

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**FARK DENKLEMLERİNİN HOMOTOPİ ANALİZ
METODU İLE İNCELENMESİ**

**Tezi Hazırlayan
Alparslan CİHAN**

**Tezi Yöneten
Yrd.Doç.Dr. Aytekin ERYILMAZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**OCAK 2015
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ danışmanlığında **Alparslan CİHAN** tarafından hazırlanan “**Fark Denklemlerinin Homotopi Analiz Metodu İle İncelenmesi**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

21/01/ 2015

JÜRİ:

Başkan : Yrd. Doç. Dr.Mehmet Tarık ATAY

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

Üye : Yrd. Doç. Dr.Yasin YAZLIK

İMZA:

T. Atay
Aytekin Eryılmaz
Yasin Yazlık

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 27.01.2015 tarih ve 04.01 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

03/02/2015

Doç. Dr. Şahin ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Alparslan CİHAN

**FARK DENKLEMLERİNİN HOMOTOPI ANALİZ METODU İLE
İNCELENMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Alparslan CİHAN

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2015**

ÖZET

Bu çalışmanın amacı Homotopi Analiz Metodu kullanarak Fark Denklemlerinin çözümlerini elde etmek ve gerçek çözümleri ile karşılaştırmasını yapmaktır. Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde Fark Denklemleri ile ilgili temel bilgiler verilerek kullanım alanları ve öneminden bahsedildi. İkinci bölümünde fark fonksiyonları ile fark denklemlerinin elde edilme yöntemlerinden bahsedilerek fark denklemlerinin çeşitleri örneklendirildi. Üçüncü bölümde Homotopi Analiz Metodu ve Fark Denklemlerinin Homotopi Analiz Metodu ile deformasyon denklemleri elde edildi. Dördüncü bölümde Homotopi Analiz Metodu kullanılarak Fark Denklemlerinin \hbar yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edildi. Çözüm serilerine uygun \hbar yakınsaklık kontrol parametresi belirlendi. Homotopi Analiz Metodu ile tam çözümleri mukayeseleri yapılarak hata grafikleri çizildi.

Anahtar Kelimeler: Homotopi Analiz Metodu, Fark Fonksiyonları, Fark Denklemleri.

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Aytakin ERYILMAZ

Sayfa Adeti: 61

**THE SOLUTION OF DIFFERENCE EQUATIONS WITH THE HOMOTOPY
ANALYSIS METHOD**

(M.Sc.Thesis)

Alparslan CİHAN

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

January 2015

ABSTRACT

The aim of this study is to obtain the approximate solutions of difference equations by using the homotopy analysis method and to compare them with the exact analytical solutions. This study consists of four sections. In the first section the basic theorems and definitions of difference equations are considered. The importance and the application areas of the difference equations are introduced. In the second section the difference operator and difference equations and types of difference equations are investigated. In the third section the Homotopy Analysis Method (HAM) and the deformation equations of difference equation are considered. In the last section HAM is applied to difference equations to obtain the series solution. And convergence control parameter \hbar is properly chosen. And the solutions obtained by HAM and the exact analytical solutions are compared and the error tables and graphs are given.

Keywords: Homotopy Analysis Method, Difference Equations, Difference Operator, Series Solution

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Aytakin ERYILMAZ

Page Number: 61

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ	ix
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
FARK DENKLEMLERİ	3
2.1. Fark Fonksiyonu.....	3
2.2. Öteleme Operatörü.....	4
2.3. Toplam Operatörü.....	8
2.4. Fark Denklemleri	14
2.4.1. Lineer fark denklemler.....	16
2.4.2. Birinci mertebeden fark denklemleri	17

2.4.3. İkinci mertebeden fark denklemleri	21
2.4.4. Lineer homojen olmayan fark denklemleri.	26
2.4.5 Belirsiz katsayılar metodu	26
2.4.5 Operatör Metodu	29
3. BÖLÜM	
HOMOTOPİ ANALİZ METOTU	33
3.1. Homotopi Analiz Metodu.	33
3.2. Lineer fark denklemlerinin deformasyon denklemleri.	37
4. BÖLÜM	
UYGULAMALAR.	40
Örnek 4.1	40
Örnek 4.2	43
Örnek 4.3.	47
Örnek 4.4.	51
5. BÖLÜM	
TARTIŞMA VE SONUÇLAR	56
KAYNAKLAR	57
ÖZGEÇMİŞ	61

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Diferansiyel analiz ile fark analizi arasındaki benzerlikler tablosu	14
Tablo 2.2. Belli $g(t)$ fonksiyonlarına karşılık gelen $y_p(t)$ aday çözümleri	27
Tablo 4.1. (4.1) probleminin hata tablosu	43
Tablo 4.2. (4.14) probleminin hata tablosu.	46
Tablo 4.3. (4.24) probleminin hata tablosu.	50
Tablo 4.4. (4.33) probleminin hata tablosu	54

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. (4.1) probleminin h eğrisinin grafiği.	42
Şekil 4.2. (4.1) probleminin hata fonksiyon grafiği.	43
Şekil 4.3. (4.14) probleminin h eğrisinin grafiği.	46
Şekil 4.4. (4.14) probleminin hata fonksiyon grafiği.	47
Şekil 4.5. (4.24) probleminin h eğrisinin grafiği.	50
Şekil 4.6. (4.24) probleminin hata fonksiyon grafiği.	51
Şekil 4.7. (4.34) probleminin h eğrisinin grafiği.	54
Şekil 4.8. (4.34) probleminin hata fonksiyon grafiği.	55

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

\in	:	Elemanındır sembolü
\mathbb{R}	:	Reel (gerçel) sayılar kümesi
\mathbb{N}	:	Doğal sayılar kümesi
$\frac{d}{dx}$:	Adi türev operatörü
$\frac{\partial}{\partial u}$:	Kısmi türev operatörü
Δ	:	Fark operatörü
Δ^{-1}	:	Ters fark operatörü
$f^{(n+1)}$:	f fonksiyonunun (n+1). mertebeden türevi
π	:	Çarpım sembolü
\sum	:	Toplam senbolü
α	:	Sabit bir reel sayı
β	:	Sabit bir reel sayı
λ	:	Sabit bir reel sayı

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Zamana bağılı değişkenlerin kullanıldığı doğa olaylarının pek çoğu ayırık (kesikli) olduğundan bu olayların matematiksel modellemelerini kurmak güçtür ve önem arz etmektedir. Fark denklemleri ile zamana bağılı doğa olaylarının incelenmesinin doğal sonucu olarak karşılaşılmaktadır. Çünkü fark denklemleri bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Fonksiyonel denklemler olan fark denklemleri diferansiyel denklemler ile benzerlik gösterirler. Daha da önemlisi fark denklemleri diferansiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metotlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemler teorisinde elde edilen sonuçlar bunların ayırık benzeri olan ve bu sonuçlara hemen hemen karşılık gelen diferansiyel denklemlerden daha zengindir. Diferansiyel denklemler iki yüz yılı aşkın bir süredir incelenmesine rağmen fark denklemleri yüz yıllık bir süreçte sistematik bir hale gelmiştir. Diferansiyel denklemlerde daha çok Gecikmeli diferansiyel denklemler ile ifade edilen kontrol teorisinde kararlılık durumunun incelenmesi, ekonomide borsa hareketlerinin incelenmesi, tıp ve biyoloji biliminde canlı popülasyon sayısının araştırılması ve daha da önemlisi hücre hareketlerinin incelenmesi (Kanserli hücrelerin artış hızı) gibi konularda ve birçok bilim dalında fark denklemleri kullanılmaktadır [4,5].

20. yüzyılın başlarında biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, radyasyondaki quanta, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Bu da diferansiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde yer alan “doğada kopukluk yoktur” varsayımını çürütmüştür. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferansiyel denklemler fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemleri yardımıyla ortadan kaldırılmak istenmiştir [4,5,11,13,21,22,43].

Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré e kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklem üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemler ele alınmamıştı. 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiştir. Guichard 1887'de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde çalışmış, Birkhoffve Carmichael bu çalışmalarını genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden kendine eş (selfadjoint) doğrusal diferansiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denkleminin çözümünü ifade etmişlerdir [10]. M. Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denklemin asimptotik üstel çözümlerinin özelliklerini geliştirmiş [7]; Hooker, Riccati denklemini geliştirmiş [17]; Popena, ikinci mertebeden fark denklemin osilasyonlu ve osilasyonsuz durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur [41,42]. Kaczorek, n ci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denklemin kapalı (implicit) formdaki çözümlerini vermiştir [19]. Abramov, polinomkatsayılı keyfi dereceli fark denklemlerin rasyonel çözümlerini vermiştir [3]. Tuzik, değişken katsayılı konvolüsyon tipteki fark denklemlerin çözülebilirliğine değinmiştir [44]. Bu tezde birinci ve ikinci mertebeden fark denklemlerin homotopi analiz metodu ile çözümü incelenmiştir. Bu yöntem Liao tarafından geliştirilmiştir [23-38]. Son zamanlarda araştırmacılar Homotopi Analiz Metodunu, fen ve mühendislikte çeşitli problemlere uygulamışlardır: Lineer olmayan ısı problemi [1], Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemler [2], lineer integrodiferansiyel-fark denklemler [20], nonlinear boundary value problems [23], diferansiyel-fark denklemler [45], Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ile Laplace denklemi [18], Sürekli elastik Euler sütunlar kritik burkulma yükü [12]. Çalışmanın birinci bölümünde, fark denklemlerin kullanım alanlarından ve tarihçesinden bahsedildi. Çalışmanın ikinci bölümde, fark denklemlerinden, üçüncü bölümde homotopi analiz metodu temel tanımlarıyla tanıtıldı, dördüncü bölümde bu metod fark denklemlerine uygulandı, en uygun h yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edilerek çözümlerin analizi yapıldı. Ayrıca bu bölümde hata grafikleri ile mutlak hata tabloları birlikte sunulmuştur. Son bölüm ise bu çalışmadan elde edilen sonuçların değerlendirilmesine ayrıldı. Metodun fark denklemlere uygulanmasında matematik yazılımlarından yararlanılmıştır.

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ

2.1.Fark Fonksiyonu

Tanım 2.1.1: Bir $y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü veya y nin birinci basamaktan farkı,

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.1.

$y(x) = 5^x$ için, $\Delta y(1)$ ve $\Delta y(2)$ farkları,

$$\Delta y(1) = y(1+1) - y(1) = y(2) - y(1) = 5^2 - 5^1 = 20$$

$$\Delta y(2) = y(2+1) - y(2) = y(3) - y(2) = 5^3 - 5^2 = 100$$

olarak bulunur.

Ayrıca $y(x) = 5^x$ fonksiyonunun için $\Delta y(x)$ farkı her zaman 4.5^x ye eşittir ve bu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\Delta y(x) = y(x+1) - y(x) = 5^{x+1} - 5^x = (5-1)5^x = 4.5^x$$

Tanım 2.1.2: y , bir fonksiyon ve onun birinci farkı Δy olmak üzere; y nin birinci farkının farkı $\Delta^2 y$ ile gösterilir ve buna y nin ikinci farkı denir.

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) \quad (2.2)$$

Aynı şekilde devam edilirse y nin $(n-1)$ inci farkının farkına y nin n ci farkı denir ve $\Delta^n y$ ile gösterilir.

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y) \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.3)$$

Tanım 2.1.1 ve Tanım 2.1.2 yardımıyla $\Delta^2 y$ ve $\Delta^3 y$ farkları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(x) &= \Delta[\Delta y(x)] = \Delta[y(x+h) - y(x)] \\ &= y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y(x) &= \Delta[\Delta^2 y(x)] = \Delta[y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)] \\ &= y(x+3h) - 3y(x+2h) + 3y(x+h) - y(x) \end{aligned}$$

Teorem 2.1.1. Δ fark operatörü lineerdir. Yani,

$$\Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x), \text{ burada } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ dir.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \alpha f(x+1) + \beta g(x+1) - \alpha f(x) - \beta g(x) \\ &= \alpha [f(x+1) - f(x)] + \beta [g(x+1) - g(x)] \\ &= \alpha \Delta f(x) + \beta \Delta g(x). \end{aligned}$$

2.2. Öteleme Operatörü

Öteleme operatörü,

$$Ef(x) = f(x+1)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanıma göre $E^n f(x) = f(x+n)$ dir. Ayrıca $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sabitleri için $E(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha Ef(x) + \beta Eg(x)$ 'dir. Yani, E operatörü lineerdir. Δ ve E Operatörleri arasında $\Delta = E - I$ bağıntısı vardır, burada I özdeşlik operatörüdür. Yani; $If(x) = f(x)$ olduğundan $\Delta E = E\Delta$ değişme özelliği ortaya çıkar.

$$\Delta^n = (E - I)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j E^{n-j} \quad (2.4)$$

ve

$$E^n = (\Delta + I)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \quad (2.5)$$

dir.

Teorem 2.2.1.

$$1. \Delta^m (\Delta^n f(x)) = \Delta^{m+n} f(x), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$$

$$2. \Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$$

$$3. \Delta(cf(x)) = c\Delta f(x), \quad c \in \mathbb{R} \text{ (sabit)}$$

$$4. \Delta(f(x).g(x)) = f(x)\Delta g(x) + Eg(x)\Delta f(x)$$

$$5. \Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x).Eg(x)}$$

İspat:

1. Açıktır.

$$\begin{aligned} 2. \Delta(f(x) + g(x)) &= [f(x+1) + g(x+1)] - [f(x) + g(x)] \\ &= [f(x+1) - f(x)] + [g(x+1) - g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x). \end{aligned}$$

$$3. \Delta cf(x) = cf(x+1) - cf(x) = c[f(x+1) - f(x)] = c\Delta f(x).$$

$$\begin{aligned} 4. \Delta[f(x).g(x)] &= f(x+1).g(x+1) - f(x).g(x) \\ &= f(x+1).g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x).g(x+1) - f(x).g(x) \\ &= [f(x+1) - f(x)]g(x+1) + f(x)[g(x+1) - g(x)] \\ &= \Delta f(x).Eg(x) + f(x)\Delta g(x) = f(x)\Delta g(x) + \Delta f(x).Eg(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \Delta \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] &= \frac{f(x+1)}{g(x+1)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{f(x+1).g(x) - f(x)g(x+1)}{g(x).g(x+1)} \\
&= \frac{f(x+1)g(x) - f(x)g(x) + f(x).g(x) - f(x).g(x+1)}{g(x).g(x+1)} \\
&= \frac{g(x)[f(x+1) - f(x)] - f(x)[g(x+1) - g(x)]}{g(x).g(x+1)} \\
&= \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)Eg(x)}.
\end{aligned}$$

Şimdi bazı özel fonksiyonların farkını hesaplanmak için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.2. a bir sabit olmak üzere,

1. $\Delta a = 0$,
2. $\Delta a^x = (a-1)a^x$,
3. $\Delta \sin ax = 2 \sin \frac{a}{2} \cos a(x + \frac{1}{2})$,
4. $\Delta \cos ax = -2 \sin \frac{a}{2} \sin(x + \frac{1}{2})$,
5. $\Delta \log ax = \log(1 + \frac{1}{x})$,
6. $\Delta \log \Gamma(x) = \log x$.

