T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EŞLENMİŞ ASİMPTOTİK AÇILIM METODU VE METODUN UYGULAMALARI

Seyfettin ALAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ramazan Uyhan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UYGULAMALI MATEMATİK ANABİLİM DALI

ISPARTA-2014

TEZ ONAYI

Seyfettin Alan tarafından hazırlanan **"Eşlenmiş Asimptotik Açılım Metodu ve Metodun Uygulamaları"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	:	Yrd. Doç. Dr. Ramazan Uyhan Süleyman Demirel Üniversitesi
Üye	:	Prof. Dr. Bilender Paşaoğlu Süleyman Demirel Üniversitesi
Üye	:	Yrd. Doç.Dr. Hüseyin Tuna Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Enstitü Müdürü	:	Prof. Dr. Ahmet ŞAHİNER

TAAHHUTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Seyfettin ALAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EŞLENMİŞ ASİMPTOTİK AÇILIM METODU VE METODUN UYGULAMALARI

SEYFETTİN ALAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. RAMAZAN UYHAN

Matematikte, fizikte ve uygulamalı bilimlerin birçok alanındaanalitik olarak çözülemeyen ya da klasik yöntemlerle gerçek çözümünün bulunması çok zor olan denklemlerle karşılaşılır. Bu denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için nümerik çözümler ve pertürbasyon metotlar kullanılır. Pertürbasyon metotların nümerik yöntemlerden en önemli farkı ise, diferansiyel denklemde var olan ya da bizim yerleştirdiğimiz çok küçük bir pozitif εkatsayısı kullanılarak yaklaşık çözüm elde etmesidir.

Pertürbasyon metotlardan biri olan Eşlenmiş Asimptotik Açılım metodu özellikle finans mühendisliğinde ve fizikte kullanılan bir metottur. Bu metodun diğer yaklaşık çözüm bulma metotları ile karşılaştırıldığında en büyük artısışudur;diğer metotlar ani değişim bölgelerinde iyi sonuç vermezlerken eşlenmiş asimptotik açılım metodu ani değişimin görüldüğü noktalarda da diğer noktalarda olduğu kadar iyi sonuçlar verir. Eşlenmiş asimptotik açılım metodunda öncelikle orijinal değişkenleri kullanarak klasik bir açılım belirlenir. Bu açılıma dış çözüm denir. Daha sonra ise daha büyük ölçekler kullanabilmek için değişken değiştirerek ani değişim noktaları için kullanılacak bir başka açılım daha bulunur. Bu açılıma da iç çözüm denir. Bu açılımlar arasında bağlantı kurabilmek için de eşleme yapılır.

Bu tezin amacı Eşlenmiş Asimptotik Açılım Metodunu detayları ile açıklamak ve uygulamaları hakkında bilgi vererek farklı alanlarda kullanılabilmesine olanak sağlamaktır.

Bu tezin giriş bölümünde pertürbasyon metotların temelinde yer alan önemli terimlerin tanımları yapılmıştır. Bu terimler arasında analitik fonksiyon, regüler ve singüler nokta, Taylor Serisi ve L'Hospital teoremi, mertebe, asimptotik yaklaşım, Asimptotik açılım,cebirsel ve cebirsel olmayan fonksiyonların asimptotik çözümleri vardır. İkinci bölümünde literatür çalışması sonucunda elde edilen bilgiler özet halinde sunulmuştur. Üçüncü bölümünde ise Eşlenmiş Asimptotik Açılım metodu kapsamlı olarak ele alınmış ve uygulamaları hakkında bilgi verilmiştir. Tek sınır koşulu olduğu durumlar, çoklu sınır koşulu olduğu durumlar, iç katmanların olduğu durumlar, dış katmanların olduğu durumlar ayrı ayrı incelenmiş ve kapsamlı açıklamalarla uygulamalarıyapılmıştır. Yine bu bölümde Newton'un ikinci hareket kanunu için eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile yaklaşım çözüm bulunmuştur. Tezin dördüncü bölümünde ise eşlenmiş asimptotik açılım metodunun önemi anlatılmış ve metot ile alakalı çıkarımlara yer verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Eşlenmiş asimptotik açılım, Van Dyke'ın eşleme prensibi, asimptotik genişleme, Pertürbasyon metotlar, yaklaşık değer bulma, Newton'un ikinci hareket kanunu.

2014, 75 sayfa

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

THE METHOD OF MATCHED ASYMPTOTİC EXPANSİONS AND APPLİCATİONS OF THE METHOD

Seyfettin ALAN

Süleyman Demirel Univercity Graduate School of Naturel Sciences Departmant of Applied Mathematics

Supervisor:Yard. Doc. Dr. Ramazan Uyhan

In mathematics, physics and several other applied sciences one encounters equations impossible or nigh impossible to solve analitically. In order to find approximate solutions to these equations, numerical approximations and perturbation methods are employed. The key difference of perturbation methods from numerical approximations is the use of an infinitesimal ε value, which could be naturally found in differential equations or could be inserted methodicallly.

Matched Asymptotic Expansion Method, one of these perturbation methods, is used especially in computational finance and physics. Difference of this perturbation method is, while other methods don't give accurate results in the areas of sudden changes, it provides accurate results in these areas as well. In Matched Asymptotic Expansion Method, firstly, by using original variables, a classical expansion is determined. In order to use higher scales, with the help of variables changes, another expansion is determined for sudden change areas. Then, a mapping is done between the two expansions in order to link the two expansions.

Aim of this thesis is to explain the Matched Asymptotic Expansion Method in detail and provide information in its applications in order to give insight for other possible fields of application.

In the first part of the thesis some important terms used in perturbation methods is explained. Among these terms are analytical functions, regular and singular points, Taylor series expansions and L'Hopital theorem, rank, asymptotic convergence, asymptotic expansion, correctness values of asymptotic expansions, solutions t algebraic and non-algebraic functions. In the second part a summary of literature research is provided. In the third part, a detailed study of Matched Asymptotic Expansion Method and its applications is given. Thesis is enhanced by including expansive explanations of single constraint cases, multiple constraint cases, existence of inner layers and outer layers. Then, in the forth part, importance of Matched Asymptotic Expansion Method is explained and arguments are given.

Keywords: Matched asymptotic expansion, asymptotic spreading, perturbation methods, approximation

2014, 75 page

TEŞEKKÜR

Tezi hazırlarken beni en çok zorlayan şey konu hakkında Türkçe kaynakların çok az olmasıydı. Ancak bu durum aynı zamanda bana güç de verdi. Çünkü bu konu hakkındaki nadir Türkçe kaynaklardan birini oluşturuyor olmak heyecan vericiydi.

Bu tezin hazırlanması sırasında bana yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. RAMAZAN UYHAN'a, çalışmalarımın her aşamasında bana çokça yardımı olan ağabeyim Süleyman Alan'a, değerli dostlarım Tolga Yaman ve Mehmet Uyanık'a ve tabi ki akademik çalışmalarım boyunca hep yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Seyfettin Alan
ISPARTA,2014

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\sim$	:Yaklaşık
$\ll$	:çok küçüktür
$\gg$	:çok büyüktür
O	:büyük "order" sembolü
o	:küçük "order" sembolü
$\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$	: ε , ε_0 değerine yaklaşırken
$\tilde{x}$	: sınır koordinatları tanımlanmış x değişkeni
$y_{iç}$	:iç çözüm
$y_{dış}$	:dış çözüm
g	:yerçekimi ivmesi
R	:dünyanın yarıçapı
$\Leftrightarrow$	: ancak ve ancak
$\Rightarrow$	: ise

1.GİRİŞ

1.1.Analitik Fonksiyon

Bir $f(x)$ fonksiyonu, $x = x_0$ noktası yakınında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}.(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}.(x-x_0) + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}.(x-x_0)^n \qquad (1.1)$$

şeklinde yazılan Taylor serisine açılabiliyorsa ve x_0 noktasını içeren bir açık aralıkta x 'in bütün değerleri için bu Taylor açılımı, $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşıyorsa o zaman adı geçen fonksiyona $x = x_0$ noktasında analitik fonksiyon denir. Bu durumda verilen Taylor açılımı

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (1.2)$$

şeklinde olur.

Analitik fonksiyonlar için yukarıdaki tarif göz önüne alınırsa hemen söylenebilir ki bütün polinom fonksiyonlar her yerde analitiktirler. Ayrıca e^x, $\sin x$, $\cos x$ fonksiyonları da her yerde analitiktirler. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonlar, $f(x)$ ve $g(x)$ analitik fonksiyon olmak üzere $g(x)$'i sıfır yapmayan her x değeri için analitiktirler(Çağlayan, 2008).

1.2.Regüler Nokta ve Singüler Nokta

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x).\frac{dy}{dx}+P_2(x).y=0 \tag{1.3}$$

İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemdeki $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de bir $x=x_0$ noktasında analitik ise $x=x_0$ noktasına "regüler nokta" denir (Çağlayan, 2008).

Eğer bu fonksiyonlardan en az bir tanesi $x=x_0$ noktasında analitik değilse, o zaman $x=x_0$ noktasına (1.3) diferansiyel denkleminin bir "singüler noktası" denir (Çağlayan, 2008).

1.3.Taylor Teoremi ve L'Hospital Kuralı

1.3.1.Teorem (Taylor Teoremi)

$f(\varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon_a<\varepsilon<\varepsilon_b$ aralığında sürekli ve $(n+1)$. mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(\varepsilon)=f(\varepsilon_0)+(\varepsilon-\varepsilon_0)f'(\varepsilon_0)+\ldots+\frac{1}{n!}(\varepsilon-\varepsilon_0)^n f^n(\varepsilon_0)+R_{n+1} \tag{1.4}$$

olur. Burada

$$R_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}(\varepsilon-\varepsilon_0)^{n+1}f^{n+1}(\xi)\,,\qquad \varepsilon_0<\xi<\varepsilon \tag{1.5}$$

şeklindedir. Bu sonuç çok önemlidir, çünkü Taylor Serisinin ilk $(n+1)$ terimi $f(\varepsilon)$ fonksiyonun yaklaşımında kullanılacaktır.

Taylor seri açılımı $y^2<x^2$ değerleri için aynı zamanda:

$$(x+y)^{\alpha} = x^{\alpha} + \alpha y x^{\alpha-1} + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1) y x^{\alpha-2} y^2 + \dots \tag{1.6}$$

şeklinde binom açılımını da oluşturur.

İstenen durumlarda üstel ve trigonometrik fonksiyonlar için $\varepsilon_0 = 0$ alınarak Maclaurin açılımı kullanılır(Holmes, 1995).

1.3.2.Teorem(L'Hospital Teoremi)

Bir diğer önemli teorem ise L'Hospital kuralıdır. L'Hospital kuralı iki fonksiyonun derecelerinin limitlerinin değerlerini içerir.

$f(\varepsilon)$ ve $\phi(\varepsilon)$ fonksiyonları $\varepsilon \neq 0$ olmak üzere $(\varepsilon_0, \varepsilon_b)$ aralığında türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar ve kabul edelim ki

$$\lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} \frac{f'(\varepsilon)}{\phi'(\varepsilon)} = A \, , \; -\infty < A < \infty \tag{1.7}$$

olsun.Bu durumda

1) $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ durumunda $f \to 0$ ve $\phi \to 0$

2) $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ olduğunda $\phi \to \infty$

şartlarından herhangi biri sağlanıyorsa

$$\lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = A \tag{1.8}$$

ifadesi de sağlanır(Holmes, 1995).

1.4.Mertebe(Order) Sembolü

Asimptotik yaklaşımlarda ilk bilinmesi gereken "order" ya da diğer adıyla "Landau" sembolüdür. Burada asıl önemli olan şey çok küçük bir ε parametresine bağlı olan fonksiyonların nasıl davrandıklarıdır. Örneğin ε'a bağlı bir $\phi(\varepsilon)=\varepsilon$ fonksiyonu $\phi(\varepsilon)=\varepsilon^2$ kadar hızlı bir şekilde 0'a yaklaşmaz. Bu nedenle de belli bir notasyona ihtiyaç duyulur.

1.4.1.Tanımlar

1. $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f=O(\phi)$ gösterimi $\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_1$ aralığında $|f(\varepsilon)| \le k_0 |\phi(\varepsilon)|$ olacak şekilde ε'dan bağımsız bir k_0 ve ε_1 sabitlerinin var olduğunu belirtir. Buradaki "f" fonksiyonu "big Oh of ϕ"şeklinde söylenir.

2. $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f=o(\phi)$ gösterimi her pozitif δ için $\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_2$ aralığında $|f(\varepsilon)| \le \delta |\phi(\varepsilon)|$ olacak şekilde ε'dan bağımsız bir ε_2 sabitinin var olduğunu belirtir.Burada "f" fonksiyonu "little oh of ϕ" şeklinde söylenir.

Bu tanımlar yardımıyla aşağıdaki sonuçlara ulaşılabilir:

a) 0'a eşit olmayan bir ϕ fonksiyonunda $\left|\dfrac{f}{\phi}\right|$ oranı ε ve ε_0 aralığında sınırlı ise $f=O(\phi)$ olur.

b) $$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} \qquad (1.9)$$

limitinin değeri varsa ve sonlu ise $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f=O(\phi)$ olur.

c) $\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0$ (1.10)

ise $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f = o(\phi)$ olur (Kevorkian, 1985).

1.4.2.Örnekler ($\varepsilon \downarrow 0$ için)

1.

$f = \varepsilon^2$ (1.11a)

$\phi_1 = \varepsilon$ (1.11b)

$\phi_2 = -3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^6$ (1.11c)

olsun. Burada limit formülü uygulanırsa:

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f}{\phi_1} = 0 \Rightarrow f = o(\phi)$ (1.12)

ve

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f}{\phi_2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow f = O(\phi_2)$ (1.13)

olduğu görülür.

2.

$$f(\varepsilon) = \sin(\varepsilon) \tag{1.14}$$

fonksiyonu için ise Taylor seri açılımı kullanılırsa:

$$f = \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(\xi) \tag{1.15}$$

olarak bulunur.Limit işlemi uygulanırsa:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f}{\varepsilon} = 1 \tag{1.16}$$

olduğu görülür. Buradan da $f = O(\varepsilon)$ olarak belirlenir.

3.

$$f = \varepsilon \sin(1 + \frac{1}{\varepsilon}) \tag{1.17}$$

$$\phi = \varepsilon$$

olursa $0 < \varepsilon$ için

$$\left| \frac{f}{\phi} \right| \leq 1 \tag{1.18}$$

olur. Buradan da $f = O(\phi)$ olduğu görülür.

Aynı zamanda order sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir;

a) $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f = O(1) \Leftrightarrow \varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken f sınırlıdır

b) $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f = o(1) \Leftrightarrow \varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f \to 0$

c) $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f = o(\phi) \Rightarrow \varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ iken $f = O(\phi)$

Order sembolüne ek olarak kullanılan birkaç sembol daha vardır. Bunlar $\ll$ ve $\approx$ sembolleridir.

$f(\varepsilon) \ll \phi(\varepsilon)$ ifadesi $f = o(\phi)$ ifadesine denktir. Ayrıca $\varepsilon \ll 1$ durumu ε değerinin çok küçük olduğunu belirtir. Yani $\varepsilon \downarrow 0$ demektir.

$\approx$ ifadesinin ise burada kullanılacak özel bir anlamı yoktur ve $\pi \approx 3.14$ ifadesinde olduğu gibi belli bir sayısal yakınsamayı ifade eder (Kevorkian, 1985).

1.5.Asimptotik Yaklaşım

Pertürbasyon metotların asıl amacı diferansiyel denklemin çözüm eğrisine yakın bir çizim yapmaktır. Bunu yapabilmek için asimptotik yaklaşım yapılır.0'a çok yakın bir ε değeri için $f(\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon^5$ fonksiyonunun yaklaşımının ne olduğu araştırılırsa, $\varepsilon^5 \ll \varepsilon^2$ olduğu için $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^2$ olduğunu söylemek makul bir yaklaşım olacaktır. Diğer taraftan $f(\varepsilon) \sim \frac{2}{3}\varepsilon^2$ olarak belirtilirse $\varepsilon \to 0$ iken yaklaşımdaki hata yani $f(\varepsilon) - \frac{2}{3}\varepsilon^2$ ifadesi de 0'a gider. Fakat bu yaklaşım kötü bir yaklaşım olur. Bunun sebebi hatanın $f(\varepsilon)$'a yaklaşımda kullanılan fonksiyon ile aynı mertebeye sahip olmasıdır. Bu gözlem ile aşağıdaki tanıma ulaşılır.

1.5.1. Tanım (asimptotik yaklaşım) $f(\varepsilon)$ ve $\phi(\varepsilon)$ fonksiyonları verilsin, Eğer $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ için $f = \phi + o(\phi)$ oluyorsa, $\phi(\varepsilon)$ fonksiyonuna" $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ için $f(\varepsilon)$ fonksiyonunun bir asimptotik yaklaşımıdır" denir.

