasılıksal norma göre $L \in X$ değerine yakınsaktır ya da kısaca L değerine F-yakınsaktır denir ve F-$\lim_n x_n = L$ veya $x_n \xrightarrow{F} L$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.9. $(X, \|.\|)$ bir reel normlu uzay ve $x \in X$ ve $t \geq 0$ için ($\|.\|$ tarafından indirgenmiş standart t-norm) $F_x(t) = \frac{t}{t+\|x\|}$ olsun. O zaman $x_n \xrightarrow{\|.\|} x$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x_n \xrightarrow{F} x$ olmasıdır.

Tanım 2.1.10. (X, F, τ) olasılıksal normlu uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0, 1)$ verildiğinde $n, m \geq k_0$ için $F_{x_n - x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı mevcut ise o zaman $x = (x_n)$ dizisine, F olasılıksal norma göre bir Cauchy dizisi denir.

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık ve İdeal Yakınsaklık

İlk olarak, istatistiksel yakınsaklık kavramının ortaya çıkmasına neden olan yoğunluk kavramını verelim.

Tanım 2.2.1. K pozitif tamsayıların bir kümesi olmak üzere

$$\delta(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \in K : k \leq n\}|$$

ifadesine K 'nın doğal yoğunluğu denir. Burada $|\{k \in K : k \leq n\}|$ ifadesi $\{k \in K : k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısını göstermektedir. K sonlu ise $\delta(K) = 0$ dır. $K^c = \mathbb{N} \backslash K$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$ dır (Niven vd., 1991; Freedman ve Sember, 1981).

$\delta(K) = 1$ olmak üzere her $k \in K$ için bir $P(k)$ özelliği gerçekleniyor ise hemen hemen her k için $P(k)$ özelliği gerçekleniyor diyeceğiz ve bunu $h.h.k.$ biçiminde ifade edeceğiz.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.2.2. (x_n) reel bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \mid x_n - L \mid \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise $x = x_n$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir (Steinhaus 1951, Fast 1951, Fridy 1985).

Adi anlamda yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki bağlantıyı kurmak için, bu iki kavramı karşılaştıralım: Bilindiği gibi, x reel sayı dizisi L ye yakınsak ise L nin herbir ε komşuluğunun dışında dizinin ancak sonlu sayıda elemanı kalabilir. Şimdi, L noktasının her bir ε komşuluğunun dışında dizinin sonlu sayıda değil, sonsuz sayıda da elemanının kalabileceğini kabul edelim. Fakat böyle elemanların sayısı dizinin tüm elemanlarının sayısına göre "çok çok az" olacaktır. Yani dizinin "hemen hemen" tüm elemanlarının, L nin ε komşuluğunun içerisinde olduğunu söyleyebiliriz. Buradan x dizisinin L noktasına "hemen hemen" yakınsak olduğunu anlarız. İstatistiksel yakınsaklık kavramı bu fikri matematiksel olarak kesin ifade eden kavramlardan biridir. Burada L noktasının ε komşuluğu dışında kalan elemanların sayısının "az" olması, böyle elemanların doğal yoğunluğunun sıfır olması ile ifade edilir (Pehlivan, 2001).

Teorem 2.2.3. $st\text{-}\lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesinin mevcut olmasıdır (Salat, 1980; Fridy 1985).

Burada adi anlamda yakınsak olan her dizinin istatistiksel yakınsak olduğunu ifade etmek gerekir. x dizisi L ye yakınsak ise her $\varepsilon > 0$ için $K = \{n \in \mathbb{N} :$

$|x_n - L| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonlu sayıda eleman içerdiğinden yoğunluğu sıfırdır.

Örnek 2.2.4.

$$x_n = \begin{cases} 1 & , n = k^2, \quad (k = 1, 2, ...) \\ 0 & , n \neq k^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_n)$ dizisini gözönüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - 0| \geq \varepsilon\} = \{1, 4, 9, 16, ...\}$ alındığında

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. O halde $st\text{-}\lim x = 0$ dır.

Şimdi de istatistiksel Cauchy dizisi tanımını verelim.

Tanım 2.2.5. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \mid \{n \in \mathbb{N} :\mid x_n - x_N \mid \geq \varepsilon\} \mid = 0$$

olacak şekilde en az bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_n)$ dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisidir denir. Bu ifade, her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her n için,

$$\mid x_n - x_N \mid < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır şeklinde de yazılabilir (Fridy, 1985).

Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri arasındaki bağıntıyı vermektedir. Buna göre,

Teorem 2.2.6. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) x istatistiksel yakınsak bir dizidir;

ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir;

iii) x dizisi verilsin. Hemen hemen her n için $x_n = y_n$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_n)$ dizisi vardır (Fridy, 1985).

Tanım 2.2.7. Y boş olmayan bir küme ve $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(Y)$ olsun. Her $A, B \in \mathcal{I}$ için

$A \cup B \in \mathcal{I}$, her $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$ koşulları sağlanıyor ise $\mathcal{I}$ ailesine bir ideal denir (Kuratowski, 1966).

Tanım 2.2.8. Boş olmayan bir $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$ ailesi $\emptyset \notin \mathcal{F}$, her $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$, her $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B \subset Y$ için $B \in \mathcal{F}$ koşulları sağlanıyor ise $\mathcal{F}$ ailesine Y kümesi üzerinde bir süzgeç denir (Katētov, 1968).

Eğer $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ve $Y \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine gerçek ideal denir. $\mathcal{I} \subset 2^Y$ idealinin gerçek bir ideal olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{Y \backslash A : A \in \mathcal{I}\}$ ailesinin Y kümesi üzerinde bir süzgeç olmasıdır. $\mathcal{I} \subset 2^Y$ bir gerçek ideal olsun. Eğer her $x \in Y$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine bir uygun ideal denir (Kostyrko vd., 2000).

Şimdi de $\mathcal{I}$-yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 2.2.9. $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

ise $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ dizisi $L \in X$ ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir (Kostyrko vd., 2000).

Eğer $x = (x_n)$ dizisi L ye $\mathcal{I}$-yakınsak ise bu ifade $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = L$ ile gösterilir. Bu durumda $L \in X$ elemanı $x = (x_n) \in X$ dizisinin $\mathcal{I}$-limiti adını alır.

Örnek 2.2.10. $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ olmak üzere (Kostyrko, 2000) tarafından tanımlanan bazı gerçek uygun ideal örneklerini verelim.

(a) $\mathcal{I}_f = \{M \subset \mathbb{N} : M \text{ sonlu}\}$,

(b) $\mathcal{I}_\delta = \{M \subset \mathbb{N} : \delta(M) = 0\}$

K kümesini $K = K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, \xi) \geq \varepsilon\}$ şeklinde tanımlayalım. $\mathcal{I}$ ideali olarak;

(a) daki $\mathcal{I}_f$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık ile adi anlamda yakınsaklık,

(b) deki $\mathcal{I}_\delta$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_\delta$-yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramları çakışır. Burada $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_\delta \subset \mathcal{I}$ dır.

Teorem 2.2.11. $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal olsun.

i) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$ ise $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \xi$,

ii) $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \xi + \eta$,
iii) $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$ ve $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$ ise $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \xi\eta$
dir (Kostyrko vd., 2005).

Şimdi de $\mathcal{I}$-yakınsaklığa bağlı olarak $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramını verelim.

Tanım 2.2.12. X in elemanlarının bir (x_n) dizisinin,

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{m_k}, L\right) = 0$$

olacak şekilde bir alt dizisinin indeks kümesi $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ (yani $\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}$) mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisi $L \in X$ değerine $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir (Kostyrko vd., 2000).

Önerme 2.2.13. $\mathcal{I}$ uygun ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ ise $\mathcal{I}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ dir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.2.14. Eğer $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, ...)$ ve $A_i \in \mathcal{I}$ ise her $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \Delta B_i$ sonlu küme ve $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}$ olacak şekilde B_i kümeleri mevcut ise $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideali (AP) koşulunu sağlar denir (Kostyrko vd., 2000).

Şimdi metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramlarını verelim.

Tanım 2.2.15. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisine X üzerinde $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir (Kostyrko vd., 2000).

Örnek 2.2.16. Her $\varepsilon > 0$ ve $N = N(\varepsilon)$ indeksi için

$$K = K(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x_N) \geq \varepsilon\}$$

kümesini tanımlayalım. $\mathcal{I}$ ideali olarak;
Örnek 2.2.10 (a) daki $\mathcal{I}_f$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_f$-Cauchy dizisi ile adi anlamda Cauchy

dizisi,

Örnek 2.2.10 (b) deki $\mathcal{I}_\delta$ ideali alınırsa $\mathcal{I}_\delta$-Cauchy dizisi ile istatistiksel Cauchy dizisi kavramları çakışır.