İspat:

1. $\Delta a = a - a = 0$.
2. $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$.
3. $\Delta \sin ax = \sin a(x+1) - \sin ax = \sin(ax+a) - \sin ax$

$$\begin{aligned}
&= \sin ax \cos a + \sin a \cos ax - \sin ax \\
&= \sin ax(1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}) + \sin a \cos ax - \sin ax \\
&= \sin ax - 2 \sin ax \sin^2 \frac{a}{2} + \sin a \cos ax - \sin ax \\
&= -2 \sin ax \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \cos ax
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin \frac{a}{2} (\cos ax \cos \frac{a}{2} - \sin ax \sin \frac{a}{2}) \\
&= 2 \sin \frac{a}{2} \cos(ax + \frac{a}{2}) \\
&= 2 \sin \frac{a}{2} \cos(x + \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \Delta \cos ax &= \cos a(x+1) - \cos ax = \cos(ax+a) - \cos ax \\
&= \cos ax \cdot \cos a - \sin ax \cdot \sin a - \cos ax \\
&= \cos ax (1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}) - \sin ax \cdot 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} - \cos ax \\
&= \cos ax - 2 \cos ax \cdot \sin^2 \frac{a}{2} - 2 \sin ax \cdot \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} - \cos ax \\
&= -2 \sin \frac{a}{2} \left[\cos ax \cdot \sin \frac{a}{2} + \sin ax \cdot \cos \frac{a}{2} \right] \\
&= -2 \sin \frac{a}{2} \sin(ax+a) = -2 \sin \frac{a}{2} \sin a(x + \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \Delta \log ax &= \log a(x+1) - \log ax \\
&= \log(ax+a) - \log ax \\
&= \log\left(\frac{ax+a}{ax}\right) = \log\left(\frac{a(x+1)}{ax}\right) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \Delta \log \Gamma(x) &= \log \Gamma(x+1) - \log \Gamma(x) = \log \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} \\
&= \log \frac{x\Gamma(x)}{\Gamma(x)} = \log x.
\end{aligned}$$

Burada $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ dir.

Tanım 2.2.1. Faktöriyel fonksiyonu $(n^{(r)})$, r nin değerlerine göre aşağıdaki gibi tanımlanır.

i) Eğer $r = 1, 2, 3, \dots$ ise $n^{(r)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$

ii) Eğer $r = 0$ ise $n^{(0)} = 1$

$$\text{iii) Eğer } r = -1, -2, -3, \dots \text{ ise } n^{(r)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n-r)}$$

$$\text{iv) Eğer } r \notin \mathbb{Z} \text{ ise } n^{(r)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-r+1)}$$

$n^{(r)}$ fonksiyonu r nin sadece bu değerleri için anlamlıdır. i, ii, iii ve iv ün özel durumlarıdır [16].

2.3. Toplam Operatörü

A, B iki operatör ve I birim operatör olmak üzere $AB = I$ ise $B = A^{-1}$ olduğunu biliyoruz. $f(n)$ fonksiyonu için $\Delta(\Delta^{-1}f(n)) = f(n)$ dir. $z(n) = \Delta^{-1}f(n)$ denilir ise $\Delta z(n) = f(n)$ olur.

Buradan,

$$\begin{aligned} Z(n+1) - Z(n) &= f(n) \\ Z(n) - Z(n-1) &= f(n-1) \\ Z(n-1) - Z(n-2) &= f(n-2) \\ &\vdots \\ Z(2) - Z(1) &= f(1) \\ Z(1) - Z(0) &= f(0) \end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$Z(n+1) - Z(0) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{i=0}^n f(i)$$

elde edilir. Buradan da,

$$Z(n) = Z(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

bulunur. $Z(0)$ keyfi bir sabit $Z(n) = \Delta^{-1}f(n)$ alınırsa,

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c \text{ elde edilir.}$$

$\sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c = F(n)$ denilir ise $\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$ olur. Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ 'nin ters farkı denir ve c keyfi bir sabittir.

Lemma: Δ fark operatörü için

$$i) \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta f(i) = f(n) - f(n_0)$$

$$ii) \Delta_n \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \right) = f(n) \quad \text{dir [9].}$$

İspat:

$$\begin{aligned} i) \sum_{i=n_0}^{n-1} \Delta f(i) &= \sum_{i=n_0}^{n-1} [f(i+1) - f(i)] \\ &= [f(n) - f(n-1)] + [f(n-1) - f(n-2)] + \dots + [f(n_0 + 1) - f(n_0)] \\ &= f(n) - f(n_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \Delta_n \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \right) &= \sum_{i=n}^n f(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) \\ &= f(n) + \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) = f(n). \end{aligned}$$

Uyarı: Bir $f(n)$ fonksiyonu $n \geq o$ için tanımlı ise bu durumda

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c$$

dir; burada c bir keyfi sabittir. Buna göre Δ^{-1} operatörü $\Delta^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1}$ şeklinde tanımlanabilir. $f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için ters farkı aynı zamanda bir belirsiz toplam olarak da ifade edilebilir ve $\Delta^{-1} f(n)$ veya $\sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ şeklinde gösterilir.

$f(n)$ fonksiyonu $n \geq n_0$ için tanımlı ise, o zaman $f(n)$ in ters farkı

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + c \text{ olup } \Delta^{-1} = \sum_{i=n_0}^{n-1} \text{ dir [9].}$$

Örnek 2.3.1.

$f(n) = \frac{n}{6}$ fonksiyonunun ters fark ya da belirsiz toplamını bulunuz.

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} \left(\frac{n}{6} \right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{6} = \frac{1}{6} \frac{n(n-1)}{2} + c \\ &= \frac{1}{12} n(n-1) + c \end{aligned}$$

Örnek 2.3.2.

Ayrıca c bir sabit olmak üzere $\Delta^{-1} 0 = c$ ve $\Delta^{-1} 1 = n + c$ dir.

Teorem 2.3.1. Δ^{-1} operatörü lineerdir.

İspat: α, β reel sayısı ve $f(n), g(n)$ fonksiyonları için

$\Delta^{-1} [\alpha f(n) + \beta g(n)] = \alpha \Delta^{-1} f(n) + \beta \Delta^{-1} g(n)$ olduğunu göstermeliyiz

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} [\alpha f(n) + \beta g(n)] &= \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha f(i) + \beta g(i)) + c \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{n-1} f(i) + \beta \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + c \\ &= \alpha \Delta^{-1} f(n) + \beta \Delta^{-1} g(n). \end{aligned}$$

Uyarı: $\Delta \Delta^{-1} = I$ ve $\Delta \Delta^{-1} \neq I$ dir. Gerçekten,

$$\Delta F(n) = f(n) \text{ ve } \Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$$

$$\begin{aligned} \Delta \Delta^{-1} f(n) &= \Delta(F(n) + c) \\ &= \Delta F(n) = f(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}\Delta f(n) &= \Delta^{-1}(f(n+1) - f(n)) \\
&= \Delta^{-1}f(n+1) - \Delta^{-1}f(n) \\
&= F(n+1) + c_1 - F(n) - c_2 \\
&= F(n+1) - F(n) + c_3 \\
&= \Delta F(n) + c_3 \\
&= f(n) + c_3
\end{aligned}$$

Örnek 2.3.3.

$\Delta^{-1}(\sin 4n + 2\cos 6n)$ değerini hesaplayalım. Teorem 2.3.1 den,

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(\sin 4n + 2\cos 6n) &= \Delta^{-1}\sin 4n + 2\Delta^{-1}\cos 6n \\
&= -\frac{\cos 4(n - \frac{1}{2})}{2\sin 2} + \frac{2\sin 6(n - \frac{1}{2})}{2\sin 3} + c
\end{aligned}$$

Örnek 2.3.4.

$4.5^n + e^{3n}$ fonksiyonunun ters farkını bulunuz.

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}(4.5^n + e^{3n}) &= \sum_{i=0}^{n-1} (4.5^i + e^{3i}) = \sum_{i=0}^{n-1} 4.5^i + \sum_{i=0}^{n-1} e^{3i} \\
&= 4\left(\frac{1-5^n}{1-5}\right) + \frac{1-e^{3n}}{1-e^3} + c \\
&= 5^n - 1 + \frac{e^{3n} - 1}{e^3 - 1} - \frac{1}{e^3 - 1} + c \\
&= 5^n + \frac{e^{3n} - 1}{e^3 - 1} + c
\end{aligned}$$

Teorem 2.3.2.

$$i.) \Delta^{-2}f(n) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1n + c_2$$

$$ii.) \Delta^{-3}f(n) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1n^2 + c_2n + c_3 \text{ dir. Burada } c_1, c_2, c_3 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} i) \Delta^{-2} f(n) &= \Delta^{-1}(\Delta^{-1} f(n)) \\ &= \Delta^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(i) + c_1\right) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 \Delta^{-1} 1 + c_2 \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n + c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \Delta^{-3} f(n) &= \Delta^{-1}(\Delta^{-2} f(n)) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 \Delta^{-1} n + c_2 \Delta^{-1} 1 + c_3 \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{m-1} f(i) + c_1 n^2 + c_2 n + c_3. \end{aligned}$$

Teorem 2.3.3.

$\Delta F(n) = f(n)$ ve a, b ($b \geq a$) tamsayılar olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=a}^b f(i) = F(b+1) - F(a)$$

dır [3].

İspat: $F(n) = \Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ olduğundan.

$$\begin{aligned} \sum_{i=a}^b f(i) &= \sum_{i=0}^{a-1} f(i) + \sum_{i=a}^b f(i) - \sum_{i=0}^{a-1} f(i) \\ &= \sum_{i=0}^b f(i) - \sum_{i=0}^{a-1} f(i) \\ &= F(b+1) - F(a) \end{aligned}$$

Örnek 2.3.5.

$\sum_{i=1}^n i^2$ toplamını hesaplayalım

$i^2 = i^{(2)} + i^{(1)}$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n (i^{(2)} + i^{(1)})$$

yazılabilir. Burada $f(i) = i^{(2)} + i^{(1)}$ nin ters farkı,

$$F(i) = \frac{i^{(3)}}{3} + \frac{i^{(2)}}{2} \text{ dir. Teorem 2.3.3den,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= F(n+1) - F(1) \\ &= \left[\frac{(n+1)(n)}{2} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3} \right] - \left[\frac{(1)(0)(-1)}{3} + \frac{(1)(0)}{2} \right] \\ &= \frac{(n+1)(n)}{2} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Diferansiyel analiz ile fark analizi arasındaki benzerlikler Tablo 2.1. de gösterilmiştir.

Tablo 2.1. Diferansiyel analiz ile fark analizi arasındaki benzerlikler tablosu [9].

Fark Analizi	Diferansiyel Analiz
$\Delta y(n) = y(n + \varepsilon) - y(n)$	$Dy(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta y(t)}{\varepsilon}$
$\Delta cy = c\Delta y$	$Dcy = cDy$
$\Delta y^{(k)} = k\Delta y^{(k-1)}$	$Dy^k = ky^{k-1}$
$\Delta^k y = \Delta(\Delta^{k-1} y)$	$D^k y = D(D^{k-1} y)$
$\Delta(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 \Delta y_1 + c_2 \Delta y_2$	$D(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Dy_1 + c_2 Dy_2$
$y(n)$, k yıncı dereceden bir polinom ise, $\Delta^k y = \text{sabit}$ ve $l \geq k + 1$ için $\Delta^l y = 0$ dır	$y(t)$, k yıncı dereceden bir polinom ise, $D^k y = \text{sabit}$ ve $l \geq k + 1$ için $D^l y = 0$ dır.
$\Delta(yx) = x\Delta y + (Ey)\Delta x$	$D(yx) = xDy + yDx$
$\Delta \frac{y}{x} = \frac{x\Delta y - y\Delta x}{xEx}$	$D \frac{y}{x} = \frac{xDy - yDx}{x^2}$
$\Delta F = f$ ise $\Delta^{-1} f = F + c$	$DF = f$ ise $\int f = F + c$

2.4. Fark Denklemleri

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi $y'(x), y''(x), \dots$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in (discrete) değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x in tam sayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde durulacaktır.

Örneğin $y(n+1) - y(n) = 2$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklem, bir dönem sonraki büyüklüğü ile şu andaki y büyüklüğü arasındaki farkın sabit ve iki ye eşit olduğunu ortaya koymaktadır. Ardışık işlemler sonucunda,

$$\begin{aligned}
n = 0 \text{ için } y(1) &= y(0) + 2 \\
n = 1 \text{ için } y(2) &= y(1) + 2 \\
n = 2 \text{ için } y(3) &= y(2) + 2 \\
&\vdots \\
n = t \text{ için } y(t) &= y(t-1) + 2 \\
+ \\
\hline
y(t) &= y(0) + 2t
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.4.1. $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve y bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k)) = 0 \quad (2.6)$$

eşitliğine *fark denklemi* denir.

Tanım 2.4.2. $E = \Delta + I$ operatörü göz önüne alındığında (2.6) fark denklemi

$$G(n, y(n), \Delta y(n+1), \dots, \Delta^n y(n+k)) = 0$$

formunda yazılabilir. (2.6) denklemi

$$y(n+k) = f(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1))$$

ya da

$$\Delta^k y(n) = g(n, y(n), \Delta y(n+1), \dots, \Delta^{n-1} y(n))$$

ya da

$$\Delta^k y(n) = g(n, y(n), y(n+1), \dots, y(n+k-1))$$

formlarına, *normal fak denklemi* denir.