Örnekte belirtilen fonksiyon incelenirse, bu tanıma göre hatanın derecesi yaklaşım fonksiyonunun derecesi ile aynı olmasına rağmen $\phi(\varepsilon)$ fonksiyonu $f(\varepsilon)$ fonksiyonuna bir yaklaşım olarak belirtilmektedir. Sonuç olarak $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ için $f \sim \phi$ olmasının şartı;

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 1 \tag{1.19}$$

olmasıdır (Kevorkian, 1985).

1.5.2.Örnek-1

$f = \sin(\varepsilon)$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olduğunu varsayalım. Burada $f(\varepsilon)$ fonksiyonunun $\varepsilon = 0$ civarındaki Taylor açılımından yararlanılırsa:

$$f = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 \cos(\xi) \tag{1.20}$$

ifadesi elde edilir.

Buradan aşağıdaki asimptotik eşitliklerin olduğu söylenilebilir.

i) $f \sim \varepsilon$ (1.21a)

ii) $f \sim \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3$ (1.21b)

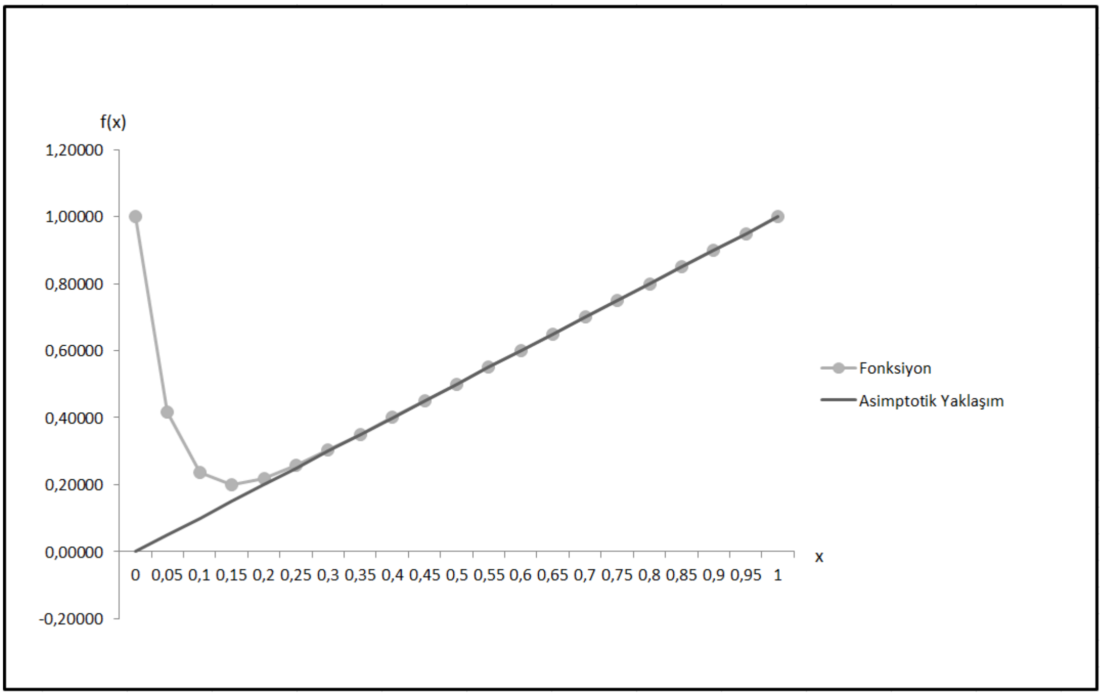
iii) $f \sim \varepsilon + 2\varepsilon^2$ (1.21c)

elde edilen bu yaklaşımlar(1.20) ifadesi ile karşılaştırılırsa açıkça görülür ki; çok küçük bir ε değeri için (1.21a) ifadesi en doğru yaklaşımı verirken (1.21c) ifadesi ise en yanlış yaklaşımı vermektedir.

1.5.3.Örnek-2

$$f = x + e^{-x/\varepsilon} \quad , \qquad 0 < x < 1 \tag{1.22}$$

olsun. Burada ε çok küçük bir değer olduğunda $f \sim x$ şeklinde bir yaklaşım belirlenebilir. Yaklaşımdan ve (1.22) fonksiyonundan elde edilen verilerin karşılaştırılması Şekil-1.1'de gösterilmiştir.



Şekil 1.1 - (1.22) fonksiyonu ile asimptotik yaklaşım olarak belirlenen y=x fonksiyonunun karşılaştırılması($\varepsilon = 10^{-2}$)

Grafikte açıkça görülebileceği gibi $x = 0$ noktasından uzaklaşıldığında çok iyi bir yaklaşım elde edilirken, $x = 0$ komşuluğunda yaklaşım o kadar da iyi değildir. Unutulmamalıdır ki verilen herhangi bir x değeri için yapılan bir asimptotik yaklaşımda ε değeri x değerine göre ne kadar küçükse asimptotik yaklaşım o kadar iyi sonuç verir. Bu örnekte ε değerinin ne kadar küçük olabileceği x'e bağlıdır (Kevorkian, 1995).

1.6.Asimptotik Açılım

Asimptotik yaklaşımlar tek değildirler ve yaklaşımın uygunluğu hakkında fazla bir bilgi vermezler. Bu eksiklikleri gidermek için formüle bir takım yeni yapılar eklemek gereklidir. Şimdiye kadar $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \ldots$ dizilimleri kullanıldı. Ancak daha kapsamlı olan başka dizilimler de oluşturulabilir. Bunları oluşturabilmek için Poincare'nin tanımları kullanılır.

1.6.1. Asimptotik açılımlar için Poincare tanımları

1. $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \ldots$ fonksiyon dizilimi verilsin. m<n şeklinde tanımlanan bütün m ve n değerleri için $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \iff \phi_n = o(\phi_m)$ ifadesi sağlanıyorsa bu fonksiyonlara "asimptotik dizilim" ya da "iyi sıralanmış dizilim" denir (Holmes, 1995).

2. $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4 \ldots$ fonksiyonları asimptotik dizilim belirtiyor ise a_k sabitleri ε'dan bağımsız sabitler olmak üzere

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k \phi_k(\varepsilon) + o(\phi_m) \qquad \text{m=1,2,3...n} \qquad \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \tag{1.23}$$

şeklinde bir asimptotik açılım belirtir. Açılım düzenlenirse fonksiyon

$$f \sim a_1\phi_1(\varepsilon) + a_2\phi_2(\varepsilon) + a_3\phi_3(\varepsilon) + \ldots + a_n\phi_n(\varepsilon) \quad \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \tag{1.24}$$

halini alır. Burada ϕ fonksiyonuna "baz fonksiyonu" ya da "Gouge fonksiyonu" denir (Holmes, 1995).

Bu tanımlar ile elde edilebilecek asimptotik açılımlardan en çok kullanılan iki tanesi şunlardır:

1. $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ ve $\alpha < \beta < \gamma < \ldots$ olmak üzere

$$\phi_1 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^{\alpha}, \phi_2 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^{\beta}, \phi_3 = (\varepsilon - \varepsilon_0)^{\gamma} \ldots \tag{1.25}$$

2. $\varepsilon \to 0$ için

$$\phi_1 = 1, \phi_2 = e^{-1/\varepsilon}, \phi_3 = e^{-2/\varepsilon} \tag{1.26}$$

Fonksiyon dizilimlerinden birincisi kuvvet serileri açılımının genelleştirilmiş halidir, ikinci dizilim ise küçük üstel fonksiyonlarının tanımlanmasında kullanılır.

Verilen bilgilerden hareketle bir $f(\varepsilon)$ fonksiyonuna karşılık gelen asimptotik açılımı belirlemek için üç farklı yolun olduğu söylenebilir. Bunlar:

1) Taylor serisi

2) L'Hospital kuralı

3) Tahmin etme

Tahmin etme yolu problemin sezgisel olarak algılanabilmesine bağlıdır ve genellikle de şansa dayalıdır. Diğer iki yol ise daha rutin ve açıklanabilirdir.

Eğer fonksiyon $\varepsilon = \varepsilon_0$ noktasında Taylor Serisine açılabilecek kadar düzgün ise Taylor Teoremi en kullanışlı yoldur. Burada Taylor Serisinin bütün sonuçları asimptotik açılım olarak kullanılabilir. Buna ek olarak Taylor teoremi asimptotik yaklaşımın hatasını çok daha kolay belirleyebilir (Holmes, 1995).

1.6.2.Örnekler ($\varepsilon \ll 1$ için)

1. e^{ε} fonksiyonunun açılımının ilk üç terimini bulmak için Taylor teoremi kullanılırsa:

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{3!}\varepsilon^3 + \dots \tag{1.27}$$

seri açılımı elde edilir. İlk üç terimi ise

$$e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \tag{1.28}$$

şeklinde ifade edilir.

2. $\sin(e^{\varepsilon})$ fonksiyonunun ilk üç terimini bulmak için

$\sin(1+\alpha)$ fonksiyonunun $\alpha = 0$ etrafındaki Taylor açılımı kullanılırsa:

$$\sin(1+\alpha) = \sin(1) + \alpha \sin(1) - \frac{1}{2}\alpha^2 \sin(1) + \dots \tag{1.29}$$

elde edilir. Burada e^{ε} fonksiyonunun açılımı kullanır ve istenen fonksiyona geçiş yapılırsa:

$$\sin(e^{\varepsilon}) \sim \sin(1) + \varepsilon \cos(1) + \frac{1}{2}\varepsilon^2[\cos(1) - \sin(1)] \tag{1.30}$$

olarak yazılabilir.

Asimptotik açılımı tanımlayabilmek için $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ölçek fonksiyonları olduğunu ve fonksiyonun asimptotik açılımının $f \sim a_1\phi_1(\varepsilon) + a_2\phi_2(\varepsilon)\dots$ şeklinde olduğunu varsayalım. Tanımlardan bilindiği gibi bu açılım $f = a_1\phi_1(\varepsilon) + o(\phi_1)$

şeklindedir. İfadenin ϕ_1 'e bölünebildiğini varsayalım ve $\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0}\frac{f}{\phi_1}=\alpha_1$ olsun. Burada α_1 'in değeri ve $f=a_1\phi_1(\varepsilon)+a_2\phi_2(\varepsilon)+o(\phi_2)$ eşitliği kullanılarak a_2 'nin değeri bulunabilir. Buradan da

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0}\frac{f-a_1\phi_1}{\phi_2}=\alpha_2 \tag{1.31}$$

eşitliği elde edilir. Bu düşünce açılımdaki diğer katsayıların da bulunabilmesi için aşağıdaki formüllerin elde edilmesini sağlar.

Ölçek fonksiyonların ε 'a çok yakın ε_0 değerleri için sıfır olmadığı ve limitlerinin var olduğu kabul edildiğinde:

i) $$\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0}\frac{f}{\phi_1}=a_1 \tag{1.32}$$

ii) $$\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0}\frac{f-a_1\phi_1}{\phi_2}=a_2 \tag{1.33}$$

iii) $$\lim_{\varepsilon\downarrow\varepsilon_0}\frac{f-a_1\phi_1+a_2\phi_2}{\phi_3}=a_3 \tag{1.34}$$

ifadelerine ulaşılır. Örneğin:

$$\phi_1=1\ ,\ \phi_2=\varepsilon\ ,\ \phi_3=\varepsilon^2 \ldots \text{ ve } \ f(\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}+e^{-1/\varepsilon} \tag{1.35}$$

olsun. Verilen limit formülleri kullanılırsa şu ifadelere ulaşılır:

$$a_1=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{f}{1}=1 \tag{1.36}$$

$$\alpha_2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f-1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{-1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-1/\varepsilon} \right) = -1 \tag{1.37}$$

$$a_3 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f-1+\varepsilon}{\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-1/\varepsilon} \right) = 1 \tag{1.38}$$

Buradan da $f \sim 1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\ldots$ elde edilir. Burada ilgi çekici olan şey üstel ifadelerin sonuç üzerinde hiçbir değişiklik yaratmamasıdır. Bunun nedeni bütün α değerleri için $e^{-1/\varepsilon} = o(e^{\alpha})$ olmasıdır. Diğer bir deyişle bütün üsler çok hızlı bir şekilde 0'a yaklaşır. Bu tür üstel fonksiyonlara cebirsel olmayan "aşkın küçük (Transandantally small) fonksiyonlar" denir (Holmes, 1995).

Örneklerde de görüleceği gibi farklı fonksiyonların asimptotik açılımları aynı olabilir. Taylor seri açılımı kullanılarak asimptotik açılımları bulunduğunda, aşağıdaki fonksiyonların da aynı asimptotik açılıma sahip oldukları görülür.

$$f_1 = \frac{\tanh(1/\varepsilon)}{1+\varepsilon} \tag{1.39}$$

$$f_2 = \frac{1+e^{-1/\varepsilon}}{1+\varepsilon} \tag{1.40}$$

$$f_3 = \frac{1}{1+\varepsilon} + \varepsilon^{100} \sec h(-1/\varepsilon) \tag{1.41}$$

Bu fonksiyonlarda olduğu gibi, verilen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ dizilimlerine göre ilk n terim açılımı $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ için $f-g=o(\phi_n)$ olursa, karşılık gelen asimptotik açılımları aynı ise, bu fonksiyonlara "asimptotik eşittirler" denir (Holmes, 1995).

1.7.Asimptotik Açılımların Şekillendirilmesi

İstendiğinde İki asimptotik açılımın terim terime toplanabilir. Ancak her asimptotik açılımın türevi alınamaz. Özel olarak asimptotik açılım aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$f(x,\varepsilon) \sim \alpha_1(x)\phi_1(x,\varepsilon)+\alpha_2(x)\phi_2(x,\varepsilon) \ , \ \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \tag{1.42}$$

burada araştırılan şey:

$$\frac{d}{dx} f(x,\varepsilon) \sim \frac{d}{dx}\alpha_1(x)\phi_1(x,\varepsilon)+\frac{d}{dx}\alpha_2(x)\phi_2(x,\varepsilon) \ , \ \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \tag{1.43}$$

ifadesinin doğru olup olmadığıdır.

İlk akla gelen tahmin tabi ki bu ifadenin doğru sonuç vereceğidir. Fakat bu her zaman doğru bir tahmin değildir. Örneğin; çok küçük bir ε değeri için:

$$f(x,\varepsilon) = e^{-x/\varepsilon}\sin(e^{x/\varepsilon}) \qquad 0 < x < 1 \tag{1.44}$$

fonksiyonu tanımlansın. Burada fonksiyon seriye açılırsa asimptotik açılım

$$f \sim 0 + 0\cdot\varepsilon + 0\cdot\varepsilon^2 + \ldots \tag{1.45}$$

şeklinde, türev fonksiyonu ise

$$\frac{d}{dx} f(x,\varepsilon) = \frac{-1}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon}\sin(e^{x/\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}\cos(e^{x/\varepsilon}) \tag{1.46}$$

şeklinde olur. Bu fonksiyonun (1.45) ifadesi türünden bir terimi bile yoktur.
Bir diğer problem ise ϕ_1 ve ϕ_2 iyi sıralı değil iseler türevlerinin olmayabileceğidir. Örneğin $0 \le x \le 1$ aralığında tanımlı

$$\phi_1 = 1 + x \tag{1.46}$$

ve

$$\phi_2 = \varepsilon \sin(x/\varepsilon) \tag{1.47}$$

fonksiyonları tanımlansın. ε çok küçük bir değer seçildiğinde $\phi_2 = o(\phi_1)$ olduğu görülür fakat $\frac{d}{dx}\phi_1$ ve $\frac{d}{dx}\phi_2$ ifadeleri iyi sıralı ifade oluşturmazlar.

Burada belirtilen iki durumda asimptotik açılımların türevleri alınamaz. Buradan da hangi fonksiyonlara ait asimptotik açılımların türevlerinin alınabileceğine dair aşağıdaki kurala ulaşılır.
Eğer fonksiyon

$$f(x,\varepsilon) \sim \alpha_1(x)\phi_1(x,\varepsilon) + \alpha_2(x)\phi_2(x,\varepsilon)\ ,\ \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \tag{1.48}$$

şeklinde ve türevi

$$\frac{d}{dx} f(x,\varepsilon) \sim b_1(x)\phi_1(x,\varepsilon) + b_2(x)\phi_2(x,\varepsilon)\ ,\ \varepsilon \downarrow \varepsilon_0\ \ , \beta_k = \frac{d}{dx}\alpha_k\ , \tag{1.49}$$

şeklinde ise açılımlarının da türevleri alınabilir.

($\frac{d}{dx} f$ ifadesi $f(x,\varepsilon)$ açılımdaki bütün terimlerin ayrı ayrı türevlerinin alınmasıyla elde edilen fonksiyondur)

Asimptotik açılımlarda yapılabilecek bir diğer şey ise integral alma işlemidir. Türev alma işleminde olduğu gibi (1.48) şeklinde verilen bütün fonksiyonların açılımlarının integralleri alınabilir. İntegral sonucu ise aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\int_a^b f(x,\varepsilon)dx \sim \int_a^b \alpha_1(x)dx\phi_1(\varepsilon) + \int_a^b \alpha_2(x)dx\phi_2(\varepsilon)\,,\ \varepsilon \downarrow \varepsilon_0 \qquad (1.49)$$

Tabi ki verilen $a \le x \le b$ aralığı açılımda verilen x'in tanım kümesinin içinde kalmalıdır (Lagerstorm, 1988).