Tanım 2.2.17. (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Eğer $x_M = (x_{m_k})$ alt dizisi X de Cauchy dizisi yani,

$$\lim_{k,p \to \infty} \rho\left(x_{m_k}, x_{m_p}\right) = 0$$

olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \subset \mathbb{N}$, $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi mevcut ise $(x_n) \in X$ dizisine X de $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir (Kostyrko vd., 2000).

(X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ uygun ideal olsun. Eğer $x = (x_n) \in X$ dizisi $\mathcal{I}^*$-Cauchy ise $x = (x_n)$ dizisi $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir (Nabiev vd., 2007).

Şimdi metrik uzaylarda $\mathcal{I}$-limit noktası ve $\mathcal{I}$-yığılma noktaları kavramlarını hatırlayalım.

Tanım 2.2.18. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$$

ise x ve y dizileri $\mathcal{I}$ ya göre hemen hemen her n için eşittir denir ve "$\mathcal{I}$-$h.h.n.$ için $x_n = y_n$ " yazabiliriz.

Tanım 2.2.19. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $K := \{n(j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $K \in \mathcal{I}$ ise $\{x\}_K$ alt dizisine $\mathcal{I}$-seyrek alt dizi ve eğer $K \notin \mathcal{I}$ ise $\{x\}_K$ dizisine $x = (x_n)$ dizisinin $\mathcal{I}$-seyrek olmayan alt dizisi denir (Kostyrko vd., 2000).

Tanım 2.2.20. (X, ρ) bir metrik uzay ve $(x_n) \in X$ olsun.

i) $M \notin \mathcal{I}$ ve $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde $M = \{m_1 < m_2 ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcut ise $L \in X$ elemanına x in $\mathcal{I}$-limit noktası denir.

ii) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, L) < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}$ ise $L \in X$ elemanına x in $\mathcal{I}$-yığılma noktası denir (Kostyrko vd., 2005).

$\mathcal{I}(\Lambda_x)$ ile x dizisinin tüm $\mathcal{I}$-limit noktaları kümesi, $\mathcal{I}(\Gamma_x)$ ile x dizisinin tüm $\mathcal{I}$-yığılma noktaları kümesini ve adi limit noktalarının kümesini de L_x ile tanımlanır.

Herhangi bir x dizisi için $\mathcal{I}(\Lambda_x) \subseteq L_x$ olduğu açıktır. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Bu durumda her $x = (x_n) \in X$ dizisi için $\mathcal{I}(\Lambda_x) \subset \mathcal{I}(\Gamma_x)$ ve $\mathcal{I}(\Gamma_x) \subseteq L_x$ dir. Ayrıca (X, ρ) keyfi metrik uzay ve $x = (x_n) \in X$, $y = (y_n) \in X$ olmak üzere $\mathcal{I}$-$h.h.n$ için $x_n = y_n$ ise $\mathcal{I}(\Gamma_x) = \mathcal{I}(\Gamma_y)$ ve $\mathcal{I}(\Lambda_x) = \mathcal{I}(\Lambda_y)$ olur. Son olarak $\mathcal{I}$ (AP) özelliğini sağlayan bir uygun ideal ve (X, ρ) keyfi metrik uzay olsun. Herhangi bir $x = (x_n) \in X$ dizisi için $\mathcal{I}\text{-}\lim_n x_n = L$ ise $\mathcal{I}(\Lambda_x) = \mathcal{I}(\Gamma_x) = \{L\}$ dir (Kostyrko vd., 2000).

Bu kısımda son olarak çift indisli dizi kavramına yer verilmiştir.

Tanım 2.2.21. (x_{nk}) çift indisli reel sayı dizisi olsun. n ve k indisleri birbirinden bağımsız olarak sonsuza yakınsarken (x_{nk}) dizisi L değerine yakınsak olacak şekilde bir L reel sayısı mevcut ise (x_{nk}) çift indisli reel sayı dizisine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Bu durumda $P\text{-}\lim_{n,k\to\infty} x_{nk} = L$ yazılır (Pringsheim, 1900).

Çift indisli dizilerin istatistiksel yakınsaklığı kavramı Tripathy, Mursaleen ve Edely tarafından verilmiştir. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{nk} - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise (x_{nk}) çift indisli dizisine Pringsheim anlamında L değerine istatistiksel yakınsaktır denir (Moricz, 2003; Tripathy, 2003; Mursaleen ve Edely, 2003). Bu kavram 2005 yılında Tripathy tarafından $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramına genişletilmiştir.

$\mathcal{I}_2$ ideali $2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ nin bir ideali olsun.

Tanım 2.2.22. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{nk} - L| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ise (x_{nk}) çift indisli dizisine Pringsheim anlamında L değerine ideal yakınsaktır denir ve $\mathcal{I}_2$-$\lim x_{nk} = L$ yazılır (Tripathy, 2005).

Örnek 2.2.23. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_2(\delta)$ ve $L = 0$ olsun.

$$x_{nk} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } n,k \in \mathbb{N} \text{ ve } n,k \text{ kare ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile (x_{nk}) çift indisli dizisini tanımlayalım. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\left(\{(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{nk} - L| \geq \varepsilon\}\right) \leq \lim_{n,k} \frac{\sqrt{n}\sqrt{k}}{nk} = 0$$

elde ederiz. Bu sebeple Pringsheim anlamında $st\text{-}\lim_{n,k\to\infty} \lim |x_{nk} - L| = 0$ olur. Ancak (x_{nk}) dizisi Pringsheim anlamında L ye yakınsak değildir.

2.3. Olasılıksal ve Rassal 2-Normlu Uzaylar

Bu kısımda ilk olarak Gähler (Gähler, 1963; Gähler, 1965) ve Gunawan ve Mashadi (Gunawan ve Mashadi, 2001b) tarafından verilen 2-normlu uzaylar ve bu uzaylar üzerinde ifade edilen yakınsaklık tanımına yer verelim.

Tanım 2.3.1. X uzayı $2 \leq d < \infty$ boyutlu bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde $\|\cdot,\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki dört koşulu sağlıyor ise $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonuna bir 2-norm ve $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisine de bir 2-normlu uzay denir:

(i) $\|x,y\| = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin lineer bağımlı olmasıdır;
(ii) $\|x,y\| = \|y,x\|$;
(iii) $\|\alpha x,y\| = |\alpha| \|x,y\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
(iv) $\|x,y+z\| \leq \|x,y\| + \|x,z\|$.

Yani, $X = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\|x,y\| :=$ x ve y vektörlerinden meydana gelen paralelkenarın alanı olarak alınırsa

$$\|x,y\| = |x_1y_2 - x_2y_1|,\ x = (x_1,x_2),\ y = (y_1,y_2)$$

formülüyle verilebilir. Her x, $y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için her $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ 2-normlu uzayda $\|x, y\| \geq 0$ ve $\|x, y + \alpha x\| = \|x, y\|$ özellikleri sağlanır. Ayrıca, x, y ve z lineer bağımlı ise (örneğin, $d = 2$ olduğunda), $\|x, y + z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ veya $\|x, y - z\| = \|x, y\| + \|x, z\|$ dir (Gähler 1963; 1965; Gunawan ve Mashadi, 2001b). 2-normlu $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ uzayı verilsin.

Tanım 2.3.2. Her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x, y\| = 0$ ise X deki bir (x_n) dizisine x değerine yakınsaktır denir. Böyle bir durumda, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir ve (x_n) dizisinin limiti x dir denir (Gunawan ve Mashadi, 2001b).

Şimdi de bu kısımda Raymond vd. (2001) ne göre lineer 2-normlu uzaylardaki Cauchy dizisi tanımını hatırlatalım.

Tanım 2.3.3. X lineer 2-normlu uzayında herhangi bir (x_n) dizisi ve her $z \in X$ için

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \|x_n - x_m, z\| = 0$$

ise (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir (Raymond vd., 2001).

Şimdi Golet tarafından 2005 yılında verilen olasılıksal 2-normlu uzay ve rassal 2-normlu uzay tanımı verilecektir (Golet, 2005). Daha sonra rassal 2-normlu uzaylarda yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık teorilerine ilişkin bazı temel tanımlara ve sonuçlara yer verilecektir.

Tanım 2.3.4. X boyutu birden büyük olan bir lineer uzay, τ bir üçgen fonksiyon, $*$ bir üçgen norm ve $F : X \times X \to D$ olsun.
i) Eğer x ve y lineer bağımlı ise $F(x, y; t) = H_0(t)$ dır. Burada $F(x, y; t)$ kümesi $F(x, y)$ nin $t \in \mathbb{R}$ noktasındaki değeridir,
ii) Eğer x ve y lineer bağımsız ise $F(x, y; t) \neq H_0(t)$,
iii) Her $x, y \in X$ için $F(x, y; t) = F(y, x; t)$,
iv) Her $t > 0$, $\alpha \neq 0$ ve her $x, y \in X$ için $F(\alpha x, y; t) = F(x, y; \frac{t}{|\alpha|})$,
v) Her $x, y, z \in X$ için $F(x + y, z; t) \geq \tau(F(xz, yz; t))$,
koşulları sağlıyorsa F fonksiyonuna olasılıksal 2-norm ve (X, F, τ) üçlüsüne de olasılıksal 2-normlu uzay denir ve kısaca PTN yazılır.