Tanım 2.4.3. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin (indislerinin) farkına o denklemin *basamağı* denir.

Örnek 2.4.1.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

denklemini, $(n+1) - (n) = 1$ olduğundan, birinci mertebeden bir fark denklemdir.

Örnek 2.4.2.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

denklemini, $(n+1) - (n-1) = 2$ olduğundan, ikinci mertebeden bir fark denklemdir.

Tanım 2.4.4. \mathbb{N} üzerinde tanımlı bir $y(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için (2.6) denklemini sağlanıyorsa, o zaman $y(n)$ fonksiyonuna \mathbb{N} üzerinde (2.6) denkleminin bir *çözümü* denir. k yuncu basamaktan bir fark denklemini,

$$\psi(n, y, c_1, c_2, \dots, c_k) = 0$$

veya

$$y = \varphi(n, c_1, c_2, \dots, c_k)$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne *genel çözüm* adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de *özel çözüm* denir

2.4.1. Lineer fark denklemleri

Tanım 2.4.5. $A_1(n), A_2(n), \dots, A_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots\}$ üzerinde $A_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + A_1(n)y(n+k-1) + \dots + A_k(n)y(n) = g(n) \quad (2.7)$$

Biçimindeki bir denkleme k yuncu basamaktan *lineer fark denklem* denir bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman *homojen denklem*, aksi durumda *homojen olmayan denklem* olarak adlandırılır. Buna göre k yuncu basamaktan *lineer homojen fark denklem*

$$y(n+k) + A_1(n)y(n+k-1) + \dots + A_k(n)y(n) = 0 \quad (2.8)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca bütün $A_i(n)$ katsayıları $A_i(n) \equiv A_i$ şeklinde sabitse, (2.7) denkleminde sabit katsayılı aksi halde *değişken katsayılı* fark denklemi denir.

Örnek 2.4.3.

$y(n+2) - 5y(n+1) + y(n) = n$ denklemi $(n+2) - (n) = 2$ olduğu ikinci mertebeden fark denklemi, bağımlı değişkenin derecesi bir olduğundan lineerdir. Dolayısıyla ikinci mertebeden lineer fark denklemi olur.

Örnek 2.4.4.

$y(n+3) - 2y(n+2) + 2y(n+1) - 3y(n) = 0$ denklemi üçüncü mertebeden lineer fark denklemdir.

Örnek 2.4.5.

$y(n+2) - y^2(n) = y^3(n+1)e^n$ denklemi, ikinci mertebeden lineer olmayan bir fark denklemdir.

Eğer $g(n) = 0$ ise (2.7) denkleminde *lineer homojen fark denklemi* denir. A_0, A_1, \dots, A_{k-1} katsayıları sabit iseler denkleme *sabit katsayılı lineer fark denklemi*, A_0, A_1, \dots, A_{k-1} katsayıları n nin birer fonksiyonu iseler denkleme *değişken katsayılı lineer fark denklemi* denir.

2.4.2. Birinci mertebeden fark denklemleri

$p(t)$ ve $r(t)$ fonksiyonları verilsin. $p(t) \neq 0$ olsun birinci mertebeden fark denklemleri,

$$y(t+1) - p(t)y(t) = r(t) \quad (2.9)$$

biçimindedir.

$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$ olduğunu biliyoruz. Eğer özel olarak $p(t) = 1$ alınırsa (2.9) denklemi $\Delta y(t) = r(t)$ olduğu görülür. Her iki tarafın toplamı alınırsa $y(t) = \sum r(t) + c(t)$, $\Delta c(t) = 0$ olur.

Kolaylık için, kabul edelim ki, $t = a, (a + 1), (a + 2), \dots$ için:

$$u(a + 1) = p(a)u(a) \text{ homojen denklemini ele alalım}$$

$$u(a + 2) = p(a + 1)u(a + 1) = p(a + 1)p(a)u(a)$$

$$u(a + 3) = p(a + 2)u(a + 2) = p(a + 2)p(a + 1)p(a)u(a)$$

\vdots

$$u(a + n) = u(a) \prod_{k=0}^{n-1} p(a + k)$$

bulunur. Bu çözümde $a + k = s$ ve $a + n = t$ alınırsa $k = 0$ için, $s = a$ dır. Her iki denklemde a yı yalnız bırakılırsa,

$u(t) = u(a)p(a)p(a + 1)p(a + 2)\dots p(t - 1)$, $t - 1 \geq a$ dır. Buradan anlaşılıyor ki $t \geq a + 1$ için

$$\prod_{s=a}^{t-1} p(s) = 1$$

dir ve burada çarpım $a, a + 1, a + 2, \dots, t - 1$ tarafından yapılır. Şimdi bu eşitliği göstermek için $t = a$ alalım,

$$u(a) = u(a)p(a)p(a - 1)$$

$$u(a) = u(a) \underbrace{\prod_{s=a}^{a-1} p(s)}_{=1}$$

şeklinde gösterilir.

(2.9) denkleminde $y(t)$ yerine $y(t) = u(t)v(t)$ yazılarak

$$y(t + 1) - p(t)y(t) = r(t) \text{ denkleminde,}$$

$$u(t + 1)v(t + 1) - p(t)u(t)v(t) = r(t)$$

ve $u(t + 1) = p(t)u(t)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$p(t)u(t)v(t + 1) - p(t)u(t)v(t) = r(t)$$

veya

$$p(t)u(t)[v(t+1) - v(t)] = r(t)$$

$$\Delta v(t) = \frac{r(t)}{p(t)u(t)} \Rightarrow \Delta v(t) = \frac{r(t)}{u(t+1)} \Rightarrow \Delta v(t) = \frac{r(t)}{Eu(t)} \Rightarrow v(t) = \Delta^{-1} \frac{r(t)}{Eu(t)}$$

$$v(t) = \Delta^{-1} \frac{r(t)}{p(t)u(t)} + c$$

elde edilir. $y(t) = u(t)v(t)$ olduğunda

$$y(t) = u(t) \left[\Delta^{-1} \frac{r(t)}{p(t)u(t)} + c \right]$$

bulunur.

Teorem 2.4.1. $p(t) \neq 0$ olmak üzere $t = a, a+1, a+2, \dots$ için $r(t)$ fonksiyonu verilmiş olsun.

a) $u(t+1) = p(t)u(t)$ homojen denkleminin çözümü

$$u(t) = u(a) \prod_{s=a}^{t-1} p(s), \quad (t = a, a+1, a+2, \dots)$$

b) (2.9) denkleminin çözümleri, c bir sabit ve $u(t)$, sıfırdan farklı bir fonksiyon

$$y(t) = u(t) \left[\Delta^{-1} \frac{r(t)}{p(t)u(t)} + c \right]$$

ile verilir.

(2.9) da $a(t)$ ve $r(t)$ fonksiyonları verilsin, ve $0 \leq t_0 \leq t$ olsun.

Birinci mertebeden homojen olmayan fark denklemi,

$$y(t+1) - a(t)y(t) = r(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer probleminin çözümü,

$$y(t) = \left[\prod_{i=t_0}^{t-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{k=t_0}^{t-1} \left[\prod_{i=k+1}^{t-1} a(i) \right] r(k)$$

şeklinde verilir [9].

Örnek 2.4.6.

$$y(t+1) - ty(t) = (t+1)!$$

$$y(1) = 5 \quad (t = 1, 2, 3, \dots)$$

başlangıç değer problemini çözelim.

Burada,

$$a(t) = t, \quad r(t) = (t+1)!, \quad t_0 = 1, \quad y_0 = 5$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[\prod_{i=1}^{t-1} i \right] \cdot 5 + \sum_{k=1}^{t-1} \left[\prod_{i=k+1}^{t-1} i \right] (k+1)! \\ &= 5[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (t-1)] + \sum_{k=1}^{t-1} [(k+1)(k+2) \dots (t-1)](k+1)! \\ &= 5(t-1)! + \sum_{k=1}^{t-1} \underbrace{[k!(k+1)(k+2) \dots (t-1)]}_{(t-1)!} (k+1) \\ &= 5(t-1)! + (t-1)! \sum_{k=1}^{t-1} (k+1) \\ &= (t-1)! \left[5 + \sum_{k=1}^{t-1} (k+1) \right] = (t-1)! [5 + 2 + 3 + 4 + \dots + t] \\ &= (t-1)! \left[4 + 1 + \underbrace{2 + 3 + 4 + \dots + t}_{\frac{t(t+1)}{2}} \right] = (t-1)! \left[4 + \frac{t(t+1)}{2} \right] \\ &= 4(t-1)! + (t+1)t \frac{(t-1)!}{2} = \frac{(t+1)!}{2} + 4(t-1)! \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.4.7.

$$y(t+1) - ty(t) = t!3^t$$

$$y(1) = \frac{1}{2}$$

başlangıç değer problemini çözelim. Burada, $a(t) = t, \quad r(t) = t!3^t$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{t-1} i + \sum_{k=1}^{t-1} \left[\prod_{i=k+1}^{t-1} i \right] k!3^k = \frac{1}{2} (t-1)! + \sum_{k=1}^{t-1} (t-1)!3^k = \frac{1}{2} (t-1)! + (t-1)! \sum_{k=1}^{t-1} 3^k \\ &= (t-1)! \left[\frac{1}{2} + \frac{3-3^t}{1-3} \right] = (t-1)! \left[\frac{1}{2} + \frac{3^t-3}{2} \right] = (t-1)! \left[\frac{3^t}{2} - 1 \right] \end{aligned}$$

Uyarı: Birinci mertebeden sabit katsayılı

$$y(t+1) = ay(t) + r(t)$$

Denklemleri ve $y(k) = y_0$ koşulu için çözüm formülü

$$y(t) = \left[\prod_{i=0}^{t-1} a \right] y_0 + \sum_{k=0}^{t-1} a^{t-k-1} r(k)$$

şeklini alır. Ayrıca r sabit olacak şekilde $r(t) = r$ olduğu zaman da,

$$y(t) = \begin{cases} a^t y_0 + \left(\frac{a^t - 1}{a - 1} \right) r, & a \neq 1 \\ y_0 + r(t), & a = 1 \end{cases}$$

bulunur [9].

Örnek 2.4.8.

$y(t+1) = 4y(t) + 5^t$, $y(1) = 1$, $a = 4$ başlangıç değer problemini çözümü,

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[4^{t-1} \right] 1 + \sum_{k=1}^{t-1} 4^{t-k-1} 5^k \\ &= 4^{t-1} + \sum_{k=1}^{t-1} 4^{t-1} \left(\frac{5}{4} \right)^k = 4^{t-1} + 4^{t-1} \sum_{k=1}^{t-1} \left(\frac{5}{4} \right)^k \\ &= 4^{t-1} + 4^{t-1} \left(\frac{\frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4} \right)^t}{1 - \frac{5}{4}} \right) = 4^{t-1} + 4^{t-1} \left(\frac{\left(\frac{5}{4} \right)^t - \frac{5}{4}}{\frac{5}{4} - 1} \right) \\ &= 4^{t-1} + 4^{t-1} \left(\frac{\left(\frac{5}{4} \right)^t - \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} \right) = 4^{t-1} + 4 \frac{4^t}{4} \frac{5^t}{4^t} - \frac{4^t}{4} \frac{5}{4} 4 \\ &= 5^t + 4^t \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4} \right) = 5^t - 4^t \text{ dir.} \end{aligned}$$

2.4.3. İkinci mertebeden fark denklemleri

a_1 ve a_2 katsayıları reel sabitler ve $a_2 \neq 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemleri

$$y(t+2)+a_1y(t+1)+a_2y(t)=0 \quad (2.10)$$

biçimindedir.

Bu denklem için λ^t biçiminde bir çözüm aranırsa $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ bulunur. Bu denkleme (2.10) fark denkleminin karakteristik denklemi denir. Bu denklemin köklerine karakteristik kökler denir. (2.10) fark denkleminin genel çözümü λ_1, λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır.

I. Durum: λ_1 ve λ_2 kökleri reel ve birbirinden farklı ise bu durumda $\{\lambda_1^t, \lambda_2^t\}$ kümesi (2.8) fark denkleminin temel çözümler kümesidir. Yani (2.10) fark denkleminin genel çözümü

$$y(t)=c_1\lambda_1^t+c_2\lambda_2^t \text{ dir. Burada } c_1 \text{ ve } c_2 \text{ keyfi sabitlerdir.}$$

Örnek 2.4.9.

$$y(t+2)-3y(t+1)+2y(t)=0 \text{ homojen denkleminin homojen çözümünü bulalım.}$$

Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ kökler } \lambda_1=1, \lambda_2=2 \text{ şeklinde bulunur.}$$

Buradan,

$$y(t)=c_1+c_22^t$$

dir.

Örnek 2.4.10.

$$y(t+2)-4y(t+1)+3y(t)=0 \text{ denklemini } y(0)=0, y(4)=10 \text{ şartları altında çözelim.}$$

Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$$\lambda^2-4\lambda+3=0 \text{ kökler } \lambda_1=1, \lambda_2=3 \text{ şeklinde bulunur.}$$

Buradan, genel çözüm

$$y(t) = c_1 1^t + c_2 3^t$$

biçiminde olur. Sınır şartları yardımı ile $c_1 = -\frac{1}{8}$, $c_2 = \frac{1}{8}$ bulunur ve

$$y_p(t) = \frac{1}{8}(3^k - 1)$$

özel çözümüne ulaşılır.

II. Durum: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun (2.10) fark denkleminin bir tam çözüm kümesi $\{\lambda^t, t\lambda^t\}$

olup genel çözüm $y(t) = c_1 \lambda^t + c_2 t \lambda^t$ dir. c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 2.4.11.

$y(t+2) - 2y(t+1) + y(t) = 0$ denkleminin karakteristik denklemi

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ şeklinde bulunur.

$$y(t) = c_1 + c_2 t$$

III. Durum: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olsun. Burada $\alpha, \beta \in R$ ve $\beta \neq 0$ dir.

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$y(t) = r^t (c_1 \cos t\theta + c_2 \sin t\theta)$$

Örnek 2.4.12.

$$y(t+1) - 2y(t) + 2y(t-1) = 0$$

Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, kökler $\lambda_{1,2} = 1 \mp i$ şeklinde bulunur.