1.8.Cebirsel Ve Cebirsel Olmayan Fonksiyonların Asimptotik Çözümleri

Yaklaşık çözümlerin bulunması için asimptotik açılımların nasıl kullanıldığının izahı cebirsel denklemlerle yapılabilir (Holmes, 1995).

1.8.1.Örnek-1:

$$x^2 + 0,002x - 1 = 0 \qquad (1.50)$$

denklemini ele alalım. Lineer terim olan x'in katsayısı diğer katsayıdan çok daha küçük olduğu için yaklaşık bir çözüm kolayca belirlenebilir. Bunu yapmak için x'in katsayısı olan 0,002 yerine ε yazılarak eşitlik düzenlenirse:

$$x^2 + 2\varepsilon x - 1 = 0\ , \qquad \varepsilon \ll 1 \qquad (1.51)$$

denklemi elde edilir. Çözüme başlarken ilk tahmin çözümün

$$x \sim x_0 + \varepsilon^a x_1 + \dots\ , \qquad a > 0 \qquad (1.52)$$

şeklinde olacağı yönündedir. Çünkü fonksiyon x'in azalan kuvvetleri şeklindedir ve asimptotik açılımın da Taylor Serisine benzeyeceğidir.

(1.52) ifadesi ile belirlenen x değeri (1.51) denkleminde yerine yazılırsa:

$$x_0^2 + 2\varepsilon^a x_0 x_1 + \dots + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon^a x_1 + \dots) - 1 = 0 \qquad (1.53)$$

denklemi elde edilir.

Burada gösterim kolaylığı olması için denklem parçalara ayrılıp isimlendirilirse:

x_0^2 =A (1.54a)

$2\varepsilon^a x_0 x_1$ =B (1.54b)

$2\varepsilon(x_0 + \varepsilon^a x_1 + \ldots)$ =C (1.54c)

-1 =D (1.54d)

ifadeleri elde edilir.

Yapılması gereken ilk şey(1.54a) ve (1.54b)ifadelerinin çözülmesidir. Çünkü bu eşitlik çok küçük bir ε barındırır. Bu nedenle ε içeren terimlerin $\varepsilon \downarrow 0$ olarak belirlenmesi gerekir. Eşitlik çözüldüğünde

$$o(1) \qquad x_0^{\ 2} - 1 = 0 \tag{1.55}$$

denklemi elde edilir ve denklemin çözümü $x_0 = \pm 1$ olur. Burada gözlemlenen ilk şey elde edilen problem ile asıl denklemin eşit sayıda köklerinin olmasıdır.(Her ikisi de ikinci dereceden denklemlerdir)

Bulunan çözümden yararlanarak (1.54c) yani $o(\varepsilon)$ ifadesi bulunabilir. Denklemde sağ taraf sıfır olduğu için (1.54c) denklemi sol taraftaki diğer bir terim ile beraber birbirini sıfırlıyor olmalıdır. Burada tek seçenek (1.54b) denklemidir. Buradan da $a = 1$ olduğu anlaşılır ve bir sonraki denkleme ulaşılır.

$$o(\varepsilon) \qquad 2x_0 x_1 + 2x_0 = 0 \tag{1.56}$$

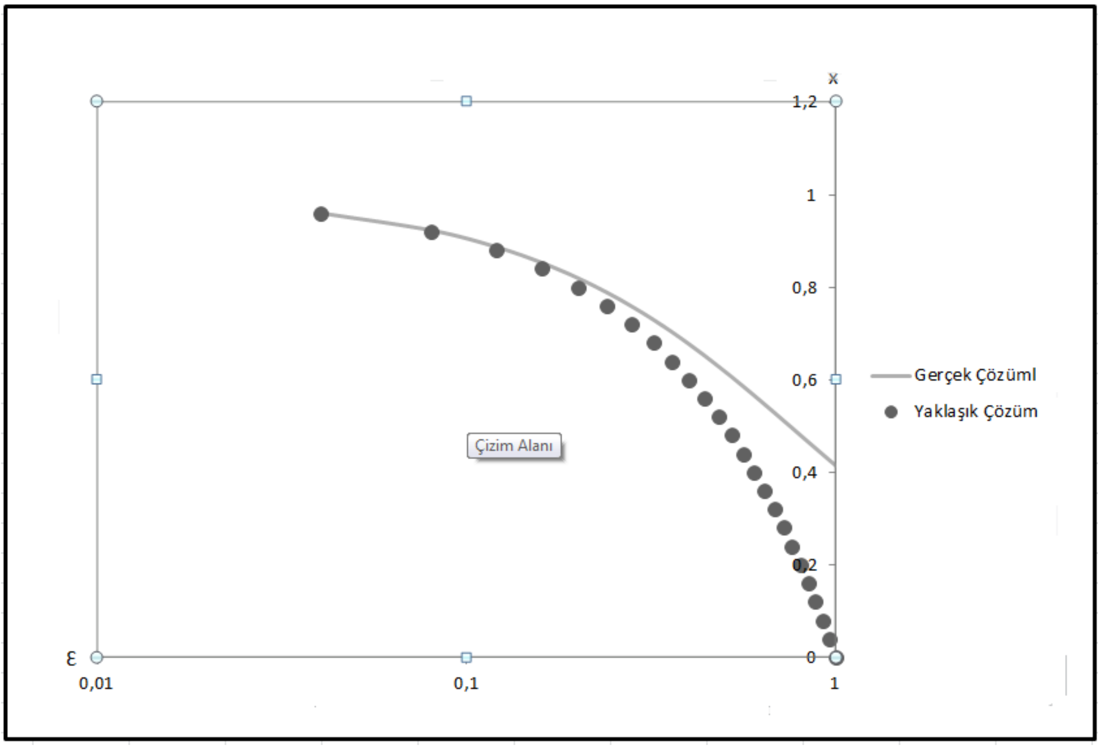
denklem çözülürse çözüm $x_1 = -1$ olarak bulunur.

Bu şekilde devam edilerek asimptotik açılımın diğer terimleri de istenirse bulunabilir ancak yapılan hesaplardan artık görülür ki:

$$x \sim 1-\varepsilon \tag{1.57}$$

şeklinde bir asimptotik açılım belirlenebilir.

(1.51) denkleminin gerçek çözümü ile bulunan (1.57) yaklaşık çözümünün karşılaştırılması Şekil-1.2'de gösterilmiştir.



Şekil 1.2 - (1.51) denkleminin pozitif kökü ile (1.57) asimptotik açılımının karşılaştırılması($\varepsilon \to 10^{-3}$)

Grafikten anlaşılır ki bulunan yaklaşım çok küçük ε değerleri için oldukça kabul edilebilir bir sonuçtur. Asıl denklem ile yaklaşık çözümü analitik olarak karşılaştırmak için denklem çözülürse bir kökü $x=-1,0001000...$ olarak bulunur. Yaklaşıma bakılacak olursa ise $\varepsilon = 10^{-3}$ alındığında bulunan yaklaşık çözüm $x \sim -1,0001099\ldots$ olarak bulunur ki gerçek çözüm değerine oldukça yakın bir çözümdür.

1.8.2.Örnek-2:

İlk örnekten farklı olarak ε ikinci dereceden ifadenin katsayısı olarak alınabilir.

$$\varepsilon x^2 + 2x - 1 = 0 \tag{1.58}$$

denklemi ele alınsın.

Denklemde eğer $\varepsilon = 0$ olursa denklem lineer hale gelir. Bu oldukça önemlidir çünkü denklemin yapısı değişir. Ancak örnek-1'de olduğu gibi bu denklemin de yaklaşık çözümü bulunabilir. Gerekli işlemler yapılırsa denklemin kökünün

$$x \sim \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{8} + \ldots \tag{1.59}$$

olduğu görülür. Burada kritik nokta aslında denklemin iki kökünün olması gerektiğidir. Ancak yaklaşım sadece bunlardan biri üzerinden yapılabilir. İlk akla gelen yol bulunan ilk kökten yararlanarak diğer kökü bulmaktır. Ancak bu çok uzun bir yol olduğu için köklerin doğrudan bulunabileceği bir yol kullanmak daha uygun olacaktır.

$\varepsilon \neq 0$ olduğunda denkleminin ikinci dereceden olacağı aşikardır. Bu bilgiyi göz önünde bulundurarak yaklaşımın

$$x \sim \varepsilon^{\lambda}(x_0 + \varepsilon^{\alpha} x_1 + \ldots) \;, a > 0 \tag{1.60}$$

şeklinde olduğu kabul edilir ve bu yaklaşım denklemde yerine yazılırsa:

$$\varepsilon^{1+2\lambda}({x_0}^2 + 2\varepsilon^{a} x_0 x_1 + \ldots) + 2a^{\lambda}(x_0 + \varepsilon^{a} x_1 + \ldots) - 1 = 0 \tag{1.61}$$

denklemi elde edilir. İşlem kolaylığı için kullanılacak kısımlar aşağıdaki gibi isimlendirilirse:

$$\varepsilon^{1+2\lambda}(x_0{}^2+2\varepsilon^a x_0 x_1+\ldots) = A \qquad (1.61a)$$

$$2a^{\lambda}(x_0+\varepsilon^a x_1+\ldots) = B \qquad (1.61b)$$

$$-1 = C \qquad (1.61c)$$

halini alır. Burada denklemin sol tarafı "0" olacak şekilde birbirlerini götürmeleri gerekir. Bu yüzden de problemin bu şekilde düzenlenmesi lazımdır. Burada ele alınabilecek üç farklı durum vardır. Birinci durum $\lambda = 0$ olma durumudur. Fakat bu durumda ilk denkleme geri dönüleceği için aynı kök tekrar bulunur. Bu nedenle aşağıdaki varsayımlardan uygun olanı ile sonuca gidilir.

i)(1.61a) ve (1.61c) denklemlerinin dereceleri eşit ve (1.61b) denklemi yüksek derece olsun. Bu durumda $1+2\lambda = 0$ olur ve $\lambda = \frac{-1}{2}$ bulunur. $\lambda = \frac{-1}{2}$ denklemde yerine yazıldığında (1.61a) ve (1.61c) ifadeleri $O(1)$ olurken (1.61c) ifadesi $O(\frac{-1}{2})$ olur ki varsayım sağlanmamış olur. Bu yüzden bu eşitlik kullanılamaz.

ii) (1.61a) ve (1.61b) denklemlerinin dereceleri eşit ve (1.61c) denklemi yüksek dereceden olsun. Bu durumda $\lambda = 1+2\lambda$ olur ve $\lambda = -1$ bulunur. Bu ifadelerde yerine yazılırsa (1.61a) ve (1.61b) ifadeleri $O(\varepsilon^{-1})$ olurken (1.61c) ifadesi $O(1)$ olur ve varsayım sağlanmış olur. Yani bu ikinci durumdan diğer kök bulunabilir.

$\lambda = -1$ denklemde yerine yazılırsa:

$$x_0^2 + 2\varepsilon^a x_0 x_1 + \ldots + 2(x_0 + \varepsilon^a x_1 + \ldots) - \varepsilon = 0 \tag{1.62}$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$O(1) \qquad x_0^2 + 2x_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 0, -2 \qquad a = 1 \tag{1.63}$$

$$O(\varepsilon) \qquad 2x_0 x_1 + 2x_1 - 1 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{1}{2(1+x_0)} \tag{1.64}$$

bulunur. İki terime kadar açılım yapılırsa diğer kök

$$x \sim \frac{1}{\varepsilon}(-2 - \frac{\varepsilon}{2}) \tag{1.65}$$

olarak bulunur (Holmes, 1995).

2.KAYNAK ÖZETLERİ

Asimptotik açılım fikrinin ilk ortaya çıkışı 1800'lü yılların başlarına dayanır. Zaman geçtikçe özel fonksiyonlar için yeni formüller elde edilmiştir. Örneğin asimptotik açılımların ilk örneklerinden Bessel Fonksiyonu, Poisson tarafından 1823 yılında geliştirilmiştir. 19. Yüzyılın sonlarına kadar diferansiyel denklemlerin çözümünde asimptotik açılımlardan yararlanılmamıştır. Bu yüzyıl içinde daha çok kutsal sayılan mekanikler ile ilgili çalışmalarda kullanılmıştır (Lagerstorm, 1988).

Eşlenmiş asimptotik açılım metodu ise 20. Yüzyılın başında akışkanlar mekaniği ve özellikle aerodinamiklerin gelişmesiyle ortaya çıkmıştır. Metot ilk olarak 1905 yılında Prandtl tarafından sert bir maddenin akışkan bir zemindeki hareketini incelemek için geliştirilmiştir.(uçakların kanatları gibi)Akışkan olmayan zeminlerdeki kısmi diferansiyel denklemler biraz daha kapsamlıdır. Fakat belirli durumlarda akışkan olmamanın etkileri maddenin yüzeyi ile sınırlı kalacaktır ve bu durum denklemin çözümünde çok küçük farklar yaratmaktadır. Bu gözlemden sonra çok küçük farklar yaratan ifadelerin ihmal edilebileceği görülür (Lagerstorm,1988).Bu bilgi eşlenmiş asimptotik açılım metodunun temellerini oluşturur.

Eşlenmiş asimptotik açılım metodu için günümüzde kullanılan iç çözüm ve dış çözüm tanımları ise Friedrichs tarafından 1942 yılında bulunmuştur (Lagerstorm,1988). Friedrichs sınır değer problemlerinde küçük terimlerin ihmal edilebilir olma durumunu iç çözüm ve dış çözümü eşleyerek sistematik olarak belirtmiştir (Lagerstorm,1988).

Eşlenmiş asimptotik açılım metodu 20. Yüzyıl boyunca sürekli gelişmesine rağmen ilk kez O'Malley tarafından tam olarak oluşturulmuş ve Van Dyke tarafından geliştirilmiştir (Lagerstorm,1988).

Eşlenmiş asimptotik açılım metodunun en çok gelişme gösterdiği dönem 1950'li yıllardır. Bu yıllarda metot geliştirilmiş ve fiziksel problemlerin çözümünün yanında diğer alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır (Lagerstorm, 1988)Metot şu anda uygulamalı matematiğin köşetaşlarından birini oluşturur ve halen gelişmeye devam etmektedir. Her tip problem için asimptotik açılım metodu ile çözümler üretilmeye çalışılmaktadır.

Metot ile ilgili kaynak taraması yapıldığında kaynak yetersizliği göze çarpmaktadır. Bugüne kadar özel olarak eşlenmiş asimptotik açılım hakkında yazılan tek eser Lagerstorm'a aittir. Şu ana kadar eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile ilgili yazılmış ya da içinde eşlenmiş asimptotik açılım metodunun anlatıldığı herhangi bir Türkçe kaynak bulunmamaktadır.

Lagerstorm (1988), eserinde eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve uygulamalar yapmıştır. Eşlenmiş asimptotik açılım metodunun başta fizik olmak üzere diğer bilimlerde kullanılabileceğini belirtmiştir.

Holmes (1995), eserinde perturbasyon metotlar içinde eşlenmiş asimptotik açılım metoduna çokça yer vermiş ve uygulamalar yapmıştır.

Nayfeh (1973), eserinde perturbasyon metotların arasında eşlenmiş asimptotik açılım metoduna fazlaca yer vermiş bir ders kitabı niteliğindedir.

Howison (2006), yazdığı tezinde eşlenmiş asimptotik açılım metodunu finans mühendisliğinde kullanmış ve finans matematiğinde kullanımının önünü açmıştır.

3.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Eşlenmiş Asimptotik Açılım metodu ile ilgili bilgiler kapsamlı bir şekilde verilecek ve uygulamalarla açıklanacaktır.

3.1.Eşlenmiş Asimptotik Açılım Metodu

Eşlenmiş asimptotik açılım metodunun diğer pertürbasyon metotlardan ayıran en büyük özelliği fonksiyonun ani değişim gösterdiği noktalarda da yeterli duyarlılıkta sonuçlar elde etmesidir (Nayfeh, 2004).