Eğer v) koşulu

vi) Her $x, y, z \in X$ ve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_0^+$ için $F(x+y, z; t_1+t_2) \geq F(x, z; t_1) * F(y, z; t_2)$;

ile yer değiştirirse $(X, F, *)$ üçlüsüne rassal 2-normlu uzay denir ve kısaca RTN yazılır.

Uyarı 2.3.5. Her $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı

i) Her $x, y \in X$, $t > 0$ ve $a * b = \min\{a, b\}$, $a, b \in [0,1]$ için $F(x, y; t) = H_0(t - \|x, y\|)$, veya

ii) Her $x, y \in X$, $t > 0$ ve $a * b = ab$, $a, b \in [0,1]$ için $F(x, y; t) = \frac{t}{t+\|x,y\|}$

koşullarıyla bir rassal 2-normlu uzay yapılabilir.

Tanım 2.3.6. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde sıfırdan farklı $z \in X$ ve $n \geq k_0$ için $F(x_n - L, z; \varepsilon) > 1 - \lambda$ olacak şekilde bir k_0 pozitif tamsayısı mevcut ise o zaman $x = (x_n)$ dizisi $(X, F, *)$ uzayında L değerine yakınsaktır veya kısaca L değerine F-yakınsaktır denir. Bu durumda $F\text{-}\lim_n x_n = L$ ile gösterilir ve L değerine $x = (x_n)$ dizisinin F-limiti denir (Golet, 2005).

Tanım 2.3.7. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : F(x_n - L, z; \varepsilon) \leq 1 - \lambda\}\right) = 0,$$

veya denk olarak

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : F(x_n - L, z; \varepsilon) > \lambda\}\right) = 1$$

ise $x = (x_n)$ dizisi $(X, F, *)$ uzayında L değerine istatistiksel yakınsak veya kısaca L değerine $st(RTN)$-yakınsaktır denir. $st(RTN)\text{-}\lim x = L$ ile gösterilir ve L değerine x dizisinin $st(RTN)$-limiti denir (Mursaleen, 2010).

Tanım 2.3.8. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde her $n, m \geq N$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : F(x_n - x_m, z; \varepsilon) \leq 1 - \lambda\}\right) = 0$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon, z)$ sayısı varsa o zaman $x = (x_n)$ dizisine $(X, F, *)$ uzayında istatistiksel Cauchy veya $st(RTN)$-Cauchy denir (Mursaleen, 2010).

Teorem 2.3.9. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer F-$\lim x_n = L$ ise $st(RTN)$-$\lim x_n = L$ dir. Fakat tersi genellikle doğru değildir (Mursaleen, 2010).

Şimdi tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 2.3.10. $X = \mathbb{R}^2$ uzayı $\|x, z\| = |x_1 z_2 - x_2 z_1|$, $x = (x_1, x_2)$, $z = (z_1, z_2)$ ile tanımlı 2- norm ve her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b = ab$ özelliğine sahip bir uzay ve her $x, z \in X$, $z_2 \neq 0$ ve $t > 0$ için $F(x, z; t) = \frac{t}{t + \|x, z\|}$ olsun.

$$x_n := \begin{cases} (n, 0), & n = k^2, \; k \in \mathbb{N}, \\ (0, 0), & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

ile tanımlı bir $x = (x_n)$ dizisi ve

$$K_n(\varepsilon, t) := \{n \in \mathbb{N} : F(x_n - L, z; t) \leq 1 - \varepsilon\}, \; 0 < \varepsilon < 1; \; L = (0, 0)$$

olsun.

$$F(x_n - L, z; t) := \begin{cases} \frac{t}{t + n z_2}, & n = k^2, \; k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{diğer durumda,} \end{cases}$$

olduğundan

$$\lim_n F(x_n - L, z; t) := \begin{cases} 0, & n = k^2, \; k \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dır. Sonuç olarak $x = (x_n)$ dizisi $(X, F, *)$ uzayında yakınsak değildir. Fakat $K_n(\varepsilon, t) \subset \{1, 4, 9, 16, ...\}$ olduğundan $\delta(K_n(\varepsilon, t)) = 0$ olup $st(RTN)$-$\lim x = L$ elde edilir.

Teorem 2.3.11. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olmak üzere bu $x = (x_n)$ dizisinin $st(RTN)$-yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul $st(RTN)$-Cauchy olmasıdır (Mursaleen, 2010).

Şimdi ise Mursaleen ve Alotaibi tarafından verilen Rassal 2-normlu uzaylarda ideal yakınsaklık ve Mursaleen ve Mohiuddine tarafından verilen Olasılıksal normlu uzaylarda çift indisli dizilerin ideal yakınsaklığı teorisi ile ilgili bazı tanım ve sonuçları verelim.

Tanım 2.3.12. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : F(x_n - L, z; \varepsilon) \leq 1 - \lambda\} \in \mathcal{I}$$

veya denk olarak

$$\{n \in \mathbb{N} : F(x_n - L, z; \varepsilon) > \lambda\} \in \mathcal{I}$$

ise $x = (x_n)$ dizisine $(X, F, *)$ uzayında L değerine $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir veya kısaca $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim x = L$ yazılır ve L değeri x dizisinin $\mathcal{I}(RTN)$-limiti adını alır (Mursaleen ve Alotaibi, 2011).

Yardımcı Teorem 2.3.13. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer $x = (x_n)$ dizisi $\mathcal{I}(RTN)$-yakınsak ise o zaman $\mathcal{I}(RTN)$-limiti tektir (Mursaleen ve Alotaibi, 2011).

Yardımcı Teorem 2.3.14. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. O zaman

i) F-$\lim x_n = L$ ise $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim x_n = L$ dir.

ii) Eğer $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim x_n = L_1$ ve $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim y_n = L_2$ ise $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim (x_n + y_n) = L_1 + L_2$ dir.

iii) Eğer $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim x_n = L$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\mathcal{I}(RTN)$-$\lim \alpha x_n = \alpha L$ dir (Mursaleen ve Alotaibi, 2011).

Tanım 2.3.15. $(X, F, *)$ bir RNS uzayı ve $\mathcal{I}$ da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin gerçek olmayan ideal olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için

$$\left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : F_{x_{jk} - L}(t) \leq 1 - \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_2$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisine F rassal normuna göre $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir (Mursaleen ve Mohiuddine, 2010).

Tanım 2.3.16. $(X, F, *)$ bir RNS uzayı olsun.

Eğer $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K \in \mathcal{I}_2$) ve F-$\lim_m x_{j_m,k_m} = L$ olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...;\ k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

bir alt kümesi mevcut ise o zaman $x = (x_{jk}) \in X$ dizisine F rassal norma göre $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir (Mursaleen ve Mohiuddine, 2010).

Teorem 2.3.17. $(X, F, *)$ bir RNS uzayı ve $\mathcal{I}_2$ uygun bir ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}_2^*$-$\lim x = L$ ise o zaman $\mathcal{I}_2$-$\lim x = L$ dir (Mursaleen ve Mohiuddine, 2010).

Teorem 2.3.18. $(X, F, *)$ bir RNS uzayı ve $\mathcal{I}_2$ ideali (AP) koşulunu gerçekleyen bir ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}_2$-$\lim x = L$ olacak şekilde X uzayında bir $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi mevcut ise o zaman $\mathcal{I}_2^*$-$\lim x = L$ dir.

3. RASSAL 2-NORMLU UZAYLARDA ÇİFT İNDİSLİ DİZİLERİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI

$\mathcal{I}$-yakınsaklığın teorisinde bir çok öncü çalışmalar mevcuttur. Bu bölümde verilen çalışmada ise Rassal 2-normlu uzaylarda çift indisli dizilerin $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy kavramları tanımlanmış ve buna ilişkin bazı sonuçlar incelenmiştir. Bu kısımda vereceğimiz sonuçlarda Rahmat ve Harikrishnan tarafından verilen F-topoloji yöntemi kullanılmıştır.

$(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. $*$ sürekli t-norm olduğundan θ nın (ε, λ)-komşuluklarının sistemi

$$\mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda) = \{x \in X : F_x(\varepsilon) > 1 - \lambda\}$$

olmak üzere

$$\{\mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda) : \varepsilon > 0,\ \lambda \in (0,1)\}.$$

X uzayı üzerinde birinci sayılabilir Hausdorff topolojisini belirleyen ve F-topoloji adı verilen sistemdir. Böylece F-topoloji dizilerin F-yakınsaklığı yoluyla belirlenebilir. Burada $x - y \in \mathcal{N}_\theta$ ifadesinin $y \in \mathcal{N}_x$ anlamına geldiği ve tersinin de doğru olduğu açıktır (Rahmat ve Harikrishnan, 2009).