Buradan,

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$y(t) = (\sqrt{2})^t \left(c_1 \cos t \frac{\pi}{4} + c_2 \sin t \frac{\pi}{4} \right)$$

Örnek 2.4.13.

$y(t+2) + 4y(t) = 0$ Fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$\lambda^2 + 4 = 0$, kökler, $\lambda_{1,2} = \mp 2i$ şeklinde bulunur.

Buradan,

$$r = \sqrt{2^2} = 2 \quad , \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{0}\right) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$y(t) = 2^t \left(c_1 \cos t \frac{\pi}{2} + c_2 \sin t \frac{\pi}{2} \right)$$

Şimdi k yncı mertebeden lineer homojen fark denklemi

$$y(t+k) + p_1(t)y(t+k-1) + \dots + p_k(t)y(t) = 0 \quad (2.11)$$

biçimindedir.

Tanım 2.4.6. $\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olsunlar. Her $n \geq n_0 \geq 0$ için

$$c_1\phi_1(n) + c_2\phi_2(n) + \dots + c_k\phi_k(n) = 0 \quad (2.12)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2, \dots, c_k sabitleri varsa

$\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)\}$ cümlesine $n \geq n_0$ üzerinde lineer bağımlıdır denir (2.12)

denklemi her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ halinde sağlanıyorsa, o

zaman $\{\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_k(n)\}$ cümlesine $n \geq n_0$ üzerinde lineer bağımsızdır denir;

burada $\phi_i(n) = (\phi_{1i}(n), \phi_{2i}(n), \dots, \phi_{ki}(n))^T$ ($i = 1, 2, \dots, k$) dir.

Tanım 2.4.7. (2.11) denkleminin k tane lineer bağımsız çözümüne *çözümlerin temel kümesi* denir.

Tanım 2.4.8. $x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)$ fonksiyonlarının $W(t)$ ile gösterilen Casoratyanı

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_r(t) \\ x_1(t+1) & x_2(t+1) & \dots & x_r(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(t+r-1) & x_2(t+r-1) & \dots & x_r(t+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır [9].

Teorem 2.4.2. (2.11) denkleminin $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$ çözümlerinin bir temel cümle oluşturması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $t_0 \in Z^+$ için $W(t_0) \neq 0$ dır [9].

Örnek 2.4.14.

$y(t+3) - 7y(t+1) + 6y(t) = 0$ fark denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$t+3-t=3$ olduğundan verilen fark denklemi 3. mertebedendir. Fark denkleminin karakteristik denklemi $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$ yazılırsa kökler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = -3$ olarak bulunur.

$y_1(t) = 1^t, y_2(t) = 2^t, y_3(t) = (-3)^t$ olduğundan

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & (-3)^t & 2^t \\ 1 & (-3)^{t+1} & 2^{t+1} \\ 1 & (-3)^{t+2} & 2^{t+2} \end{vmatrix} = -20(2)^n (-3)^n \neq 0$$

genel çözüm $y(t) = c_1 1^t + c_2 2^t + c_3 (-3)^t$ biçimindedir

Örnek 2.4.15.

$y(t+3) + 3y(t+2) - 4y(t+1) - 12y(t) = 0$

fark denkleminin karakteristik denklemi yazılırsa,

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ kökleri bulunur.

$$y_1(t) = 2^t, y_2(t) = (-2)^t, y_3(t) = (-3)^t \text{ dir.}$$

Bu çözümler $\{2^t, (-2)^t, (-3)^t\}$ bir temel cümle oluştururlar. Çünkü onların Casoratyanı

$$W(t) = \begin{pmatrix} 2^t & (-2)^t & (-3)^t \\ 2^{t+1} & (-2)^{t+1} & (-3)^{t+1} \\ 2^{t+2} & (-2)^{t+2} & (-3)^{t+2} \end{pmatrix} = -20 \neq 0$$

Şeklinde olup $t = 0$ noktasında

$$W(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix} = -20 \neq 0 \text{ dir.}$$

2.4.4. Lineer homojen olmayan fark denklemler

k yıncı mertebeden lineer homojen olmayan fonksiyon denklemi,

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n) \quad (2.13)$$

Burada, $p_k(n) \neq 0$ $n \geq n_0$ dir [4,9,11,21].

Bu denklemin bir özel çözümü için katsayıları reel sabitler olmak üzere, önce belirsiz katsayılar yöntemi ve sonrasında operatör yöntemi verilmektedir.

2.4.4.1. Belirsiz katsayılar metodu

Belirsiz katsayılar yöntemine göre önce (2.13) denkleminin ilişkin homojen

$$y(n+k) + p_1y(n+k-1) + \dots + p_ky(n) = 0 \quad (2.14)$$

denkleminin genel çözümü bulunur. Sonra $g(n)$ in belli durumları için özel çözüm olabilecek aday $y_p(t)$ çözümleri oluşturulur. Aday çözümler ile genel çözümdeki

terimler karşılaştırılır. Varsa, benzerliklerin yok edilmesi için aday çözümler n nin en küçük kuvvetleri ile çarpılır. Böylece özel çözüm şekli kesinleştirilmiş olur.

Tablo 2.2. Belli $g(t)$ fonksiyonlarına karşılık gelen $y_p(t)$ aday çözümleri [9].

$g(t)$	$y_p(t)$
a^t	Aa^t
t^k (<i>polinom</i>)	$(A_0 + A_1 + \dots + A_k t^k)$
$t^k a^t$	$(A_0 + A_1 + \dots + A_k t^k) a^t$
$\sin \alpha t$ veya $\cos \alpha t$	$A \sin \alpha t + B \cos \alpha t$
$a^t \sin \alpha t$ veya $a^t \cos \alpha t$	$(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t) a^t$
$t^k a^t \sin \alpha t$ veya $t^k a^t \cos \alpha t$	$(A_0 + A_1 + \dots + A_k t^k) a^t \sin \alpha t +$ $(B_0 + B_1 + \dots + B_k t^k) a^t \cos \alpha t$

Örnek 2.4.16.

$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 3^t$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Denklemin homojen çözümünü elde etmek için karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \text{ biçimindedir ve kökleri,}$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ olur. Homojen çözümü,

$$y_h = c_1 1^t + c_2 2^t$$

biçimindedir.

$$\text{Temel Küme} = \{1, 2^t\}$$

$$\text{Belirsiz Katsayılar Kümesi} = \{3^t\} \Rightarrow y_p(t) = A3^t, y_p(t+1) = A3^{t+1}, y_p(t+2) = A3^{t+2}$$

$$A = \frac{1}{2}, y_p(t) = \frac{1}{2}3^t$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1 + c_2 2^t + \frac{1}{2}3^t$$

bulunur.

Örnek 2.4.17.

$y(t+2) - 5y(t+1) + 6y(t) = 2^t$ denklemin genel çözümünü bulalım.

Bu denklemin homojen çözümünü elde etmek için karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

biçimindedir ve kökleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ dür.

$$y_h(t) = c_1 2^t + c_2 3^t$$

$$\text{Temel Küme} = \{2^t, 3^t\}$$

$$\text{Belirsiz Katsayılar Kümesi} = \{2^t\}$$

$$\text{Yeni Belirsiz Katsayılar Kümesi} = \{t 2^t\}$$

$$y_p(t) = At 2^t, y_p(t+1) = A(t+1)2^{t+1}, y_p(t+2) = A(t+2)2^{t+2}$$

$$A = -\frac{1}{2}, y_p(t) = -\frac{1}{2}t 2^t = -t 2^{t-1}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 2^t + c_2 3^t - t 2^{t-1} \end{aligned}$$

bulunur.

2.4.4.2 Operatör Metodu

Sabit katsayılı lineer homojen olmayan fonksiyon denklemlerinin özel çözümlerini bulmak için $L(E)$ operatör yöntemi verilecektir.

$$L(E)y(t) = F(t) \quad (2.15)$$

veya $y(t+k) + p_k(t)y(t+k-1) + \dots + p_0(t)y(t) = F(t)$ biçiminde sabit katsayılı lineer homojen fonksiyon denklemi verilsin (2.15) denkleminin bir özel çözümü,

$$y_p(t) = \frac{1}{L(E)} F(t) \quad (2.16)$$

dir. Belli $F(t)$ durumları için (2.16) hesabı aşağıdaki teoremler ile verilecektir [9].

Teorem 2.4.3: Eğer $F(t) = a^t$ ($a \in \mathbb{R}$) ve $L(a) \neq 0$ ise

$$y_p(t) = \frac{1}{L(E)} a^t = \frac{a^t}{L(a)} \text{ dir [9].}$$

Teorem 2.4.4: $F(t)$, t ye bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$y_p(t) = \frac{1}{L(E)} a^t F(t) = a^t \frac{1}{L(aE)} F(t) \text{ dir [9].}$$

Sonuç 2.4.5. $F(t) = P(t)$ olsun; burada $P(t)$, m inci dereceden bir polinomdur. Bu durumda,

$$\frac{1}{L(E)} P(t) = \frac{1}{L(1+\Delta)} P(t) = \left(\frac{1}{L(1)} + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \dots + b_m\Delta^m \right) P(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(E)} a^t P(t) &= a^t \frac{1}{L(aE)} P(t) = a^t \frac{1}{L(a+a\Delta)} P(t) \\ &= a^t \left(\frac{1}{L(a)} + b_1\Delta + b_2\Delta^2 + \dots + b_m\Delta^m \right) P(t) \text{ dir [9].} \end{aligned}$$

Teorem 2.4.6: $L(a) = 0$ ve

$L(E) = (E-a)^m h(E)$, $h(a) \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$y_p(t) = \frac{1}{L(E)} a^t = \frac{a^{t-m} t^m}{h(a)m!} \text{ dir [9].}$$

Örnek 2.4.18.

$y(t+2) - y(t+1) - 2y(t) = 6$ fark denklemini çözelim.

$$(E^2 - E - 2)y(t) = 6 \Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{(E^2 - E - 2)} 6 = \left(\frac{1}{L(1)} + b_1\Delta + b_2\Delta + \dots\right)6, y_p(t) = -3$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = c_1(-1)^t + c_2 2^t - 3$$

Örnek 2.4.19.

$y(t+2) - 5y(t+1) + 6y(t) = 3^t$ fark denklemini çözelim.

$$(E^2 - 5E + 6)y(t) = 3^t \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, L(E) = (E-a)^m h(E)$$

$$y_h(t) = c_1 2^t + c_2 3^t$$

$$y_p(t) = \frac{1}{E^2 - 5E + 6} 3^t, L(3) = 0 \text{ olduğunda Teorem 2.5.4 den,}$$

$$L(E) = (E-2)(E-3) = (E-a)^m h(E)$$

$$y_p(t) = \frac{a^{t-m} t^m}{h(a)m!}$$

$$y_p(t) = \frac{3^{t-1} t}{(3-2)!} = t 3^{t-1}$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \\ = c_1 2^t + c_2 3^t + t 3^{t-1}$$

Örnek 2.4.20.

$y(t+2) - 4y(t+1) + 4y(t) = 2^t$ fark denklemini çözelim.

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t)2^t$$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{(E-2)^2} 2^t \\ &= \frac{2^{t-2} t^2}{2!} = \frac{2^t t^2}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= (c_1 + c_2 t)2^t + \frac{2^t t^2}{8} \end{aligned}$$

Örnek 2.4.21.

$y(t+2) - 7y(t+1) + 12y(t) = 4^t$ fark denklemini çözelim.

$$(E^2 - 7E + 12)y(t) = 4^t$$

karakteristik demklemin kökleri,

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$$

$$y_h(t) = c_1 3^t + c_2 4^t$$

$$y_p(t) = \frac{1}{(E-3)(E-4)} 4^t, \quad L(E) = 0 \text{ olduğunda}$$

$$L(E) = (E-4)h(E), \quad h(E) = E-3$$

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{1}{L(E)} 4^t \\ &= \frac{4^{t-1} t}{h(4)m!} = t 4^{t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ &= c_1 3^t + c_2 4^t + t 4^{t-1} \end{aligned}$$

Örnek 2.4.22.

$(E - 3)(E - 4)y(n) = (3 - 2t + t^2)6^t$ denkleminin bir özel çözümü

$$y_p(t) = \frac{1}{(E - 3)(E - 4)}(3 - 2t + t^2)6^t$$

biçiminde yazılabilir. Teorem 2.5.2 den,

$$y_p(t) = 6^t \frac{1}{(6E - 3)(6E - 4)}(3 - 2t + t^2)$$

ve $E = 1 + \Delta$ dan,

$$y_p(t) = 6^{t-1} \frac{1}{1 + 5\Delta + 6\Delta^2}(3 - 2t + t^2)$$

elde edilir. Şimdi $\frac{1}{1 + 5\Delta + 6\Delta^2}$ ifadesi $\frac{1}{1 + y}$ kesrine benzetilerek seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= 6^{t-1} \left[1 - (5\Delta + 6\Delta^2) + (5\Delta + 6\Delta^2)^2 \right] (3 - 2t + t^2) \\ &= 6^{t-1} \left[1 - 5\Delta + 19\Delta^2 \right] (3 - 2t + t^2) \\ &= 6^{t-1} (46 - 12t + t^2) \end{aligned}$$

özel çözümü bulunur.

3.BÖLÜM

HOMOTOPI ANALİZ METODU

3.1 Homotopi Analiz Metodu

Homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol altına almamızı sağlayan Homotopi Analiz Metodu (HAM) 1992 de Shijun Liao tarafından ortaya konmuştur [23-38]. Homotopi Analiz Metodu, Adomian Ayrışım Metodu, Lyapunov Yapay Parametre Metodu, δ -Açılım Metodu gibi önceden verilen pertürbatif metotlarını birleştirerek genel bir çözüm yöntemi sunar. Homotopi Analiz Metodu lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözüm serilerini elde etmek için kullanılan yarı analitik bir yaklaşımdır. Bu metotla cebirsel denklemler, adi diferansiyel denklemler, gecikmeli diferansiyel denklemler ve benzeri denklemlerin çözüm serilerine fiziksel parametrelerden bağımsız olarak ulaşılabilir ve yakınsaklık bölgesi ve hızı kontrol altına alınabilir.

