T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULTRA METRİK BANACH UZAYLARINA İZOMORFİK YENİ UZAYLAR

Tezi Hazırlayan
İbrahim ŞANLIBABA

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Aralık 2014
NEVŞEHİR

T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ULTRA METRİK BANACH UZAYLARINA İZOMORFİK YENİ UZAYLAR

Tezi Hazırlayan
İbrahim ŞANLIBABA

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Aralık 2014
NEVŞEHİR

Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL danışmanlığında **İbrahim ŞANLIBABA** tarafından hazırlanan "**Ultra Metrik Banach Uzaylarına İzomorfik Yeni Uzaylar**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

15/12/2014

JÜRİ

Başkan	:	Prof. Dr. İhsan SOLAK
Üye	:	Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL
Üye	:	Prof. Dr. Fatma KARİPCİN

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun..18.12.2014...tarih ve.....48.04.. sayılı kararı ile onaylanmıştır.

18/12/2014

Doç. Dr. Şahlan ÖZTÜRK

Müdür

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İbrahim ŞANLIBABA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, aynı zamanda kişilik olarak da bana çok şey katan Sayın Hocam Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL'e, sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK'a ve sayın Doç. Dr. Necdet BATIR'a, teşekkür ederim.

Maddi ve manevi olarak her zaman desteklerini hissettiren değerli AİLEME,

Teknik ve idari yardımlarından dolayı Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Rektörlüğü'ne, Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi BAP Birimi'ne teşekkür ederim.

ULTRA METRİK BANACH UZAYLARINA İZOMORFİK YENİ UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

İbrahim ŞANLIBABA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2014

ÖZET

Bu tezde ilk önce, matematik bilgi sisteminde kayıtlı olan ultra metrik uzaylar ve ultra normlu uzaylar hakkında tanım ve teoremler verildi. Daha sonra bazı ultra normlu uzaylara ultra izomorfik uzaylar tanımladık ve bu uzayların ilginç özellikleri incelendik, Ayrıca bu yeni tip ultra normlu uzaylar hakkında bazı yeni teoremler ispatlandı.

Anahtar kelimeler: Ultra metrik, ultra norm, Arşimedyan olmayan normlu uzay, ultra kompakt, ultra yakınsak
Tez Danışman: Doç. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL
Sayfa Adeti: 40

ULTRA METRİC BANACH SPACE İSOMORPHİC NEWS SPACES TO

M. Sc. Thesis,

İbrahim ŞANLIBABA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNİVERSİTY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCİENCES

December 2014

ABSTRACT

In this thesis, firstly, we have given some definitions and theorems about ultra metric and ultra normed spaces which are exists in the mathematical knowledge base. After, we have defined some new type ultra normed spaces which ultra isomorphic to ultra normed spaces and studied some intersting properties, Furthermore some new theorems are proved about these new type ultra normed spaces.

Keywords: Ultrametric, ultranorm, non-Archimedean norm space, ultracompact, ultraconvergent
Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet ŞENGÖNÜL
Page Number: 40

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
I	İndis kümesi
$\|.\|$	Norm fonksiyonu
$(X, \|.\|)$	Normlu X uzayı
(x_n)	Genel terimi x_n olan dizi
$l_\infty(I, K, \rho)$	Ultra sınırlı dizilerin uzayı
$c_0(I, K, \rho)$	Ultra sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
$c(I, K, \rho)$	Ultra yakınsak dizilerin uzayı
$\|y\|_{l_\infty(I,K,\rho)}$	y nin $l_\infty(I, K, \rho)$ daki normu
K	Reel veya kompleks cisim

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Herhangi bir X kümesini göz önüne alalım. X in elemanları sayılar, fonksiyonlar, diziler olabilir. Böyle bir kümede $(x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizisi verildiğinde (x_n) dizisinin x' e yakınsayıp yakınsamadığını söyleyebilmek için x_n ile x arasındaki uzaklıkla neyin kastedildiğini ve dolayısıyla buna göre x_n ile x arasında uzaklığın ne olduğun bilinmesi gerekir. Böyle bir kümede bilinmesi gereken ilk şey, bu cümledeki iki eleman arasındaki uzaklık kavramıdır. Bu sebeple analiz ve geometride olduğu gibi matematiğin bir çok dalında, soyut bir kümenin elemanlarına uygulanabilir bir uzaklık kavramına ihtiyaç duyulmuş ve bu kavram üç özelliğe dayandırılmıştır. Bu üç özellik metrik uzay aksiyomları olarak adlandırılır. Bir küme üzerine konulan metrik sayesinde ispatlar çok daha kolay ve neticeler çok daha genel olmuştur. Soyut metrik uzaylar reel veya kompleks sayı uzaylarının tabi bir genelleştirilmesidir [1].

Bu çalışmada metrik uzay aksiyomlarından $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $(\forall x, y, z \in X)$ (Üçgen eşitsizliği aksiyomu) yerine $d(x,y) \leq \text{maks}\{\, d(x,z)\,, d(z,y)\}$ (Güçlü üçgen eşitsizliği aksiyomu) alınarak elde edilen metriğe ultra metrik denmiş ve bu sayede pek çok şaşırtıcı, doğal olmayan sonuçlar ortaya çıkmıştır. Biz burada güçlü üçgen eşitsizliğini kullanarak ultra metrik uzay örneklerini, ultra normu, ultra metrik Banach uzaylarını, kompaktlığı ve izometrilerini ayrıca yeni tip uzaylar inşa ederek bu uzayların çeşitli özelliklerini inceledik. Dolayısıyla karşımıza farklı uzaylar ve yapılar ortaya çıktı. Bu çalışmada Toka DIAGANA'nın 'c_0 −SEMIGROUPS OF LİNEAR OPERATORS ON SOME ULTRAMETRIC BANACH SPACE' makalesinden de faydalanarak ikinci bölümde ultra metrik ile alakalı detaylı tanım, teoremleri verdik. Ayrıca bazı yeni tanımlar verilerek, bu tanımlardan elde edilen teoremler oluşturup bunlara örnekler verildi. Bu tezin ikinci bölümünde genel tanım ve teoremler sunulmuştur. Üçüncü bölümde Banach uzayları ve ultra Banach uzayları hakkında bilgiler verildi. Dördüncü bölümde yeni tip ultra Banach uzayları tanımlanıp; bunlar hakkında bazı teoremler verilip ispatları yapıldı.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde, tezde üzerinde duracağımız konunun anlaşılmasına yardımcı olacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Boş olmayan bir X kümesi verildiğinde, bu cümle üzerine bir cebirsel yapı veya bir topolojik yapı ya da mümkün olabiliyorsa her ikisini de veya başka bir yapıyı bu küme üzerine koyarak, kümeyi zenginleştirmek matematiğin öteden beri kullandığı klâsik metotlardandır. Bu kesimde ilk önce tanımlayacağımız ultra metrik uzay kavramı için X kümesinin, aşağıda söyleyeceğimiz ultra metrik aksiyomlarından başka bir özelliğe ya da yapıya sahip olması gerekmez.

Bir metrik uzay, öğeleri arasındaki uzaklığın belirlenmiş olduğu bir kümedir. Başka bir deyişle, üzerinde bir uzaklık fonksiyonu tanımlanmış bir kümedir. Gerçekten, adına metrik diyeceğimiz bu kavram, herkesin sezgisel olarak bildiği uzaklık kavramının genellemesinden başka bir şey değildir.

Bir çok küme mutlak değerin kullanılması ile metrik uzay yapılır. Bu şu anlama gelir: Mutlak değerlerle metrik arasında bir ilgi kurulabilir. Bu nedenle önce mutlak değerin tanımını vereceğiz.