Tanım 3.1. Her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$x_{jk}, z - L \in \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda), \text{ her bir } j,k \geq N \text{ için}$$

veya denk olarak

$$x_{jk}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda), \text{ her bir } j,k \geq N \text{ için}$$

olacak şekilde N pozitif tamsayısı mevcut ise o zaman $x = (x_{jk}) \in X$ çift indisli dizisine $L \in X$ değerine F-yakınsaktır denir ve $F\text{-}\lim x_{jk}, z = L$ şeklinde yazılır.

Yardımcı Teorem 3.2. $(X, \|.,.\|)$ bir reel 2-normlu uzay ve $(X, F, *)$ uzayı $x, y \in X$ ve $t > 0$ olmak üzere $F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + \|x,y\|}$ rassal norm tarafından indirgenmiş bir

RTN uzayı olsun. O zaman her $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi ve sıfırdan farklı $y \in X$ için

$$\lim \|x - L, y\| = 0 \Rightarrow F\text{-}\lim (x - L), y = 0$$

dır.

İspat. $\lim \|x - L, y\| = 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman her $t > 0$ ve her $y \in X$ için

$$\|x_{jk} - L, y\| < t \text{ her bir } j, k > N \text{ için}$$

olacak şekilde $N = N(t)$ pozitif tamsayısı mevcuttur. Herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \|x_{jk} - L, y\|} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon + t} = 1 - \frac{t}{\varepsilon + t}$$

eşitliğine denk olan

$$\frac{\varepsilon + \|x_{jk} - L, y\|}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon + t}{\varepsilon}$$

ifadesi elde edilir. Bundan dolayı $\lambda = \frac{t}{\varepsilon + t} \in (0, 1)$ alınırsa

$$F_{x_{jk} - L, y}(\varepsilon) > 1 - \lambda \text{ , her bir } j, k > N \text{ için}$$

elde edilir. Böylece her bir $j, k > N$ için istenilen $x_{jk}, y \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ sonucu elde edilir.

3.1. RTN Uzayında Çift İndisli Diziler İçin $\mathcal{I}_2^F$ ve $\mathcal{I}_2^{F*}$-Yakınsaklık

Bu kısımda $(X, F, *)$ uzayında bir çift indisli dizinin $\mathcal{I}$ ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklığı kavramları incelenmiş ve bu teori ile ilişkili bazı önemli sonuçların ispatı verilmiştir. Bu kısım boyunca $\mathcal{I}_2^F$ kavramı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de uygun bir ideal olarak alınmıştır.

Tanım 3.1.1. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinde gerçek bir ideal olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\{(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}_2$$

ise o zaman X de $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisine $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2^F$-yakınsaktır (veya F-topolojiye göre $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2^F$-yakınsaktır) denir.

Bu durumda L vektörüne $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisinin $\mathcal{I}_2^F$-limiti denir ve $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x, z = L$ ile yazılır.

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi F rassal 2-norma göre $\mathcal{I}_2^F$-yakınsak ise o zaman $\mathcal{I}_2^F$-limiti tektir.

İspat. $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x, z = L_1$ ve $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x, z = L_2$ olduğunu kabul edelim. Burada $L_1 \neq L_2$ dir. $L_1 \neq L_2$ olduğundan $\mathcal{N}_{L_1}(\varepsilon, \lambda)$ ve $\mathcal{N}_{L_2}(\varepsilon, \lambda)$ komşulukları L_1 ve L_2 nin ayrık komşulukları olacak şekilde $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ seçelim. L_1 ve L_2 nin her ikisi de (x_{jk}) çift indisli dizisinin $\mathcal{I}_2^F$-limiti olduğundan

$$A = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_{L_1}(\varepsilon, \lambda)\}$$

ve

$$B = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_{L_2}(\varepsilon, \lambda)\}$$

kümelerinin her ikisi de $\mathcal{I}_2^F$ ye aittir. Bu da

$$A^c = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \in \mathcal{N}_{L_1}(\varepsilon, \lambda)\}$$

ve $B^c = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \in \mathcal{N}_{L_2}(\varepsilon, \lambda)\}$ kümelerinin $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ye ait olduğunu gösterir. Sonuç olarak elde edilen bu gerçek L_1 ve L_2 nin $\mathcal{N}_{L_1}(\varepsilon, \lambda)$ ve $\mathcal{N}_{L_2}(\varepsilon, \lambda)$ komşuluklarının ayrık olması gerçeğiyle çelişir. Böylece $L_1 = L_2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Yardımcı Teorem 3.1.3. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. O zaman

i) F-$\lim x_{jk}, z = L$ ise $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L$ dir.

ii) Eğer $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L_1$ ve $\mathcal{I}_2^F$-$\lim y_{jk}, z = L_2$ ise $\mathcal{I}_2^F$-$\lim (x_{jk} + y_{jk}), z = L_1 + L_2$ dir.

iii) Eğer $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $\mathcal{I}_2^F$-$\lim \alpha x_{jk}, z = \alpha L$ dir.

iv) Eğer $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L_1$ ve $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L_2$ ise $\mathcal{I}_2^F$-$\lim (x_{jk} - y_{jk}), z = L_1 - L_2$ dir.

İspat. i) F-$\lim x_{jk}, z = L$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ olsun. O zaman her bir $j, k > N$ için $x_{jk}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı vardır.

$$A = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \subseteq \{1,2,3,...,N-1\} \times \{1,2,3,...,N-1\}$$

kapsaması var olduğundan $\mathcal{I}_2^F$ de uygun bir ideal olduğundan $A \in \mathcal{I}_2^F$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L$ olduğunu gösterir.

ii) $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ olsun. $(1-\eta) * (1-\eta) > (1-\lambda)$ olacak şekilde $\eta \in (0,1)$ sayısı seçelim. $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L_1$ ve $\mathcal{I}_2^F$-$\lim y_{jk}, z = L_2$ olduğundan

$$A = \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_{L_1}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda\right)\right\}$$

ve

$$B = \left\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y_{jk}, z \notin \mathcal{N}_{L_2}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda\right)\right\}$$

kümeleri $\mathcal{I}_2^F$ idealine aittir. $C = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (x_{jk} + y_{jk}), z \notin \mathcal{N}_{L_1+L_2}(\varepsilon, \lambda)\}$ olsun. $\mathcal{I}_2^F$ ideal olduğundan, $C \subset A \cup B$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu da A^c ve B^c kümeleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ye ait olmak üzere, $C^c \supset A^c \cap B^c$ olduğunu göstermekle eşdeğerdir. $(j,k) \in A^c \cap B^c$, yani $(j,k) \in A^c$ ve $(j,k) \in B^c$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} F_{(x_{jk}+y_{jk})-(L_1+L_2),z}(\varepsilon) &\geq F_{x_{jk}-L_1,z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) * F_{y_{jk}-L_2,z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &> (1-\eta) * (1-\eta) \\ &> (1-\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. $(j,k) \in C^c \supset A^c \cap B^c \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğundan $C \subset A \cup B \in \mathcal{I}_2^F$ dir.

iii) $\alpha = 0$ için ispat açıktır. Şimdi $\alpha \neq 0$ için ispat yapalım. $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ olsun. $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x_{jk}, z = L$ olduğundan

$$A = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}_2$$

dır. Böylece

$$A^c = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

elde edilir. $(j,k) \in A^c$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} F_{\alpha x_{jk} - \alpha L, z}(\varepsilon) &= F_{x_{jk}-L,z}\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \\ &\geq F_{x_{jk}-L,z}(\varepsilon) * F_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|} - \varepsilon\right) \\ &> (1-\lambda) * 1 \\ &= (1-\lambda) \end{aligned}$$

dır. Böylece $\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \alpha x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_{\alpha L}(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}_2$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{I}_2^F$-$\lim \alpha x_{jk}, z = \alpha L$ dir.

iv) Sonuç (ii) ve (iii) kullanılarak kolayca elde edilir.

Rassal 2-normlu uzaylarda çift indisli dizilerin $\mathcal{I}_2^F$-yakınsaklık kavramı ile yakın ilişkisi olan $\mathcal{I}_2^{F*}$-yakınsaklık kavramını tanımlayacağız. Ayrıca $\mathcal{I}_2^{F*}$-yakınsak ise $\mathcal{I}_2^F$-yakınsak olduğunu ama tersinin doğru olmadığını göstereceğiz.

Tanım 3.1.4. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı olsun. Eğer $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K \in \mathcal{I}_2$) ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için F-$\lim_m x_{j_m,k_m}, z = L$ olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...;\ k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

bir alt kümesi mevcut ise o zaman $x = (x_{jk}) \in X$ dizisine F rassal 2-norma göre $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2^{F*}$-yakınsaktır denir. Bu durum $\mathcal{I}_2^{F*}$-$\lim x, z = L$ ile ifade edilir ve L değerine $x = (x_{jk})$ çift indisli dizinin $\mathcal{I}_2^{F*}$-limiti denir.