Homotopi Analiz Metodu, Homotopi Perturbasyon Metodunda olduğu gibi topolojinin temel kavramlarından homotopiyi kullanarak ele alınan problemin başlangıç şartı veya sınır şartlarından tam çözüme götüren sürekli ve sıralı bir dönüşüm elde etmemizi sağlar. Bu tür bir sürekli dönüşümü, oluşturmak için yardımcı lineer operatör ile çözüm serisinin yakınsaklığını kontrol altına almak için yardımcı parametre kullanır. Bu metot başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi Analiz Metodu yardımıyla zor bir lineer olmayan problem çok daha basit alt problemlere dönüştürülerek her bir alt problemin çözümüyle çözüm serisi oluşturulur.

Bilindiği gibi bu yöntemler, 90'lı yıllarda ortaya çıkan yöntemler olup temelde seri çözümlere dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. HAM lineer ve lineer olmayan Fredholm integral denklemlerin de uygulanabilmekte ve başarılı bir sonuçlar vermektedir. Bu tezde çözülen problemlerin literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün

değildir. Burada kullanılan yaklaşımlarla, elde edilen literatürde mevcut ve yeni çözümlerin, analizlerinin yapılması sağlanmıştır.

Örneğin aşağıdaki lineer olmayan cebirsel denklemi göz önüne alalım;

$$N[f(t)] = 0, t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

burada N lineer olmayan bir operatör olmak üzere (3.1) denklemi bazı başlangıç değerleri ve sınır koşullarına bağlı bir lineer olmayan denklemdir.

f_0, f 'in bir başlangıç yaklaşımı ve $q \in [0,1]$ homotopi parametresi olmak üzere aşağıdaki homotopiyi kuralım.

$$H[\phi(t; q); f_0(t), H(t), \hbar, q] \equiv (1 - q)L[\phi(t; q) - f_0(t)] - q\hbar H(t)N[\phi(t; q)] \quad (3.2)$$

Burada $\hbar \neq 0$ yakınsaklık kontrol parametresi, $H(t)$ yardımcı fonksiyon, $q \in [0,1]$ olan çözüm için bir başlangıç yaklaşım parametresi, $f_0(t)$ başlangıç veya sınır şartları, L lineer operatör ve N lineer olmayan bir operatördür. Şimdi (3.2) homotopinin sağ tarafını sıfır yapalım,

$$(1 - q)L[\phi(t; q) - f_0(t)] = q\hbar H(t)N[\phi(t; q)] \quad (3.3)$$

Denklem (3.3) sıfırıncı dereceden deformasyon denklemi olarak bilinir. Burada $q = 0$ alınırsa,

$$L[\phi(t; 0) - f_0(t)] = 0 \quad (3.4)$$

olur ve $\phi(t; 0)$ başlangıç şartı olan $f_0(t)$ ye eşit olur.

$$\phi(t; 0) = f_0(t) \quad (3.5)$$

$q = 1$ alınırsa, (3.1) denklemi

$$N[\phi(t; 1)] = 0 \quad (3.6)$$

olur. Bu bize $\phi(t, 1)$ in (3.1) denkleminin sınır şartını sağlayan $f(t)$ ye eşit olduğunu gösterir.

$$\phi(t;1) = f(t) \quad (3.7)$$

(3.5) ve (3.7) gösterir ki $q, 0$ ile 1 arasında değiştikçe $\phi(t; q)$ nin, $f_0(t)$ den problemin çözümlü olan $f(t)$ ye ulaştığını gösterir.

$f(t)$ nin m . mertebeden Taylor serisine açılımı yapılırsa,

$$f_m(t) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (3.8)$$

bulunur,

$$\phi(t; q) = \phi(t; 0) + \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m = f_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) q^m \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada $f_m(t)$ in seri olarak hesaplanması çok önemlidir. $f_m(t)$ yi, seri olarak hesaplamak için (3.3) denkleminde q ye göre türevi alınır,

$$(1-q)L\left(\frac{\partial \phi(t; q)}{\partial q}\right) - L(\phi(t; q) - f_0(t)) = \hbar H(t)N[\phi(t; q)] + q\hbar H(t) \frac{\partial N[\phi(t; q)]}{\partial q} \quad (3.10)$$

yazılabilir [25]. (3.10) denkleminde $q = 0$ alınır ve (3.5) nin sonucu olarak (3.8) denklemini verir.

$$L[f_1(t)] = \hbar H(t)N[f_0(t)] \quad (3.11)$$

Burada $m \geq 2$ için aşağıdaki denklemi önerilir [4].

$$(1-q)L\left(\frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m}\right) - mL\left(\frac{\partial^{m-1} \phi(t; q)}{\partial q^{m-1}}\right) = m\hbar H(t) \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} + q\hbar H(t) \frac{\partial^m N[\phi(t; q)]}{\partial q^m} \quad (3.12)$$

Bu denklemin ispatı tümevarım yöntemi ile kolaylıkla gösterilebilir.

(3.12) denkleminde $q = 0$ alınır ve her iki tarafı $m!$ e bölünürse,

$$(1-q)L\left[\frac{\frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m}}{\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \phi(t; q)}{\partial q^{m-1}}}\right]_{q=0} = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.13)$$

Buradan $m \geq 2$ için,

$$L[f_m(t) - f_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.14)$$

yazılabilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

olarak tanımlanırsa (3.11) ve (3.14)' ün sonucu olarak m inci mertebeden deformasyon denklemi,

$$L[f_m(t) - \chi_m f_{m-1}(t)] = \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (3.16)$$

olur. Bu denklem $m \geq 1$ için geçerlidir.

(3.16) denkleminde denklemin sağ tarafı $f(t)$ ye bağlı olduğu açıktır. m in artan kuvvetlerine göre $f_m(t)$ çözümleri elde edilir ki bu m inci mertebeden deformasyon denkleminin çözümüne eşittir ve

$$f_m(t) = \chi_m f_{m-1}(t) + L^{-1} \left\{ \hbar H(t) \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \right\} \quad (3.17)$$

olarak yazılır. Burada L^{-1} , L lineer operatörünün ters operatörüdür.

$$f_m(t) = \sum_{k=0}^m f_k(t) \quad (3.18)$$

olur. (3.1) denkleminin çözümü ,

$$f(t) = \phi(t; 1) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(t) \quad (3.19)$$

olur [25].

3.2 Lineer fark denkleminin deformasyon denklemi

Bu bölümde Homotopi Analiz Metodu değişken katsayılı lineer fark denklemine uygulanacaktır [22].

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y(x+k) = f(x), \quad k \geq 0, \quad k \in N \quad (3.20)$$

Bu denklemde, $P_k(x)$ değişken katsayılar, bağımsız değişken x in bilinmeyen fonksiyonu $u(x)$ dir. $u_0(x)$, $u(x)$ çözümünün başlangıç tahmini,

$$\sum_{k=0}^{m-1} [a_{i,k} y(a+k) + b_{i,k} y(b+k) + c_{i,k} y(c+k)] = \mu_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad a \leq x, c \leq b$$

sınır koşulları olsun.

$$N[\phi(x; q)] = \sum_{k=0}^m P_k(x) \phi(x+k; q) - f(x)$$

Denkleminde $q=0$ daha sonra bulunacak olan bilinmeyen fonksiyondur.

$u_0(x)$ (3.20) denkleminin başlangıç tahmini, $\hbar \neq 0$, yakınsama kontrol parametresi, $H(x) \neq 0$ yardımcı fonksiyonu ve L lineer operatörü göstermektedir. Bu fonksiyon ve

parametreler homotopi analiz metodunu yakınsama bölgesini çözüm için kontrol etmede ve ayarlama önemli bir rol oynar. Liao, $q \in [0,1]$ gömme parametresini sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemini

$$(1-q)L[\phi(x;q) - u_0(x)] = q\hbar H(x)N[\phi(x;q)] \quad (3.21)$$

oluşturmak için kurmuştur [25]. Burada

$$N[\phi(x;q)] = \phi^{(m)}(x) - \sum_{j=1}^J \sum_{k=0}^{m-1} P_{jk}(x)\phi^{(k)}(\alpha_j x + \beta_j) + f(x) \quad (3.22)$$

olmak üzere,

(3.21)'de $q = 0$ olduğunda sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi (3.20), $\phi(x;0) = u_0(x)$ olur ve $q = 1$ olduğunda ise sıfırıncı mertebeden deformasyon denklemi (3.20), $L[\phi(x;1)] = 0$ olur. q , 0 dan 1 e değıştikçe $\phi(x;q)$ nun çözümü ilk tahmin olan $u_0(x)$ dan $u(x)$ e değışir. Bu durumda, $[\phi(x;1)]$ (3.20) lineer fark denkleminin kesin çözümüdür. $\phi(x;q)$ yu q ya göre Taylor serisine açılırsa,

$$\phi(x;q) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} q^m u_m(x) . \quad (3.23)$$

Buradan,

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x;q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad \text{elde edilir. Yardımcı lineer operatör } L, \text{ ilk tahmin fonksiyonu}$$

$u_0(x)$, \hbar yardımcı parametresi uygun bir şekilde seçilirse $q = 1$ de $\phi(x;q)$ 'nun kuvvet serisi (3.23) yakınsaktır ve buradan aşağıdaki çözüm serisi

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x) \quad (3.24)$$

elde edilir. Burada $u_m(x)$ terimleri, yüksek mertebeden deformasyon denklemi ile elde edilir.Şimdi,

$$\vec{u} = \{u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)\} \quad (3.25)$$

vektörü tanımlayalım ve (3.21) denklemini gömme parametresi q ya göre m defa türevi alınır ve $q = 0$ alınarak $m!$ bölünürse m ninci mertebeden deformasyon denklemi

$$L[u_m(x) - x_m u_{m-1}(x)] = \hbar H(x) R_m(u_{m-1}, x) \quad (3.26)$$

olarak bulunur. Burada,

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

ve

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(x; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (3.28)$$

dir [18]. Liao nun, doktora tezinde belirttiği çözüm ve katsayı kurallarına uymak için, yardımcı fonksiyon $H(x) = 1$ olarak belirlenir. Burada denklem fark denklemi olduğundan L yardımcı operatörü, fark operatörü olarak beirlenir.

Bu sayede (3.26) yüksek mertebeden lineer deformasyon denklemi ile $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$ elde edilir. m inci mertebeden $u(x)$ yaklaşımı,

$$U(x) = \sum_{m=0}^n u_m(x) \quad (3.29)$$

olur.

Deformasyon denkleminin seri çözümlerinden elde edilen $u_m(x)$ lerin toplamı olan $U(x)$ çözüm serisinin (3.29) denkleminin analitik çözümüne yakınsamasını sağlar ancak burada uygun bir \hbar yakınsaklık kontrol parametresi belirlemek gerekir. Burada \hbar parametresi $U'(0, \hbar)$, $U''(0, \hbar)$ veya $U'(1, \hbar)$, $U''(1, \hbar)$ türev grafikleri çizilerek grafiklerin yatay eksene paralel olduğu aralıkta seçilir. Bulunan uygun \hbar yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olarak elde edilen çözüm serisinin problemin gerçek çözümüne yakınsaklığı kontrol altına alınmaya çalışılır [8].

4.BÖLÜM

UYGULAMALAR

Bu bölümde, lineer ve lineer olmayan fark denklemlerinin Homotopi Analiz Metodu ile çözümleri incelenecektir.

Örnek 4.1.

$$y(x+1) - y(x) = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (4.1)$$

başlangıç değer problemini ele alalım [6,8,14]. Bu problemin tam çözümü,

$$y(x) = \frac{e^x - \sqrt{e}}{e-1} + 1 \quad (4.2)$$

dir. Öncelikle m ninci merteye deformasyon denklemini yazalım,

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \hbar H(x) R_m(\vec{y}_{m-1}(x)) \quad (4.3)$$

denklemini gereklidir. Burada,

$$\vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\} \quad (4.4)$$

ve

$$R_m(\vec{y}_{m-1}(x)) = y_{m-1}(x+1) - y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)e^x \quad (4.5)$$

olarak tanımlanır. Burada, χ_m

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x,t] = 1 \quad (4.6)$$

biçiminde, fark operatörü ,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad (4.7)$$

ve ters fark operatörü de

$$\Delta^{-1} y_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \quad (4.8)$$

olarak tanımlanır. L lineer operatörü aşağıdaki gibi seçersek,

$$L[y_n] = \Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad (4.9)$$

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar \left[c_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (y_{m-1}(x+1) - y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m) e^x) \right] \quad (4.10)$$

bulunur. Burada başlangıç yaklaşımı olarak $y_0(x) = 1$ seçilirse, (4.10) denklemi bilgisayar programları yardımı ile ardışık olarak hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_0(x, \hbar) = 1$$

$$y_1(x, \hbar) = -\frac{\hbar e^x}{e-1} + \hbar c_1 + \frac{e\hbar}{e-1}$$

$$y_2(x, \hbar) = -\frac{\hbar^2 e^x}{e-1} + \frac{e\hbar^2}{e-1} - \frac{\hbar e^x}{e-1} + 2\hbar c_1 + \frac{e\hbar}{e-1}$$

$$y_3(x, \hbar) = -\frac{\hbar^3 e^x}{e-1} + \frac{e\hbar^3}{e-1} - \frac{2\hbar^2 e^x}{e-1} + \frac{2e\hbar^2}{e-1} - \frac{\hbar e^x}{e-1} + 3\hbar c_1 + \frac{e\hbar}{e-1}$$

$$y_4(x, \hbar) = -\frac{\hbar^4 e^x}{e-1} + \frac{e\hbar^4}{e-1} - \frac{3\hbar^3 e^x}{e-1} + \frac{3e\hbar^3}{e-1} - \frac{3\hbar^2 e^x}{e-1} + \frac{3e\hbar^2}{e-1} - \frac{\hbar e^x}{e-1} + 4\hbar c_1 + \frac{e\hbar}{e-1}$$