Eşlenmiş asimptotik metodunda öncelikle orijinal değişkenler kullanarak klasik açılım belirlenir. Bu açılımın çözümüne dış çözüm denir. Dış çözüm bulunduktan sonra daha büyük ölçekler kullanabilmek için değişken değiştirerek ani değişim noktaları için kullanılacak bir başka açılım bulunur. Bu açılımın çözümüne de iç çözüm denir. İç açılımlar ani değişim bölgelerinden uzaklaşırken bozulur. Dış açılımlar ise tam ters bir eğilim gösterir ve ani değişim bölgelerine doğru bozulur. Bu iç ve dış açılımlar arasında bağlantı kurmak için eşleme prosedürü kullanılır. Bu metoda eşlenmiş asimptotik açılım metodu denir (Nayfeh, 2004).
Eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile çözümün nasıl yapıldığını bir uygulama üzerinden anlatmak en iyi yoldur. Açıklama amacıyla çözüm uzun görünebilir. Fakat metot üzerinde çalışıldıktan sonra birçok rutinden oluştuğu anlaşılacaktır. Açıklamakta kullanılacak problem

$$\varepsilon y''+2y'+2y=0\ , \qquad 0<x<1 \tag{3.1}$$

$$y(0)=0 \tag{3.2a}$$

$$y(1)=1 \tag{3.2b}$$

şeklinde tanımlansın. Bu problemde $\varepsilon=0$ durumunda iki terimli yaklaşım elde edilemediği için problem singüler pertürbasyon problemdir. Singüler olması da birkaç sonuç doğurur fakat problem nasıl olursa olsun asimptotik açılım metodu ile en az dört adımda çözülür. İki terimli yaklaşımın elde edilmediği durumlarda ise beşinci aşama vardır. Bu nedenle bu problem beş aşamada çözülecektir.

3.1.1.Metodun 1.adımı: dış çözüm

Başlangıçta çözümün ilk adımı olarak problem ε kuvvetleri cinsinden yazılırsa; yani:

$$y(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots \tag{3.3}$$

fonksiyonu(3.1) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\varepsilon(y_0'' + \ldots) + 2(y_0' + \varepsilon y_1' + \ldots) + 2(y_0 + \varepsilon y_1 + \ldots) = 0 \tag{3.4}$$

eşitliği elde edilir. Buradan O(1) denklemi oluşturulursa:

$$y_0' + y_0 = 0 \tag{3.5}$$

denklemi bulunur ve denklemin çözümü α sabit bir sayı olmak üzere

$$y_0(x) = \alpha e^{-x} \tag{3.6}$$

Şeklinde elde edilir. Burada (3.6) ifadesine bakılırsa (3.6) çözümünde sadece bir sabit olmasına rağmen (3.1) probleminin $y(0) = 0$ ve $y(1) = 1$ olmak üzere iki tane sınır koşulunun var olduğu görülür.(3.6)çözümüne ve (3.3) açılımına bakılırsa ise $0 < x < 1$ sınırlarının tek başına yetersiz olduğu anlaşılır. Hangi sınır koşulunun kullanılacağına dair karar verebilmek için $y_0(x)$ fonksiyonunun tanım aralığının belirlenmesi gerekir.

Şu anda yapılabilecek şey ise hangi sınır koşulunun kullanılacağı belirlenemediği için $x=0$ veya $x=1$ sınır koşulları için ayrı ayrı açılımlar yapmaktır (Lagerstorm,1988).

3.1.2.Metodun 2.adımı: sınır değerleri

Varsayılan sınır koşullarına, yani $x=0$ veya $x=1$ değerlerine göre sınır değerlerinin bulunması gereklidir.

Bunun için

$$\tilde{x}=\frac{x}{\varepsilon^{a}} \qquad a>0 \tag{3.7}$$

sınır koordinatlarının probleme dahil edilmesi gerekir. Değişkenler x 'ten $\tilde{x}$ 'ya çevrildiği için problemdeki değişkenler de $\tilde{x}$ değişkenine göre düzenlenmelidir. (3.1) denklemindeki değişkenler(3.7) eşitliğindeki yeni değişkenle değiştirilirse, zincir kuralına göre aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\frac{d}{dx}=\frac{d\tilde{x}}{dx}\frac{d}{d\tilde{x}}=\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}}\frac{d}{d\tilde{x}} \tag{3.8}$$

sınır değer koordinatları bulunurken $Y(\tilde{x})$ olarak tekrar notasyon yapılırsa(3.1) denklemi aşağıdaki son durumu alır

$$\varepsilon^{1-2\alpha}\frac{d^{2}Y}{d\tilde{x}^{2}}+2\varepsilon^{-\alpha}\frac{dY}{d\tilde{x}}+2Y=0 \tag{3.9a}$$

$$Y(0)=0 \tag{3.9b}$$

bu denklemde $x=0$ sınır koşulu yerine yazılır. Çünkü sınır aralığının en solunda bulunur.

Tabi ki denklem değiştirildiği gibi açılımında yeni değişkene göre uyarlanması gerekir. $Y(\tilde{x})$ fonksiyonuna göre açılım ise aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$Y(\tilde{x}) \sim Y_0(\tilde{x}) + \varepsilon^{\lambda} Y_1(\tilde{x}) + \ldots \quad , \qquad \lambda > 0 \tag{3.10}$$

bu açılıma göre dış çözümde olduğu gibi ε değeri 0'a yaklaştığında $\tilde{x}$ değeri de 0'a yaklaşır.

(3.10) açılımı (3.9) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2}(Y_0 + \ldots) + 2\varepsilon^{-\alpha} \frac{d}{d\tilde{x}}(Y_0 + \ldots) + 2(Y_0 + \ldots) = 0 \tag{3.11}$$

denklemi elde edilir.

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2}{d\tilde{x}^2}(Y_0 + \ldots) = A \tag{3.12a}$$

$$2\varepsilon^{-\alpha} \frac{d}{d\tilde{x}}(Y_0 + \ldots) = B \tag{3.12b}$$

$$2(Y_0 + \ldots) = C \tag{3.12c}$$

şeklinde harflendirme yapılırsa işlemler daha rahat görülebilir.

Daha önce gösterildiği gibi doğru eşitlikleri görebilmek için cebirsel işlemler yapılır.

(3.12b) ve (3.12c) denklemlerinin eşitliği dış çözüm yaparken kullanıldığı için artık kullanılamaz çünkü aynı denklem tekrar elde edilir. Bu yüzden diğer iki terimle olan eşitliklere bakılır.

İlk olarak (3.12a) ve (3.12c) ifadeleri eşit, (3.12b) ifadesi daha yüksek dereceli bir ifade olsun. Bu durumda $\alpha = \frac{1}{2}$ bulunur.

Ancak $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğunda (3.12a) ve (3.12c) ifadeleri birbirine eşit ve $O(1)$ yani birinci dereceden ifadeler, olurlar. Fakat (3.12b) ifadesi $O(\varepsilon^{-1/2})$ yani daha düşük dereceli bir ifade olur. Bu da baştaki varsayıma uymaz. Bu nedenle bu eşitlik kullanılamaz.

İkinci olarak (3.12a) ve (3.12b) ifadeleri eşit olsun ve (3.12c) ifadesi daha yüksek dereceli olsun. Bu durumda

$$1-2\alpha = -\alpha \text{ ve } \alpha = 1 \tag{3.13}$$

değeri bulunur.

Burada (3.12a) ve (3.12b) ifadeleri $O(\varepsilon^{-1})$ ve (3.12c) ifadesi $O(1)$ olur. Bu yapı varsayımı sağlar. Yani aranan eşitlik budur.

Bulunan eşitliğe göre aşağıdaki denklemin çözülmesi gerekir.

$$Y''+2Y'=0 \qquad , \qquad 0<\tilde{x}<\infty \tag{3.14a}$$

$$Y_0(0)=0 \tag{3.14b}$$

denklemin çözümü yapılırsa çözüm

$$Y_0(\tilde{x}) = A(1-e^{-2\tilde{x}}) \tag{3.15}$$

olarak bulunur.

Bu çözümden de anlaşılacağı gibi dış çözümü oluşturan (3.5) denklemi ile (3.14) iç çözüm denkleminin en az bir ortak terimi olmalıdır.

Sınır değer probleminin çözümünde kullanılan(3.10) açılımının $x=0$ noktası civarında tanımlaması beklenir. Yani dış çözümün de aralığın diğer kısmında tanımlı olması beklenir. Sağlamadığı durumlarda herhangi bir dış çözümden, yani (3.6) çözümünden, bahsedilemez. Bu da demek olur ki (3.6) dış çözümü $x=1$ noktasında tanımlı olmalıdır.

(3.2) sınır koşulları ve (3.6) denklemi kullanılırsa:

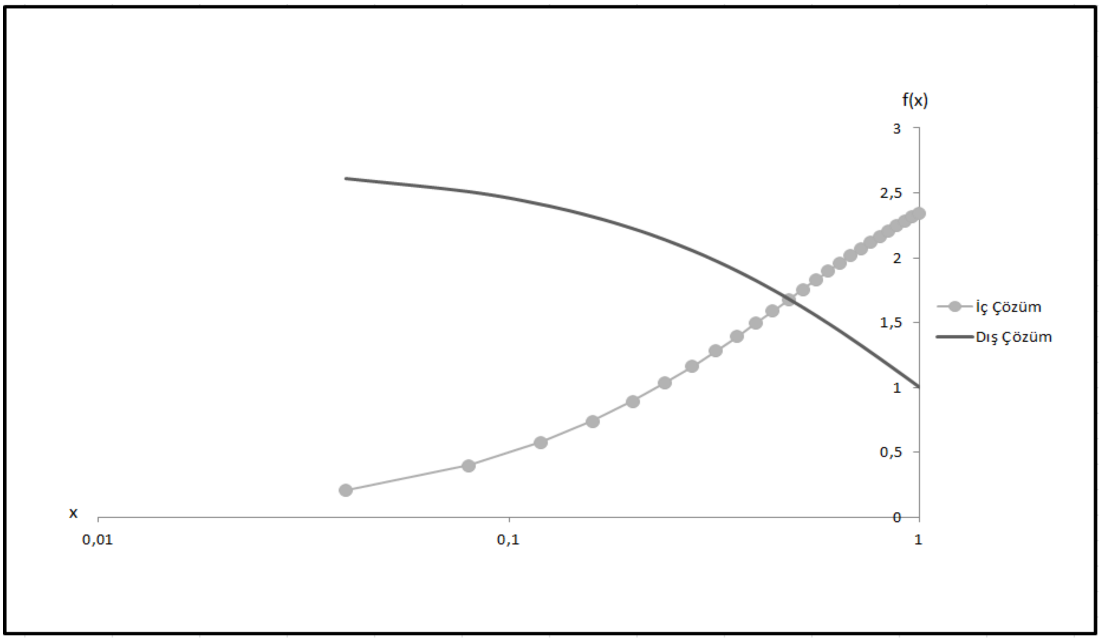
$$y_0(x)=\alpha e^{-x} \tag{3.16a}$$

$$y(1)=1 \tag{3.16b}$$

denklemi elde edilir. Denklemler çözülürse çözüm

$$y_0(x)=e^{1-x} \tag{3.17}$$

olarak bulunur. İç çözüm ve dış çözümün nasıl bir yapıda oldukları Şekil-3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 - (3.15) çözümü ile (3.17) çözümünün karşılaştırması (A=e)

3.1.3.Metodun 3.adımı: eşleme

Eşleme yapılmasının sebebi tek terimli asimptotik yaklaşım ile (3.15)çözümünde ortaya çıkan A sabitini bulmaktır. Bunun için yapılacak şey aslında Şekil-3.1'teki grafikte özetlenmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta buradaki her iki açılımın da aynı analitik fonksiyona ait olduklarıdır. Bu nedenle fonksiyonun iç çözümü ve dış çözümü değişim bölgesinde bir noktada aynı değeri alır. Bu da demektir ki sınır değerlerinde, yani Y_0 değeri $\tilde{x} \to \infty$ iken ve y_0 değeri $x \to 0$ iken, aynı değeri almalıdır.

$$Y_0(\tilde{x}) = y_0(x) \quad , \quad \tilde{x} \to \infty \text{ ve } x \to 0 \tag{3.16}$$

$$A(1-\varepsilon^{-2\tilde{x}}) = \varepsilon^{1-x} \quad , \quad \tilde{x} \to \infty \; x \to 0 \tag{3.17}$$

denklemi çözülürse:

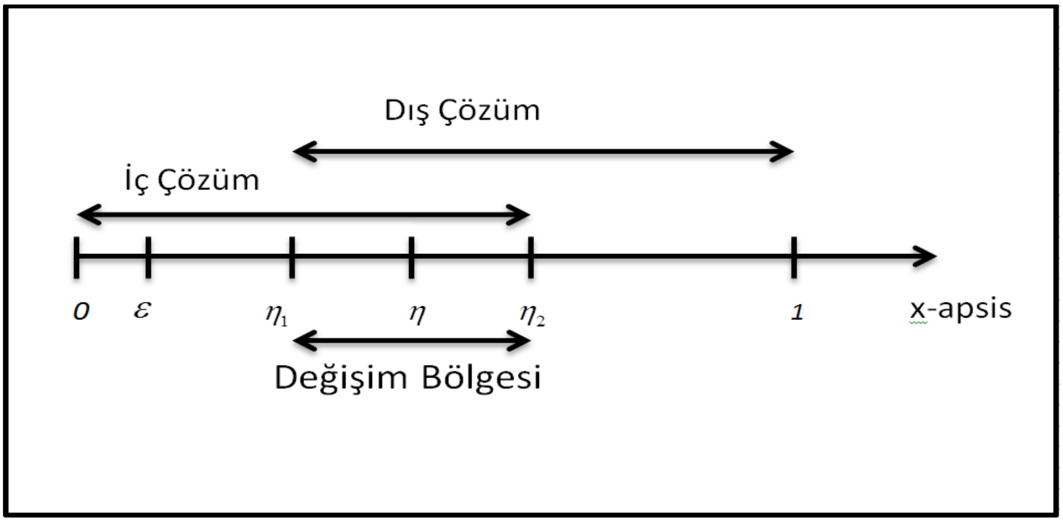
$$A = e^{1} \tag{3.18}$$

olarak bulunur. Bulunan A sabiti $Y_0(\tilde{x})$ fonksiyonunda yerine yazılırsa:

$$Y_0(\tilde{x}) = e^1 - e^{1-2\tilde{x}} \tag{3.19}$$

ifadesi elde edilmiş olur ki bu ifade iç çözüm ve dış çözümden ortak olarak elde edilen bir ifadedir.

Kullanılan bu yaklaşım koordinat düzlemi üzerinde düşünülürse, dış çözüm $O(1)$ koordinatı ve iç çözüm $O(\varepsilon)$ koordinatı arasında ortalama bir $x_\eta = \dfrac{x}{\eta(\varepsilon)}$ değerinin bulunmasını sağlar. Bu ortalama değer Şekil-3.2'de gösterilen değişim bölgesi içinde yer alır. Bu sonuçtan anlaşılır ki $\eta(\varepsilon)$ değeri $\varepsilon << \eta << 1$ aralığında tanımlıdır (Lagerstorm, 1988).



Şekil 3.2 - İç çözüm, dış çözüm ve değişim bölgesinin temsili gösterimi.

Bulunan bu $\eta(\varepsilon)$ aralığı ise aşağıdaki eşleme prosedürünü doğurur:

i) Dış çözümde değişkenler değişir. (x'den x_η'a) burada bir $\eta_1(\varepsilon)$ değerinin var olduğu kabul edilir. Öyle ki $y_{dış}$ çözümü her $\eta(\varepsilon)$ değeri için $\eta_1(\varepsilon) << \eta(\varepsilon) \leq 1$ aralığında tanımlı bir açılıma sahiptir.

ii) İç çözümde değişkenler değişir ($\tilde{x}$ 'dan x_η 'ya). Burada bir $\eta_2(\varepsilon)$ değerinin var olduğu kabul edilir öyle ki $Y_{iç}$ çözümü her $\eta(\varepsilon)$ değeri için $\varepsilon \le \eta(\varepsilon) << \eta_2$ aralığında tanımlı bir açılıma sahiptir.

iii) $y_{dış}$ ve $Y_{iç}$ 'in değişim aralığında açılımın bir geçerlilik bölgesinin olduğu kabul edilir ($\eta_1 << \eta_2$). Eşleme için kullanılan bu değişim aralığı $y_{dış}$ ve $Y_{iç}$ çözümlerinin birbirine eşit olduğu ilk noktayı içinde barındırır.

Aslında η_1 ya da η_2 değerlerini bulmakla çok nadiren ilgilenilir fakat bu değerlerin $y_{dış}$ ve $Y_{iç}$ çözümlerinin eşleme aralığında olduğunun bilinmesi yararlı olur. Önemli olan diğer bir nokta ise eşlemenin rastgele bir $\eta(\varepsilon)$ değerine göre yapılmamasıdır. Örneğin yukarıda belirlenen prosedürlere uymayan bir $\eta(\varepsilon)$ değeri seçilir ve eşleme yapılırsa bu $\eta(\varepsilon)$ değeri (i) ve (ii) de belirlenen aralıklarda tanımlı olmayabilir. Bu durumda (iii)'de bulunması gereken $y_{dış}$ ve $Y_{iç}$ çözümlerinin birbirine eşit olduğu ilk noktayı içinde barındıran bir aralık bulunamayabilir.