Teorem 3.1.5. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ uygun bir ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}_2^{F*}$-$\lim x, z = L$ ise o zaman $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x, z = L$ dir.

İspat. $\mathcal{I}_2^{F*}$-$\lim x, z = L$ olduğunu kabul edelim. O zaman tanımdan

$F\text{-}\lim_m x_{j_m,k_m}, z = L$ olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...;\ k_1 < k_2 < ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

kümesi mevcuttur. $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ olsun.
$F\text{-}\lim_m x_{j_m k_m}, z = L$ olduğundan her $m \geq N$ için $x_{j_m k_m}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

$$A = \{(j_m, k_m) \in K : x_{j_m k_m}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\}$$

kümesi

$$B = \{j_1, j_2, ..., j_{N-1};\ k_1, k_2, ..., k_{N-1}\}$$

kümesi tarafından kapsandığından ve $\mathcal{I}_2$ uygun bir ideal olduğundan $A \in \mathcal{I}_2$ olur. Böylece $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \subseteq K \cup B \in \mathcal{I}_2$$

dir. Bundan dolayı $\mathcal{I}_2^F\text{-}\lim x, z = L$ sonucu elde edilir.

Aşağıdaki örnek Teorem **3.1.5** in tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.1.6. $X = \mathbb{R}^2$ uzayı $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ özelliğine sahip bir uzay ve her $a, b \in [0,1]$ için $a * b = ab$ olsun. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ve $t > 0$ için

$$F_{x,y}(t) = \frac{t}{t + \|x, y\|}$$

olsun. Bu durumda $(\mathbb{R}^2, F, *)$ bir RTN uzayı olur. Herhangi $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için her bir Δ_{ij} kümesi sonsuz sayıda (i, j) ikilisini kapsayacak şekilde $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{i,j} \Delta_{ij}$ olarak tanımlanan $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin bir ayrışımı olsun. Burada $i \geq m$, $j \geq n$ ve $(i, j) \neq (m, n)$ için $\Delta_{ij} \cap \Delta_{mn} = \emptyset$ dir. $\mathcal{I}_2$ ideali Δ_{ij} lerin hemen hemen sonlu sayıda kesişimini içeren $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin tüm altkümelerinin sınıfı olsun. O zaman $\mathcal{I}_2$ uygun bir idealdir. Aşağıda bir (x_{mn}) çift indisli dizisini tanımlayalım: Eğer $(m, n) \in \Delta_{ij}$ ise $x_{mn} = \left(\frac{1}{ij}, 0\right) \in \mathbb{R}^2$ dir. O zaman sıfırdan farklı $z \in X$ için

$m,n\to\infty$ iken

$$F_{x_{mn},z}(t)=\frac{t}{t+\|x_{mn},z\|}\to 1$$

dir. Böylece $\mathcal{I}_2^F$-$\lim_{m,n}x_{mn},z=0$ dır.

Şimdi $\mathcal{I}_2^{F_*}$-$\lim_{m,n}x_{mn},z\neq 0$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{I}_2^{F_*}$-$\lim_{m,n}x_{mn},z=0$ olduğunu kabul edelim. O zaman tanımdan $K\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve F-$\lim_j x_{m_jn_j},z=0$ olacak şekilde

$$K=\{(m_j,n_j):m_1<m_2<...;\ n_1<n_2<...\}\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

bir alt kümesi mevcuttur. $K\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğundan $K=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash H$ olacak şekilde $H\in\mathcal{I}_2$ vardır. O zaman

$$H\subset\left(\bigcup_{m=1}^{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_{mn}\right)\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{q}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\Delta_{mn}\right)\right)$$

olacak şekilde p ve q pozitif tamsayıları mevcuttur. Böylece $\Delta_{p+1,q+1}\subset K$ ve K kümesindeki (m_j,n_j) lerin sonsuz değerleri için $x_{m_jn_j}=\frac{1}{(p+1)(q+1)}>0$ dır. Bu ise F-$\lim_j x_{m_jn_j},z=0$ kabulümüz ile çelişir. O halde $\mathcal{I}_2^{F_*}$-$\lim_{m,n}x_{mn},z\neq 0$ dır.

Böylece teoremin tersinin doğru olmadığı görülür.

Aşağıdaki teorem $\mathcal{I}_2$ idealinin (AP) özelliğini sağlaması halinde teoremin tersinin doğru olduğunu göstermektedir.

Tanım 3.1.7. $\mathcal{I}_2$ idealinden ikili ayrık kümelerin her $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $A_n\triangle B_n$ simetrik farkı her n ve $\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n\in\mathcal{I}_2$ için sonlu olacak şekilde $B_n\subset\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ kümeleri mevcut ise o zaman $\mathcal{I}_2\subset P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ uygun idealine (AP) koşulunu sağlıyor denir (Mursaleen ve Mohiuddine, 2010).

Teorem 3.1.8. $(X,F,*)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ de (AP) koşulunu gerçekleyen bir ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x,z=L$ olacak şekilde X uzayında $x=(x_{jk})$ çift indisli dizisi mevcut ise o zaman $\mathcal{I}_2^{F_*}$-$\lim x,z=L$ dir.

İspat. $\mathcal{I}_2^F$-$\lim x,z=L$ olduğundan her bir $\varepsilon>0$, $\lambda\in(0,1)$ ve sıfırdan farklı $z\in X$ için

$$\{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:x_{jk},z\notin\mathcal{N}_L(\varepsilon,\lambda)\}\in\mathcal{I}_2$$

kümesi vardır. $p \in \mathbb{N}$ için A_p kümesini

$$A_p = \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 - \frac{1}{p} \leq F_{x_{jk}, z-L} < 1 - \frac{1}{p+1} \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan $\{A_1, A_2, ...\}$ kümesinin $\mathcal{I}_2$ ye ait sayılabilir çoklu ayrık bir küme olduğu açıktır. Bu sebeple, (AP) koşulundan her bir $i \in \mathbb{N}$ ve $B = \cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{I}_2$ için $A_i \Delta B_i$ simetrik fark kümesi sonlu bir küme olacak şekilde $\{B_1, B_2, ...\} \in \mathcal{I}_2$ kümelerinin sayılabilir bir ailesi mevcuttur. $B \in \mathcal{I}_2$ olduğundan $K = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash B$ olacak şekilde bir $K \in F(\mathcal{I}_2)$ kümesi mevcuttur. Şimdi $(x_{jk})_{(j,k) \in K}$ alt dizisinin F rassal 2-norma göre L elemanına yakınsak olduğunu ispatlayacağız. $\eta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ olsun. $q^{-1} < \eta$ olacak şekilde bir q seçelim. O zaman

$$\begin{aligned} & \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \eta)\} \\ \subset \ & \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L\left(\varepsilon, \frac{1}{q}\right) \right\} \subset \cup_{i=1}^{q-1} A_i \end{aligned}$$

dir. $A_i \Delta B_i$ kümesi her $i = 1, 2, ..., q-1$ için sonlu bir küme olduğundan

$$\begin{aligned} & \left(\cup_{i=1}^{q-1} B_i\right) \cap \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j \geq j_0 \text{ ve } k \geq k_0\} \\ = \ & \left(\cup_{i=1}^{q-1} A_i\right) \cap \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : j \geq j_0 \text{ ve } k \geq k_0\}. \end{aligned}$$

olacak şekilde $(j_0, k_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mevcuttur. Eğer $j \geq j_0$, $k \geq k_0$ ve $(j,k) \in K$ ise o zaman $(j,k) \notin \cup_{i=1}^{q-1} B_i$ ve $(j,k) \notin \cup_{i=1}^{q-1} A_i$ dir. Bu sebeple her $j \geq j_0$, $k \geq k_0$ ve $(j,k) \in K$ için

$$x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \eta)$$

olur. Bu ifade her $\varepsilon > 0$, $\eta \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için gerçeklendiğinden $\mathcal{I}_2^{F_*}$-$\lim x, z = L$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2. RTN Uzayında $\mathcal{I}_2^F$ ve $\mathcal{I}_2^{F_*}$-Çift İndisli Cauchy Dizileri

Bu kısımda $(X, F, *)$ uzayında bir çift indisli dizinin $\mathcal{I}_2^F$-Cauchy ve $\mathcal{I}_2^{F*}$-Cauchy kavramları incelenmiş ve bunun yanı sıra bu kavramlar arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Tanım 3.2.1. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de uygun bir ideal olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk} - x_{st}, z \notin \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon)$ ve $t = t(\varepsilon)$ mevcut ise $x = (x_{jk}) \in X$ çift indisli dizisine $\mathcal{I}_2^F$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.2.2. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de uygun bir ideal olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $K \in F(\mathcal{I}_2)$ iken X uzayında $x = (x_{j_m,k_m})$ alt dizisi adi anlamda F-Cauchy dizisi olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...; \ k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

kümesi mevcut ise o zaman $x = x_{jk} \in X$ çift indisli dizisine $\mathcal{I}_2^{F_*}$-Cauchy dizisi denir.