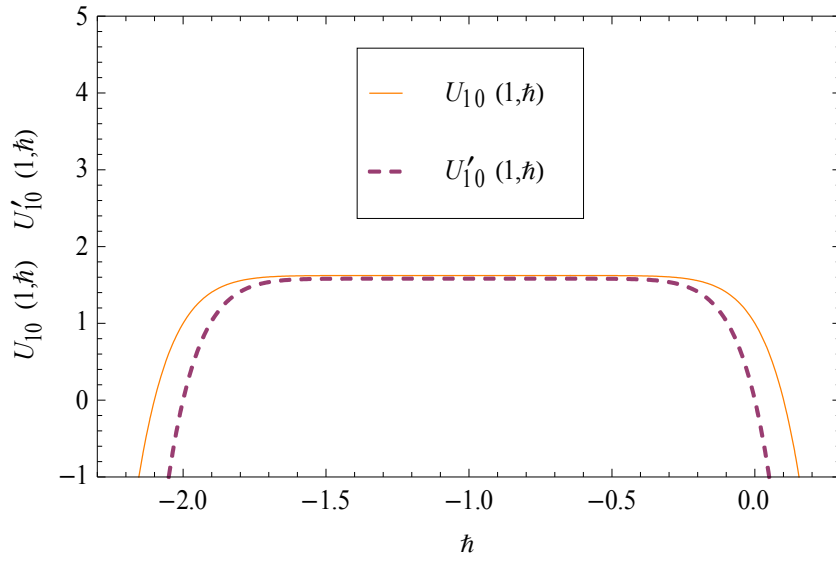
⋮

Bu şekilde, $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m y_n(x, \hbar)$ çözümü bulunur. Eğer $m = 10$ alınırsa $y_{10}(x, \hbar)$ elde

edilir ve çözüm serisi

$$y(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.11)$$

şeklinde bulunur. Burada uygun \hbar parametresi belirlemek gerekir. \hbar in uygun aralığını bulmak için, $U_{10}(1, \hbar)$ ve $U'_{10}(1, \hbar)$ grafikleri çizilerek; Şekil 4.1 deki $U_{10}(1, \hbar)$ ile $U'_{10}(1, \hbar)$ grafiklerinin x eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa \hbar in $[-1.6, -0.4]$ aralığında olması gerektiğini görülür. $x \in [0, 1]$ aralığında en küçük hatayı bulmak için seçilebilecek en iyi \hbar , yakınsaklık kontrol parametresinin, matematik programları kullanılarak hesaplamalar yapıldığında $\hbar = -0,990$ bulunur.



Şekil 4. 1. (4.1) probleminin \hbar eğrisinin grafiği

$\hbar = -0,990$ için,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^m y_m(x) \quad (4.12)$$

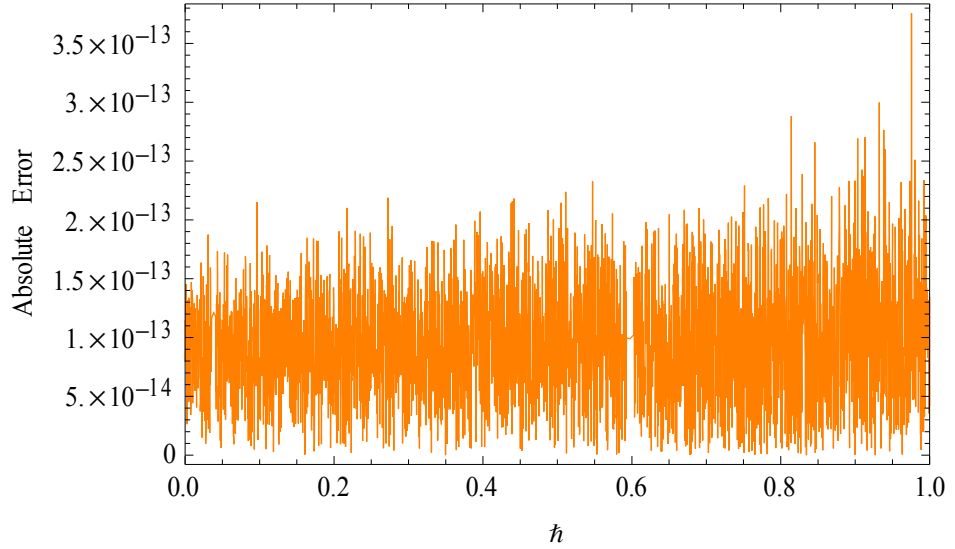
çözüm serisi (4.12) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

$$|U_{10}(x, \hbar) - \frac{e^x - \sqrt{e}}{e-1} + 1| \quad (4.13)$$

olmak üzere, hata tablosu Tablo 4.1 de elde edilir. Hata fonksiyonu grafiği Şekil 4.2. gibidir.

Tablo 4.1. (4.1) probleminin hata tablosu

i	x_i	$y(x) = \frac{e^x - \sqrt{e}}{e-1} + 1$	$U_{10}(x, \hbar)$ $\hbar = -0.990$	$ U_{10}(x, \hbar) - y(x) $ <i>Mutlak Hata</i>
0	0	0.6224593312	0.6224593312	$3.775406688 \times 10^{-31}$
1	0.1	0.6836663558	0.6836663558	$3.163336442 \times 10^{-31}$
2	0.2	0.7513105793	0.7513105793	$2.486894207 \times 10^{-31}$
3	0.3	0.8260690079	0.8260690079	$1.739309921 \times 10^{-31}$
4	0.4	0.9086898491	0.9086898491	$9.131015091 \times 10^{-32}$
5	0.5	1.0000000000	1.0000000000	0
6	0.6	1.100913323	1.100913323	$1.009133233 \times 10^{-31}$
7	0.7	1.212439793	1.212439793	$2.124397935 \times 10^{-31}$
8	0.8	1.335695605	1.335695605	$3.356956049 \times 10^{-31}$
9	0.9	1.471914343	1.471914343	$4.719143432 \times 10^{-31}$
10	1	1.622459331	1.622459331	$6.224593312 \times 10^{-31}$



Şekil 4.2. (4.1) probleminin hata fonksiyon grafiği.

Örnek 4.2.

$$2y(x+1) - y(x) = 1, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$y(0) + y\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2} \quad (4.14)$$

Başlangıç değer problemini ele alalım [8,15]. Bu problemin tam çözümü,

$$y(x) = -2^{1-x} + 1 \quad (4.15)$$

dir. Öncelikle m ninci mertebe deformasyon denklemini yazalım,

$$L[\bar{y}_m - \chi_m \bar{y}_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(\bar{y}_{m-1}) \quad (4.16)$$

denklemini gereklidir. Burada,

$$\bar{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

ve

$$R_m(\bar{y}_{m-1}(x)) = 2\bar{y}_{m-1}(x+1) - \bar{y}_{m-1}(x) - (1 - \chi_m) \quad (4.17)$$

olarak tanımlanır. Burada, χ_m

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.18)$$

biçiminde, fark operatörü ,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad (4.19)$$

ve ters fark operatörü de,

$$\Delta^{-1} y_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \quad (4.20)$$

olarak tanımlanır. L lineer operatörü (4.9) denklem gibi seçersek,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar [c_1 + \sum_{i=1}^{m-1} (2y_{m-1}(x+1) - y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m))] \quad (4.21)$$

bulunur. Burada başlangıç yaklaşımı olarak $y_0(x) = 0$ seçilirse, (4.21) denklemini bilgisayar programları yardımı ile ardışık olarak hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_0(x, \hbar) = 0$$

$$y_1(x, \hbar) = h - hx + hc_1$$

$$y_2(x, \hbar) = h + h^2 - hx - \frac{h^2x}{2} - \frac{h^2x^2}{2} + 2hc_1 - h^2c_1 + h^2xc_1$$

$$y_3(x, \hbar) = h + 2h^2 + h^3 - hx - h^2x + \frac{h^3x}{6} - h^2x^2 - h^3x^2 - \frac{h^3x^3}{6} + 3hc_1 - 3h^2c_1 - h^3c_1$$

$$+ 3h^2xc_1 + \frac{1}{2}h^3xc_1 + \frac{1}{2}h^3x^2c_1$$

$$y_4(x, \hbar) = h + 3h^2 + 3h^3 + h^4 - hx - \frac{3h^2x}{2} + \frac{h^3x}{2} + \frac{13h^4x}{12} - \frac{3h^2x^2}{2} - 3h^3x^2 - \frac{35h^4x^2}{24}$$

$$\frac{h^3x^3}{2} - \frac{7h^4x^3}{12} - \frac{h^4x^4}{24} + 4hc_1 - 6h^2c_1 - 4h^3c_1 - h^4c_1 + 6h^2xc_1 + 2h^3xc_1 - \frac{1}{6}h^4xc_1 +$$

$$2h^3x^2c_1 + h^4x^2c_1 + \frac{1}{6}h^4x^3c_1$$

⋮

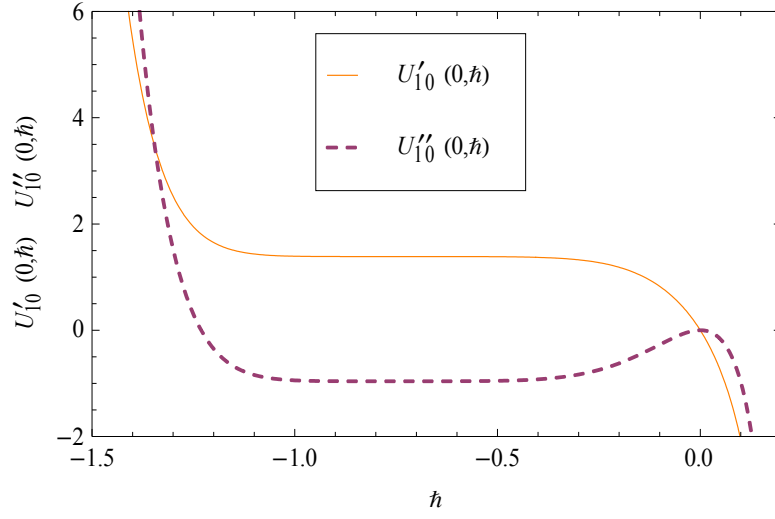
çözümleri bulunur.

Bu şekilde, $U_m(x, h) = \sum_{n=0}^m y_n(x, h)$ çözümü bulunur. Eğer $m = 10$ alınırsa $y_{10}(x, \hbar)$ elde

edilir ve çözüm serisi

$$y(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.22)$$

şeklinde bulunur. Burada uygun \hbar parametresi belirlemek gerekir. \hbar in uygun aralığını bulmak için, $U'_{10}(0, \hbar)$ ve $U''_{10}(0, \hbar)$ grafikleri çizilerek; Şekil 4.3 deki $U'_{10}(0, \hbar)$ ile $U''_{10}(0, \hbar)$ grafiklerinin x eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa \hbar in $[-1, -0.3]$ aralığında olması gerektiğini görülür. $x \in [0, 1]$ aralığında en küçük hatayı bulmak için seçilebilecek en iyi \hbar , yakınsaklık kontrol parametresinin, matematik programları kullanılarak hesaplamalar yapıldığında $\hbar = -0,740$ bulunur.



Şekil 4.3. (4.14) probleminin h eğrisinin grafiği

$h = -0,740$ için,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x) \quad (4.23)$$

çözüm serisi (4.22) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

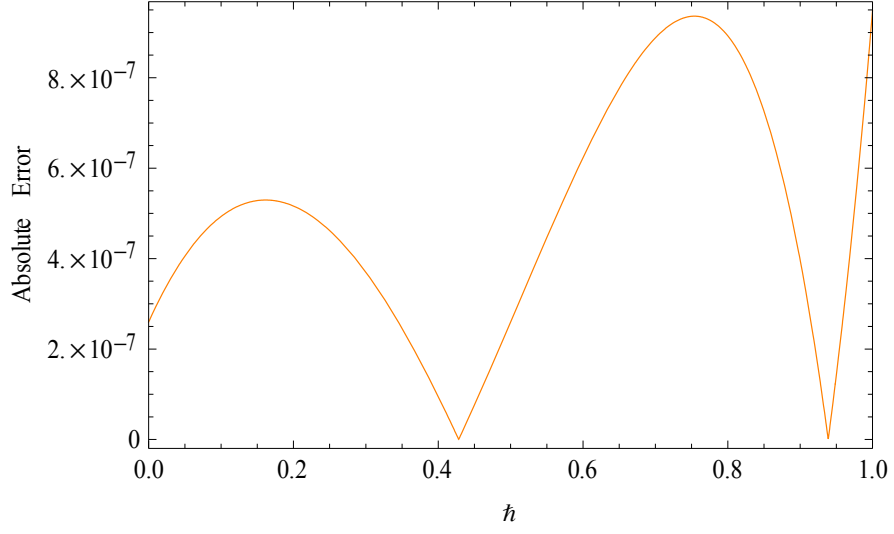
$$|U_{10}(x) + 2^{1-x} - 1| \quad (4.24)$$

olmak üzere,

Tablo 4.2. (4.14) probleminin hata tablosu

i	x_i	$y(x) = -2^{1-x} + 1$	$U_{10}(x)$ $h = -0.999$	$ U_{10}(x) - y(x) $
0	0	-1.000000000	-1.0000000260	$2.600410053 \times 10^{-7}$
1	0.1	-0.8660659831	-0.8660664762	$4.931754901 \times 10^{-7}$
2	0.2	-0.7411011266	-0.7411016429	$5.162911310 \times 10^{-7}$
3	0.3	-0.6245047927	-0.6245051628	$3.701175060 \times 10^{-7}$
4	0.4	-0.5157165665	-0.5157166613	$9.481115214 \times 10^{-8}$
5	0.5	-0.4142135624	-0.4142133023	$2.600410053 \times 10^{-7}$
6	0.6	-0.3195079108	-0.3195072873	$6.234593968 \times 10^{-7}$
7	0.7	-0.2311444133	-0.2311435251	$8.882929647 \times 10^{-7}$
8	0.8	-0.1486983550	-0.1486974623	$8.926527923 \times 10^{-7}$
9	0.9	-0.07177346254	-0.07177306609	$3.964476542 \times 10^{-7}$
10	1	0	$-9.482563887 \times 10^{-7}$	$9.482563887 \times 10^{-7}$

hata tablosu elde edilir. Hata fonksiyonu grafiği aşağıdaki gibidir.



şekil 4.4. (4.14) probleminin hata fonksiyon grafiği.