Bu prosedürlere uygun olarak ortalama değer

$$x_\eta = \frac{x}{\varepsilon^\beta} \quad , \quad 0 < \beta < 1 \tag{3.20}$$

olarak belirlenir. Buradaki β 'nın aralığı dış çözümdeki $O(1)$ ve iç çözümdeki $O(\varepsilon)$ 'in ölçekleri baz alınarak belirlenir. Eşleme yapıldıktan sonra iç çözüm

$$y_{iç} \sim A(1 - e^{-2x_\eta / \varepsilon^{1-\beta}}) + \ldots \tag{3.21}$$

$$y_{iç} \sim A + \ldots \tag{3.22}$$

olarak ve dış çözüm ise

$$y_{dış} \sim e^{1-x_{\eta}\varepsilon^{\beta}} + \ldots \tag{3.23}$$

$$y_{dış} \sim e^{1} + \ldots \tag{3.24}$$

olarak bulunur. Bu iki açılımın da değişim bölgesindeki ilk terimleri sağlaması beklenir. Buradan da

$$A = e^{1} \tag{3.25}$$

olarak bulunur.

3.1.4.Metodun 4. Adımı: bileşik açılım

Şimdiye kadar iki tane çözüm bulundu artık bu iki kısmı birleştirerek bileşik açılım yapılabilir. Bileşik açılım her zaman: iç çözümde belirlenen açılım ile dış çözümde belirlenen açılımın toplanıp ortak olan ifadenin çıkarılması şeklindedir. İfadeler yazılırsa:

$$y \sim y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - y_0(0) \tag{3.26}$$

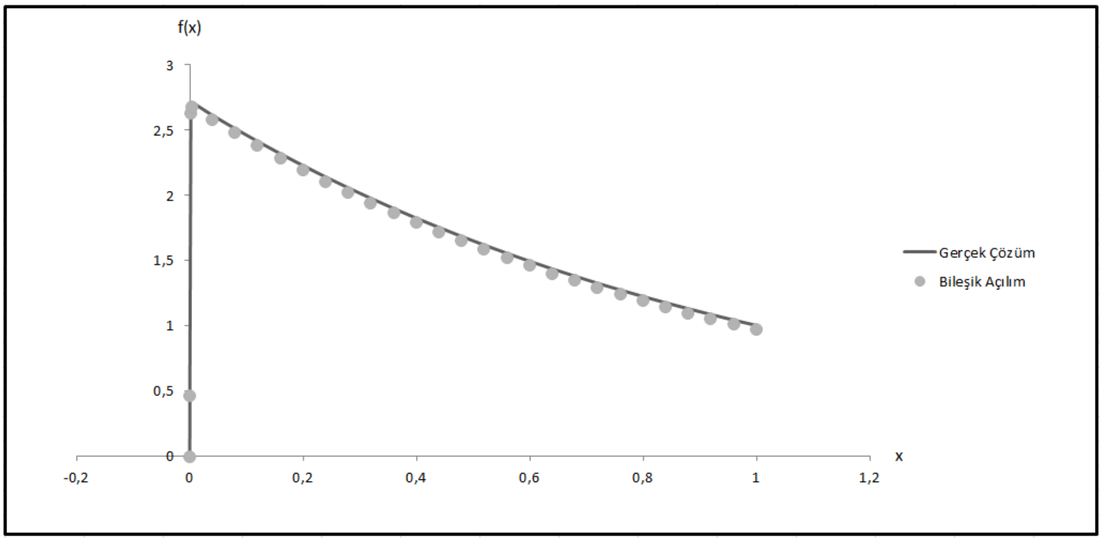
$$y \sim e^{1-x} - e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}} \tag{3.27}$$

çözümü elde edilir.

Farklı aralıkların tek bir açılımda birleştirilmesinin mümkün olması ve oluşan yapının halen bir asimptotik yaklaşım olması farklı görünebilir. Ancak dış bölgede bulunan sınır değeri $Y_0(\frac{x}{\varepsilon})$ açılımın birinci derecesinde sabit bir değere sahiptir. Bu sabit değer ise $y_0(0)$'dir. Bu yüzden sabit değer olan $y_0(0)$ bileşik açılımdan çıkarılır.

Bu her durumdaki ayarlamanın $y_0(0)$ sabitini gerektirmesi bir rastlantı değildir. Çünkü bu ifade hem iç çözüm açılımının hem de dış çözüm açılımının ilk terimidir. Bu nedenle bu terime açılımların ortak elemanı denir.

Eşleme açılımının ne kadar iyi bir yaklaşım olduğu Şekil-3.3'te açıkça görülmektedir.



Şekil 3.3 - (3.27) çözümü ile (3.1) denkleminin Ɛ=0,01 olarak belirlendiğindeki gerçek çözümünün karşılaştırılması

Ancak burada dikkat edilmelidir ki yaklaşım $x = 0$ noktasında olarak tanımlı iken $x = 1$ noktasında asimptotik olarak tanımlıdır. Bu durum sonucu etkileyen bir durum değildir fakat başka yaklaşımlar kullanıldığında her iki nokta için de tanımlı olan fonksiyonlar elde edilebilir **(**Lagerstorm P.A., 1988).

3.1.5.Metodun 5.adımı: ikinci terimin bulunması

Genelde metodu istenilen şekle uyarlamak için birinci dereceden türevler kullanılır ve bunlar yeterli görünür. Ancak ikinci terimin bulunması önemlidir. Çünkü belirlenen yaklaşımın hatasını belirler. İkinci terimin bulunması ilk terimin bulunmasından çok daha kolay bir işlemdir.

Dış çözüm fonksiyonu (3.3) denkleminde yerine yazılır ve $O(\varepsilon)$ terimleri belirlenip eşitlenirse aşağıdaki denklem elde edilir:

$$y_1' + y_1 = \frac{-1}{2} y_0'' \tag{3.28a}$$

$$y_1(1) = 0 \tag{3.28b}$$

bu denklem çözülürse:

$$y_1 = \frac{1}{2}(1-x)e^{1-x} \tag{3.29}$$

daha önce sınır değerleri kısmında bulunan (3.12) eşitliğinden

$\lambda = 1$ ve

$$Y_1'' + 2Y_1' = -2Y_0 \qquad Y_1(0) = 0 \tag{3.30}$$

bulunmuştu. Bu denklemin genel çözümü B sabit değişken olmak üzere

$$Y_1 = B(1-e^{-2\tilde{x}}) - \tilde{x}e^{-1}(1+e^{-2\tilde{x}}) \tag{3.31}$$

şeklindedir.

Çözümleri eşleyebilmek için ortalama değer olan (3.20) koordinat değişikliği yapılırsa dış çözüm

$$y_{dış} \sim e^{1-x_\eta \varepsilon^\beta} + \frac{\varepsilon}{2}(1-x_\eta \varepsilon^\beta)e^{1-x_\eta \varepsilon^\beta} + \ldots \tag{3.32}$$

şeklinde bulunur. buradan da

$$y_{dış} \sim e^1 - \varepsilon^\beta x_\eta e^1 + \frac{\varepsilon}{2}e^1(1-x_\eta{}^2) + \ldots \tag{3.33}$$

eşitliği elde edilir.

İç çözüm için $\xi = \frac{-2x_\eta}{\varepsilon^{1-\beta}}$ olmak üzere düzenlenirse:

$$y_{iç} \sim e^1(1-e^\xi) + \varepsilon\left[B\left(1-e^\xi\right) - \frac{x_\eta e^1}{\varepsilon^{1-\beta}}\left(1+e^\xi\right)\right] + \ldots \tag{3.34}$$

halini alır. Buradan da

$$y_{iç} \sim e^1 - \varepsilon^\beta x_\eta e^1 + B\varepsilon \tag{3.35}$$

eşitliği elde edilir. Bu iki eşitlikten eşleme yapılırsa:

$$B = \frac{1}{2}e^1 \tag{3.36}$$

değerini bulunur.

Yalnız burada (3.34) denklemi $O(\varepsilon)$ terimi içerirken (3.35) denkleminde $O(\varepsilon)$ terimi bulunmamaktadır. Bunun nedenini ise buradaki her iki terimde $O(\varepsilon^\beta)$ değerinin olmasıdır. Eğer $O(\varepsilon^\beta)$ değerleri birbirine eşit olmasalardı eşleme yapılamazdı. Dış çözümde bu ifade $O(1)$ teriminden gelirken iç çözümde $O(\varepsilon)$ teriminden gelir.

Nadiren de olsa, bazı açılımlarda iç çözüm ya da dış çözümün içerdiği terimlerden birini diğer çözüm içermez. Bunun tipik bir örneği ε 'un kuvvetleri geldiği zaman görülür. Böyle durumlarda iki açılımda da ortak olarak bulunan $\ln(\varepsilon)$ gibi bir ifade bulunur bu ifade üzerinden eşleme yapılır. Burada eşleme kuvvetler üzerinden yapılır.

Bu örnekte İç çözüm, dış çözüm bulunup eşleme yapıldıktan sonra iki terimli bileşik eşleme ifadesi belirlenebilir. Bunu yapmak ise iç çözüm ve dış çözüm toplanıp ortak terimler çıkarılır.

$$y \sim y_0 + \varepsilon y_1 + Y_0 + \varepsilon Y_1 - (e^1 - x_\eta e^1 \sqrt{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} e) \tag{3.37}$$

Bu işlemde iç ve dış çözüm yerine yazılırsa:

$$y \sim e^{1-x} - (1+x)e^{1-2x/\varepsilon +} + \frac{\varepsilon}{2}\left[(1-x)e^{1-x} - e^{1-2x/\varepsilon}\right] \tag{3.38}$$

Çözümü elde edilir. Çözümde de görülür ki bulunan sonuç (3.35) denkleminin tamamını ve (3.33) denkleminin ise $x_\eta{}^2$ ifadesi hariç diğer terimlerini içerir.

3.2. Van Dyke’s Eşleme Prensibi

Eşlenmiş asimptotik açılım metodunda eşleme yapmak için Van Dyke’s eşleme prensibi de kullanılabilir. İç açılımdan dış açılıma ve dış açılımdan iç açılıma sistematik bir şekilde ilerleyen bu metot ε mertebesine kadar açılan iç ve dış çözüm bulunduktan sonra yapılır (Nayfeh, 2004).

3.2.1. Uygulama

$$\varepsilon y'' + y' + y = 0 \tag{3.39a}$$

$$y(0) = \alpha \, , \, y(1) = \beta \tag{3.39b}$$

Van Dyke's eşleme prensibini kullanmak için (3.39b) koşulları altındaki (3.39a) denkleminin iç ve dış çözümleri bulunursa aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

$$y_{dış} = \beta\left[1 + \varepsilon\left(1 - x\right)\right]e^{(1-x)} + o(\varepsilon^2) \tag{3.40}$$

$$Y_{iç} = a - A_0(1 - e^{-\zeta}) + \varepsilon\{A_1(1 - e^{-\zeta}) - [a - A_0(1 - e^{-\zeta})\zeta]\} + 0(\varepsilon^2) \tag{3.41}$$

A_0 ve A_1 keyfi sabitler.

Daha sonra ise bir terim dış açılım ile bir terim iç açılım eşlemesi yapmak için sistematik bir şekilde aşağıdaki işlemler yürütülür.

Dış açılımdan iç açılıma gidilirse:

Bir terim dış açılım

$$y \sim \beta e^{1-x} \tag{3.42}$$

iç değişken yazılırsa:

$$\beta e^{1-\varepsilon\zeta} \tag{3.43}$$

εiçin açılırsa:

$$\beta e(1-\varepsilon\zeta+\ldots) \tag{3.44}$$

bir terim iç açılım

$$y=\beta e \tag{3.45}$$

olarak bulunur. İç açılımdan dış açılıma gidilirse:

Bir terim iç açılım

$$y \sim a-A_0(1-e^{-\zeta}) \tag{3.46}$$

dış değişken yazılırsa:

$$a-A_0(1-e^{-x/\varepsilon}) \tag{3.47}$$

εiçin açılırsa:

$$\mathrm{a}-A_0 \tag{3.48}$$

bir terim dış açılım

$$y=\mathrm{a}-A_0 \tag{3.49}$$

olarak bulunur. (3.45) ve (3.49) denklemleri birbirine eşitlenirse:

$$A_0=a-\beta e \tag{3.50}$$

daha sonra bir terim dış açılım ile iki terim iç açılımı eşlenir.

Dış açılımdan iç açılıma gidilirse:

Bir terim dış açılım

$$y\sim\beta e^{1-x} \tag{3.51}$$

iç değişken yazılırsa:

$$\beta e^{1-\varepsilon\zeta} \tag{3.52}$$

ε için açılırsa:

$$\beta e(1-\varepsilon\zeta+\frac{1}{2}\varepsilon^2\zeta^2+\ldots) \tag{3.53}$$

iki terim iç açılım

$$y=\beta e(1-\varepsilon\zeta) \tag{3.54}$$

olarak bulunur. İç açılımdan dış açılıma gidilirse:

iki terim iç açılım

$$y\sim a-A_0(1-e^{-\zeta})+\varepsilon\{A_1(1-e^{-\zeta})-[a-A_0(1+A_0(1+e^{-\zeta})\zeta]\} \tag{3.55}$$

dış değişken yazılırsa:

$$(\mathrm{a}-\mathrm{A}_0(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})+\varepsilon\{A_1(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})-[a-A_0(1+A_0(1+e^{-\frac{x}{\varepsilon}})-\frac{x}{\varepsilon}]\} \tag{3.56}$$

ε için açılırsa:

$$(a-A_0)(1-x)+\varepsilon A_1 \tag{3.57}$$

bir terim dış açılım

$$\mathrm{y} = (a - A_0)(1 - x) \tag{3.58}$$

olarak bulunur. (3.54) ve (3.58) birbirine eşitlenirse:

$$\beta e(1 - \varepsilon\zeta) = (a - A_0)(1 - x) \tag{3.59}$$

$x = \varepsilon\zeta$ olduğunda daha önce bulunan $A_0 = a - \beta e$ sonucu tekrar bulunur. A_1 hakkında ise hiçbir bilgi bulunmaz.

Bir terim açılımları sonuçlandıktan sonra iki terim açılımlara geçilir.

Dış açılımdan iç açılıma gidilirse iki terim dış açılım

$$y \sim \beta[1 + \varepsilon(1 - x)]e^{1-x} \tag{3.60}$$

iç değişken yazılırsa:

$$\beta[1 + \varepsilon(1 - \varepsilon\zeta)]e^{1-\varepsilon\zeta} \tag{3.61}$$

εiçin açılırsa:

$$\beta e(1+\varepsilon-\varepsilon\zeta+\ldots) \tag{3.62}$$

iki terim iç açılım:

$$y=\beta e(1+\varepsilon-\varepsilon\zeta) \tag{3.63}$$

iç açılımdan dış açılıma doğru gidilirse iki terim iç açılım

$$y \sim a-A_0(1-e^{-\zeta})+\varepsilon\{A_1(1-e^{-\zeta})-[a-A_0(1-A_0(1+e^{-\zeta})\zeta]\} \tag{3.64}$$

olarak bulunur. Dış değişken yazılırsa:

$$\mathrm{a}-\mathrm{A}_0(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})+\varepsilon\{A_1(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})-[a-A_0(1-A_0(1+e^{-\frac{x}{\varepsilon}})\frac{x}{\varepsilon}]\} \tag{3.65}$$

εiçin açılırsa:

$$(a-A_0)(1-x)+\varepsilon A_1 \tag{3.66}$$

iki terim dış açılım

$$y = (a - A_0)(1-x) + \varepsilon A_1 \tag{3.67}$$

olarak bulunur. (3.67) ve (3.63) birbirine eşitlenirse:

$$A_1 = \beta\varepsilon \tag{3.68}$$

bulunur. O halde iç çözüm

$$y = \beta e + (a - \beta e)e^{-\zeta} + \varepsilon\{\beta e(1 - e^{-\zeta}) - [\beta e - (a - \beta e)e^{-\zeta}]\zeta\} + 0(\varepsilon^2) \tag{3.69}$$

şeklindedir. Bileşik açılım yapılırsa:

$$y = \beta[1 + \varepsilon(1-x)]\mathrm{e}^{1-x} + [(a - \beta e)(1+x) - \varepsilon\beta e]e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + 0(\varepsilon^2) \tag{3.70}$$

sonucu elde edilir (Nayfeh, 2004).

3.3.Çoklu Sınır Katmanı Olduğu Durumlarda Eşlenmiş Asimptotik Açılım Metodu

Eğer denklemde birden fazla sınır koşulu var ise asimptotik açılım metodu aynı prensipler çerçevesinde kullanılabilir. Ancak her katman için ayrı çözümlerin elde edilmesi gerekir (Holmes, 1995).

3.3.1.Uygulama

$$\varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \qquad , \qquad 0 < x < 1 \tag{3.71a}$$

$$y(0) = 2 \ , \ y(1) = 1 \tag{3.71b}$$

Bu denklemin bir önceki denklemden farkı katsayılarda x bağımsız değişkeninin varlığıdır. Ancak bu durum temel olarak birden fazla sınır koşulunun varlığının sebebi değildir. (Holmes, 1995).