Şimdi vereceğimiz teorem $\mathcal{I}_2^{F_*}$-çift indisli Cauchy dizisinin $\mathcal{I}_2^F$-çift indisli Cauchy dizisi olduğunu verecektir.

Teorem 3.2.3. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin uygun bir ideal olsun. Eğer $x = (x_{jk})$ dizisi $\mathcal{I}_2^{F_*}$- Cauchy dizisi ise o zaman $x = (x_{jk})$ dizisi aynı zamanda $\mathcal{I}_2^F$-Cauchy dizisidir.

İspat. (x_{jk}) dizisi bir $\mathcal{I}_2^{F_*}$-Cauchy dizisi olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için ve her $m, p \geq N$ için

$$x_{j_m k_m} - x_{j_p k_p}, z \in \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)$$

olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...; \ k_1 < k_2 < ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

kümesi ve $N \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Şimdi $p = j_{N+1}$, $r = k_{N+1}$ noktalarını sabitleyelim. O zaman her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ ve her $m \geq N$ için

$$x_{j_m k_m} - x_{pr}, z \in \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)$$

dır. $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash K$ olsun. $H \in \mathcal{I}_2$ ve

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, \lambda) &= \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk} - x_{pr}, z \notin \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)\} \\ &\subset H \cup \{j_1 < j_2 < ... < j_N;\ k_1 < k_2 < ... < k_N\} \in \mathcal{I}_2 \end{aligned}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Bundan dolayı her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $A(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{I}_2$ olacak şekilde $(p,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bulunabilir, yani (x_{jk}) çift indisli dizisi bir $\mathcal{I}_2^F$-Cauchy dizisidir.

Şimdi Rassal 2-normlu uzayda $\mathcal{I}_2^{F_*}$-yakınsak ise $\mathcal{I}_2^F$-Cauchy koşulunu gerektirdiğinin ispatı verilecektir.

Teorem 3.2.4. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de uygun bir ideal olsun. Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi $\mathcal{I}_2^{F_*}$-yakınsak ise o zaman bu dizi $\mathcal{I}_2^F$-çift indisli Cauchy dizisidir.

İspat. Kabülümüzden $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $F\text{-}\lim_m x_{j_m,k_m}, z = L$ olacak şekilde

$$K = \{(j_m, k_m) : j_1 < j_2 < ...;\ k_1 < k_2 < ...\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

kümesi mevcuttur. Yani her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ ve $m > N$ için $x_{j_m k_m}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı mevcuttur. $(1-\eta) * (1-\eta) > (1-\lambda)$ olacak şekilde $\eta \in (0,1)$ seçelim. Her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$, sıfırdan farklı $z \in X$ ve $m > N$, $p > N$ için

$$\begin{aligned} F_{x_{j_m k_m} - x_{j_p k_p}, z}(\varepsilon) &\geq F_{x_{j_m k_m} - L, z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) * F_{x_{j_p k_p} - L, z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &> (1-\eta) * (1-\eta) \\ &> 1 - \lambda \end{aligned}$$

olduğundan her m, $p > N$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$x_{j_m k_m} - x_{j_p k_p}, z \notin \mathcal{N}_{\xi}(\varepsilon, \lambda)$$

olur. Yani $(x_{jk}) \in X$ dizisi X de bir $\mathcal{I}_2^{F*}$-çift indisli Cauchy dizisidir. O zaman Teorem 3.2.3 den (x_{jk}) dizisi RTN uzayında bir $\mathcal{I}_2^{F}$-çift indisli Cauchy dizisidir.

Teorem 3.2.5. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de uygun bir ideal olsun. Eğer $x = (x_{jk}) \in X$ çift indisli dizisi $\mathcal{I}_2^{F}$-yakınsak ise o zaman bu dizi $\mathcal{I}_2^{F}$-çift indisli Cauchy dizisidir.

İspat. (x_{jk}) dizisinin $L \in X$ değerine $\mathcal{I}_2^{F}$-yakınsak olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ verilsin. O zaman

$$A = \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \notin \mathcal{N}_L \left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda \right) \right\} \in \mathcal{I}_2$$

dir. Bu da

$$A^c = \left\{ (j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk}, z \in \mathcal{N}_L \left(\frac{\varepsilon}{2}, \lambda \right) \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olduğunu gösterir. $(1-\eta) * (1-\eta) > (1-\lambda)$ olacak şekilde $\eta \in (0,1)$ seçelim. O zaman her $(j,k), (s,t) \in A^c$ için

$$\begin{aligned} F_{x_{jk} - x_{st}, z}(\varepsilon) &\geq F_{x_{jk} - L, z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) * F_{x_{st} - L, z}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &> (1-\eta) * (1-\eta) \\ &> (1-\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sebeple sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk} - x_{st}, z \in \mathcal{N}_{\theta}(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

dir. Bu ise

$$\{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{jk} - x_{st}, z \notin \mathcal{N}_{\theta}(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğunu, yani (x_{jk}) çift indisli dizisinin bir $\mathcal{I}_2^F$-çift indisli Cauchy dizisi olduğunu verir.

4. RASSAL 2-NORMLU UZAYDA $\mathcal{I}$-LİMİT NOKTALARI

Verilen bir dizinin adi limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları arasında kuvvetli bir bağıntı vardır (Fridy, 1993). Bu gerçeklerden yola çıkarak, bu bölümde Rassal 2-normlu uzaylar tarafından indirgenmiş topolojide dizilerin limit noktaları ve $\mathcal{I}$-yığılma noktaları arasındaki bağıntılar incelenmiş ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4.1. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı, $\mathcal{I}$ uygun ideal ve $x = (x_n) \in X$ olsun.
i) Eğer $M \notin \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $M = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi ve sıfırdan farklı her $z \in X$ için $F\text{-}\lim x_{n_k}, z = L$ mevcut ise $L \in X$ değerine F rassal 2-norma (veya $\mathcal{I}_F^2$-limit noktasına) göre x dizisinin $\mathcal{I}$-limit noktası denir. x dizisinin tüm $\mathcal{I}_F^2(x)$-limit noktalarının kümesi $\mathcal{I}(\Lambda_F^2(x))$ ile gösterilir.

ii) Eğer her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I}$$

ise $L \in X$ değerine F rassal 2-norma (veya $\mathcal{I}_F^2$-yığılma noktasına) göre x dizisinin $\mathcal{I}$-yığılma noktası denir. x dizisinin tüm $\mathcal{I}_F^2$-yığılma noktalarının kümesi $\mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ ile gösterilir.

Önerme 4.2. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. O zaman X in her bir $x = (x_n)$ dizisi için $\mathcal{I}(\Lambda_F^2(x)) \subset \mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ olup $\mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ kapalı bir kümedir.

İspat. $L \in \mathcal{I}(\Lambda_F^2(x))$ olsun. O zaman her sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$F\text{-}\lim_{k\to\infty} x_{n_k}, z = L \tag{4.1}$$

olacak şekilde $M = \{n_1 < n_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesi mevcuttur. (4.1) ifadesine göre her $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde sıfırdan farklı $z \in X$ ve $k > k_0$ için

$x_{n_k}, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde bir k_0 pozitif sayısı vardır. Böylece

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \supset M \backslash \{n_1, ..., n_{k_0}\}$$

olup

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I},$$

elde edilir. Böylece $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ olduğu gösterilir.

$y \in \overline{\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)}$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ alalım. $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) \cap \mathcal{N}_\theta(y, \varepsilon, \lambda)$ değeri mevcut olsun. $\mathcal{N}_\theta(L, \eta, \lambda) \subset \mathcal{N}_\theta(y, \varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ seçelim. Buradan açık olarak

$$\{n \in \mathbb{N} : y - x_n, z \in \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)\} \supset \{n \in \mathbb{N} : L - x_n, z \in \mathcal{N}_\theta(\eta, \lambda)\}$$

elde edilir. Böylece $\{n \in \mathbb{N} : y - x_n, z \in \mathcal{N}_\theta(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I}$ ve $y \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ dir.

Tanım 4.3. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı, $\mathcal{I}$ bir uygun ideal ve X uzayında $x = (x_n)$ bir dizi olsun.

i) Eğer $K = \{k_1 < k_2 < ...\} \in \mathcal{I}$ ise $x_K = (x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}} \in X$ alt dizisine $x \in X$ dizisinin $\mathcal{I}_F^2$-seyrek alt dizisi denir.

ii) Eğer $M = \{m_1 < m_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ ise $x_M = (x_{m_n})_{n \in \mathbb{N}} \in X$ alt dizisine $x \in X$ dizisinin $\mathcal{I}_F^2$-seyrek olmayan alt dizisi denir.

Eğer L değeri $x \in X$ dizisinin bir $\mathcal{I}_F^2$-limit noktası ise o zaman F rassal 2-norma göre L değerine yakınsayan $\mathcal{I}_F^2$-seyrek olmayan x_M alt dizisinin mevcut olduğu açık olan bir gerçektir.