Örnek 4.3.

$$(x+1)y(x+1) - xy(x) = x, \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (4.25)$$

$$y(1) = 1$$

Başlangıç değer problemini ele alalım [22]. Bu problemin tam çözümü,

$$y(x) = \frac{2-x+x^2}{2x} \quad (4.26)$$

dir. Öncelikle m ninci merteye deformasyon denklemini yazalım,

$$L[u_m - \chi_m u_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(u_{m-1}) \quad (4.27)$$

denklemini gereklidir. Buradan,

$$\vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

ve

$$R_m(\bar{y}_{m-1}(x)) = (x+1)y_{m-1}(x+1) - x y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)x \quad (4.28)$$

olarak tanımlanır. Burada, χ_m

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.29)$$

biçiminde, fark operatörü ,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad (4.30)$$

ters fark operatörü,

$$\Delta^{-1} y_n = c_1 + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \quad (4.31)$$

olarak tanımlanır. L lineer operatörü (4.9) denklem gibi seçersek,

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar [c_1 + \sum_{i=1}^{m-1} [(x+1)y_{m-1}(x+1) - x y_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)x]] \quad (4.32)$$

bulunur. Burada başlangıç yaklaşımı olarak $y_0(x) = 1$ seçilirse, (4.32) denklemi bilgisayar programları yardımı ile ardışık olarak hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_0(x, \hbar) = 1$$

$$y_1(x, \hbar) = -\hbar + \frac{3\hbar x}{2} - \frac{\hbar x^2}{2} + \hbar c_1$$

$$y_2(x, \hbar) = -\hbar + \frac{3\hbar x}{2} - \hbar^2 x - \frac{\hbar x^2}{2} + \frac{3\hbar^2 x^2}{2} - \frac{\hbar^2 x^3}{2} + 2\hbar c_1 - \hbar^2 c_1 + \hbar^2 x c_1$$

$$y_3(x, \hbar) = -\hbar + \frac{3\hbar x}{2} - 2\hbar^2 x - \frac{\hbar x^2}{2} + 3\hbar^2 x^2 - \hbar^3 x^2 - \hbar^2 x^3 + \frac{3\hbar^3 x^3}{2} - \frac{\hbar^3 x^4}{2} + 3\hbar c_1 - 3\hbar^2 c_1 + 3\hbar^2 x c_1 - \hbar^3 x c_1 + \hbar^3 x^2 c_1$$

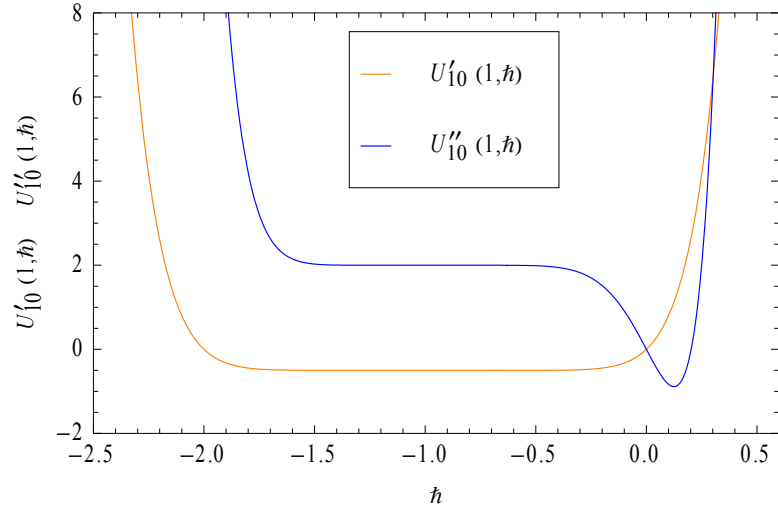
$$\begin{aligned}
y_4(x, \hbar) = & -\hbar + \frac{3\hbar x}{2} - 3\hbar^2 x - \frac{\hbar x^2}{2} + \frac{9\hbar^2 x^2}{2} - 3\hbar^3 x^2 - \frac{3\hbar^2 x^3}{2} + \frac{9\hbar^3 x^3}{2} - \hbar^4 x^3 \\
& - \frac{3\hbar^3 x^4}{2} + \frac{3\hbar^4 x^4}{2} - \frac{\hbar^4 x^5}{2} + 4\hbar c_1 - 6\hbar^2 c_1 + 6\hbar^2 x c_1 - 4\hbar^3 x c_1 + 4\hbar^3 x^2 c_1 \\
& - \hbar^4 x^2 c_1 + \hbar^4 x^3 c_1 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

çözümleri bulunur.

Bu şekilde, $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m y_n(x, \hbar)$ çözümü bulunur. Eğer $m = 10$ alınırsa $y_{10}(x, \hbar)$ elde edilir ve çözüm serisi,

$$y(x) \approx U_{10}(x, \hbar) \quad (4.33)$$

şeklinde bulunur. Burada uygun \hbar parametresi belirlemek gerekir. \hbar in uygun aralığını bulmak için, $U'_{10}(1, \hbar)$ ve $U''_{10}(1, \hbar)$ grafikleri çizilerek; Şekil 4.5 deki $U'_{10}(1, \hbar)$ ile $U''_{10}(1, \hbar)$ grafiklerinin x eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa \hbar in $[-1, 5, -0.2]$ aralığında olması gerektiğini görülür. $x \in [1, 2]$ aralığında en küçük hatayı bulmak için seçilebilecek en iyi \hbar , yakınsaklık kontrol parametresinin, matematik programları kullanılarak hesaplamalar yapıldığında $\hbar = -0,666$ bulunur.



Şekil 4.5. (4.24) probleminin h eğrisinin grafiği

$h = -0,666$ için,

$$U_{10}(x) = \sum_{m=0}^m u_m(x) \quad (4.34)$$

çözüm serisi (4.32) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

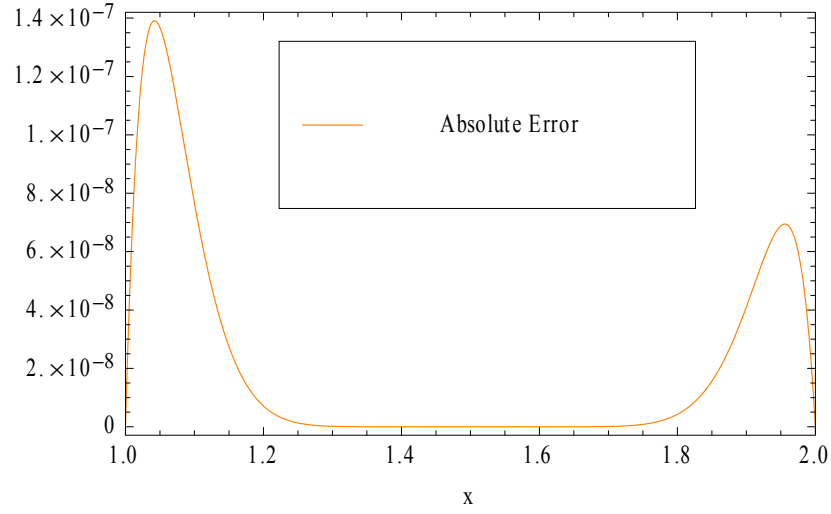
$$\left| U_{10}(x) - \frac{2-x+x^2}{2x} \right| \quad (4.35)$$

olmak üzere,

Tablo 4.3. (4.24) probleminin hata tablosu

i	x_i	$y(x) = \frac{2-x+x^2}{2x}$	$U_{10}(x)$ $h = -0,666$	$ U_{10}(x) - y(x) $
0	1	1.000000000	1.000000000	0
1	1.1	0.9590909091	0.9590909856	$7.645992327 \times 10^{-8}$
2	1.2	0.9333333333	0.9333333404	$7.104701331 \times 10^{-9}$
3	1.3	0.9192307692	0.9192307694	$1.530280715 \times 10^{-10}$
4	1.4	0.9142857143	0.9142857143	$1.708127048 \times 10^{-13}$
5	1.5	0.9166666667	0.9166666667	$8.333333333 \times 10^{-32}$
6	1.6	0.9250000000	0.9250000000	$1.106877749 \times 10^{-13}$
7	1.7	0.9382352941	0.9382352942	$1.007059033 \times 10^{-10}$
8	1.8	0.9555555556	0.9555555598	$4.285300509 \times 10^{-9}$
9	1.9	0.9763157895	0.9763158305	$4.106464740 \times 10^{-8}$
10	2	1.000000000	1.000000000	0

hata tablosu elde edilir. Hata fonksiyonu grafiği aşağıdaki gibidir



Şekil 4.6. (4.24) probleminin hata fonksiyon grafiği.

Örnek 4.4.

$$y(x+2) - 5y(x+1) + 6y(x) = 2^x, \quad 1 \leq x \leq 2$$

$$y(0) = 2, \quad y(1) = 2$$

(4.36)

Başlangıç değer problemini ele alalım [15,16]. Bu problemin tam çözümü,

$$y(x) = 2^{x-1}(-1-x) + 2.3^{x-1}$$

(4.37)

dir. Öncelikle m ninci mertebe deformasyon denklemini yazalım,

$$L[\vec{y}_m - \chi_m \vec{y}_{m-1}] = \hbar H[x, t] R_m(\vec{y}_{m-1})$$

(4.38)

denklemini gereklidir. Burada

$$\vec{y}_n(x) = \{y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

(4.39)

ve

$$R_m(\vec{y}_{m-1}(x)) = \vec{y}_{m-1}(x+2) - 5\vec{y}_{m-1}(x+1) + 6\vec{y}_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)2^x$$

(4.40)

olarak tanımlanır. Burada, χ_m

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases}, \quad H[x, t] = 1 \quad (4.41)$$

fark operatörü ,

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \quad (4.42)$$

ters fark operatörü,

$$\Delta^{-2} y_n = c_1 + c_2 n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{j-1} y_n \quad (4.43)$$

olarak tanımlanır. L lineer operatörü aşağıdaki gibi seçersek,

$$L[y_n] = \Delta y_n = \Delta(y_{n+1} - y_n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \quad (4.44)$$

$$y_m(x) = \chi_m y_{m-1}(x) + \hbar [c_2 x + c_1 + \sum_{j=1}^{x-1} \left[\sum_{i=1}^{j-1} R_m(\bar{y}_{m-1}(x)) \right]] \quad (4.45)$$

bulunur. Burada başlangıç yaklaşımı olarak $y_0(x) = 0$ seçilirse, (4.45) denklemi bilgisayar programları yardımı ile ardışık olarak hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$y_0(x, \hbar) = 0$$

$$y_1(x, \hbar) = -2^x \hbar + 2\hbar x + \hbar c_1 + \hbar x c_2$$

$$y_2(x, \hbar) = -2^x \hbar - 6\hbar^2 + 2\hbar x + \frac{31\hbar^2 x}{3} - 5\hbar^2 x^2 + \frac{2\hbar^2 x^3}{3} + 2\hbar c_1 + 2\hbar^2 c_1$$

$$- 3\hbar^2 x c_1 + \hbar^2 x^2 c_1 - 3\hbar^2 c_2 + 2\hbar x c_2 + \frac{31}{6} \hbar^2 x c_2 - \frac{5}{2} \hbar^2 x^2 c_2 + \frac{1}{3} \hbar^2 x^3 c_2$$

$$\begin{aligned}
y_3(x, \hbar) = & -2^x \hbar - 12\hbar^2 - 36\hbar^3 + 2\hbar x + \frac{62\hbar^2 x}{3} + \frac{1094\hbar^3 x}{15} - 10\hbar^2 x^2 - \frac{148\hbar^3 x^2}{3} \\
& + \frac{4\hbar^2 x^3}{3} + 14\hbar^3 x^3 - \frac{5\hbar^3 x^4}{3} + \frac{\hbar^3 x^5}{15} + 3\hbar c_1 + 6\hbar^2 c_1 + 12\hbar^3 c_1 - 9\hbar^2 x c_1 \\
& - \frac{67}{3} \hbar^3 x c_1 + 3\hbar^2 x^2 c_1 + \frac{77}{6} \hbar^3 x^2 c_1 - \frac{8}{3} \hbar^3 x^3 c_1 + \frac{1}{6} \hbar^3 x^4 c_1 - 9\hbar^2 c_2 - 18\hbar^3 c_2 \\
& + 3\hbar x c_2 + \frac{31}{2} \hbar^2 x c_2 + \frac{547}{15} \hbar^3 x c_2 - \frac{15}{2} \hbar^2 x^2 c_2 - \frac{74}{3} \hbar^3 x^2 c_2 + \hbar^2 x^3 c_2 \\
& + 7\hbar^3 x^3 c_2 - \frac{5}{6} \hbar^3 x^4 c_2 + \frac{1}{30} \hbar^3 x^5 c_2
\end{aligned}$$

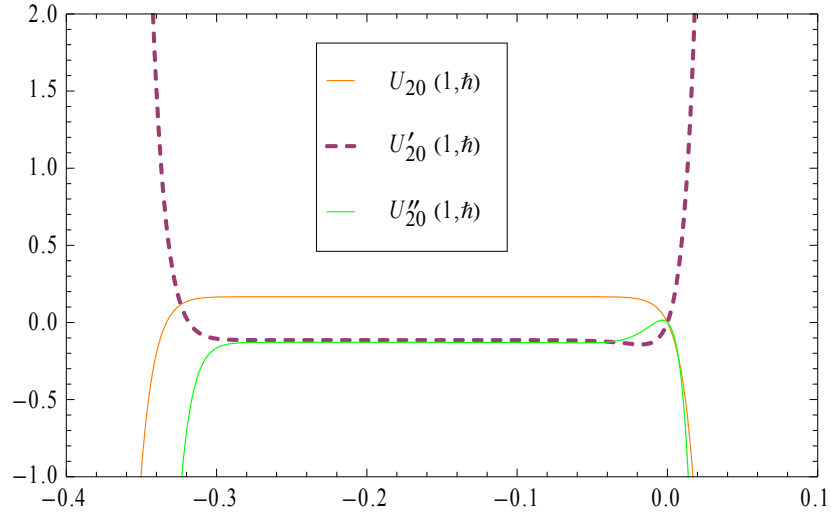
⋮

çözümleri bulunur. Bu şekilde, $U_m(x, \hbar) = \sum_{n=0}^m y_n(x, \hbar)$ çözümleri bulunur. Eğer $m = 20$

alınırsa $y_{20}(x, \hbar)$ elde edilir ve çözüm serisi,

$$y(x) \approx U_{20}(x, \hbar) \quad (4.46)$$

şeklinde bulunur. Burada uygun \hbar parametresi belirlemek gerekir. \hbar in uygun aralığını bulmak için, $U_{20}(1, \hbar)$, $U'_{20}(1, \hbar)$ ve $U''_{20}(1, \hbar)$ grafikleri çizilerek; Şekil 4.7 deki $U_{20}(1, \hbar)$, $U'_{20}(1, \hbar)$ ve $U''_{20}(1, \hbar)$ grafiklerinin x eksenine paralel olduğu aralık göz önüne alınırsa \hbar in $[-0.3, -0.05]$ aralığında olması gerektiğini görülür. $x \in [1, 2]$ aralığında en küçük hatayı bulmak için seçilebilecek en iyi \hbar , yakınsaklık kontrol parametresinin, matematik programları kullanılarak hesaplamalar yapıldığında $\hbar = -0,289$ bulunur.



Şekil 4. 7. (4.34) probleminin h eğrisinin grafiği

$h = -0,289$

için

$$U_{20}(x) = \sum_{m=0}^m y_m(x) \quad (4.47)$$

çözüm serisi (4.44) hesaplanarak yaklaşık çözüm hata fonksiyonu

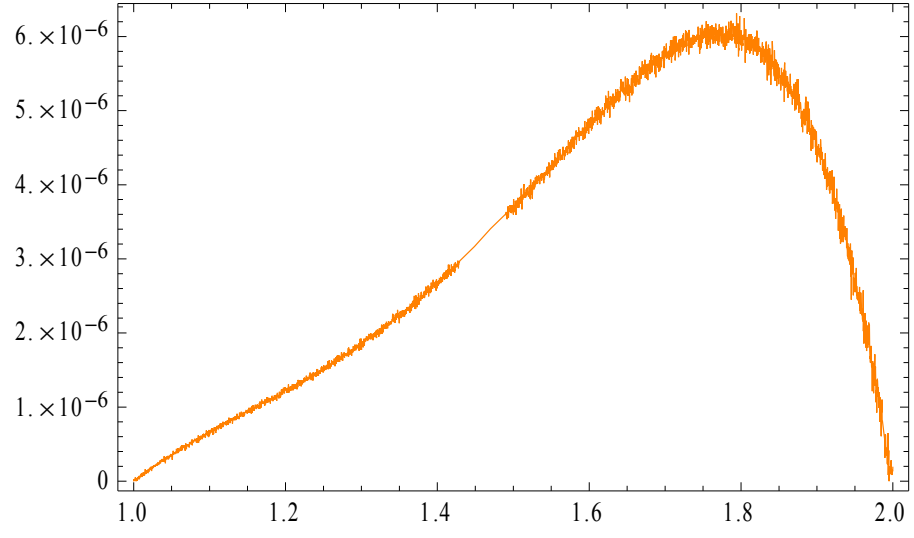
$$|U_{20}(x, h) - 2^{x-1}(-1-x) + 2.3^{x-1}| \quad (4.48)$$

olmak üzere.

Tablo 4.4. (4.34) probleminin hata tablosu

i	x_i	$y(x) = 2^{x-1}(-1-x) + 2.3^{x-1}$	$U_{20}(x)$ $h = -0,289$	$ U_{20}(x) - y(x) $
0	1	0	0	0
1	1.1	-0.01847792326	-0.01847724789	$6.753678587 \times 10^{-7}$
2	1.2	-0.03567450176	-0.03567326623	$1.23552847 \times 10^{-6}$
3	1.3	-0.05085381006	-0.05085193136	$1.878700831 \times 10^{-6}$
4	1.4	-0.06312783802	-0.06312512987	$2.708150148 \times 10^{-6}$
5	1.5	-0.07143229079	-0.07142855462	3.7361719×10^{-6}
6	1.6	-0.07449898306	-0.07449412270	$4.860362694 \times 10^{-6}$
7	1.7	-0.07082438037	-0.07081857163	$5.808744013 \times 10^{-6}$
8	1.8	-0.05863378390	-0.05862773765	$6.046248853 \times 10^{-6}$
9	1.9	-0.03584059187	-0.03583596130	$4.63056464 \times 10^{-6}$
10	2	0.1666666667	0.1663232907	0.0003433760085

hata tablosu elde edilir. Hata fonksiyonu grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 4.8. (4.34) probleminin hata fonksiyon grafiği.

5.BÖLÜM

TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu çalışmada fark fonksiyonları ve fark denklemlerinden bahsedilerek, fark denklemlerin Homotopi Analiz Metodu ile çözüm serileri elde edilerek analitik çözüme yakınsamamızı sağlayan en uygun h yakınsaklık kontrol parametresi belirlenmeye çalışılmış ve buna bağlı yakınsamalar elde edildi.

Homotopi Analiz Metodu ile bulduğumuz sonuçlar yardımıyla problemlerin gerçek çözümleri için fark değerleri bulundu. Homotopi Analiz Metodu ile bulduğumuz çözüm serileri için gerçek çözümlerin fark grafikleri çizilerek hata tabloları yardımıyla yöntemimizin ne kadar uygun, kullanılabilir ve geçerli olduğu gösterildi. Yöntemin birinci mertebeden fark denklemlerinde ikinci mertebeden fark denklemlerine göre daha iyi sonuçlar verdiği çözüm serilerinin problemin gerçek çözümüne daha çok yakınsadığı görüldü. Bu metot başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlamaktadır. Deformasyon denklemlerinin yazılması ve buna bağlı çözüm serilerinin elde edilmesi pratik ve uygulanabilir. Yöntemin diğer bir avantajı çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini fiziksel parametrelerden bağımsız ifade edebilmemizdir.

Homotopi Analiz Metodu ile elde ettiğimiz sonuçlar ile gerçek çözümün fark değerlerini minimuma indirmek için en uygun h yakınsaklık kontrol parametresini belirlemek problemin mertebesi arttıkça güçleşmekte. Çünkü mertebe sayısı arttıkça h yakınsaklık kontrol parametresindeki çok küçük değişimler fark fonksiyonunda büyük değişiklikler yapabilmektedir.

Sonuç olarak, Homotopi Analiz Metoduyla çözülen fark denklemlerin çözümlerinin, gerçek çözümlere oldukça yaklaşıldığı gözlemlendi.

KAYNAKLAR

1. Abbasbandy, S., “Homotopy analysis method for heat radiation equations”, *Int. Commun. Heat. Mass. Transf.* 34, 380-387, 2007.
2. Abbasbandy, S., Shivanian, E., “A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations”, *Numer Algor*, 56, 27-43, 2011.
3. Abramov, S.A., “Rational Solutions of of Linear Differential and Difference Equations with Polynomial Coefficients”, *Zh.Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 29, no.11, 1611-1620, 1787, 1989.
4. Agarwal, R.P., “Difference Equations and Inequalities”, *Marcel Dekker*, 970 New York 2000.
5. Akin, Ö., Bulgak H., “Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi”, *Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi*, 180, Konya, 1998.
6. Arıkoğlu, A., Özkol, I., “Solution of difference equations by using differential transform method”, *Applied Mathematics and Computation*, 174, 1216-1228, 2006.
7. Artzrouni, M., “Conditions for Asymptotically Exponential Solutions of Linear Difference Equations with Vriable Coefficients”, *J.Math. Anal. Appl.* 121, no.1, 160-172 , 1987.
8. Başbük, M., Eryılmaz, A., “The Approximate Solutions of First Order Difference Equations with Constant and Variable Coefficients”, *SOP Transactions on Applied Mathematics*, Volume 1, Number 2, 2014.
9. Bereketoğlu, H., Kutay, V., “Fark Denklemleri”, *Gazi Kitapevi*, Ankara, 2012.
10. Çatal, S., “Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark Denklemleri ile Çözümü”, *DEÜ Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 6, no 1, 2004.
11. Elaydi, S. “An Introduction to Differance Equations”, *Springer-Verlag*, 428, New York, 1999.
12. Eryılmaz, A., Atay, M.T., Coşkun, S.B., Başbük, M., “Buckling of Euler columns with a continuous elastic restraint via Homotopy Analysis Method”, *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, Article ID 341063, 8 pages, 2013.
13. Goldberg, S., “Introduction to Difference Equations with Illustrative examples from Economics”, *Psychology and Sociology. Dover*, 260, New York, 1986.

14. Gülsu, M., Sezer, M., “The approximate solution of high-order linear difference equations with variable coefficients in terms of Taylor polynomials”, *Applied Mathematics and Computation*, 168 , 76-88, 2005.
15. Gülsu, M., Sezer, M., Güney, Z., “Approximate solution of general high-order linear nonhomogeneous difference equations by means of Taylor collocation method”, *Applied Mathematics and Computation*, 173 , 683-693, 2006.
16. Gülsu, M., Sezer, M., Tanay, B., “A matrix method for solving high-order linear difference equations with mixed argument using hybrid legendre and taylor polynomials”, *Journal of the Franklin Institute* 343, 647–659, 2006.
17. Hooker, J.W., “Oscillatory Second Order Linear Difference Equations and Riccati Equations”, *Siam J. Math. Anal.*, 18, no.1, 54-63, 1987.
18. Inc, M., “On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method,” *Physics Letters A*, vol. 365, no. 5-6, pp. 412–415, 2007.
19. Kaczorek, T., “Extension of the Method of Continuants for n-order Linear Difference Equations with Variable Coefficients”, *Bull.Polish.Acad.Sci.Tech.Sci.* 33, no.7-8, 395-400,1985.
20. Karakoç, S.B.G., Eryılmaz, A., Başbük, M., “The Approximate Solutions of linear Fredholm Integrodifferential-Difference Equations with Variable Coefficients via Homotopy Analysis Method”, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2013, Article ID 261645, 7 pages, 2013.
21. Kelley, W.G., Peterson, A.C., “Difference Equations and Introduction with Applications” , *Academic*, 403, New York, 1991.
22. Levy, H., Lessman, F., “Finite Difference Equations”, *The Macmillan Company*, New York, 1961.
23. Liang, S., Jeffrey, DJ., “An analytical approach for solving nonlinear boundary problems in finite domains”, *Numer Algor*, 56, 93-106,2006.
24. Liao, S.J., “A Kind of Approximate Solution Technique Which Does Not Depend Upon Small Parameters (II): An Application in Fluid Mechanics”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(5), 815-822, 1997.
25. Liao, S.J., “Beyond Perturbation: Introduction to Homotopy Analysis Method”, *Chapman & Hall/CRC Press*, Boca Raton, 2003.

26. Liao, S.J., "Homotopy Analysis Method: A New Analytical Technique for Nonlinear Problems", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(2), 95-100, 1997.
27. Liao, S.J., "On the Homotopy Analysis Method for Nonlinear Problems", *Applied Mathematics and Computation*, 147(2):499-513, 2004.
28. Liao, S.J., "The Proposed Homotopy Analysis Technique for the Solution of Nonlinear Problems", *PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University*, 1992.
29. Liao, S.J., "Proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problems", *Ph.D. Dissertation, Shanghai Jiao Tong University*, 1992.
30. Liao, S.J., "Homotopy analysis method: A New Analytical Method for Nonlinear Problems", *Applied Mathematics and Mechanics (English edition)*, Vol.1, No. 10, 957-962, 1998.
31. Liao, S.J., "An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: A special example", *Int. J. Non-linear Mech.*, 30, 371-380, 1995.
32. Liao, S.J., "An approximate solution technique which does not depend upon small parameters (Part 2): An application in fluid mechanics", *Int. J. Non-linear Mech.* 32, 815-822, 1997.
33. Liao, S.J., "An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problem", *Int. J. Non-linear Mech.* 34, 759-778, 1999.
34. Liao, S.J., "A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi-infinite flat plate", *J. Fluid Mech.* 385, 101-128, 1999.
35. Liao, S.J., "An explicit analytic solution to the Thomas-Fermi equation", *Appl. Math. Comput.*, 144, 495-506, 2003.
36. Liao, S.J., "On the analytic solution of magnetohydrodynamic flows of non-Newtonian fluids over a stretching sheet", *J. Fluid Mech.* 488, 189-212, 2003.
37. Liao, S.J., "On the homotopy analysis method for nonlinear problems", *Appl. Math. Comput.*, 147, 499-513, 2004.
38. Liao, S.J., "Beyond Perturbation: Introduction to the homotopy analysis method", *CRC press LLC*, 2004.
39. Mickens, R., "Difference Equations Van Nostrand", *Reinhold*, 448, New York, 1998.
40. Miller, K.S., "Linear Difference Equations", *W. A. Benjamin*, New York 1968.

41. Popenda, J., "Oscillation and Nonoscillation Theorems for Second Order Difference Equations", *J. Math. Anal. Appl.*, 123, no.1, 34-38, 1987.
42. Popenda, J., "One Expression for The Solutions of Second Order Difference Equations", *Proc.Amer.Math.Soc.* 100, no.1, 87-93, 1987.
43. Spiegel, M.R. "Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Differences Equations", *McGraw-Hill, Inc.*, New York, 1971.
44. Tuzik, A.I., "Solvability of a Discrete Equations of Convolution Type with Variable Coefficients", *Differentsial'nye Urauneniya* 25, no.8, 1462-1464, 1989.
45. Wang. Z., Zou. L., Zhang. H., "Applying homotopy analysis method for solving differential difference equation", *Phys. Lett A* 369, 77-84, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Alparslan CİHAN, 1976 yılında Ankara'nın Yenimahalle ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğretimini Yenimahalle'de tamamladı. 1997 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 1998 yılında Nevşehir Avanos Merkez Cumhuriyet İlköğretim Okuluna Matematik Öğretmeni olarak atandı. 2000 yılında askerliğini yaptı. 2000-2001 yılları arasında Avanos Nazife-Mustafa Ergün İlköğretim Okulunda görev yaptı. 2012 yılında Nevşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2002 yılından itibaren Nevşehir Hüseyin Avni İncekara Fen Lisesi'nde çalışmakta olup evli ve iki çocuk babasıdır.

Tel. no: 05062586247

e-posta: alparslancihan76@gmail.com