3.3.1.1.Dış çözüm

Klasik eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile aynı şekilde bulunur.

$$y \sim y_0 + \ldots \tag{3.72}$$

açılımını (3.71a) denkleminde kullanıp birinci terime kadar yaklaşım yapılırsa:

$$y_0 = e^x \tag{3.73}$$

sonucu elde edilir. Ancak bu denklem her iki sınır değeri için de kullanılamaz. Her iki sınır değerinde ayrı sınır katmanlarının tanımlanması gerekir.

3.3.1.2.Sınır koşulları ve eşleme

Daha önce yapıldığı gibi sınır değeri için koordinatlar değiştirilir.

$$\tilde{x} = \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \tag{3.74}$$

değişikliği yapılırsa:

$$\varepsilon^{2-2\alpha}\frac{d^2Y}{d\tilde{x}^2}+\varepsilon\tilde{x}\frac{dY}{d\tilde{x}}-Y=-e^{\varepsilon^{\alpha}\tilde{x}} \tag{3.75}$$

denklemi elde edilir. İşlemlerin görülmesi daha kolay olması için denklemlere harfler verilirse:

$$A=\varepsilon^{2-2\alpha}\frac{d^2Y}{d\tilde{x}^2} \tag{3.76a}$$

$$B=\varepsilon\tilde{x}\frac{dY}{d\tilde{x}} \tag{3.76b}$$

$$C=-Y \tag{3.76c}$$

$$D=-e^{\varepsilon^{\alpha}\tilde{x}} \tag{3.76d}$$

ifadeleri elde edilebilir. Önceki örnekteki gibi $Y(\tilde{x})$ fonksiyonu çözümde belirleyici rol alacaktır. (3.76a),(3.76c),(3.76d) arasında eşitlik kurulursa $\alpha=1$ değeri bulunur. Bu değer yerine yazılıp $Y\sim Y_0(\tilde{x})+\ldots$ açılımından ve (3.71b) sınır koşullarından yararlanılırsa;

$$Y_0''+Y_0=-1 \quad , \quad 0<\tilde{x}<\infty \tag{3.77a}$$

$$Y_0(0)=2 \tag{3.77b}$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.77b) koşulu dış bölgenin son terimi olmalıdır. Buradan (3.77) denkleminin genel çözümü

$$Y_0(x)=1+Ae^{-\tilde{x}}+(1-A)e^{\tilde{x}} \tag{3.78}$$

olarak bulunur.

Bulunan bu ifade dış çözüm (3.73) ile eşlenmelidir. Bu eşlenme ise daha önce de belirtildiği gibi; $Y_0(\infty) = y_0(0)$ şeklindedir. Bu eşlenme yapılırsa ise $A = 1$ olarak bulunur. Diğer taraftaki sınır noktalarında çözümün tanımlanabilmesi için sınır koordinatlarının tekrar değiştirilmesi gerekir.

$$\tilde{x} = \frac{x-1}{\varepsilon^{\beta}} \tag{3.79}$$

olacak şekilde sınır koordinatlarının değiştirdikten sonra $Y_0(x)$ çözümü bu bölgede tekrar tanımlanırsa, yani (3.71) denkleminde (3.79) ifadesi yerine yazılırsa:

$$\varepsilon^{2-2\beta}\frac{d^2\tilde{Y}}{d\tilde{x}^2} + (1-\varepsilon\tilde{x})\varepsilon^{1-\beta}\frac{d\tilde{Y}}{d\tilde{x}} - \tilde{Y} = -e^{1+\varepsilon^{\beta}\tilde{x}} \tag{3.80}$$

eşitliği elde edilir.

Dış çözüm için yapılan işlemler tekrarlanırsa $\beta = 1$ olarak bulunur. Bulunan değer (3.80) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\tilde{Y}_0'' + \tilde{Y}_0' + \tilde{Y}_0 = -e^{1} \qquad -\infty < \tilde{x} < 0 \tag{3.81a}$$

$$\tilde{Y}_0(0) = 1 \tag{3.81b}$$

eşitliği elde edilir.

Burada önemli olan nokta çözümün sonuca ulaşabilmesi için (3.81a) sınır-değer problemi ile dış bölge denkleminin en az bir terimlerinin aynı olması gerektiğidir.

Elde edilen eşitlikler çözülürse;

$$\tilde{Y}_0(\tilde{x}) = e^1 + Be^{r+\tilde{x}} + (1-e^1-B)e^{r-\tilde{x}} \tag{3.82}$$

$$2r = -1 \pm \sqrt{5}$$

çözümünü elde edilir.

Bulunan çözümde $\tilde{Y}_0(-\infty) = y_0(1)$ eşlemesi yapılırsa:

$$B = 1 - e^1 \tag{3.83}$$

olarak bulunur.

3.3.1.3.Bileşik açılım

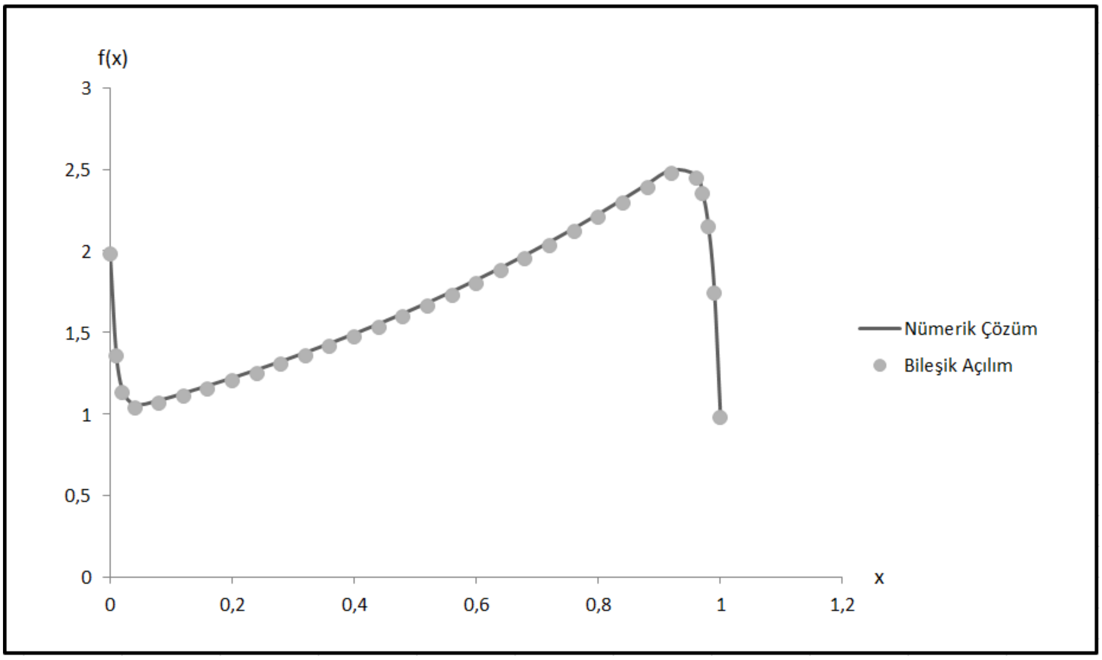
Bu son aşama bulunan üç çözümün tek bir aşamada birleştirilmesidir. Bulunan bütün çözümler toplanır ve ortak olan kısımlar çıkarılır. Yani (3.73) (3.78) ve (3.82) denklemleri toplanır ve ilk terim açılımları çıkarılırsa:

$$y \sim y_0(x) + Y_0(\tilde{x}) + \tilde{Y}_0(\tilde{x}) - Y_0(\infty) - \tilde{Y}_0(-\infty) \tag{3.84}$$

$$y \sim e^x + e^{-x/\varepsilon} + (1-e^1)e^{-r(1-x)/\varepsilon} \qquad , \ 2r = -1 + \sqrt{5} \tag{3.85}$$

olarak genel çözümü elde edilmiş olur.

(3.71) denkleminin nümerik çözümü ile bulunan (3.85) asimptotik açılımının karşılaştırılması Şekil-3.4'te gösterilmektedir.



Şekil 3.4 - (3.85) çözümü ile (3.71) denkleminin nümerik çözümünün karşılaştırılması

Grafikte de açıkça görülüyor ki, belirlenen sınır koşulları arasında elde edilen asimptotik açılım ile eşitliğin nümerik çözümü birbirine çok yakın değerlere sahiptir.

3.4.Lineer Olmayan Denklemlerde Asimptotik Açılım Metodu

Lineer olmayan denklemlerde asimptotik açılım metodu kullanılırken de lineer denklemlerdekine benzer işlemler yapılır.

3.4.1.Uygulama-1:

$$\varepsilon y''+\varepsilon y'-e^{y}=-2-x \qquad , \qquad 0<x<1 \tag{3.86a}$$

$$y(0)=0 \qquad y(1)=1 \tag{3.86b}$$

denklemin dış çözümünü bulunursa:

$$y \sim \ln(x+2) \tag{3.87}$$

elde edilir. Sınır koşullarını belirlenmesi için ise yine aynı işlemler yapılır.

$x=0$ sınır koşulu için sınır koordinatları $\tilde{x}=\dfrac{x}{\varepsilon}$ olarak değiştirilirse denklem

$$Y_0'' - e^{Y} = -2 \qquad Y_0(0)=0 \tag{3.88}$$

halini alır.

Eşitliğin her iki tarafını $\dfrac{dY}{d\tilde{x}}$ ile çarpıp integral alınırsa:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{d\tilde{x}}Y_0\right)^2 = B - 2Y_0 + e^{Y_0} \tag{3.89}$$

çözümüne ulaşılır.

Buradaki B sabiti daha önce belirlenen yolla kolayca bulunabilir. Yani $x \to \infty$ olduğunda $Y_0' \to 0$ ve $Y_0 \to y_0$ olur. Buradan da

$$y_0(0)=\ln 2 \tag{3.90}$$

bulunur. Çözüm denklemde yerine yazılırsa:

$$B = 2\left(-1+\ln 2\right) \tag{3.91}$$

sabiti elde edilir.(3.89) denklemine geri dönüp çözüm yapılırsa:

$$Y_0' = \pm\sqrt{2(B - Y_0 + e^{Y_0})} \tag{3.92}$$

çözümü elde edilir.

Hangi işareti alacağına karar verebilmek için $Y_0(0) < y_0(0)$ bilgisinden yararlanılır. Sınır değer probleminin çözümünün $Y_0(0) = 0$ koşulundan $Y_0(\infty) = y_0(0) = \ln 2$ çözümüne doğru artış gösterdiğini varsayılırsa çözümün "+" işaretli olacağının görülür.

Çözümün işaretini de belirledikten sonra integral alınırsa çözüm

$$\int_{o}^{Y_0} \frac{ds}{\left[2(B - s + e^{s})\right]^{1/2}} = \tilde{x} \qquad (3.93)$$

olarak bulunur.

3.5.İç Katmanların Bulunduğu Durumlarda Asimptotik Açılım Metodu

Bazı problemlerde birden çok tabaka ile karşılaşılabilir ve bu tabakalar aynı aralıkta ortaya çıkabilirler. Buna aşağıdaki problem örnek olarak gösterilebilir

$$\varepsilon^3 y''' + x^3 y' - \varepsilon y = x^3 \qquad 0 < x < 1 \qquad (3.94)$$

$$y(0) = 1 \qquad y(1) = 3$$

problemin dış çözümü

$$y \sim x + 2 \quad , \quad 0 < x < 1 \qquad (3.95)$$

olarak bulunur. Çözümün $x = 0$ yakınlarında nasıl davrandığı araştırmak için $\tilde{x} = \dfrac{x}{\varepsilon^{\alpha}}$ olarak değiştirilirse:

$$\varepsilon^{3-2\alpha}\frac{d^2}{d\tilde{x}^2}Y+\varepsilon^{2\alpha}\tilde{x}^3\frac{d}{d\tilde{x}}Y-\varepsilon Y=\varepsilon^{3\alpha}\tilde{x}^3 \qquad (3.96)$$

eşitliği elde edilir. Burada dış çözümden farklı olarak iki tane ayrılmış limit noktası vardır. Bir tanesi, 1. ve 3. terimlerden $\alpha=1$ olarak bulunur. Bir diğeri ise 2. ve 3. Terimlerden $\alpha=1/2$ olarak belirlenir. Bu yapıya "iç katman" denir (Holmes, 1995).

Sınır tabakalarının karakteristik yapısından dolayı ortaya çıkan, çözümdeki hızlı değişimler sadece sınır değerlerinde ortaya çıkmazlar. Bu durumda iç katmanlar meydana gelir. İç katmanlar bulunduğunda çözülmesi diğerlerine göre daha zor problemlerle karşılaşılabilir. Çünkü katmanların durumları genellikle en son eşleme yapılana kadar bilinemezler. Ancak açılımda kullanılan prosedürler diğer durumlarla aynıdır (Holmes, 1995).

Metodun nasıl çalıştığına dair aşağıdaki örneği ele alalım.

3.5.1.Uygulama

$$\varepsilon y''=yy'-y \qquad 0<x<1 \qquad (3.97a)$$

$$y(0)=1 \qquad y(1)=-1 \qquad (3.97b)$$

3.5.1.1.Dış çözüm

Dış çözümü bulmak için klasik açılım kullanılır.

$$y(x)\sim y_0(x)+\ldots \qquad (3.98)$$

açılımı (3.97) denkleminde yerine yazılırsa:

$y_0 y_0' - y_0 = 0$ bulunur. (3.99)

Burada iki çözüm bulunur.

Birincisi:

$$y_0 = 0 \tag{3.100}$$

İkincisi:

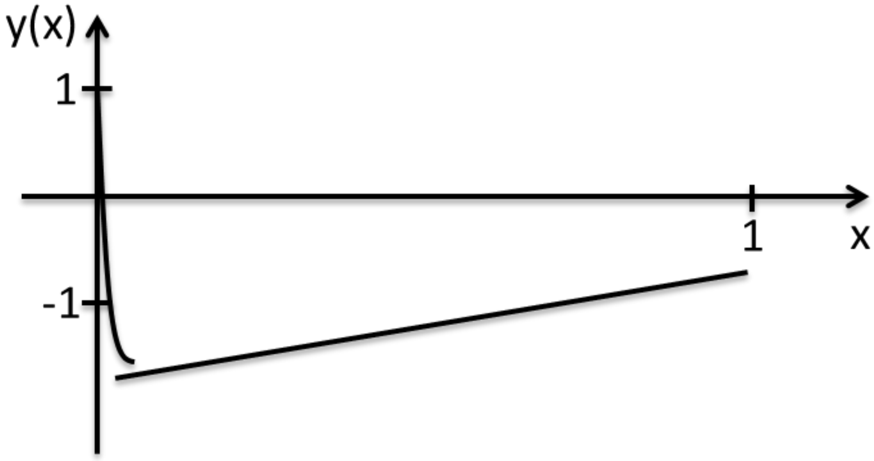
$$y_0 = x + a \tag{3.101}$$

şeklindedir. İki tane olası çözüme sahip olduğundan dolayı eşleme diğer problemlere göre daha uzun sürebilir. Çünkü hangi çözümün eşlemeye olanak vereceğine karar verilmesi gerekir.

3.5.1.2.İç katman ve eşleme

Genelde problem çözülmeye çalışıldığında katmanların nerede oldukları bilinemez. Daha önceki örneklerdeki gibi çözüme başlanırsa ve sınır noktalarından biri sınır koşul kabul edilirse açılımın eşlenmediğini görülebilir. Sınır koşullarını belirlemek için ise varsayımlar kullanılır.

$x = 0$ noktasının sınır koşulu olduğunu ve çözümün (3.101) olduğunu varsayalım. Bu durumda fonksiyonun grafiği Şekil-3.5'teki gibi olur.



Şekil 3.5 - Sınır koşulunun x = 0 olduğu ve çözümün (3.101) olduğu durumda fonksiyonun temsili grafiği

Grafikte de görüldüğü gibi $x=0$ yakınlarında $y'<0$ ve $y''>0$ olur. Bu da demektir ki $\varepsilon y''>0$ olur. Ancak sınır koşulu yakınlarında $y\left(y'-1\right)$ ifadesi hem negatif hem de pozitif olabilir. Bu nedenle de (3.97) diferansiyel denkleminin tanımlanması mümkün olmaz.

Aynı şekilde $x=1$'in sınır koşulu olma durumu incelendiğinde de aynı sonuçla karşılaşılır. Ancak incelenen bu durumlardan olası bir sınır koşulu belirlenebilir. Bunun için de bir iç katman koordinatı tanımlanır.

$$\tilde{x}=\frac{x-x_0}{\varepsilon^{\alpha}} \qquad 0<x_0<1 \tag{3.102}$$

Burada $0<x_0<1$ aralığında $0<x<x_0$ ve $x_0<x<1$ olacak şekilde iki alt tabaka olduğunu varsayalım.

(3.5.1.5) de belirlenen eşitlik (3.5.1.1) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\varepsilon^{1-2\alpha}Y''=\varepsilon^{-\alpha}YY'-Y \tag{3.103}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\alpha = 1$ olduğunda kuvvetler eşitlenir. Aynı zamanda önceki örneklerdeki gibi Y fonksiyonu sınır koşullarındaki çözümü bulmak için kullanılır. İç koşulların çözümü için aşağıdaki açılım kullanılabilir:

$$Y(\tilde{x}) \sim Y(\tilde{x}) + \ldots \qquad (3.104)$$

geriye dönüp (3.103) denklemini çözülürse:

$$Y_0'' = Y_0 Y_0' \qquad (3.105)$$

bulunur.