Tanım 4.4. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ olsun. Eğer F rassal 2-norma göre L değerine yakınsayan x dizisinin bir alt dizisi varsa o zaman $L \in X$ elemanına F rassal 2-norma göre $x = (x_n)$ dizisinin limit noktası denir. $L_F^2(x)$ ile F rassal 2-norma göre $x = (x_k)$ dizisinin tüm limit noktalarının kümesini ifade edeceğiz.

$\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right) \subseteq L_F^2(x)$, $\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) \subseteq L_F^2(x)$ olduğu açıktır: $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ alırsak o zaman her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I}$ elde edilir. Eğer $L \notin L_F^2(x)$ ise $\mathcal{N}_L(\varepsilon', \lambda)$ komşuluğu $x \in X$ dizisinin sadece sonlu sayıda elemanını içerecek şekilde $\varepsilon' > 0$ sayısı vardır. O zaman

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon', \lambda)\} \in \mathcal{I}$$

olur, fakat bu ifade $L \in \mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ olmasıyla çelişir. Bu sebeple $x \in \mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ dir. O halde $x \in L_F^2(x)$ olup buradan $\mathcal{I}(\Gamma_F^2(x)) \subseteq L_F^2(x)$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.5. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı ve $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olsun. $x = (x_n) \in X$ için eğer x dizisi F rassal 2-norma göre $\mathcal{I}_F$-yakınsak ise o zaman sıfırdan farklı $z \in X$ için $\mathcal{I}(\Lambda_F^2(x))$ ve $\mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ kümelerinin her ikisi de tek bir $\{\mathcal{I}_F\text{-}\lim x_n, z\}$ kümesine eşittir.

İspat. $\mathcal{I}_F$-$\lim_n x_n, z = L$ olsun. $L \in \mathcal{I}(\Lambda_F^2(x))$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{I}_F$-yakınsaklık tanımı gereği her $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$A(\varepsilon, \lambda) = \{n \in \mathbb{N} : x_n, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \in \mathcal{I}$$

dır. $\mathcal{I}$ uygun bir ideal olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k \notin A\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)$ ve $x_{n_k}, z \in \mathcal{N}_L\left(\frac{1}{k}, \lambda\right)$ olacak şekilde bir $M = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ kümesi seçilebilir. Yani F-$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}, z = L$ dir. $M \in \mathcal{I}$ olduğunu kabul edelim.

$$M \subset \{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(1, \lambda)\}$$

olduğundan

$$(\mathbb{N} \backslash M) \cap \{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(1, \lambda)\} = \emptyset$$

elde edilir fakat $\mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(1, \lambda)\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

dir. Bu çelişki $M \notin \mathcal{I}$ olduğunu verir. Böylece F-$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}, z = L$ olacak şekilde $M = \{n_1 < n_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ ve $M \notin \mathcal{I}$ elde edilir, yani $L \in \mathcal{I}(\Lambda_F^2(x))$ dir.

$\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right) \subset \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ olduğundan $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ dir.

Şimdi $\eta \neq L$ olacak şekilde $\eta \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ olduğunu kabul edelim. $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$A = \left\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \notin \mathcal{N}_L\left(\frac{|\eta - L|}{2}, \lambda\right)\right\} \in \mathcal{I}$$

ve

$$B = \left\{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L\left(\frac{|\eta - L|}{2}, \lambda\right)\right\} \notin \mathcal{I}$$

olduğu açıktır. $B \subset A \in \mathcal{I}$ olması gerçeğinden elde edilen bu çelişki $\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) = \{L\}$ olduğunu gösterir. Bu sebeple $\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right) \subset \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) = \{L\}$ kapsama bağıntısından $\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right) = \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) = L$ olduğunu elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.6. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı, $\mathcal{I}$ uygun bir ideal ve

$$M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$$

olacak şekilde X de $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri mevcut olsun. O zaman $\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right) = \mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(y)\right)$ ve $\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) = \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(y)\right)$ dir.

İspat. $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$ olsun. Eğer $L \in \mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right)$ ise $F\text{-}\lim_k x_{n_k}, z = L$ olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < ...\} \notin \mathcal{I}$ kümesi vardır. $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde $k > N$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $x_{n_k}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur.

$$K_1 = \{n \in \mathbb{N} : n \in K \wedge x_n \neq y_n\} \subset M \in \mathcal{I}$$

olduğundan

$$K_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \in K \wedge x_n = y_n\} \notin \mathcal{I}$$

elde edilir.

Gerçekten, eğer $K_2 \in \mathcal{I}$ ise $K = K_1 \cup K_2 \in \mathcal{I}$ olup $K \notin \mathcal{I}$ dır. Böylece $y_{K_2} = (y_n)_{n \in K_2}$ dizisi $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{I}_F^2$-seyrek olmayan alt dizisidir ve

y_{K_2} alt dizisi F rassal 2-norma göre L değerine yakınsaktır. Bu da $L \in \mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(y)\right)$ olduğunu ifade eder. Benzer şekilde $\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(y)\right) \subset \mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right)$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece $\mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(y)\right) = \mathcal{I}\left(\Lambda_F^2(x)\right)$ elde edilir. Şimdi $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ olsun. O zaman her bir $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$B_1 = \{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I}$$

ve

$$B_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \in B_1 \wedge x_n = y_n\} \notin \mathcal{I}$$

dir. Bundan dolayı $B_2 \subset \{n \in \mathbb{N} : y_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\}$ elde edilir. Bu da

$$\{n \in \mathbb{N} : y_n, z \in \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)\} \notin \mathcal{I},$$

yani $L \in \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(y)\right)$ olduğunu gösterir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi vereceğimiz teorem F rassal 2-norma göre verilen bir dizinin limit noktaları ve $\mathcal{I}_F^2$-yığılma noktaları arasındaki kuvvetli bağıntıyı ispatlayacaktır.

Teorem 4.7. $(X, F, *)$ bir RTN uzayı, $\mathcal{I}$ ideali (AP) özelliğini sağlayan uygun bir ideal ve $x = (x_n)$ dizisi X uzayında bir dizi olsun. O zaman $L_F^2(y) = \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ ve $\{n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde bir $y = (y_n) \in X$ dizisi mevcuttur.

İspat. Eğer $\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) = L_F^2(x)$ ise $y = x$ olup bu durum açıktır. $\mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ ideali $L_F^2(x)$ kümesinin uygun bir alt kümesi olsun. O zaman her bir $L \in L_F^2(x) \backslash \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ için $L_F^2(x) \backslash \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right) \neq \emptyset$ dir. $\lim_k x_{j_k}, z = L$ olacak şekilde x dizisinin $\mathcal{I}_F^2$-seyrek $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır. Yani her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ verildiğinde $k > N$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $x_{j_k}, z \notin \mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ olacak şekilde N pozitif tamsayısı vardır. Böylece her bir $\delta > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için $\{k \in \mathbb{N} : x_k, z \in \mathcal{N}_L = \mathcal{N}_L(\delta, \lambda)\} \in \mathcal{I}$ olacak şekilde $\mathcal{N}_L(\varepsilon, \lambda)$ mevcuttur.
Tüm $\mathcal{N}_L$ lerin kolleksiyonunun $L_F^2(x) \backslash \mathcal{I}\left(\Gamma_F^2(x)\right)$ nin bir açık örtüsü olduğunu kolayca gözlemleyebiliriz. Örtü teoreminden her bir $\mathcal{N}_j$ yuvarı $(x_n) \in X$ dizisinin bir $\mathcal{I}_F^2$-seyrek alt dizisini içerecek şekilde $\{\mathcal{N}_j\}_{j=1}^{\infty}$ sayılabilir ve çoklu ayrık alt örtüsü mevcuttur.

Şimdi her bir $\delta > 0$, $\lambda \in (0,1)$ ve sıfırdan farklı $z \in X$ için

$$A_j = \{n \in \mathbb{N} : x_n, z \in \mathcal{N}_j = \mathcal{N}_j(\delta, \lambda)\,,\ j \in \mathbb{N}\}$$

olsun. $A_j \in \mathcal{I}$ $(j = 1, 2, ...)$ ve $A_i \cap A_j = \emptyset$ olduğu açıktır. O zaman $\mathcal{I}$ idealinin (AP) özelliğine sahip olmasından dolayı $B = \cup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \backslash B$ bir sonlu küme olacak şekilde $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ sayılabilir kolleksiyonu vardır. $M = \mathbb{N} \backslash B = \{m_1 < m_2 < ...\} \subset \mathbb{N}$ olsun. Şimdi $y = (y_k) \in X$ dizisi

$$y = \begin{cases} x_{m_k}, & k \in B \text{ ise} \\ x_k, & k \in M \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\{k \in \mathbb{N} : x_k \neq y_k\} \subset B \in \mathcal{I}$ olduğundan Teorem 4.6 dan $\mathcal{I}(\Gamma_F^2(y)) = \mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ dir. $A_j \backslash B$ bir sonlu küme olduğundan, $y_B = (y_k)_{k \in B}$ dizisi F rassal 2-norma göre limit noktasına sahip değildir. Aynı zamanda bu dizi y dizisinin bir $\mathcal{I}_F^2$-limit noktasına da sahip olamaz, yani $L_F^2(y) = \mathcal{I}(\Gamma_F^2(y))$ dir. Bundan dolayı $L_F^2(y) = \mathcal{I}(\Gamma_F^2(x))$ eşitliğinin ispatını tamamlarız.

5. KAYNAKLAR

Alsina, C., Schweizer, B., Sklar, A., 1993. On the definition of a probabilistic normed space. Aequationes Mathematicae, 46, 91-98.

Asadollah, A., Nourouzi, K., 2008. Convex sets in probabilistic normed spaces.Chaos, Solitons & Fractals, 36(2), 322-328.

Buck, R.C., 1953, Generalized asymptotic density, American Journal of Mathematics, 75, 335.

Constantin, G., Istrătescu, I., 1989. Elements of probabilistic analysis with applications. Vol. 36 of Mathematics and Its Applications (East European Series), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Ehret, R., 1969. Linear 2-Normed Spaces. Dissertation, St. Louis University.

Fast, H., 1951. Sur la convergence statistique. Colloquium Mathematicum, 2, 241 -244.

Freedman, A.R., Sember, J.J., 1981. Densities and summability. Pacific Journal of Mathematics, 95 (2) , 293-305.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. Analysis, vol. 5, no. 4, pp. 301-313.

Fridy, J.A., 1993. Statistical limit points. Proceedings American Mathematical Society, 118 (4) , 1187-1192.

Gähler, S., 1963. 2-metrische räume und ihre topologische struktur. Mathematische Nachrichten, 26 (1-4) , 115-148.

Gähler, S., 1965. Uber der Uniformisierbarkeit 2-Metrische Räume. Mathematische Nachrichten, 28, 235-244.

Golet, I., 2005. On probabilistic 2-normed spaces, Novi Sad Journal of Mathematics, 35(1), 95-102.

Guill´en, B.L., Lallena, J.A.R., Sempi, C., 1999. A study of boundedness in probabilistic normed spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 232, 183-196.

Guill´en, B.L., Sempi, C., 2003. Probabilistic norms and convergence of random variables. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 280 (1) , 9-16.

Gunawan, H., Mashadi, 2001. On n-normed spaces. The International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(10), 631-639.

Gunawan, H., Mashadi, 2001. On finite dimensional 2-normed spaces. Soochow Journal of Mathematics, 27 (3) , 321-329.

Gürdal, M., 2004. Bazı yakınsaklık tipleri. Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 62 sayfa, Isparta.

Gürdal, M., Pehlivan, S., 2004. The statistical convergence in 2-banach spaces. Thai Journal of Mathematics, 2(1), 107-113.

Gürdal, M., 2006. On ideal convergent sequences in 2-normed spaces. Thai Journal of Mathematics, 4(1), 85-91.

Gürdal, M., Açık, I., 2008. On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences in 2-normed spaces. Mathematical Inequalities and Applications, 11 (2) , 349-354.

Gürdal, M., Şahiner, A., Açık, I., 2009. Approximation theory in 2-banach spaces. Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications, 71 (5-6) , 1654-1661.

Karakus, S., 2007. Statistical convergence on probabilistic normed spaces. Mathematical Communications, 12 (1) , 11-23.

Katětov, M., 1968. Products of filters. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 9 (1) , 173-189.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T., 2000. $\mathcal{I}$-Convergence. Real Analysis Exchange, 26 (2) , 669-686.

Kostyrko, P., Macaj, M., Salat, T., Sleziak, M., 2005. $\mathcal{I}$-convergence and extremal $\mathcal{I}$-limit points. Mathematica Slovaca, 55 (4) , 443-464.

Kuratowski, C., 1966, Topologie, Volume I, PWN Warszawa.

Menger, K., 1942. Statistical metrics. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 28 (12) , 535-537.

Mőricz, F., 2003. Statistical convergence of multible sequences. Archiv der Mathematik, 81, 82-89.

Mursaleen, M., Edely, O.H.H., 2003. Statistical convergence of double sequences. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 288, no. 1, pp. $223-231$.

Mursaleen, M., 2010. On statistical convergence in random 2-normed spaces. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 76 (1-2) , 101-109.

Mursaleen, M., Mohiuddine, S.A., 2010. On ideal convergence of double sequences in probabilistic normed spaces. Mathematical Reports, 12 (62) , 359-371.

Mursaleen, M., Alotaibi, A., 2011. On $\mathcal{I}$-convergence in random 2-normed spaces, Mathematica Slovaca, 61 (6) , 933-940.

Mursaleen, M., Lohani, Q.M., 2011. Statistical limit superior and limit inferior in probabilistic normed spaces. Filomat 25 (3) , 55-67.

Mursaleen, M., Mohiuddine, S.A., 2012. On ideal convergence in probabilistic normed spaces. Mathematica Slovaca, 62 (1) , 49-62.

Nabiev, A., Pehlivan, S., Gürdal, M., 2007. On $\mathcal{I}$-Cauchy sequences. Taiwanese Journal of Mathematics, 11(2), 569-576.

Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991, An Introduction to The

Theory of Numbers, Fifth Edition John Wiley and Jons, Inc., p.529.

Pehlivan, S., 2001. İstatistiksel Yakınsaklık Üzerine Ders Notları, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

Pringsheim, A., 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen. Mathematische Annalen, vol. 53, no. 3, p. 289-321.

Rahmat, M.R.S., Guill´en, B.L., 2009. Probabilistic norms and statistical convergence of random variables. Surveys in Mathematics and its Applications, ISSN 1842-6298 (electronic), 1843-7265(print). vol. 4, 65-75.

Rahmat, M.R.S., Harikrishnan, K.K., 2009. On $\mathcal{I}$-convergence in the topology induced by probabilistic norms. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2 (2), 195-212.

Rath, D. ve Tripathy, B.C., 1994. On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25, 381.

Raymond, W., Freese, R.W., Cho, J., 2001. Geometry of Linear 2-Normed Spaces. Nova Science Publishers, 301 s. Huntington, N.Y.

Salāt, T., 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. Mathematica Slovaca, 30, 139-150.

Savaş, E., 2011. A-sequence spaces in 2-normed space defined by ideal convergence and an orlicz function. Abstract and Applied Analysis, doi:10.1155/2011/741382, 9 pages.

Schoenberg, I.J., 1959, The integrability of certain functions and related summability methods, American Mathematical Monthly, 66, 361-375.

Schweizer, B., Sklar, A., 1983. Probabilistic metric spaces. North Holland, New York–Amsterdam–Oxford.

Sempi, C., 2006. A short and partial history of probabilistic normed spaces. Mediterranean Journal of Mathematics, 3, 283-300.

Serstnev, A.N., 1963. On the notion of a random normed space, Dokl. Akad. nouk. SSR, 149 (2) , 280–283

Steinhaus, H., 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloquium Mathematicum, 2, 73-74.

Şahiner, A., Gürdal, M., Saltan, S., Gunawan, H., 2007. Ideal convergence in 2-normed Spaces. Taiwanese Journal of Mathematics, 11 (4) , 1477-1484.

Şencimen, C., 2008. Olasılıksal Metrik Uzaylarda İstatistiksel Yakınsaklık. Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 55 sayfa, Isparta.

Tripathy, B.C., 2003. Statistically convergent double sequences, Tamkang Journal of Mathematics, 34 (3) , 231-237.

Tripathy, B.C., 2005. On $\mathcal{I}$-convergent double sequences, Soochow Journal of Mathematics, 31 (4) , 549-560.

Tripathy, B.C., Sen, M., Nath, S., 2012. $\mathcal{I}$-convergence in probabilistic n-normed space. Soft Computing-A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications. doi: 10.1007/s00500-011-0799-8.

White, A.G., 1969. 2-Banach spaces. Mathematische Nachrichten, 42, 43-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mualla Birgül Huban
Doğum Yeri ve Yılı	: ISPARTA, 1984
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu :

Lise	:	Isparta Anadolu Lisesi, 1999-2002
Lisans	:	İstanbul Üniversitesi, 2002-2009
Yüksek Lisans	:	Süleyman Demirel Üniversitesi, 2010-...

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

Yayınları (SCI ve diğer makaleler):

1) Gürdal, M., Huban, M.B., 2012. $\mathcal{I}$-limit points in random 2-normed spaces. Theory and Applications of Mathematics & Computer Science, 2 (1), 15-22.
2) Gürdal, M., Huban, M.B., 2012. On $\mathcal{I}$-convergence of double sequences in the topology induced by random 2-norms. Matematicki Vesnik, sunuldu.