Tanım 2.1. (Mutlak Değer) K bir cisim olsun. $|.|: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in K$ için

(d1) $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

(d2) $|xy| = |x||y|$

(d3) $|x + y| \leq |x| + |y|$

şartlarını sağlıyorsa $|.|$ ya Arşimedyan mutlak değer veya sadece mutlak değer fonksiyonu, $|x|$'e de x in mutlak değeri denir [2].

Eğer (d3) şartının yerine

$(d3)'$ $\quad |x+y| \leq \text{maks}\{|x|, |y|\}$

şartı alınırsa $|.|$ fonksiyonuna ***Arşimedyan olmayan mutlak değer,*** $(\mathrm{d}3)'$ e de ***kuvvetli üçgen eşitsizliği*** denir. Eğer K cismi üzerinde tanımlı $|.|$ değer fonksiyonu $(d3)'$ özelliğine sahipse $(K, |.|)$ ikilisine de Arşimedyan olmayan cisim adı verilir.

En basit Arşimedyan cisimlere örnek olarak $(\mathbb{R}, |.|)$ ve $(\mathbb{C}, |.|)$ yi verebiliriz [4], burada $|.|$ değer fonksiyonu $(d3)'$ eşitsizliğini sağlamaz.

Tanım 2.2. K bir cisim olsun. $|.|: K \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$|x| = \begin{cases} 1 & , \quad x \neq 0 \ \text{ ise} \\ 0 & , \quad x = 0 \ \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa; (d1), (d2) ve $(d3)'$ şartlarını sağlar ve bu fonksiyona K üzerindeki *trivial değer fonksiyonu* denir. Bu takdirde $(K, |.|)$ ikilisi Arşimedyan olmayan trivial cisim adını alır.

Standart mutlak değer fonksiyonu;

$$|x|_\infty = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $(d3)'$ şartı $|.|_\infty$ için $c = 2$ olacak biçimde sağlanır. Gerçekten $|x| \leq |y|$ ise $\left|\frac{x}{y}\right| \leq 1 \implies \left|1 + \frac{x}{y}\right| \leq 2 \implies |x+y| \leq 2|y| = 2\ \text{maks}\{|x|, |y|\}$ dir [3].

Tanım 2.3. Bir X boş olmayan bir küme ve X üzerinde $d: X\, x\, X \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyonu d verilmiş olsun. $\forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki aksiyomları sağlayan d fonksiyonuna metrik, (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

(m1) $d(x,y) = 0 \iff x = y,$

(m2) $d(x,y) = d(y,x),$

(m3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Negatif olmayan $d(x,y)$ reel sayısına x ile y elemanları arasındaki uzaklık denir [1].

Metrik uzay tanımının özel hali olan ultra metrik uzay tanımı aşağıda verilmiştir:

Tanım 2.4. X bir küme ve $d_u: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall x, y, z \in X$ için d_u fonksiyonu

(um1) $d_u(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(um2) $d_u(x,y) = d_u(y,x)$

(um3) $d_u(x,y) \leq \text{maks}\{\, d_u(x,z)\,, d_u(z,y)\}$

şartlarını sağlıyorsa $d_u{}'$ ya ultrametrik, (X, d_u) ya da ultra metrik uzay, (um1), (um2) ve (um3) ye de ultra metrik uzay aksiyomları denir.

Dikkat edilirse, (um1) şartı (m1) şartı ile, (um2) şartı da (m2) şartı ile aynıdır. $d(x,y) \leq \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}$ eşitsizliğinde eğer maksimum değer $d(x,z)$ ise açık olarak $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ eşitsizliği sağlanır. Eğer maksimum değer $d(z,y)$ ise yine $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ eşitsizliği sağlanır. Şu halde (um3) den (m3) eşitliği elde edilir. Dolayısıyla her ultra metrik uzay aynı zamanda klâsik anlamda metrik uzay olur.
Şimdi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x - y|$ ile tanımlı $\mathbb{R}$ üzerindeki doğal metriği göz önüne alalım. d 'nin m1-m3 şartlarını sağladığı açıktır. Fakat $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y) \leq \text{maks}\{\, d(x,z)\,, d(z,y)\}$ yazılamayacağından d, $\mathbb{R}$ de bir metrik olmasına rağmen (um3) şartını sağlamadığından ultra metrik değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ ikilisi ultra metrik uzay olmaz.

Şu halde aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 2.1. Her ultra metrik uzay bir metrik uzaydır ama her metrik uzay ultra metrik uzay olmak zorunda değildir.

Aşağıda bazı ultra metrik uzay örnekleri verilmiştir.

Örnek 2.1. Boş olmayan her hangi bir X kümesi verilsin. $X \times X$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases} \tag{2.1}$$

dönüşümü X için bir ultra metriktir [5], [6].

Gerçekten,

(um1) $d_u(x,y) = 0$ ise açıkça $x = y$

$x = y$ ise $d_u(x,y) = 0$ dir.

(um2) $d_u(x,y) = \begin{cases} 0, x = y \\ 1, x \neq y \end{cases} = \begin{cases} 0, y = x \\ 1, y \neq x \end{cases} = d_u(y,x)$

(um3) $d_u(x,y) \leq \text{maks}\{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$ eşitsizliği

$x = y$ ise
$0 \leq \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}$
$0 \leq \text{maks}\{1,1\}$
$0 \leq 1$
ve
$x \neq y$ ise
$1 \leq \text{maks}\{d(x,z), d(z,y)\}$
$1 \leq \text{maks}\{1,1\}$
$1 \leq 1$ olduğundan $d_u(x,y) \leq \text{maks}\{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$ eşitsizliği sağlanır.

Ultra metrik aksiyomları sağlandığından d_u, X için bir ultra metriktir.

Bilindiği gibi (2.1) de verilen metrik aşikar metrik olarak bilinir. Şu halde her aşikar metrik uzay bir ultra metrik uzaydır.

Tanım 2.5. K bir cisim ve $|.|$ da K üzerinde tanımlı Arşimedyan olmayan mutlak değer yani $(d3)'$ eşitsizliğini sağlasın. $|.|$ Arşimedyan olmayan mutlak değerin ürettiği metrik d_u olmak üzere K, d_u ultra metriğine göre tam oluyorsa K ya Arşimedyan olmayan tam metrik uzay veya tam ultra metrik uzay denir.

Teorem 2.2. Eğer d, X üzerine bir ultra metrik ve $d_u\,(x,z) \neq d_u\,(z,y)$ ise o zaman

$d_u\,(x,y) = \text{maks}\{\, d_u\,(x,z)\,, d_u\,(z,y)\}$ dir (2)

İspat. $d_u\,(x,z) > d_u\,(z,y)$ olsun. $d_u\,(x,y) = d_u\,(x,z)$ eşitliğini kanıtlamak istiyoruz. Hipotezden

$d_u\,(x,y) \leq \text{maks}\{\, d_u\,(x,z)\,, d_u\,(z,y)\} = d_u\,(x,z)$ (3)

yazılabilir. Ayrıca,

$d_u\,(x,z) \leq$ maks$\{d_u\,(x,y), d_u\,(y,z)\}$ olur. Demek ki eğer $d_u\,(x,y) \geq d_u\,(y,z)$ ise

$d_u\,(x,z) \leq$ maks$\{d_u\,(x,y), d_u\,(y,z)\} = d_u\,(x,y)$ olur ve (3) ile birlikte istediğimiz ispatlanır.