İntegral alınırsa üç tane çözüm gelir:

$$Y_0 = B\frac{1 - De^{B\tilde{x}}}{1 + De^{B\tilde{x}}} \quad \text{B ve D keyfi sabitler} \qquad (3.106)$$

$$Y_0 = B\tan(C + \frac{B\tilde{x}}{2}) \quad \text{B ve C keyfi sabitler} \qquad (3.107)$$

$$Y_0 = \frac{2}{C - \tilde{x}} \quad \text{C keyfi sabit.} \qquad (3.108)$$

Burada birden fazla çözümün olmasının nedeni lineer olmayan diferansiyel denklemin karakteristik yapısının gereğidir. Bu durum daha önceki bilinen eşlemenin yapılmasını engeller. Lineer problemlerde önce genel çözüm bulunmalı daha sonra sabitlerin değerlerinin ise eşleme yolu ile bulunması gerekirdi. Ancak lineer olmayan denklemlerde genel çözüm farklıdır. Bu nedenle hangi çözüm ile eşleme yapılacağını belirlenmesi gerekir.

(3.106) çözümü $x \to \pm\infty$ durumunda dış çözüm ile eşlenebilir ancak unutulmaması gereken nokta çalışılan hipotezin $0 < x_0 < 1$ olduğudur. Bu nedenle $0 < x < x_0$ aralığında dış çözümün $y(0) = 1$ için tanımlı olması gerekir. Buradan da;

$$y_0 = x + 1 \qquad 0 \le x < x_0 \tag{3.109}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde koşulun diğer tarafındaki dış bölgede de $x = 1$ çözümünün tanımlı olması gerekir. Buradan da;

$$y_0 = x - 2 \qquad x_0 < x \le 1 \tag{3.110}$$

elde edilir.

Artık (3.106) çözümü elde edilen (3.109) ve (3.110) dış çözümleri ile eşleşebilir.

$Y_0(-\infty) = y(x_0)$ ve $Y_0(\infty) = y(x_0^{-})$ eşleşmeleri yapılırsa:

(3.106) ve (3.109) çözümlerinden

$$B = x_0 + 1 \tag{3.111}$$

ve (3.106) ve (3.110) çözümlerinden

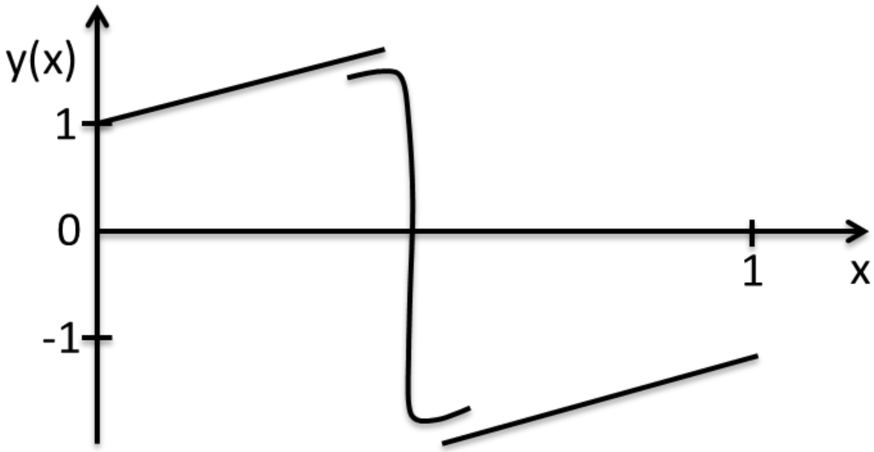
$$-B = x_0 - 2 \tag{3.112}$$

elde edilir. Denklemler taraf tarafa toplanıp işlem yapılırsa:

$$B = \frac{3}{2} \qquad \text{ve} \qquad x_0 = \frac{1}{2} \tag{3.113}$$

olarak bulunur.

Artık sadece D ifadesinin ne olduğuna karar vermek gerekir. Bu terime karar verebilmek için ise Şekil-3.6'daki temsili grafiğe bakarak yaklaşık bir değer belirlenir.



Şekil 3.6 - Sınır koşulunun x= 0,5 noktasında olduğu durumun temsili grafiği

Grafiğe bakılırsa simetrik bir şekil olduğu ve $x=\frac{1}{2}$ noktasında x eksenin kestiği görülür. Bunun kanıtlamak için sınır koşullarının verilenden daha geniş olduğunu varsayalım ve $y(0)=a$ ve $y(1)=b$ olduklarının kabul edelim. Bu durumda $f(x,a,b)$ çözümü elde edilir. $s=1-x$ ($x=\frac{1}{2}$ civarında) ve $z=-y$ ($y=0$ civarında) olacak şekilde değişkenler değiştirilirse:

$$\varepsilon z''=zz'-z \qquad 0<s<1 \tag{3.114a}$$

$$z(0)=-b \qquad z(1)=-a \tag{3.114b}$$

denklemi elde edilir.

Bu ilk baştaki çözümü aranan denklemin aynısıdır ve çözümü $f(s,-b,-a)$ olur. Değişkenleri geriye tekrar çevrilirse:

$$y = -f(1-x, -b, -a) \qquad (3.115)$$

çözümü elde edilir ki bu çözüm tektir. Yani:

$$-f(1-x, -b, -a) = f(x, a, b) \qquad (3.116)$$

olduğu söylenebilir. Buradaki simetrik koordinatların davranışlarına bakılırsa $x = \frac{1}{2}$, $a = 1$ ve $b = -1$ alınabileceği görülür. Buradan da $f(\frac{1}{2}, 1, -1) = 0$ olur ve $y(\frac{1}{2}) = 0$ olduğu belirlenir. Buradan da $\boldsymbol{D = 1}$ elde edilir.

Bulunan bu değerler(3.106) çözümünde yerine yazılırsa son olarak:

$$Y(\tilde{x}) \sim -\frac{3}{2}\tanh(\frac{3x}{4}) \qquad (3.117)$$

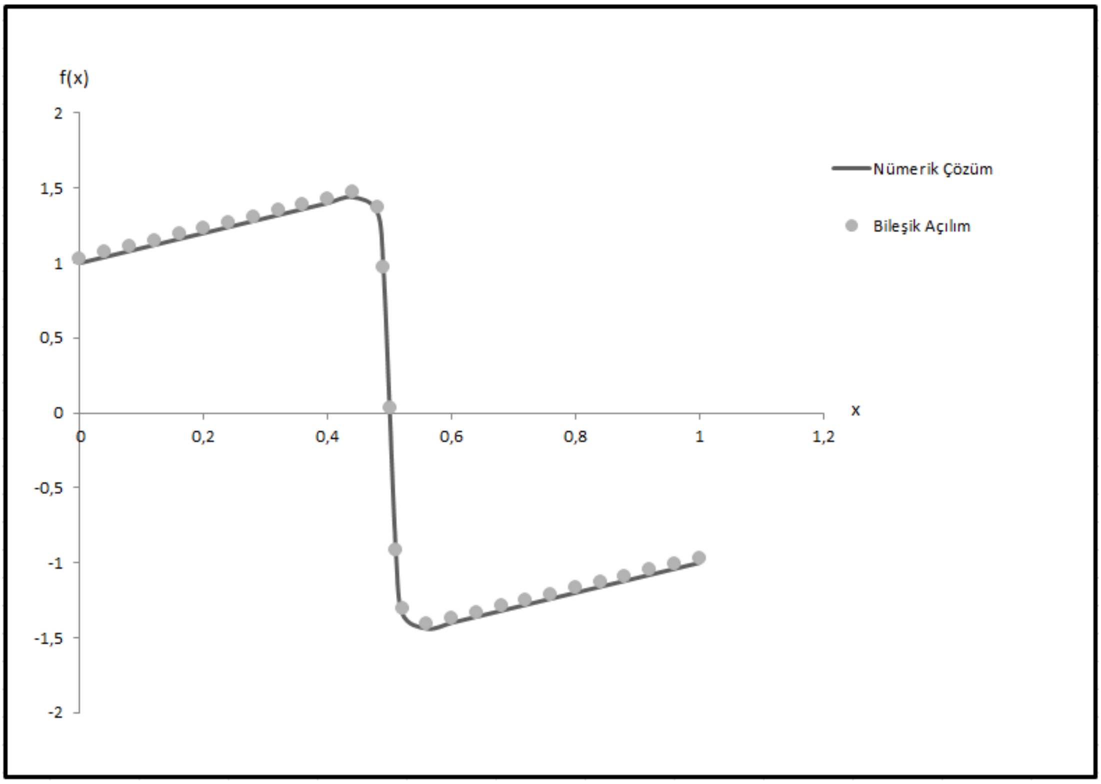
çözümü elde edilir.

3.5.1.3.Bileşik açılım

Dış çözümün iç katmanlarda sürekli olmadığı bu gibi durumlarda bileşik açılımı belirlemek biraz daha zor olabilir. Tek bir açılım belirlemek yerine $0 \le x \le x_0$ ve $x_0 \le x \le 1$ aralıklarında her iki iç koşul için ayrı ayrı bileşik açılımın belirlenmesi gerekir. Ancak bu problemde bileşik açılım her iki koşul için de aynı gelir ve sonuç

$$y \sim x + 1 - \frac{3}{1 + e^{-3(2x-1)/4\varepsilon}} \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (3.118)$$

olarak bulunur. Elde edilen bileşik açılımın nümerik çözüm ile karşılaştırılmasıŞekil-3.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.7 - (3.118) çözümü ile (3.97) denkleminin nümerik çözümünün karşılaştırılması($\varepsilon = 10^{-2}$)

Burada bir dış çözümden diğerine yapılan hızlı değişim şok çözüm olarak adlandırılan tipik bir sonuçtur. Grafikten de anlaşılacağı gibi nümerik sonuçlar ile bileşik açılım birbirine çok yakın değerler alırlar (Holmes, 1995).

3.6.Köşe Katmanları Bulunan Durumlarda Asimptotik Açılım Metodu

Burada bahsedilen problemler iç bölgede değil de sınır bölgesinde ani değişime sahip olan problemlerdir. Bu problemler daha öncekilerden biraz farklıdır çünkü hızlı değişimler çözümün değerlerinde değil de çözümün eğiminde ya da türevinde meydana gelir (Holmes, 1995).
Bu duruma örnek olarak aşağıdaki problem verilebilir.

3.6.1.Uygulama:

$$\varepsilon y''+(x-\frac{1}{2})y'-y=0 \qquad 0<x<1 \tag{3.119a}$$

$$y(0)=2 \qquad y(1)=3 \tag{3.119b}$$

Burada (y')'nün katsayısı verilen aralıkta farklı işaretlere sahiptir. Bu nedenle işaretin değiştiği $x=\frac{1}{2}$ noktasına "değişim noktası" denir (Holmes, 1995).

3.6.1.1.Dış çözüm

Dış çözümü bulabilmek için her zaman olduğu gibi kuvvet serisi kullanılır.

$$y(x)\sim y_0(x)+\varepsilon y_1(x)... \tag{3.120}$$

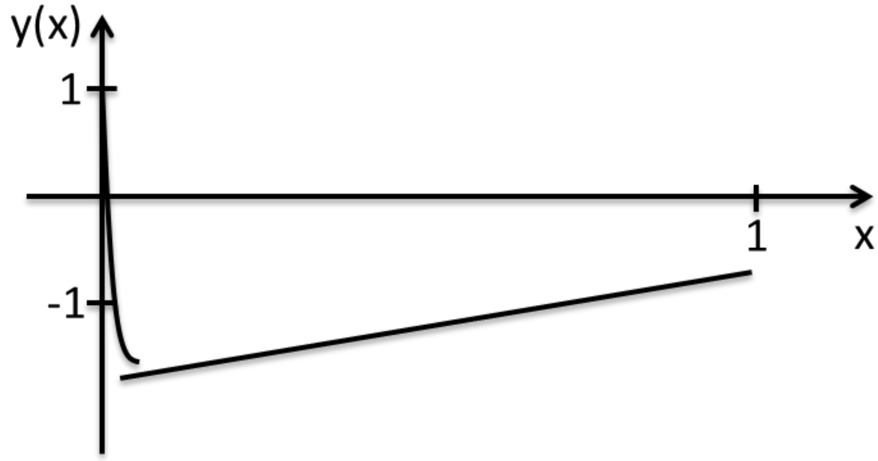
açılımı (3.119a) denkleminde yerine yazılıp dış çözüm bulunursa:

$$y(0)=a\left(x-\frac{1}{2}\right) \tag{3.121}$$

olarak dış çözüm bulunur. Burada a keyfi sabittir. Daha önce karşılaşıldığı gibi iki sınır koşulu ve tek bir integral sabiti vardır.

3.6.1.2.Köşe katmanı

Önce hangi koşulun kullanılacağına karar vermek gerekir. Bunun için $x=0$ sınır koşulu ve (3.121) dış çözüm olduğu kabul edilsin. Bu durumda elde edilecek fonksiyonun temsili grafiği Şekil-3.8'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8 - Sınır koşulunun x = 0 noktasında olduğu ve (3.121) ‘in dış çözüm olduğu durumun temsili grafiği

Yani sınır koşullarında $y''>0$ ve $y'<0$ olur ve eğrinin bir bölümü $y<0$ aralığında olur. Bu da demektir ki

$$\varepsilon y''>0>-\left(x-\frac{1}{2}\right)y'+y \tag{3.122}$$

olur. Bu durumda da diferansiyel denklem tanımlanamaz.

Benzer bilgiyle y' ifadesinin bu aralıkta işaret değiştirdiği de görülür. Bu da demektir ki burada iç katman vardır. Bunu belirlemek için de yine değişken değiştirilir.

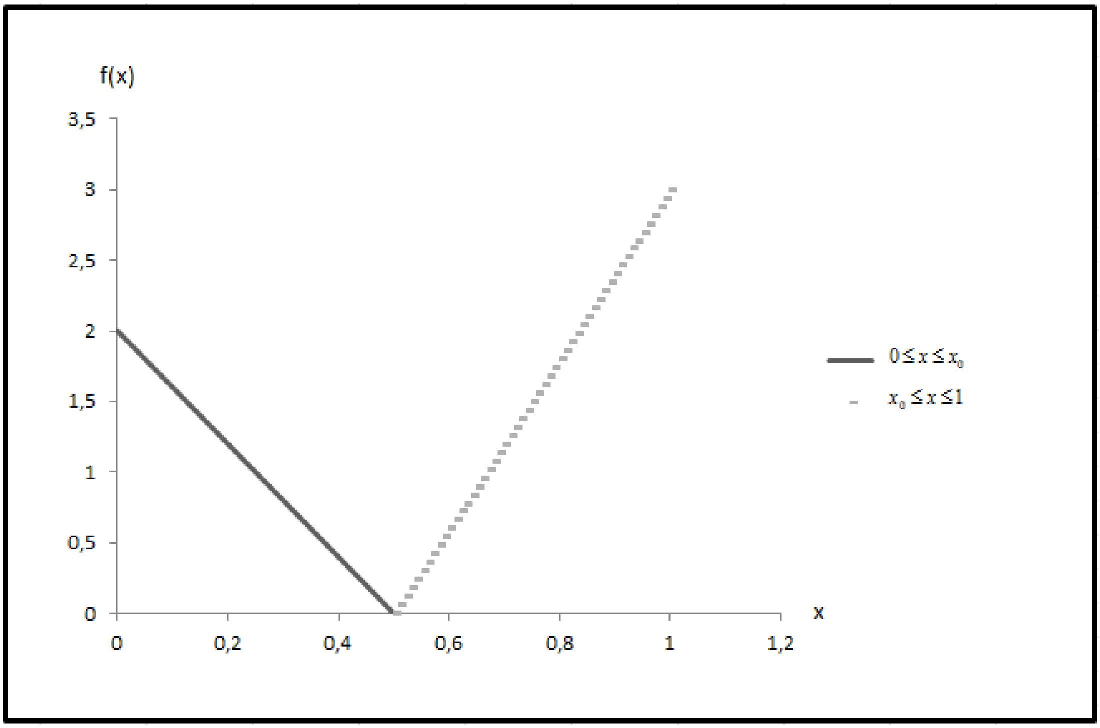
$$\tilde{x}=\frac{x-x_0}{\varepsilon^{\alpha}} \tag{3.123}$$

İfadesi (3.119a) denkleminde yerine yazılır. Ancak bundan önce her iç katman için ayrı dış çözüm elde edilir. (3.121) denkleminde (3.119b) sınır koşulları kullanılırsa aşağıdaki çözümlere ulaşılır:

$$y \sim -4\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad 0 \le x \le x_0 \tag{3.124a}$$

$$y \sim 6\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad x_0 \le x \le 1 \tag{3.124b}$$

$x_0 = \dfrac{1}{2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda ortaya çıkacak olan grafik Şekil-11'de gösterilmiştir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta bu noktada dış çözümlerin sürekli oldukları fakat türevli olmadıklarıdır. Bu nedenle bu noktaya "köşe bölgesi" ya da "türev katmanı" denir (Holmes, 1995).