Kabul edelim ki $d_u\,(x,y) < d_u\,(y,z)$ olsun. Buradan,

$d_u\,(x,z) \leq$ maks$\{d_u\,(x,y), d_u\,(y,z)\} = d_u\,(y,z) < d_u\,(x,z)$

eşitsizliği elde edilir. Bu bir çelişkidir. Demek ki (3) ifadesi geçerlidir [5]. □

Örnek 2.2. Düşünebildiğimiz bütün dizilerin kümesi w olsun. w üzerinde

$$d_u\,(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ \dfrac{1}{\min\{k \in \mathbb{N}: x_k \neq y_k\}} & , \quad x \neq y \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $d_u : w \times w \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, René Baire tarafından tanımlandığı için Baire metriği adı verilen bu metrik, bir ultra metriktir.

Gerçekten her $x, y \in w$ için $d(x,y)$ uzaklıklarının $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ rasyonel sayılarından başka değer almadığını kolayca görürüz. Dikkat edilirse $d_u\,(x,y) = \frac{1}{m}$ olabilmesi için gerek yeter koşul m tane koşulun tümünün gerçekleşmesidir: $x_1 = y_{1,}\, x_2 = y_2, \dots x_{m-1} = y_{m-1}$ ve $x_m \neq y_m$. O halde aynı uzaklığın $< {}^1\!/_m$ gerçekleyebilmesi için geriye kalanların $x_1 = y_{1,} \dots, x_m = y_m$ olmasıdır. Bu nedenle $d_u\,(x,y) = {}^1\!/_m$ ve $d_u\,(x,z) = {}^1\!/_t$ ise ve m ile t doğal sayıları sözgelimi $m \leq t$ gerçekleşiyorsa, kolayca $x_1 = y_1 = z_1, \dots, x_{m-1} = y_{m-1} = z_{m-1}$ geçerli olacağından

$d_u\,(y,z) \leq \frac{1}{m} =$ maks$\left\{\frac{1}{m}, \frac{1}{t}\right\} =$ maks $\{d_u\,(y,x), d_u\,(x,z)\}$ bulunur ve bu d_u nin ultra metrik olduğunu gösterir [18].

Örnek 2.3. $a \in \mathbb{R}$ ve $[\![a]\!]$ ile a nın tam değerini, e bilinen anlamda, irrasyonel sayıyı gösterelim. d: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$

$d(x,y) = \inf\{2^{-n}: n \in \mathbb{Z}, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\}$ ile tanımlı d fonksiyonu $\mathbb{Q}$ üzerinde bir ultra metriktir.

İspat.

(um1) $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

$d(x,y) = \inf\{2^{-n}: n \in \mathbb{Z}, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\} = 0 \;\Leftrightarrow$

$[\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]$

$[\![(x-e)]\!] = [\![(y-e)]\!] \quad \Leftrightarrow \quad x = y$ den elde edilir.

(um2) $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = \inf\{2^{-n}: n \in \mathbb{Z}, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\} = \inf\{2^{-n}: n \in \mathbb{Z}, [\![2^n(y-e)]\!] = [\![2^n(x-e)]\!]\} = d(y,x)$$

(um3) $d(x,y) \leq \text{maks}\{\, d(x,z)\,, d(z,y)\}$

$d(x,y) = \inf\{2^{-n}: n \in Z, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\}$

$\leq \inf\{2^{-n}: n \in Z, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(z-e)]\!]\}$

$+ \inf\{2^{-n}: n \in Z, [\![2^n(z-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\}$

$\leq \text{maks}\{2^{-n}: n \in Z, [\![2^n(x-e)]\!] = [\![2^n(z-e)]\!]\}$, $\text{maks}\{2^{-n}: n \in Z, [\![2^n(z-e)]\!] = [\![2^n(y-e)]\!]\}$

$= \text{maks}\{\, d(x,z)\,,\; d(z,y)\}$ [6].

Tanım 2.6. p bir asal sayı, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde $|\cdot|_p: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ fonksiyonunu ve b ile c, p ile bölünemeyen tam sayılar olmak üzere $x = p^m \frac{b}{c}$ şeklindeki rasyonel sayılar için , $|x|_p = p^{-m}$, $|0|_p = 0$ olarak tanımlayalım. $|\cdot|_p$ ye $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde p-sel metrik denir.

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde p-sel metrik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(2) $|x + y|_p \leq maks\{|x|_p, |y|_p\},$

(3) $|xy|_p \leq |x|_p . |y|_p,$

(4) $|-x|_p = |x|_p$

(5) $|-1|_p = |1|_p = 1$

Örnek 2.4. Mesela $d(x, y) = |x - y|_p$ ile tanımlanan fonksiyon $\mathbb{Q}$ için ultra metriktir.

İspat.

(um1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ özelliği

$d(x, y) = |x - y|_p = 0 \Leftrightarrow x = y$ den açıktır.

(um2) $d(x, y) = d(y, x)$ özelliği

$d(x, y) = |x - y|_p = |y - x|_p = d(y, x)$ den açıktır.

(um3) $d(x, y) \leq$ maks{ $d(x, z)$, $d(z, y)$}

$x = \frac{q_1}{r_1}$ ve $y = \frac{q_2}{r_2}$ sonra $x + y = \frac{q_1 r_2 + q_2 r_1}{r_1 r_2}$

$m_1 + m_2 - n_3 \leq m_1 + m_2 - \min\{n_1 + m_2, n_2 + m_1\} \leq \text{maks}\{m_1 - n_1, m_2 - n_2\}$
(1.1)

$n_1 + m_2 \leq n_2 + m_1$ ifadesi için (1.1) eşitliği $m_1 - n_1$ ve bundan başka $m_2 - n_2$ eşittir.

$$|x - y|_p \leq p^{m_1 + m_2 - min\{n_1 + m_2, n_2 + m_1\}} \leq p^{max\{m_1 - n_1, m_2 - n_2\}} = \text{maks}\{|x|_p, |y|_p\}$$

olduğundan ultra metrik olduğunu gösterir [9].

Tanım 2.7. (x_n), X ultra metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\lim_n d(x_{n+1}, x_n) = 0$ ise. Buradan da $m > n$ için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$d(x_m, x_n) \leq \text{maks}\left(d(x_m, x_{m-1}), \ldots, d(x_{n+1}, x_n)\right)$ [7].

Teorem 2.3. Bir ultra metrik uzayda bir Cauchy dizisinin yakınsak bir alt dizisi varsa o zaman dizinin kendisi de yakınsaktır ve limitler aynıdır.

İspat 2.3. (x_n) bir Cauchy dizisi olsun ve $\left(x_{f(n)}\right)$ bu dizinin yakınsak bir alt dizisi olsun. Alt dizinin a ya yakınsadığını varsayalım. Altdizinin tanımından dolayı, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ fonksiyonu artandır, dolayısıyla tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabileceği üzere, her n için $f(n) \geq n$ eşitsizliğini sağlar.

Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$d(x_n, a) \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlaması için N nin ne kadar büyük olması gerektiğini bulacağız. Her zaman ki gibi $d(x_n, a)$ ifadesiyle oynayalım.

$$d(x_n, a) \leq d\left(x_n, x_{f(n)}\right) + d\left(x_{f(n)}, a\right) \text{ eşitsizliğinden dolayı}$$

$d\left(x_n, x_{f(n)}\right)$ ve $d\left(x_{f(n)}, a\right)$ ifadelerinden her birini $\varepsilon/2$ den küçük yapmak yeterlidir.

$N_1,\ n > N_1 \to d\left(x_{f(n)}, a\right) < \varepsilon/2$ önermesini doğrulayan bir sayı olsun.

$N_2,\ \ n, m > N_2 \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ önermesini sağlayan bir sayı olsun. Ve şimdi de

$N = \text{maks}\{N_1, N_2\}$ ve $n > N$ olsun.

$f(n) \geq n > N \geq N_1$ olduğundan $d\left(x_{f(n)}, a\right) < \varepsilon/2$ olur.

$f(n) \geq n > N \geq N_2$ olduğundan $d\left(x_n, x_{f(n)}\right) < \varepsilon/2$ olur. Yani $d(x_n, a) < \varepsilon$ bulunur. Bu da istenendir [5].

Tanım 2.8. (Kompaktlık) X bir metrik uzay olsun. X deki her bir dizi yakınsak alt bir diziye sahipse X e kompakt denir. X in A alt kümesi X in bir alt uzayı olarak kompakt ise (yani A daki her bir dizi A da yakınsak bir alt diziye sahipse) A ya dizisel kompakt denir [1].

Tanım 2.9. (Ultra kompaktlık) X bir ultra metrik uzay olsun. X deki her bir dizi ultra yakınsak alt bir diziye sahipse X e ultra kompakt denir. X in A alt kümesi X in bir alt uzayı olarak ultra kompakt ise (yani A daki her bir dizi A da ultra yakınsak bir alt diziye sahipse) A ya dizisel ultra kompakt denir.

Ultra kompakt kümelerin iki önemli özelliği aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4. Bir ultra metrik uzayın ultra kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.

İspat 2.4. (X, d) bir ultra metrik uzay ve A, X in ultra kompakt alt kümesi olsun. Önce A nın kapalı olduğunu gösterelim. Bunun için $A = \bar{A}$ olduğunu göstermek yeter. Kapanışın tanımından dolayı $A \subset \bar{A}$ dır. $x \in \bar{A}$ olsun. Bu takdirde $x_n \to x$ olacak şekilde A da bir x_n dizisi vardır. A ultra kompakt olduğundan $x \in A$ dır. $x \in \bar{A}$ keyfi olduğundan $\bar{A} \subset$ A dır. O halde $\bar{A} = A$ ve A kapalıdır.

Şimdi A nın sınırlı olduğunu gösterelim. Şayet A sınırlı değilse b sabit bir nokta olmak üzere A da $d(y_n, b) > n$ olacak şekilde sınırlı olmayan bir (y_n) dizisi vardır. Bu dizi ultra yakınsak alt bir diziye sahip olamaz. Çünkü alt dizi sınırlıdır. Bu takdirde tanımdan dolayı A ultra kompakt olamaz. Fakat bu husus A nın ultra kompakt oluşuna tezattır. Şu halde kabulümüz yanlış ve iddia doğrudur.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

BÖLÜM 3

NORMLU UZAY, BANACH UZAYI, ULTRA NORMLU UZAYLAR

3.1.Normlu Uzay ve Banach Uzayı

Bir X lineer uzay ve d de X de bir metrik olmak üzere $d(x,\theta)$ uzaklığına $x \in X$'in normu denir ve $\|x\|$ ile gösterilir, burada θ, X lineer uzayının toplamaya göre etkisiz elemanıdır. Bir lineer metrik uzaydan özel şartlar altında bir norm elde edilebiliyorsa, bu durum ultra metrik uzaylar bakımından da geçerli midir? Bu soruya cevap aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1. X bir lineer uzay olsun. $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için

(n1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(n2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ ' ye norm fonksiyonu $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

$d: X \,\mathrm{x}\, X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $d(x,y) = \|x - y\|$ olarak alınırsa d'nin m1-m3 şartlarını sağladığını kolayca görebiliriz. Şu halde bir normdan bir metrik elde edilebilir. Bu metriğe normun ürettiği metrik adı verilir. Eğer X lineer uzayı normun ürettiği d metriğine göre tam uzay ise X 'e Banach uzayı adı verilir.

Tanım 3.2. X bir küme ve X üzerinde toplama ve skalarla çarpma işlemleri tanımlanmış olsun. $\forall x \in X$ için $0 + x = 0$ olacak şekilde X in birimi θ ile gösterelim.

Eğer $g: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için

(un1) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

(un2) $g(\alpha x) = |\alpha|\, g(x)$

(un3) $g(x + y) \leq$ maks$\{g(x), g(y)\}$

şartlarını sağlıyorsa g ye X üzerinde ultra norm denir. n1-n3 ile un1- un3 karşılaştırıldığında (un3) ile (n3) ün farklı olduğu görülür.

$g(x+y) \leq g(x)+g(y)$ eşitsizliği $g(x+y) \leq$ maks$\{g(x), g(y)\}$ eşitsizliği mevcut iken mevcut fakat $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$ olmasının $g(x+y) \leq$ maks$\{g(x), g(y)\}$ olmasını gerektirmediğinden her ultra norm bir normdur, tersi doğru değildir.

Biliyoruz ki her norm bir metriktir. Bu önerme ultra metrik ve ultra norm bakımından da geçerlidir. Bunu aşağıdaki önerme ile vereceğiz [6].

Önerme 3.1. g, X üzerinde bir ultranorm olsun. $\forall x, y \in X$ için $d_u\,(x,y) = g(x-y)$ ile tanımlı $d_u : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X için bir ultrametriktir.

İspat. g nin tanımı bize şunu verir:

$d_u\,(x,y) = 0 \Leftrightarrow g(x-y) = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$ olduğu kolayca görülür. Bu ise (un1) in ispatıdır.

$g(x-y) = g(-1.(y-x)) = |-1|.g\,(y-x) = g(y-x) \Rightarrow d_u\,(x,y) = d_u\,(y,x)$ olduğundan (un2) nin mevcut olduğu anlaşılır.

(un3) şartı aşağıdaki gibi ispatlanır.

$$d_u\,(x,y) = g((x-z)+(z-y)) \leq \text{maks}\{g(x-z), g(z-y)\}$$
$$= \text{maks}\,\{d_u\,(x,z), d_u\,(z,y)\}$$

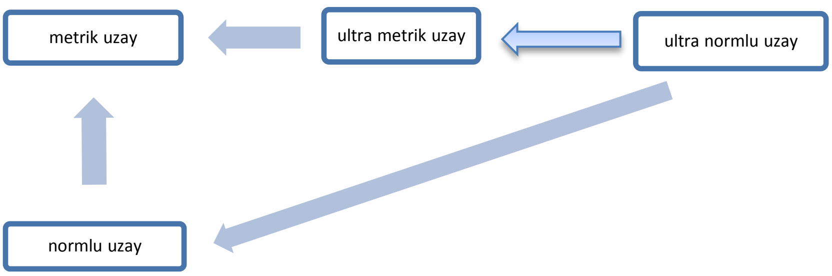
$\alpha = -1$ skaler çarpımı için kullanılır. Bu skalerle çarpım d_u'nin ultra metrik olması için gereklidir [9].

X lineer uzay ve d_u da X üzerinde ultra metrik olsun. Tanım 2.5 in şartları (um1)-(um3) de $y = \theta$ alınarak elde edilen $d_u(x, \theta) = g(x)$ reel değerine $x \in X$'in ultra normu denir. Bundan sonra $g(x)$ yerine alışılan notasyona uyması bakımından $\|x\|$ yazacağız.

Teorem 2.2 de her ultra metrik uzayın bir metrik uzay, tersinin doğru olmadığı gösterildi. Acaba bu karşılaştırma normlu uzaylar bakımından nasıldır?

Açık olarak bir X normlu uzayının ilk iki şartı ultranormlu uzayların ilk iki şartı ile aynıdır. Yine Teorem 2.2 nin ispatında kullanılan yönteme benzer olarak, normlu uzaylardaki üçgen eşitsizliği şartının $\|x+y\| \leq \text{maks}\{\|x\|,\|y\|\}$ mevcut iken mevcut ama $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ olmasının $\|x+y\| \leq \text{maks}\{\|x\|,\|y\|\}$ olmasını gerektirmeyeceği görülebilir. Demek ki her ultra normlu uzay normlu uzay, tersine her normlu uzay ultra normlu uzay olmak zorunda değildir, önermesini verebiliriz.

Şimdiye kadar söylenenleri aşağıdaki diyagramla özetleyebiliriz:



Şekil 1. Metrik Uzay, Ultra Metrik Uzay, Normlu Uzay, Ultra Normlu Uzay İlişkilerini Açıklayan Diyagram

Tanım 3.3. Bir Arşimedyan olmayan yani ultra normlu X lineer uzayı tam ise bu uzaya Arşimedyan olmayan Banach uzayı veya ultra normlu Banach uzayı denir.

Tanım 3.4. X Arşimedyan olmayan normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x_0\| = 0$ eşitliği sağlanıyorsa (x_n) dizisine x_0 e ultra yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ile gösterilir.

(x_n), X de bir Cauchy dizisidir denir eğer $p = 1,2,3,\ldots$ için

$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+p} - x_n\| = 0$ ise

$$\|x_n - x_m\| \leq \text{maks}\{\|x_{j+1} - x_j\| : m \leq j \leq n-1\} \qquad (n \geq m)$$

Arşimedyan olmayan normlu uzaylarda, (x_n) bir Cauchy dizisidir ancak ve ancak $(x_{n+1} - x_n)$ sıfıra yakınsaktır.

Bilindiği gibi Arşimedyan olmayan normlu uzaylarda her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. Eğer X Arşimedyan olmayan normlu uzayında alınan her Cauchy dizisi bir x_0 noktasına yakınsak ve $x_0 \in X$ ise X ‘e Arşimedyan olmayan Banach uzayı denir [5].

Teorem 3.1. Bir Arşimedyan olmayan normlu uzayda her Cauchy dizisi sınırlı bir dizidir.

İspat . (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy dizisinin tanımından $\varepsilon = 1$ alalım. O zaman öyle bir N vardır ki her $n, m > N$ için;

$\|x_m - x_n\| < 1$ olur. Demek ki her $n > N$ için

$\|x_{N+1}, x_n\| < 1$ olur şimdi

$r = \text{maks}\{\|x_{N+1}, x_0\|, \ldots, \|x_{N+1}, x_N\|, 1\} + 1$ olsun. O zaman her n için

$x_n \in B(x_{N+1}, r)$ olur. Yani (x_n) dizisi sınırlıdır [5]. □

3.3. Bazı Ultra Normlu Uzaylar

K bir cisim olsun. $|.|: K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y \in K$ için $(d3)'$ yani $|x + y| \leq \text{maks}\{|x|, |y|\}$ eşitsizliğini sağlamak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için (ρ_k) dizisi $(0 \neq \rho_k)$ ve sınırlı olacak şekilde bir dizi, I da bir indis kümesi olmak üzere, K üzerinde

$l_\infty(I, K, \rho) = \{x = (x_k) \in K: \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|\rho_k < \infty\}$

cümlesini tanımlayalım.

$$\|.\|: l_\infty(I, K, \rho) \to \mathbb{R}$$

$$x \to \|x\| = \sup_k |x_k|\rho_k$$

ile tanmlı $\|.\|$ fonksiyonu verilsin. $(l_\infty(I, K, \rho), \|.\|)$ ikilisi Arşimedyan olmayan Banach uzayıdır.

Benzer olarak,

$c(I, K, \rho) = \{x = (x_k) \in K: \lim_k |x_k|\rho_k \text{ mevcut}\}$ ve

$c_0(I, K, \rho) = \{x = (x_k) \in K: \lim_k |x_k|\rho_k = 0\}$

kümeleri de $\|x\| = \sup_k |x_k|\rho_k$ ile beraber Arşimedyan olmayan Banach uzaylarıdır [8,10,11,16].

$l_\infty(I,K,\rho)$, $c(I,K,\rho)$ ve $c_0(I,K,\rho)$ kümelerine sırası ile ultra sınırlı (veya Arşimedyan olmayan sınırlı), ultra yakınsak (veya Arşimedyan olmayan yakınsak) ve ultra sıfıra yakınsak (veya Arşimedyan olmayan sıfıra yakınsak) dizilerin uzayları adı verilir.

Biz bunlardan sadece $l_\infty(I,K,\rho)$ nin ultra normlu Banach uzayı olduğunu göstereceğiz, diğerleri de benzer olarak gösterilebilir.

(un1) $\|x\| = \sup_k |x_k|\rho_k = 0 \Leftrightarrow |x_k|\rho_k = 0 \Leftrightarrow |x_k| = 0 \Leftrightarrow x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(un2) $\|\alpha x\| = \sup_k |\alpha x_k|\rho_k = |\alpha| \sup_k |x_k|\rho_k = |\alpha|\|x\|$ dir.

(un3)

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= \sup_k |x_k + y_k \mid \rho_k \le \sup_k \{\text{maks}\{|x_k|\rho_k, |y_k \mid \rho_k\ \} \\ &= \sup_k \{\text{maks}\{|x_k+\theta|\rho_k, |y_k+\theta|\ \rho_k\ \} \\ &\le \sup_k \{\text{maks}\{\text{maks}\{|x_k \mid \rho_k, \theta\}, \text{maks}\{|y_k \mid \rho_k, \theta\}\}\} \\ &= \text{maks}\{\sup_k \{\text{maks}\{|x_k \mid \rho_k, \theta\}, \sup_k \{\text{maks}\{|y_k \mid \rho_k, \theta\}\}\} \\ &= \text{maks}\{\sup_k d(x_k,\theta), \sup_k d(y_k,\theta)\} = \text{maks}\{\|x\|, \|y\|\}. \end{aligned}$$

Demek ki $l_\infty(I,K,\rho)$ ultra normlu uzaydır.

ii) Şimdi tamlığı ispatlayalım.

Kabul edelim ki (x^n), $l_\infty(I,K,\rho)$ de bir Cauchy dizisi olsun. Eğer (x^n) sabit bir dizi ise durum açıktır.

Eğer (x^n) sabit bir dizi değilse bu takdirde $m,n \ge n_0$ olacak şekilde

$$\|x^m - x^n\| = sup_{k\in I} |x_k{}^m - x_k{}^n|\rho_k < \varepsilon \qquad (*)$$

olacak şekilde bir n_0 tam sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ ve $k = 1,2,...$ olmak üzere keyfi fakat sabit her k için $m,n \ge n_0$ olduğunda

$|x_k{}^m - x_k{}^n| < \varepsilon$ elde edilir. O halde her sabit k için $(x_k^1, x_k^2, x_k^3, \dots)$ K ‘ de bir Cauchy dizisidir. K tam olduğundan $x_k^m \to x_k \in K$. Her k doğal sayısı için elde edeceğimiz bu limitler yardımıyla K ‘ de $x = (x_1, x_2, \dots)$ dizisini teşkil edelim.

$$x_1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots)$$

$$x_2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots)$$

$$x_3 = (x_1^3, x_2^3, \dots, x_n^3, \dots) \qquad .$$

$$\vdots$$

$$x_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k, \dots)$$

$$\vdots$$

$$x_m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m, \dots)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \cdots \quad \downarrow \cdots$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$$

Şimdi $x \in l_\infty(I, K, \rho)$ ve $x_n \to x, n \to \infty$ olduğunu göstereceğiz. (*) ifadesinde $n \to \infty$ yapılırsa $\|x_k{}^n - x_k\|_{l_\infty(I,K,\rho)} < \varepsilon$ elde edilir.

$x_n = (x_k^n) \in l_\infty(I, K, \rho)$ olduğundan $k = 1,2, \dots$ için $\|x_k{}^n\| \leq t_n$ olacak şekilde bir t_n reel dizisi vardır. Kuvvetli üçgen eşitsizliğinden

$\|x_k\|\rho_k = \|x_k - x_k{}^n + x_k{}^n\|\rho_k \leq maks\{\|x_k - x_k{}^n\|, \|x_k{}^n\|\}\rho_k \leq maks\{\varepsilon, t_n\}M < \infty.$

Bu eşitsizlik her k için geçerli ve sağ tarafta k ' yi ihtiva etmediğinden $(x_k) \in l_\infty(I, K, \rho)$ dir. □

Her ultra normlu uzay, normlu uzaydır (Şekil 1'e bakınız). Yukarıdaki teoremde eğer $\rho_k = 1$ alınırsa $l_\infty(I, K, \rho)$ bildiğimiz anlamda l_∞ uzayına, $c(I, K, \rho)$ uzayı c yakınsak dizilerin uzayına $c_0(I, K, \rho)$ de c_0 uzayına dönüşür.

Ultra normlu uzayların yuvarlarına ait özet bilgiler aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.5. X ultra normlu uzayında;

$B[a, r] = \{x \in X: \|x - a\|\rho \leq maks\{\|x\|\rho, \|a\|\rho\} < r\}$ kümesine a merkezli, r yarıçaplı açık ultra yuvar,

$\bar{B}[a, r] = \{x \in X: \|x - a\|\rho \leq maks\{\|x\|\rho, \|a\|\rho\} \leq r\}$ kümesine a merkezli, r yarıçaplı kapalı ultra yuvar,

$S[a, r] = \{x \in X: \|x - a\|\rho \leq maks\{\|x\|\rho, \|a\|\rho\} = r\}$ kümesine a merkezli, r yarıçaplı ultra yuvar yüzeyi denir.

Tanım 3.6. X bir normlu uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\|x\| \neq \|y\|$ olmak üzere $\|x + y\| \leq$ $\text{maks}(\|x\|, \|y\|)$ eşitsizliği sağlanıyorsa $\|.\|$ ye *Krull* özelliğine sahiptir denir [12].

Tanım 3.7. (Ultra izometri) X ve Y, K cismi üzerinde ultra normlu uzaylar olsun ve $T: X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

ise yani ultra normu koruyorsa T ye X den Y ye bir ultra izometri denir.

Tanım 3.8. X ve Y aynı K cismi üzerinde normlu uzaylar olsun. Eğer $T: X \to Y$ lineer, 1-1, örten izometrisi varsa X ve Y uzayları izometrik olarak izomorfiktir denir, bu husus $X \cong Y$ ile gösterilir [1].

Tanım 3.9. X ve Y, aynı K cismi üzerinde ultra normlu uzaylar olsun. Eğer $T: X \to Y$ lineer, 1-1, örten izometrisi varsa X ve Y uzayları ultra izometrik olarak ultra izomorfiktir denir, bu husus $X_u \cong Y_u$ ile gösterilir

BÖLÜM 4

BAZI YENİ TİP ULTRA NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde yeni tip ultra normlu uzaylar tanımlanacak ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1. Arşimedyan olmayan K cismi üzerinde aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$\widetilde{c_0}(I,K,\rho) = \{x: \lim_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k \ = \ 0\}$,

$\tilde{c}(I,K,\rho) = \{x: \lim_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k \ = \ \alpha \in \mathbb{R}\}$,

$\tilde{l}_\infty(I,K,\rho) = \{x: \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k < \infty\}$.

Tanım 4.2. $n,k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$ƶ_{nk} = \begin{cases} p, & n = k \\ 1-p, & n-1 = k \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases} \quad ,p \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

şeklinde tanımlanan $Ƶ = (ƶ_{nk})$ sonsuz matrisine Zweier matrisi denir. $x = (x_k)$ dizisi verildiğinde

$$y_k = px_k + (1-p)x_{k-1} \tag{1}$$

dönüşümüne $x = (x_k)$ dizisinin Zweier dönüşümü denir [15].

Dikkat edilirse $\widetilde{c_0}(I,K,\rho)$, $\tilde{c}(I,K,\rho)$ ve $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ kümeleri $Ƶx = y, y = (y_k)$ dönüşümü sırası ile $c_0(I,K,\rho)$, $c(I,K,\rho)$ ve $l_\infty(I,K,\rho)$ olacak biçimde tanımlanmıştır. Eğer $\tilde{\lambda}(I,K,\rho) \in \{\widetilde{c_0}(I,K,\rho), \ \ \tilde{c}(I,K,\rho) \ , \ \tilde{l}_\infty(I,K,\rho)\}$ ve $\lambda(I,K,\rho) \in \{c_0(I,K,\rho), c(I,K,\rho) \ , l_\infty(I,K,\rho)\}$ ile gösterirsek aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. $Ƶ: \tilde{\lambda}(I,K,\rho) \to \lambda(I,K,\rho)$

$$x \to Ƶx = y, \ \ y = y_k$$

$y_k = px_k + (1-p)x_{k-1}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu takdirde $\tilde{\lambda}(I,K,\rho)$ ve $\lambda(I,K,\rho)$ uzayları ultra izometrik olarak ultra izomorfik uzaylardır.

İspat.

Ƶ dönüşümünü lineer 1:1, örten ve uzaklıkları koruyan dönüşümdür. Gerçekten,

i) Ƶ lineerdir.

$$\forall x, y \in \tilde{\lambda}(I, K, \rho) \quad \forall \alpha \in K$$

$$\text{Ƶ}(x+y) = p(x_k + y_k) + (1-p)(x_{k-1} + y_{k-1})$$

$$= px_k + py_k + (1-p)x_{k-1} + (1-p)y_{k-1}$$

$$= px_k + (1-p)x_{k-1} + py_k + (1-p)y_{k-1}$$

$$= \text{Ƶ}(x) + \text{Ƶ}(y)$$

ve

$$\text{Ƶ}(\alpha x) = p(\alpha x_k) + (1-p)(\alpha x_{k-1})$$

$$= \alpha(px_k + (1-p)x_{k-1}) = \alpha \text{Ƶ}(x) \text{ dir.}$$

ii) Ƶ örtendir.

$$\text{Ƶ}: \tilde{l}_\infty(I, K, \rho) \to l_\infty(I, K, \rho)$$

$$x \to \text{Ƶx} = \text{y}, \ \ \text{y} = \text{y}_k$$

$\text{x} = \text{Ƶ}^{-1}\text{y}$ iken $\tilde{l}_\infty(I, K, \rho)$ da her $x = (x_k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(1-p)^{k-j}}{p^{k-j+1}} y_j$

formunda eleman $l_\infty(I, K, \rho)$ da bir y elemanı bulunur, sonuç olarak örten olduğu gösterilir.

iii) Ƶ ultra normu korur yani ultra izometridir. Çünkü

$x_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(1-p)^{k-j}}{p^{k-j+1}} y_j$ dizisini tanımlayalım [15,17].

$\|x\| = \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}| \rho_k$

$$= \sup_k \left| p \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(1-p)^{k-j}}{p^{k-j+1}} y_j + (1-p) \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \frac{(1-p)^{k-j}}{p^{k-j+1}} y_j \right| \rho_k$$

$$= \sup_k |y_k| \rho_k = \sup_k |\text{Ƶ}x| \rho_k = \|\text{Ƶ}x\|_{\lambda(I,K,\rho)} \qquad \text{dir.}$$

Her ultra izometri birebir bir dönüşüm olduğundan Ƶ nin birebir olduğunu ayrıca göstermeye gerek yoktur. Sonuç olarak $\tilde{\lambda}(I,K,\rho)$ ile $\lambda(I,K,\rho)$ lineer olarak ultra izometrik olarak ultra izomorfik uzaylardır.

Teorem 4.2. Eğer teorem 4.1 de $\tilde{\lambda} = \tilde{l}_\infty$ alınırsa;

$\tilde{\lambda}(I,K,\rho) = \tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ olur. $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho) = \{x: \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}| \rho_k < \infty\}$ kümesi $\|x\| = \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}| \rho_k$ ile ultra normlu uzaydır ve bu norma göre tamdır.

$i)$ $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ ultra normlu uzaylardır.

a) $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = \theta$ dır. Gerçekten $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\rho_k \neq 0$

olduğunu göz önünde tutarsak eğer $x = \theta$ ise

$\|x\| = \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}| \rho_k \leq \sup_k \{maks\{|px_k|\rho_k, |(1-p)x_{k-1}|\rho_k\}\} =$ $\sup_k\{0,0\} = 0$ dir.

Tersine $\|x\| = 0$ olsun. Bir önceki teoremden dolayı, Ƶ bir ultra izometri olduğundan $\|x\| = 0$ ifadesi bize x'in θ ya uzaklığının 0 olduğunu söyler. Ultra metrik tanımı göz önüne alınırsa $x = \theta$ olması gerektiği anlaşılır. Yani (un1) sağlanır.

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ her $\alpha \in K$ ve $x \in \tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ olması $|.|$ nin (d1) özelliği

göz önüne alınarak;

$\|\alpha x\| = \sup_k |\alpha p x_k + \alpha(1-p)x_{k-1}| \rho_k = |\alpha| \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}| \rho_k = |\alpha| \|x\|$ eşitliği elde edilir ki bu (un2) nin sağlanması demektir.

Son olarak her $x, y \in \tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ ve $\|x\| \neq \|y\|$ olmak üzere $\|x+y\| \leq \text{maks}(\|x\|, \|y\|)$ olduğunu göstereceğiz.

Krull Sharpening kuralını göz önüne alarak;

$\|x+y\| \leq \text{maks}(\|x\|, \|y\|)$ her $x, y \in E$ ve $\|x\| \neq \|y\|$ olduğunu gösterelim.

$$\|x+y\| \leq \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1} + py_k + (1-p)y_{k-1}|\rho_k$$

$$\leq \sup_k \{\text{maks}\{|px_k + (1-p)x_{k-1}|, |py_k + (1-p)y_{k-1}|\}\rho_k\}$$

$$= \text{maks}\{\sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k, \sup_k |py_k + (1-p)y_{k-1}|\rho_k\}$$

$= \text{maks}(\|x\|, \|y\|)$ olur ki bu da (un3) şartın sağlanması demektir. Şu halde $\tilde{l}_\infty(I, K, \rho)$ bir ultra normlu uzaydır.

ii) Şimdi tamlığı ispatlayalım.

Kabul edelim ki (x^n), X de bir Cauchy dizisi olsun.

Bu takdirde $m, n \geq n_0$ olacak şekilde $\|x_k{}^m - x_k{}^n\|_{\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)} = \sup_k |(px^m{}_k + (1-p)x^m{}_{k-1}) - (px^n{}_k + (1-p)x^n{}_{k-1})|\rho_k = \|Z(x_k{}^m - x_k{}^n)\|_{l_\infty(I,K,\rho)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 tam sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ ve $k = 1,2, \ldots$ olmak üzere keyfi fakat sabit her k için $m, n \geq n_0$ olduğunda $(Z(x_k{}^m - x_k{}^n))$ dizisinin $l_\infty(I, K, \rho)$ da bir Cauchy dizisi olduğu sonucuna varırız. $l_\infty(I, K, \rho)$ tam ve $l_\infty(I, K, \rho)$ ile $\tilde{l}_\infty(I, K, \rho)$ nin lineer olarak izometrik oldukları hesaba katılırsa $\tilde{l}_\infty(I, K, \rho)$ da alınan her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu söyleriz. Diyelim ki $\lim_n x_k^n = x_k$ olsun.

Şimdi $x = (x_k) \in \tilde{l}_\infty(I, K, \rho)$ olduğunu göstereceğiz.

$x_k = (x_k^n) \in l_\infty(I, K, \rho)$ olduğundan $k = 1,2, \ldots$ için $\|(px_k + (1-p)x_{k-1})^n\| \leq t_n$ olacak şekilde bir t_n reel dizisi vardır. Böylece kuvvetli üçgen eşitsizliğinden

$\|x_k\| = \|x_k - x_k^n + x_k^n\| \leq \sup_k \{\text{maks}\{\|x_k - x_k^n\|, \|x_k^n\|\} = \text{maks}\{\{\sup_k \|x_k - x_k^n\|, \sup_k \|x_k^n\|\} \leq \text{maks}\{\varepsilon, t_n\} < \infty$ elde edilir.

Sonuç olarak $\tilde{l}_\infty(I, K, \rho, \|.\|)$ bir ultra metrik Banach uzayıdır.

Benzer şekilde $\tilde{c}(I, K, \rho) = \{x: \lim_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k = \alpha \in \mathbb{R}\}$ ve $\tilde{c_0}(I, K, \rho) = \{x: \lim_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k = 0\}$ kümeleri $\|x\| = \sup_k |px_k + (1-p)x_{k-1}|\rho_k$

ile ultra normlu uzaylardır ve bu norma göre tam oldukları yukarıdaki teoremin ispatına benzer olarak gösterilir. □

Teorem 4.3. $l_\infty(I,K,\rho)=\{x:\sup_k|x_k|\rho_k<\infty\}$ [14] ve $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)=\{x:\sup_k|px_k+(1-p)x_{k-1}|\rho_k<\infty\}$ olarak verilsinler. Bu durumda $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)\subset l_\infty(I,K,\rho)$ kapsaması geçerlidir.

İspat . $x\in\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ ise

$$\|x\|_{\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)}=\sup_k|px_k+(1-p)x_{k-1}|\rho_k<\infty$$

$$\leq|p|\sup_k|x_k|\rho_k+|1-p|\sup_k|x_{k-1}|\rho_k \tag{4}$$

$K=\text{maks}\{|p|,|1-p|\}$denilirse (4) ifadesi $K|\sup_k|x_k|\rho_k+\ \sup_k|x_{k-1}|\rho_k\ |=2K\sup_k|x_k|\rho_k$ olur. Eğer $2K=M$ denirse

$\|x\|_{\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)}=\sup_k|px_k+(1-p)x_{k-1}|\rho_k\leq M\|x\|_{l_\infty(I,K,\rho)}$ elde edilir ki buradan da $x\in l_\infty(I,K,\rho)$ yazılabilir. $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)\subset l_\infty(I,K,\rho)$ olduğunu ispatlar. □

Benzer şekilde; $c(I,K,\rho)=\{x:\lim_k|x_k|\rho_k\ \ mevcut\}$ ve $\tilde{c}(I,K,\rho)=\{x:\lim_k|px_k+(1-p)x_{k-1}|\rho_k\ =\ \alpha\in\mathbb{R}\}$ olmak üzere

$\tilde{c}(I,K,\rho)\subset\ c(I,K,\rho)$ ve $\tilde{c_0}(I,K,\rho)\subset\ c_0(I,K,\rho)$ kapsamaları da geçerlidir.

Teorem 4.4. $\tilde{c_0}(I,K,\rho)\subset\tilde{c}(I,K,\rho)\subset\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ dir.

İspat. $\tilde{c_0}(I,K,\rho)\subset\tilde{c}(I,K,\rho)$ olduğu $\alpha=0$ eşitliğinde açıktır. $c(I,K,\rho)$ da $l_\infty(I,K,\rho)$ nun kapalı alt uzayı olduğundan $c(I,K,\rho)\subset l_\infty(I,K,\rho)$ yazılabilir. Önceki teoremde de;

$\tilde{c}(I,K,\rho)\subset\ c(I,K,\rho)$, $\tilde{c_0}(I,K,\rho)\subset\ c_0(I,K,\rho)$ ve $\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)\subset l_\infty(I,K,\rho)$

gösterimleri yapıldığından $\tilde{c_0}(I,K,\rho)\subset\tilde{c}(I,K,\rho)\subset\tilde{l}_\infty(I,K,\rho)$ dir. □

Teorem 4.5. Kabul edelim ki $(\rho_k) \in l_\infty$ olsun. Bu takdirde $c_0 \subset \widetilde{c_0}(I, K, \rho)$ kapsaması geçerlidir.

İspat 4.5. Kabul edelim ki $(\rho_k) \in l_\infty$ ve $x = (x_k) \in c_0$ olsun. Bu durumda $\forall\varepsilon > 0$, en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k \geq n_0 \Rightarrow |x_k| < \frac{\varepsilon}{M}$ dir. Hipotez gereğince $(\rho_k) \in l_\infty$ olduğundan $M = \sup_k|\rho_k|$ olacak şekilde bir $M > 0$ mevcuttur. Dolayısıyla $|x_k|\rho_k < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$ veya $x \in c_0$ olduğunu aklımızda tutarsak $\lim_k|x_k|\rho_k = 0$ olduğu anlaşılır. Şu halde $x \in \widetilde{c_0}(I, K, \rho)$ dir. Şimdi bu kapsamanın kesin olduğunu gösterelim. Farzedelim ki $(\rho_k) = \frac{1}{k}$ olsun ve (x_k) dizisini $(x_k) = (1)$ olarak alalım. Açık olarak $\lim_k|x_k|\rho_k = 0$ olur. Halbuki $(x_k) \notin c_0$ dir. Dolayısıyla $(\rho_k) \in l_\infty$ olduğundan $c_0 \subset \widetilde{c_0}(I, K, \rho)$ kapsaması kesindir. □

Teorem 4.6. $c \subset \tilde{c}(I, K, \rho)$ kapsaması geçerlidir.

İspat 4.6. Kabul edelim ki $(\rho_k) \in l_\infty$ ve $x = (x_k) \in c$ olsun. Bu durumda Eğer $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|\rho_k| \leq M$ ve $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k, m \geq n_0$ için $|x_k - a| < {}^{\varepsilon}/_{2M}$ olacak şekilde a elamanı mevcuttur.

Bundan başka $x = (x_k) \in c$ olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall k, m \geq n_0$ için $|x_k - x_m| < {}^{\varepsilon}/_{2|P|M}$ eşitsizliği (Cauchy şartı) sağlanır.

$$|px_k + (1-p)x_{k-1} - a|\rho_k = |p(x_k - x_{k-1}) + x_{k-1} - a|\rho_k$$

$$\leq |p||x_k - x_{k-1}|\rho_k + |x_{k-1} - a|\rho_k \qquad (*)$$

Eşitsizliği yazılabilir. Aşağıdaki durumlar mevcut olabilir.

1) Eğer $\rho_k = 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ ise durum açıktır.
2) Eğer $\rho_k \neq 0$ ise bu takdirde (*) ifadesi $x_{k-1} = M$ alınarak $|px_k + (1-p)x_{k-1} - a|\rho_k \leq |p|.\frac{\varepsilon}{2|p|M}.M + \frac{\varepsilon}{2M}.M = \varepsilon$ bulunur. Yani

$x \in \tilde{c}(I, K, \rho)$ dir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ultra metrik, ultra norm, ultra metrik Banach uzayları tanımları yapılmış, teoremler ve örnekler verilmiştir. Daha sonra ultra metrik Banach uzaylarına izomorfik yeni uzaylar inşa edilmiş, kompaktlığına bakılmış ve cebirsel, topolojik yapıları incelenmiştir. Ayrıca literatüre yeni kavram, tanım ve teoremler eklenmiştir.

Sonuç olarak ultra metrik uzaylar metrik uzayların kapsadığı daha özel yapılar olduğu görülmüştür ve metrik uzaylarda geçerli olan tüm özelliklerin ultra metrik uzayda olmadığı fark edilmiştir. Ultra metrikler daha spesifik oldukları için bazen şaşırtıcı sonuçlar elde edilmiştir.

Ultra metrik uzaylarda yakınsaklık ve kompaktlık ilginç olduğu için daha fazla incelenip metrik uzaylardaki ile karşılaştırılıp yeni tanım ve teoremlerin verilebileceği tezimize konulacak temel önerilerdir.

KAYNAKLAR

1 . Bayraktar M., "Fonsiyonel Analiz", *Gazi Kitabevi*, Ankara, 2006.

2 . Jacobson, N., "Valuations: paragraph 6 of chapter 9", Basic algebra II (2nd ed.), *New York: W. H. Freeman and Company*, ISBN 0-7167-1933-9,Zbl 0694.16001. A masterpiece on algebra written by one of the leading contributors, 1989.

3 . Pete L. Clark, Lecture Notes On Valuation Theory, http://math.uga.edu/~pete/8410Chapter1.pdf

4 . Monna, A. F., "Over een lineare P-adisches ruimte", *Indag. Math*., 46, 74-84. 1943.

5 . Nesin A., Analiz IV, *Nesin Matematik Köyü*, İstanbul, 2012.

6 . Gajic L., " On Ultrametric Space", *Novi Sad J. Match*., 31, 2, , 69-71, 2001

7 . Perez-Garcia, C., Schikhof, W. H., "Locally Convex Spaces over Non-Archimedean Valued Fields", *Cambridge University Press*, 978-0-521-19243-9.

8 . Diagana T., c_0 −Semigroups of Linear Operators on some Ultrametrıc Banach Space, *IJMMS*, DOI10. 1155/2006/52398, *2006.*

9 . Havinga M., "Ultrametric Matrices", *Korteweg-de Vries Institute for Mathematics Faculty of Science*, 5-14, 13, 2011.

10 . Diagana T., "Non-Arcimedean Linear Operators and Applications", *by Nova Science Publishers Inc*, ISBN 1-60021-405-3, New York, 2007.

11 . Diagana T., "An Introduction to Classical and p-ADIC Theory of Linear Operators and Applications", *by Nova Science Publishers Inc*, ISBN 1-59454-424-7, New York, 2006.

12 . Krull W., "Ultrametric Triangle Inequality", *Planet Math*, Göttingen 1959.

13 . Kaplansky I., Set Theory and Metric Spaces, *AMS Chelsea Publishing*, ISBN 0-8218-2694-8, 1972.

14 . Ludkovsky S. and Diarra B., "Spectral Integration and Spectral Theory for Non-Arcimedean Banach Spaces", *IJMMS* 31,7, 421-442, 2002.

15 . Şengönül M., "On The Zweier Sequence Space", *Demonstratio Mathematica* XL, 1, 260-273, 2007.

16 . B. Diarra, "An Operatör on Ultrametric Hilbert Spaces", *Journal of Analysis 6*, , 55-74, 1998.

17 . F. Başar and B.Altay, "On the Spaces of Sequence of p-bounded variation and releated matrix mappings", *Ukrainian Math*. J. 55, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

İbrahim ŞANLIBABA 1984 yılında Nevşehir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Nevşehir'de tamamladı. 2002 yılında Ankara Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğini kazandı. 2006 yılında üniversiteden mezun oldu. Aynı yıl devlette matematik öğretmeni olarak atanıp beş yıl Bursa'da görev yaptı. 2008 yılında vatani görevine başlayıp on iki ay asteğmen asker olarak Burdur'da ve Erzurum'da askerlik vazifesini tamamladı ve görev yerine tekrar giderek Matematik öğretmenliğine devam etti. 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde yüksek lisansa başladı. Evli ve bir çocuğu vardır. Halen Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesinde yüksek lisans yapmaktadır.

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi

Tel: 05059040422

e-posta: i_sanlibaba@hotmail.com, ibrahimsanlibaba@gmail.com