Şekil 3.9 - (3.124) çözümünün x = 0,5 olduğu durumdaki grafiği

Şimdi (3.123)ifadesi (3.119) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} Y'' + \tilde{x} Y' - Y = 0 \tag{3.125}$$

elde edilir.

Ayrılmış limit noktası $\alpha = \frac{1}{2}$ değerinde oluşur. Ancak diğer problemlerde yapılandan farklı olarak aşağıdaki açılım kullanılır

$$y \sim y_0(x_0) + \varepsilon^{\lambda} Y_0 + \dots \qquad (3.126)$$

Bu problem için $y_0(x_0) = 0$ olur. Aynı zamanda ε^{λ} katsayısının dış çözüm ile eşleşebilmesi gerekir.

Bu açılım(3.125) eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$Y_0'' + \tilde{x} Y_0' - Y_0 = 0 \qquad -\infty < \tilde{x} < \infty \qquad (3.127)$$

denklemi elde edilir. Burada çözümlerden birinin $Y = \tilde{x}$ olduğu görüldüğünde daha rahat bir çözüm elde edilebilir. Bu durumda problemin çözümü

$$Y_0 = A\tilde{x} + B\tilde{x}\left[-e^{\frac{-\tilde{x}^2}{2}} - \int_0^{\tilde{x}} e^{\frac{-s^2}{2}} ds \right] \qquad (3.128)$$

şeklinde belirlenir.

3.6.1.3.Eşleme

Daha önceki durumlarda katman analizi ve eşleme tek bir adımda yapılabiliyordu. Burada ise bu işlemler tek bir adımda yapılamaz.

Eşleme yapmak için ortalama değer olarak aşağıdaki ifade kullanılabilir

$$x_{\eta} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\varepsilon^{\kappa}} \quad , \qquad 0 < \kappa < \frac{1}{2} \qquad (3.129)$$

bu ifade (3.124) dış çözümlerinde yerine yazılırsa:

$$y \sim -4\varepsilon^{\kappa} x_{\eta} \quad , \qquad x_{\eta} < 0 \tag{3.130a}$$

$$y \sim 6\varepsilon^{\kappa} x_{\eta} \quad , \qquad 0 < x_{\eta} \tag{3.130b}$$

eşitlikleri elde edilir. Aynı zamanda (3.128) denklemindeki integral çözülürse:

$$\int_0^{\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{3.131}$$

elde edilir. İfade (3.128) denkleminde yerine yazılırsa:

$$y \sim \varepsilon^{\lambda+\kappa-\frac{1}{2}} x_{\eta} (A + B\sqrt{\frac{\pi}{2}}) \quad , \qquad x_{\eta} < 0 \tag{3.132a}$$

$$y \sim \varepsilon^{\lambda+\kappa-\frac{1}{2}} x_{\eta} (A - B\sqrt{\frac{\pi}{2}}) \quad , \qquad 0 < x_{\eta} \tag{3.132b}$$

çözümlerine ulaşılır. (3.132)ve (3.130)arasında eşleme yapabilmek için $\lambda = \frac{1}{2}$ alınır ve eşleme yapılırsa:

$$A + B\sqrt{\frac{\pi}{2}} = -4 \tag{3.133a}$$

$$A - B\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 6 \tag{3.133b}$$

denklemleri elde edilir. Buradan da

$$A = 1 \text{ ve } B = -5\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{3.134}$$

değerleri bulunur.

3.6.1.4.Bileşik açılım

Durumlar daha detaylı olmasına rağmen bileşik açılım yine aynı kurallara göre belirlenir. $0 \le x \le \frac{1}{2}$ aralığındaki bileşik açılım

$$y \sim -4\left(x-\frac{1}{2}\right)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tilde{x}\left[1-5\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{\frac{-\tilde{x}^2}{2}}-\int_0^{\tilde{x}} e^{\frac{-s^2}{2}}ds\right)\right]+4\varepsilon^{\frac{1}{3}}x_\eta \tag{3.135}$$

şeklindedir. İfade düzenlenirse:

$$y \sim \left(x-\frac{1}{2}\right)\left[1-5\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(-e^{\frac{-(2x-1)^2}{8\varepsilon}}-\int_0^{\frac{2x-1}{2\sqrt{\varepsilon}}} e^{\frac{-s^2}{2}}ds\right)\right] \tag{3.136}$$

olarak asimptotik açılım belirlenmiş olur. Bu problemde $\frac{1}{2} \le x \le 1$ aralığında da aynı asimptotik açılım elde edilir. Buradan da bütün aralıktan tek asimptotik açılımın (3.136) olduğunu görülür (Holmes, 1995).

3.7. Eşlenmiş Asimptotik Açılım Metodu ile Yüzeyde Hareket Denkleminin Yaklaşık Çözümünün Bulunması

Newton'un ikinci hareket kuralı herhangi bir cismin dünya yüzeyi üzerindeki hareketini belirler. Bu problemin çözülmesi oldukça zor olduğu için genelde yaklaşık çözümü kullanılır. Bu yaklaşık çözüme alternatif olarak bir yaklaşık çözüm de eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile belirlenebilir.

Bir cismin hareketi sırasında belli bir "t" anında dünya yüzeyine olan uzaklığını gösteren fonksiyon $x(t)$ olsun. Newton'un ikinci kuralına göre, R dünyanın yarıçapı ve q yerçekimi sabiti olmak üzere, cismin yüzeyde hareketini belirten eşitlik;

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2} \ , \qquad 0 < t \tag{3.137}$$

şeklindedir (Holmes,1995).

$0 \le t \le 1$ aralığında $x(0) = 0$ sınır koşuluna sahip olduğunu ve $x = 1$ noktasındaki hızının "v_0" olduğunu varsayalım.

$$x(0) = 0 \text{ ve } x'(0) = v_0 \tag{3.138}$$

Bu denklemin kapalı formda çözümünü bulmak oldukça zordur bu nedenle asimptotik açılım yapmak uygun olacaktır.

Asimptotik açılım yapabilmek için ifadeler düzenlenirse:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -gR^2(x+R)^{-2} \tag{3.139}$$

elde edilir.

$(x+R)^{-2}$ ifadesi $x = 0$ civarında Taylor Serisine açılıp düzenlenirse:

$$x'' = -g + 2xgR^{-3} + O(x^2)\ldots \tag{3.140}$$

halini alır. Burada gR^{-3} değerinin çok küçük bir değer olduğu açıktır. Bu yüzden denklemde gR^{-3} yerine ε yazılırsa:

$$x'' = -g + 2\varepsilon x + o(x^2)\ldots \tag{3.141}$$

denklemi elde edilir.

3.7.1. Dış Çözüm

Eşlenmiş asimptotik açılım metodunda işlem yapabilmek için denklem ε kuvvetleri cinsinden yazılırsa:

$$\left(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots\right)''-2\varepsilon\left(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\ldots\right)+\mathrm{g}=0 \tag{3.142}$$

elde edilir. Dış çözüm denklemi belirlenirse:

$$x_0''+\mathrm{g}=0 \quad , \qquad \mathrm{x}(0)=0 \tag{3.143}$$

bulunur. Denklem çözüldüğünde:

$$x_0(t)=\frac{-1}{2}gt^2+c_1 t \tag{3.144}$$

ifadesine ulaşılır.

3.7.2. İç çözüm

İç çözüm için sınır koordinatları $\tilde{x}=\dfrac{x}{\varepsilon^{\alpha}}$ olarak değiştirilirse ve gerekli işlemler yapılırsa:

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}}\left(\tilde{x}_0+\varepsilon\tilde{x}_1+\varepsilon^2\tilde{x}_2+\ldots\right)''-2\varepsilon\left(\tilde{x}_0+\varepsilon\tilde{x}_1+\varepsilon^2\tilde{x}_2+\ldots\right)+\mathrm{g}=0 \tag{3.145}$$

denklemine ulaşılır. Eşleme yapabilmek için $\alpha=\dfrac{-1}{2}$ değeri seçilir ve ε değeri üzerinden eşleme yapılırsa:

$$\tilde{x}_0''-2\tilde{x}_0=0\ , \qquad \mathrm{x}(0)=0 \tag{3.146}$$

denklemi elde edilir. Denklem çözülürse:

$$\tilde{x}_0(t) = c_2\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) \tag{3.147}$$

iç çözümü elde edilir.

3.7.3. Eşleme

Bulunan iç ve dış çözüm üzerinden eşleme yapılırsa:

$$\tilde{x}_{iç} = x_{dış} \qquad , \qquad \tilde{x} \to \infty \; x \to 0$$

$$c_2\left(e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}\right) = \frac{-1}{2}gt^2 + c_1 t \; , \qquad \tilde{x} \to \infty \; x \to 0 \tag{3.148}$$

buradan da $c_2 = 0$ bulunur.

3.7.4. Bileşik açılım

$$x \sim x_0(t) + \tilde{x}_0(t) - x_0(0) \tag{3.149}$$

bileşik açılımı yapılırsa:

$$x \sim \frac{-1}{2}gt^2 + c_1 t \tag{3.150}$$

olarak bileşik açılım belirlenir. (3.138) sınır koşulu sağlatılırsa:

$$x \sim \frac{-1}{2}gt^2 + v_0 t \tag{3.151}$$

çözümü elde edilir.

3.7.5. İkinci terimin bulunması

Bulunan iç ve dış çözümler üzerinden ikinci terimin bulunması işlemi uygulanırsa:

$$\tilde{x}_1'' = 2x_0 \tag{3.152a}$$

$$x(0) = 0 \text{ ve } x'(0) = v_0 \tag{3.152b}$$

denklemi elde edilir. Bulunan x_0 değeri yerine yazılır ve denklem çözülürse:

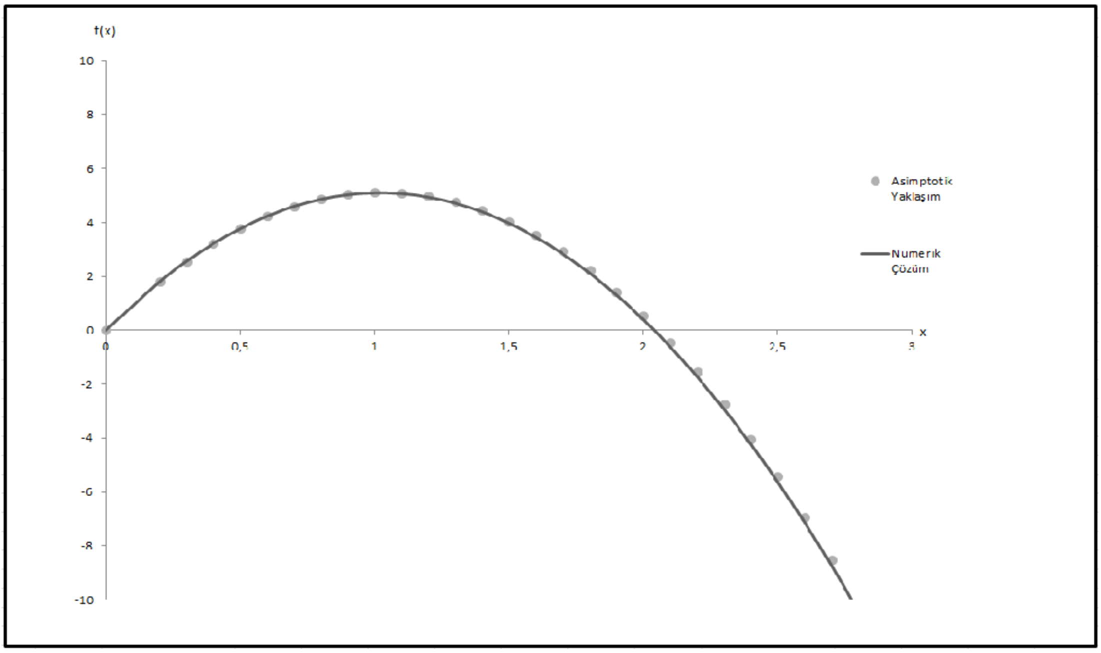
$$y(t) = \frac{v_0}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \tag{3.153}$$

elde edilir. Son olarak asimptotik açılımı yazılırsa:

$$x \sim \frac{-1}{2}gt^2 + v_0 t + \varepsilon\left(\frac{v_0}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4\right) \tag{3.154}$$

Yaklaşık çözümüne ulaşılır.

(3.154) yaklaşık çözümü ile (3.137) denkleminin nümerik çözümünün karşılaştırılması Şekil-4.1'de gösterilmiştir. Grafiğe bakılırsa eşlenmiş asimptotik açılım metodu ile elde edilen yaklaşık çözümün nümerik çözüme çok yakın değerler elde ettiği görülür.



Şekil 4.1 - (3.137) diferansiyel denkleminin çözümü ile (3.154) yaklaşık çözümünün karşılaştırılması($v_0 = 1$)

TARTIŞMA VE SONUÇ

Uygulamalı bilimlerin belki de bütün alanlarında çözümünün bulunması çok zor olan hatta çözümü bulunamayan denklemlerle karşılaşılır. Bu durumlarda nümerik çözümler ya da pertürbasyon metotlar kullanılarak istenen noktada çözüme yakın bir değer bulunur.

Bahsettiğimiz pertürbasyon metotlardan biri olan eşlenmiş asimptotik açılım metodu gittikçe kullanım alanı artan bir yaklaşık çözüm bulma yöntemidir. Yaklaşık çözüm bulabilmek için birçok farklı yol tabi ki vardır. Ancak diğer metotlar fonksiyonun olağan ilerlediği bölgelerde gerçek çözüme yakın sonuçlar elde ederken, fonksiyonun ani değişim yaptığı bölgelerde gerçek çözümden çok farklı değerler vermektedir. Asimptotik açılım metodunu diğer yollardan ayıran en önemli özelliği de buradadır. Eşlenmiş asimptotik açılım metodu fonksiyonun ani değişim gösterdiği bölgelerde de olağan ilerlediği bölgelerde olduğu gibi gerçek çözüme çok yakın değerler elde eder. Bu özelliğinden dolayı da fizik ve finans matematiği gibi çözülmesi zor olan ve yaklaşık çözüme ihtiyaç duyulan alanlarda yaygın olarak kullanılır. Ancak yeterince bilinmediği ve uygulama alanının hala oldukça dar olduğu bir aşikardır.

Bu nedenle yukarıdaki bölümlerde eşlenmiş asimptotik açılım metodu hakkında kapsamlı açıklamalarda bulunduk ve uygulamalar yaptık. Şu anda başlıca kullanım alanlar fizik, uygulamalı matematik ve finans matematiği olsa da bu metot, geliştirilmesi ve uygulamalarının yaygınlaştırılması ile birçok alanda daha kullanılabilir.

KAYNAKLAR

Bender, C.M., Orszag, S.A., 1978, Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers, MC Graw-Hill Book Company, New York.

Bush, A.W., 1992, Pertürbasyon Methods for Engineers and Scientists, Boca Raton, Florida.

Charara, R. , 2008, Matched Asymptotic Expansion for Valuing Spread Options, Universty of Oxford, M.Sc Thesis, 46p, Oxford.

Çağlıyan, M., Çelik, N., Doğan, S., 2008. Adi Diferansiyel Denklemler, Dora, 312s. Bursa.

Holmes, M.H.,1995, Introduction to Pertürbasyon Methods,Springer-Verlag,London.

Howison, S., 2005, Matched Asymptotic Expansions in financial engineering, 53:385-406.

Il'in, A.M., 1992, Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

Kevorkian, J., Cole, J.D., 1985, Pertürbasyon Methods in Applied Mathematics, Springer, New York.

Lagerstorm, P.A., 1988, Matched Asymptotic Expansion: İdeas and Techniques,Springer –Verlag, New York.

Miller R.K., Michel, A.N., 1982, Ordinary Differantial Equations, Academic Press, New York.

Nayfeh, A.H., 1938, Pertürbasyon Methods, A Wiley-Interscience Publications, New York.

Pillay, S. , 2005, The Narrow Ascape Problem: A Matched Asymptotik Expansion Approach, The Univercsity of Witwatersrand, M.Sc Thesis, 149p, Vancouver.

Rand, R.H., Armbruster, D., 1987, Bifurcation Theory and Computer Algebra (Applied Mathematical Sciences), Springer –Verlag, New York.

Shivamoggi, B.K., 2003, Pertürbation Methods for Differential Equations, Birkhauser, Boston.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seyfettin Alan

Doğum Yeri ve Yılı : Şarkikaraağaç /Isparta, 1988

Medeni Hali : Bekâr

Yabancı Dil : İngilizce

E-Posta : seyfettinalan@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise : Isparta Mürşide Ermumcu Anadolu Öğretmen Lisesi

Lisans : Dokuz Eylül Üniversitesi Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans :Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı