

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

**Tezi Hazırlayan
Mehmet ŞENOL**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Ocak 2015
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

**Tezi Hazırlayan
Mehmet ŞENOL**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI**

**Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi**

**Ocak 2015
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI danışmanlığında **Mehmet ŞENOL** tarafından hazırlanan "**Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri Üzerine**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

2601/2015

JÜRİ

Başkan : Prof. Dr. Fatma KARİPCİN



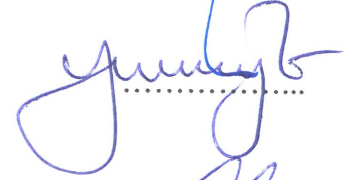
Üye : Yrd. Doç. Dr. İ. Timuçin DOLAPCI



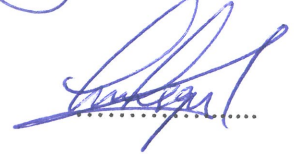
Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Yasin YAZLIK



Üye : Yrd. Doç. Dr. Sezer SORGUN



ONAY:

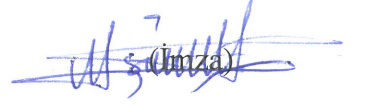
Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 27.01.2015 tarih ve 04.05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Sahlan ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü



TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atf yapıldığını bildiririm.



Mehmet ŞENOL

TEŞEKKÜR

“Bazı Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Yaklaşık Çözümleri Üzerine” konulu bu tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında bana gösterdikleri maddi manevi destek ve yardımlarından dolayı değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI’ya, her zaman desteğini gördüğüm Sayın Prof. Dr. İhsan SOLAK’a, ayrıca bu zorlu süreçte desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkür eder şükranlarımı sunarım.

**BAZI KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE
(Doktora Tezi)**

Mehmet ŞENOL

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2015

ÖZET

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, bazı kesirli diferansiyel denklem tiplerinin Pertürbasyon-İterasyon Algoritması (PIA) yardımıyla yaklaşık çözümlerini vermektedir. Bu amaçla 1. Bölüm konu ile ilgili temel bilgilere ve konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgi vermeye ayrılmış, 2. Bölümde ise $F(u, u', k, k', \dots, \varepsilon) = 0$, ($u = u(t)$, $k = k(t)$) ve ε -pertürbasyon parametresi olmak üzere denklem tipinin pertürbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1) algoritması yardımı ile çözüm tekniklerine yer verilmiştir. 3. Bölümde yöntemin adi kesirli diferansiyel denklemlere, 4. Bölümde adi kesirli diferansiyel denklem sistemlerine, 5. Bölümde kesirli kısmi diferansiyel denklemlere ve son olarak 6. Bölümde ise kesirli-integro diferansiyel denklemlere uygulanmasına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Pertürbasyon metotları, pertürbasyon-iterasyon algoritmaları, lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem ve denklem sistemleri, kesirli kısmi diferansiyel denklemler, kesirli-integro diferansiyel denklemler.*

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI

Sayfa Adedi: 80+xi

**ON THE APPROXIMATE SOLUTIONS
OF SOME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
(PhD. Thesis)**

Mehmet ŞENOL

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

January 2015

ABSTRACT

The purpose of this composed of six parts of study is to solve some types of fractional differential equations with the help of Perturbation-Iteration Algorithm. For this purpose, the first chapter is reserved to the basic definitions and to provide some information about the historical development of the subject. In the second section the type of equations solved with the help of the PIA(1,1) technique where $F(u, u', k, k', \dots, \varepsilon) = 0$, ($u = u(t)$, $k = k(t)$), and ε -perturbation parameter. The technique is applied to ordinary fractional differential equations in the third section, to systems of ordinary fractional differential equations in the fourth section, to fractional partial differential equations in the fifth section and finally to fractional-integro differential equations in the sixth section.

Keywords: Perturbation methods, perturbation-iteration algorithms, linear and non-linear fractional differential equations and systems, fractional partial differential equations, fractional-integro differential equations.

Thesis Supervisor: Assist. Prof. Dr. İhsan Timuçin DOLAPCI

Page Number: 80+xi

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI.....	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
TABLolar LİSTESİ.....	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	ix
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	xi
BÖLÜM 1	
1.1. Giriş	1
1.2. Kesirli Analizin Doğuşu.....	2
1.3. Güncel Tanımlar	5
1.4. Genel Özellikler.....	9
1.5. Temel Örnekler.....	11
1.6. Caputo Kesirli Türevi	13
BÖLÜM 2	
2.1. Giriş	17
2.2. Pertürbasyon.....	17
2.3. Pertürbasyon-İterasyon Algoritması.....	18
2.3.1. Pertürbasyon-iterasyon algoritması PİA(1,1).....	19
BÖLÜM 3	
3.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Adi Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	22

BÖLÜM 4

4.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Adi Kesirli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması	35
---	----

BÖLÜM 5

5.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	51
--	----

BÖLÜM 6

6.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Kesirli-İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulanması	63
--	----

BÖLÜM 7

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER.....	75
KAYNAKLAR.....	76
ÖZGEÇMİŞ.....	80

TABLULAR LİSTESİ

Tablo 3.1.	Örnek 3.1. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	26
Tablo 3.2.	Örnek 3.2. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	30
Tablo 4.1.	Örnek 4.1.'de elde edilen $u(t)$ 'lerin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	39
Tablo 4.2.	Örnek 4.1.'de elde edilen $k(t)$ 'lerin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	40
Tablo 4.3.	Örnek 4.2.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	46
Tablo 4.4.	Örnek 4.2.'de elde edilen $k(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	47
Tablo 5.1.	Örnek 5.1.'de elde edilen $u_4(x, t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	55
Tablo 5.2.	Örnek 5.2.'de elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması	60
Tablo 6.1.	Örnek 6.1.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	65
Tablo 6.2.	Örnek 6.2.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	70
Tablo 6.3.	Örnek 6.2.'de elde edilen $k(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması.....	71

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1.	Laurent döngüsü.....	7
Şekil 3.1.	Örnek 3.1. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin grafiksel çözümlerinin $\alpha = 1$ için karşılaştırılması.....	27
Şekil 3.2.	Örnek 3.2. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin grafiksel çözümlerinin $\alpha = 1$ için karşılaştırılması.....	31
Şekil 4.1.	Örnek 4.1.'de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Şekil 4.2.	Örnek 4.1.'de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha = 0.7$ ve $\beta = 0.9$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması.....	41
Şekil 4.3.	Örnek 4.1.'de elde edilen $u_5(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	42
Şekil 4.4.	Örnek 4.1.'de elde edilen $k_5(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	42
Şekil 4.5.	Örnek 4.2.'de elde edilen $u_4(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	48
Şekil 4.6.	Örnek 4.2.'de elde edilen $k_4(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	48
Şekil 4.7.	Örnek 4.2.'de elde edilen $u_4(t)$ ve $k_4(t)$ 'nin $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması.....	49
Şekil 4.8.	Örnek 4.2.'de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 0.8$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması.....	49
Şekil 5.1.	Örnek 5.1. de elde edilen $u_4(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için çözüm grafiği.....	56
Şekil 5.2.	Örnek 5.2. de elde edilen $u_5(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için çözüm grafiği	61
Şekil 6.1.	Örnek 6.1.'de elde edilen $u_5(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	66
Şekil 6.2.	Örnek 6.2.'de elde edilen $u_3(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması.....	72

Şekil 6.3. Örnek 6.2.'de elde edilen $k_3(t)$ 'nin tam çözümlerle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için
grafiksel olarak karşılaştırılması.....72

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

ε	:	Pertürbasyon parametresi
PIA	:	Pertürbasyon-iterasyon Algoritması
u_n	:	Verilen u fonksiyonu
$(u_c)_n$:	Bulunacak olan u fonksiyonu
F	:	Diferansiyel denklemin genel formu
Γ	:	Gama Fonksiyonu
D^α	:	α . Basamaktan Caputo kesirli türevi

BÖLÜM 1

1.1. Giriş

Kesirli mertebeden türev ve integrallerin tanımlandığı ve çalışıldığı kesirli analizin geçmişi neredeyse tamsayı mertebeden klasik analizin geçmişi kadar eskidir. Bununla birlikte, birçok matematikçinin konunun mahiyeti ve uygulamalarına yabancı olmasından dolayı genellikle standart matematik derslerinden çıkarılmıştır.

Kesirli diferansiyel denklemler, akışkanlar mekaniği, kontrol teorisi, elektrokimya, biyoloji, fizik ve mühendislikte ortaya çıkan çok sayıda uygulamaları nedeniyle birçok problemin modellenmesinde iyi bir araç olmuştur. Kesirli diferansiyel denklemlerin genellikle bir tam çözümü bulunmadığından, bu tip denklemleri çözmek için kullanılan nümerik ve yaklaşık çözüm veren yöntemlerin sayısında son yıllarda önemli bir artış olmuştur. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesi de kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü konusunda önemli bir katkı sağlamıştır.

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın amacı, diferansiyel denklem yapılarının pertürbasyon-iterasyon algoritması yardımıyla çözümlerini vermektir.

Bu amaçla 1. Bölüm konu ile ilgili temel bilgilere ve konunun tarihsel gelişimi hakkında bilgi vermeye ayrılmış, 2. Bölümde ise $F(u'(t), u(t), k'(t), k(t), \dots, \varepsilon) = 0$ ve ε -pertürbasyon parametresi olmak üzere denklem tipinin pertürbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1) algoritması yardımı ile çözüm tekniklerine yer verilmiştir 3. bölümde yöntemin adi kesirli diferansiyel denklemlere, 4. Bölümde adi kesirli diferansiyel denklem sistemlerine, 5. Bölümde kesirli kısmi diferansiyel denklemlere ve son olarak 6. Bölümde ise kesirli-integro diferansiyel denklemlere uygulanmasına yer verilmiştir.

1.2. Kesirli Analizin Doğuşu

Kesirli analizin ortaya çıkması “Tamsayı mertebeden $\frac{d^n y}{dx^n}$ türev ifadesi, n bir kesir olduğunda bir anlam ifade etmekte midir?” sorusu ile olmuştur. Daha sonra soru n 'in irrasyonel ve karmaşık değerlerini kapsayacak şekilde genişletilmiştir. Bu daha kapsamlı sorunun olumlu cevaplanmasının ardından, kesirli analiz ismi bir yanlış isimlendirme haline gelmiştir. Çünkü konunun keyfi mertebeden integrasyon ve türev olarak isimlendirilmesi daha doğru olacaktır.

$\frac{d^n y}{dx^n}$ gösterimi Leibniz tarafından bulunmuştur. Belki de bu 1695'te L'Hospital'in Leibniz'e “ya n , $1/2$ ise” [1] şeklinde sormasına neden olan naif bir sembol oyunudur. Leibniz cevabında bunun bir paradoksa yol açacağını söylemiştir. Ancak "Bir gün yararlı sonuçlara yol açacaktır" öngörüsünde de bulunmuştur. 1730 yılında Euler türevlerin integral mertebeleri arasındaki interpolasyondan bahsetmiştir. 1812'de Laplace integral yardımıyla bir kesirli türev tanımı vermiştir. 1819'da ise, S. F. Lacroix [2] tarafından yazılmış bir analiz metninde kesirli türevle ilgili ilk tartışma ortaya çıkmıştır.

m bir pozitif tamsayı olmak üzere $y = x^m$ ile başlayarak Lacroix onun n . türev tanımını ($n \leq m$ için) Legendre sembolü Γ türünden genelleştirilmiş faktöriyel olarak şu şekilde vermiştir:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \quad (1.1)$$

Daha sonra o dönemin klasik formalistlerinin alışıldık tarzında, n sayısını $1/2$ ve m sayısını 1 alarak bir x fonksiyonunun $1/2$. mertebeden türevini şu şekilde elde etmiştir.

$$\frac{d^{1/2} y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \quad (1.2)$$

Lacroix ile elde edilen bu sonuç, bir kesirli türevin bugünkü Riemann-Liouville tanımı ile elde edilenle aynıdır. Fakat Lacroix'in bir tamsayı mertebeden durumun genelleştirilmesi olan metodunda olası uygulamalar için hiçbir ipucu verilmemiştir. Lacroix görünüşte sadece matematiksel egzersiz için bir türevin integral mertebeleri arasındaki interpolasyonlar sorununu dikkate almıştır ki bu konuya 700 sayfalık metinde sadece 2 sayfada yer vermiştir. Fourier, 1822 yılında keyfi mertebeden türevlerden bahseden bir diğer kişi olmuştur, fakat Euler, Laplace ve Lacroix gibi, hiçbir uygulamaya yer vermemiştir. Fraksiyonel işlemin ilk kullanımı 1823 yılında Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel ile olmuştur [3]. Abel kesirli analizi kendi formüle ettiği Tautochrone probleminde ortaya çıkan bir integral denklemin çözümüne uygulamıştır. Kesirli analiz hakkında ilk önemli çalışmayı yapan Joseph Liouville'in ilgisini cezbeden de, muhtemelen Laplace ve Fourier'in kısa yorumları veya Abel'in bahsi geçen çözümü olmuştur. Liouville bu konu hakkında 1832'de 3 büyük yazı ([4] bunların ilkidir) kaleme almış ve üstüste birçok makale bunları takip etmiştir. Liouville'in keyfi v . mertebeden türev için verdiği ilk tanım bir sonsuz seri içermektedir. Bu ise v 'nin serinin yakınsadığı değerlere kısıtlanması dezavantajını beraberinde getirmiştir. Liouville ilk tanımındaki bu sıkıntının farkına varmış olacak ki, hemen ikinci bir tanım formülize etmiştir. Bu tanımda x ve a nın her ikisinin de pozitif olması durumunda x^{-a} 'nın kesirli türevini verme imkanını elde etmiştir. Bunu Euler'in gama integraliyle ilintili belirli integrali gözönüne alarak yapmıştır.

$$\int_0^{\infty} u^{-a-1} e^{-xu} du = \frac{1}{x^a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a)}{x^a} \quad (1.3)$$

olup bu şu integral formülüne yol açar.

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du \quad (1.4)$$

Her iki tarafın d^v/dx^v operatörü alınıp her $v > 0$ için $d^v(e^{ax})/dx^v = a^v e^{ax}$ olduğu kabul edilirse, Liouville'in 2. tanımı şu şekilde elde edilir.

$$\frac{d^v}{dx^v} x^{-a} = \frac{(-1)^v \Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} x^{-(a+v)} \quad (1.5)$$

Bu ifadedeki $(-1)^v$ terimi, tanımın kompleks sayıları da içerecek şekilde genişletmek gerektiğini önermektedir. Nitekim Liouville bu tanımı a ve v kompleks değerleri de kapsayacak şekilde genişletmiş ve kesirli türevini potansiyel teorisindeki problemlere başarıyla uygulamıştır. Ancak 1918’de Emil Post’un da dediği gibi “Bu tanımlar son derece dardır.”

Liouville, kesirli işlemler yardımı ile diferansiyel denklemleri çözme girişiminde bulunan ilk matematikçi olmuştur. Yaptığı birkaç araştırmada, keyfi mertebeden bir homojen diferansiyel denkleminin çözümünün varlığını göstermek ve kıyas yoluyla bir çözüm fonksiyonun varlığını göstermek için çalışmıştır. Yazılarından birinde eğer $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ adi diferansiyel denkleminin $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$ çözümü varsa $\frac{d^v y}{dx^v} = 0$ keyfi v . mertebeden denklemi için de buna karşılık gelen bir çözümün olması gerektiğinden bahsetmiştir. Liouville, bu çözümle ilgili fikrini yayınladı ve bunun açık bir değerlendirmesini yapmıştır. Halbuki bir çelişkiye yol açan $x = 0$ durumunu ihmal etmişti [5]. G. F. Bernhard Riemann öğrencilik yıllarında kesirli işlemlerle ilgili biraz daha farklı bir teori geliştirmiştir. Fakat, ölümünden ancak 10 yıl sonra 1876’da yayınlanmıştır [6]. Riemann, keyfi mertebeden integrasyon formülünü elde etmek için Taylor serilerinin bir genelleştirmesini kullanmıştır.

$$D^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt + \psi(x) \quad (1.6)$$

İntegralin alt limiti olan c ’deki belirsizlik yüzünden, Riemann kendi tanımına tamamlayıcı bir $\psi(x)$ fonksiyonu eklemeyi uygun görmüştür. Ama bu sadece karışıklığa yol açmıştır. Arthur Cayley, Riemann teorisindeki en büyük zorluğun, içinde keyfi sabitler ve bir sonsuzluk içeren tamamlayıcı fonksiyonun anlamı sorusu olduğunu vurgulamıştır.

On dokuzuncu yüzyıl boyunca kesirli türevleri bulma konusunda iki farklı kavramsal sistem hakkında kapsamlı tartışmalar olmuştur. Bir sistem George Peacock tarafından eşdeğer formların kalıcılığı ilkesi [6] temelinde de desteklenen, Lacroix' integral durumundan formal genelleştirmesidir. “Bir form genel sembollerle gösterildiğinde cebirsel olarak diğer bir forma eşitse, bu semboller neyi ifade ederse etsin formlar eşdeğer olmaya devam etmelidir.” Bu ilke cebirsel işlemler için ifade edilmiş olsa da, Peacock, yanlış olduğu ortaya çıkan bu safiyane kabulü bütün sembolik işlemler için yapmıştır. Diğer sistem ise P. Kelland tarafından da desteklenen Liouville'in ikinci tanımıdır. Augustus De Morgan kesirli işlemler teorisini bir karışıklık durumunda değerlendirmiştir. Ona göre her iki sistemin de zorlayıcı bir yönü yoktu. Fakat her ikisi de daha genel bir sistemin parçası olabilirdi.

William Center, 1850'de, Lacroix'in versiyonunda bir sabitin kesirli türevinin, sabitin sıfır olma ihtimalinin dışında sıfıra eşit olmadığını farketmiştir. Liouville sistemine göre ise bir sabitin kesirli türevinin sıfıra eşit olduğunu söylemiştir. (Çünkü $\Gamma(0)=\infty$ dur ve $1/\Gamma(0)$ sıfıra eşit olarak alınabilir). Center, bir sabitin kesirli türevini nasıl hesaplayacağımızı bilirse, hangi sistemi kabul edeceğimizi de biliriz sonucunu çıkarmıştır.

De Morgan ve Center'm da işaret ettiği bu kafa karıştırıcı durum, genel kesirli işlemler teorisinin geliştirilmesiyle aydınlanmıştır. 19. yüzyılın ilk yarısındaki matematikçilerin karmaşık düzlemde yaptıkları araştırmalar sonucu keyfi mertebeden makul bir integral ve türev tanımı verme ve sonuçları inceleme konusunda yetersiz kaldıkları söylenebilir. Karmaşık düzlemde kabul edilebilir olan ilk çalışma ise Laurent'e aittir.

1.3. Güncel Tanımlar

Modern kesirli analizin teorisi operatörler teorisi ile yakından alakalıdır. Bir operatör, bir nesne sınıfının üyelerinin, açık bir şekilde ikinci bir sınıf üyelerine dönüştürülmesini sağlayan bir dönüşüm kuralıdır. Klasik analizde, D_x^n sembolü genellikle n . türev operatörü ($n \geq 0$) için kullanılırken, daha az yaygın olarak D_x^{-1} integral (veya antitürev) operatörü için kullanılır. Şu anda bir kesirli işlemi göstermek için birkaç farklı gösterim bulunmaktadır. Bu çalışmanın kalanında, Harold T. Davis [6] tarafından kullanılan

gösterimi kullanılacaktır. Eğer v bir pozitif reel sayı ise ${}_c D_x^{-v} f(x)$ ifadesi, f fonksiyonunun x -ekseni boyunca v . mertebeden integralini ifade eder. Benzer olarak ${}_c D_x^v f(x)$ ifadesi de v . mertebeden türevi için kullanılmıştır. c ve x indisleri integrasyonun limitleri veya terminalleri olarak adlandırılmıştır. (Kesirli analizde keyfi mertebeden integral veya türevin geometrik yorumu olmadığından limit kelimesi yerine gereksiz karışıklığı önlemek için terminal kelimesi kullanılmıştır). İndisler uygulamadaki anlam belirsizliklerini önleme adına operatör sembolünün önemli bir parçasıdır. Kesirli operatör gösteriminin önemi küçümsenemez: Davis gösteriminin kısa ve öz oluşu kesirli analize tarifsiz bir zarafet kazandırmıştır. Kullandığımız bu gösterimle artık keyfi mertebeden matematiksel türev ve integral problemlerini tam olarak tanımlamak mümkündür. Kesirli analizin erken dönem tarihine katkıda bulunan birçok matematikçinin konuyu resmileştirmenin dışında temel bir problemin çözülmesi gerekliliğini iyi anladıkları, ama bunu açıkça ortaya koymadıkları açıktır. İstedikleri ise yeterince genel her v sayısı ve yeterince geniş bir sınıfın her f fonksiyonu için aşağıdaki kriterlere göre f ile alakalı yeni bir ${}_c D_x^v f$ fonksiyonu bulunmasıydı.

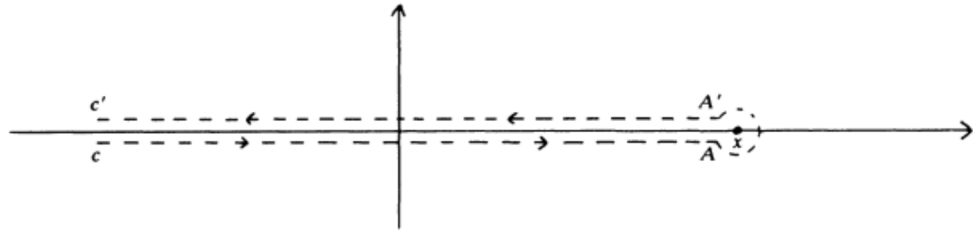
1. Eğer $f(x)$ analitik bir fonksiyon ise ${}_c D_x^v f(x)$ kesirli türevi de x değişkenine ve v mertebesine göre bir analitik fonksiyon olmak zorundadır.
2. ${}_c D_x^v$ operatörü v pozitif bir tamsayı olduğunda $({}_c D_x^n f(x) = f^{(n)}(x), n \geq 0)$ adi türevdeki ile aynı sonucu üretmelidir. Benzer olarak v negatif tamsayı olduğunda aynı n -katlı integral sonucunu vermelidir. Ayrıca ${}_c D_x^{-n} f(x)$ ifadesi $x = c$ (integralin alt terminali) de bütün $n - 1$ inci türevleri ile birlikte yok olmalıdır.
3. Kesirli işlemler lineer olmalıdır.
4. Sıfırıncı mertebeden işlem fonksiyonu birim operatör olmalıdır: ${}_c D_x^0 f = f$.
5. Üst alma kuralı keyfi mertebeden integral alma işlemi için geçerli olmalıdır.

$${}_c D_x^{-\mu} ({}_c D_x^{-v} f) = {}_c D_x^{-\mu-v} f \quad (1.7)$$

Tüm bu kriterleri sağlayan bir tanımın ortaya çıkması 1884 yılında olmuştur. O yılda H. Laurent şimdi kesirli analizin temellerinden kabul edilen bir makale [7] yayınlamıştır. Onun başlangıç noktası karmaşık değerli analitik fonksiyonlar için Cauchy integral formülü olmuştur:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (1.8)$$

Burada C , z noktasını karmaşık düzlemde çevreleyen kapalı bir konturdur. $n!$ ifadesini keyfi $\nu!$ değerlerine genelleştirmek güç değildir, çünkü $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$ dir. Bununla birlikte artık $1/(\xi - z)^{\nu+1}$ 'in z noktasında bir kutbu yoktur, ama bir dal noktası vardır. Pozitif reel eksen üzerindeki bir $z = x$ noktası civarında integrasyonu gerçekleştirmek için Laurent pozitif reel eksen üzerindeki x noktasından eksi sonsuza kadar negatif eksen boyunca bir dal kesmesi kullanmıştır (Şekil 1.1.). Şimdilerde Laurent döngüsü olarak bilinen Laurent konturu, kesmenin alt kenarındaki bir c , ($c < x$) noktasından başlar ve kesme üzerindeki bir A noktasına kadar reel eksen boyunca devam eder. ε yarıçaplı bir çemberin çevresinden pozitif yönde hareket ederek kesmenin üst kenarındaki A' noktasına ulaşır ve kesmenin üst kenarındaki c' noktasına kadar devam eder.



Şekil 1.1. Laurent döngüsü

Laurent döngüsü boyunca integral almak için

$$(\xi - x)^{(-\nu-1)} = e^{(-\nu-1)\log(\xi-x)} \quad (1.9)$$

dönüşümünü yaparız. Burada $\log z$ dalı $\xi - x$ pozitif reel değerlikli olduğunda $\log(\xi - x)$ reel olacak şekilde seçilmiştir. Böylece döngü üst kolu boyunca

$$\log(\xi - x) = \log(x - t) - i\pi \text{ iken alt dalda} \quad (1.10)$$

$$\log(\xi - x) = \log(x - t) + i\pi \quad (1.11)$$

dir. Cauchy integral formülü (n pozitif tamsayısı yerine v reel sayısı yazılarak) artık üç integralin toplamı olarak yazılabilir:

$$\int_c^A e^{(-v-1)[\log(x-t)-i\pi]} f(t) dt + \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-v} e^{-iv\theta} i f(x + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta + \int_{A'}^{c'} e^{(-v-1)[\log(x-t)+i\pi]} f(t) dt \quad (1.12)$$

Burada birinci ve üçüncü kısım $\xi = t$, ikinci kısım ise $\xi = x + \varepsilon e^{i\theta}$ parametreleriyle ifade edilmiştir. Bu integrallerin düzgün yakınsamalarından emin olmak için $v < 0$ alınmalıdır. Daha sonra $\varepsilon \rightarrow 0$ için (ve ilgili olarak $A \rightarrow x$ ve $A' \rightarrow x$), bu integrallerin ikincisi sıfıra yakınsarken, birinci ve üçüncü şu şekilde birleştirilebilir.

$$\frac{\Gamma(v+1)}{\pi} \left[\frac{e^{i\pi(v+1)} - e^{-i\pi(v+1)}}{2i} \right] \int_c^x (x-t)^{-v-1} f(t) dt \quad (1.13)$$

($v < 0$ kabulü hem $\varepsilon^{-v} \rightarrow 0$ yakınsamasını hem de geri kalan integrallerin A ve $A' \rightarrow 0$ şeklinde ıraksamamasını garanti eder). Köşeli parantez içindeki ifadeler $-\sin\pi v$ ye eşittir ki o da gama fonksiyonunun yansıma formülünden $\pi/\Gamma(-v)\Gamma(v+1)$ e eşittir. Negatif bir v yerine pozitif bir v kullanmak adına gösterimde yapılan basit bir değişiklik $v > 0$ için Laurent'in keyfi mertebeden integral tanımını verir.

$${}_c D_x^{-v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_c^x (x-t)^{v-1} f(t) dt \quad (1.14)$$

Bu tanım genellikle Riemann-Liouville integrali olarak adlandırılır. Çünkü özel olarak $c = 0$ ve $c = \infty$ alınması, sırasıyla Riemann ve Liouville tanımlarını verir.

Keyfi mertebeden bir türev tanımı elde etmek için Riemann-Liouville integral formülünde v yerine $-v$ yazılabilir. Fakat bu ıraksak bir integral verir. Keyfi mertebeden türev için uygun tanım, istenen sonuç alışlagelmiş türev ile elde edilebilecek olan bir noktaya kadar integre etmek ile elde edilebilir.

$${}_c D_x^v f(x) = {}_c D_x^{m-\rho} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_c^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt \right] \quad (1.15)$$

Burada kolaylık olsun diye m , v den büyük en küçük tamsayı olarak, $v = m - \rho$ ve $0 < \rho \leq 1$ şeklinde alınmıştır.

1.4. Genel Özellikler

Riemann-Liouville kesirli integral ve türev tanımının yukarıda numaralandırılmış beş şartı sağladığını göstermek zor değildir. Bununla birlikte bu şartları sağlayan tek tanımın bu olup olmadığı hala açık bir sorudur. Beşinci kriter olan üst alma kuralı çözümü zor problemlerde sıkıntıya yol açan tek kriterdir. ${}_c D_x^{-\mu} ({}_c D_x^{-\nu} f) = {}_c D_x^{-\mu-\nu} f$ olduğunu göstermek için aşağıdaki eşitliğin sağlandığını göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_c^x (x-s)^{\mu-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^s (s-t)^{\nu-1} f(t) dt \right] ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_c^x (x-t)^{\mu+\nu-1} f(t) dt \end{aligned} \quad (1.16)$$

Bu ise n -katlı tekrarlı integrali tek bir integrale indirgeyen Dirichlet metodu ile yapılabilir. İntegrandların $(x-t)^{\nu-1} f(t)$ şeklinde olduğu tekrarlı integralleri tek bir integrale indirgemek için Dirichlet metodunu ilk kullanan kişi 1908 de W. A. Hurwitz olmuştur.

Keyfi mertebeden türev için $\nu > 0$ ve $\mu > 0$ olmak üzere

$${}_c D_x^\nu ({}_c D_x^\mu f) = {}_c D_x^{\nu+\mu} f \quad (1.17)$$

şeklinde bir üst alma kuralı teşkil etmek istediğimizi farz edelim. n ve m sırasıyla ν ve μ 'den büyük en küçük tamsayılar olmak üzere $0 < \rho \leq 1$ ve $0 < \sigma \leq 1$ için $\nu = n - \rho$, $\mu = m - \sigma$ olarak alıp kolaylık için indisleri ihmal edersek;

$$D^\nu (D^\mu f) = D^{n-\rho} D^{m-\sigma} f = D^n D^{-\rho} D^m D^{-\sigma} f \quad (1.18)$$

ve

$$D^{v+\mu} f = D^{n+m-(\sigma+\rho)} f = D^n D^m D^{-\rho} D^{-\sigma} f \quad (1.19)$$

olur. Bu bize eğer varsa yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının sağlanması için işlemdeki mertebelerin değişimine izin veren $D^m D^{-\rho} = D^{-\rho} D^m$ eşitliğinin araştırılması gerekliliğini söyler. Riemann-Liouville tanımından

$$D^{-\rho} f = \left[\frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_c^x (x-t)^{\rho-1} f(t) dt \right] \quad (1.20)$$

yazılabilir. m kez parçalı integral olarak;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\rho)} \left\{ \frac{(x-c)^\rho}{\rho} f(c) + \frac{(x-c)^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} f'(c) + \dots + \frac{(x-c)^{\rho+m-1}}{\rho(\rho+1) \dots (\rho+m-1)} f^{(m-1)}(c) \right\} \\ + \frac{1}{\Gamma(\rho+m)} \int_c^x (x-t)^{\rho+m-1} f^{(m)}(t) dt \end{aligned} \quad (1.21)$$

ifadesi elde edilebilir ki burada, tek başına son terim $D^{-(\rho+m)} f^{(m)} = D^{-(\rho+m)} D^m f$ 'dir.

Dolayısıyla açılımın ilk terimi, yani parantez içindeki toplamların her biri sıfır ise

$$D^m D^{-\rho} f = D^m D^{-(\rho+m)} f^{(m)} = D^{-\rho} f^{(m)} = D^{-\rho} D^m f \quad (1.22)$$

yazılabilir. Böylece f fonksiyonu parantez içindeki ifadenin sıfır olduğundan emin olmak için integrasyonun alt terminalinde yeterince büyük bir mertebeye yok olursa $D^v D^\mu f = D^{v+\mu} f$ keyfi mertebeden türev için üst alma kuralı sağlanır. Fonksiyon c 'de yeterince kaybolmadığında parantez içindeki toplamlar korunmalıdır.

Bir çarpımın kesirli türevinin hesaplanması için yararlı bir araç Leibniz kuralıdır:

$${}_c D_x^v f(x) g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} {}_c D_x^n f(x) {}_c D_x^{v-n} g(x) \quad (1.23)$$

Burada; ${}_c D_x^v$ adi türev operatörü, d^n/dx^n , ${}_c D_x^{v-n}$ kesili operatör ve $\binom{v}{n}$ de genelleştirilmiş binom katsayısı olan $\Gamma(v+1)/n!\Gamma(v-n+1)$ 'dir. Bir çarpımın keyfi türevini alırken, çarpanları yukarıdaki serilerin n adi türevden sonra yok olacak şekilde seçmek uygundur. Örneğin;

$${}_0 D_x^{1/2} xg(x) = x {}_0 D_x^{1/2} g(x) + \frac{1}{2} {}_0 D_x^{-\frac{1}{2}} g(x) \quad (1.24)$$

$n = 1$ için yok olur. Bu genelleştirilmiş Leibniz kuralı daha sonraki uygulamalarda kullanılacaktır. Fakat ondan önce bazı temel fonksiyonların kesirli türevlerinin nasıl hesaplandığına bakmak gerekir.

1.5. Temel Örnekler

Genel Riemann-Liouville integral tanımı yardımıyla belli bazı örnekleri hesaplayabiliriz.

Örnek 1.5.1. $a > 0$ olmak üzere $f(x) = x^a$ şeklindeki bir fonksiyon, Riemann sınıfından fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun v . mertebeden integrali

$${}_0 D_x^{-v} x^a = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} t^a dt = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+v+1)} x^{a+v} \quad (1.25)$$

dir . Çünkü ilişkili integral, Beta fonksiyonu:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad (1.26)$$

şeklinde tanımlanmak üzere aşağıdaki formda bir beta integralidir:

$$\int_0^x (x-y)^d y^b dy = \frac{\Gamma(d+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+d+2)} x^{b+d+1} \quad (1.27)$$

Bu ifadenin v . mertebeden türevi ise,

$$\begin{aligned} {}_0D_x^v x^a &= {}_0D_x^m {}_0D_x^{-p} x^a = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} t^a dt \right] \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+p+1)} x^{a+p} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-v+1)} x^{a-v} \end{aligned} \quad (1.28)$$

şeklindedir.

Örnek 1.5.2. $a > 0$ olmak üzere x^{-a} şeklindeki bir fonksiyon Liouville sınıfından fonksiyon olarak adlandırılır. Bu fonksiyonun v . mertebeden integrali, $x-t = xu/(u-1)$ dönüşümü ile birlikte;

$${}_{-\infty}D_x^{-v} x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{v-1} t^{-a} dt = \frac{(-1)^v \Gamma(a-v)}{\Gamma(a)} x^{-a-v} \quad (1.29)$$

şeklinde olup, x^{-a} ifadesinin v . mertebeden türevi;

$$\begin{aligned} {}_{-\infty}D_x^v x^{-a} &= {}_{-\infty}D_x^m {}_{-\infty}D_x^{-p} x^{-a} = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{p-1} t^{-a} dt \right] \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{(-1)^{-p} \Gamma(a-p)}{\Gamma(a)} x^{-a+p} \right] = \frac{(-1)^v \Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} x^{-a-v} \end{aligned} \quad (1.30)$$

şeklindedir ki, bu tanım Liouville'in ikinci tanımındaki ile aynıdır.

Örnek 1.5.3. Şimdi ise bir k sabitinin türevini hesaplayalım. $D^v = D^{m-p}$ eşitliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned} {}_0D_x^v k &= \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} k dt \right] = \frac{d^m}{dx^m} \left[\frac{k}{\Gamma(p)} \frac{x^p}{p} \right] = \frac{kp! x^{p-m}}{(p-m)! p \Gamma(p)} \\ &= \frac{k}{\Gamma(1-v)} x^{-v} \end{aligned} \quad (1.31)$$

olup, bu ise Center'ın Lacroix'in bir sabite uyguladığı tanımını kullanarak elde ettiği ile aynı formüldür. İntegralin terminallerinin ∞ ve x olması durumunda, bir sabitin kesirli türevi bulunmamaktadır. Çünkü tanımlayıcı integral iraksaktır. Sonuç olarak sabit sayıları Riemann sınıfından x^a ve $a = 0$ şeklindeki fonksiyonlar olarak dikkate alınmalıdır [8].

1.6. Caputo Kesirli Türevi

Riemann-Liouville kesirli türev tanımı, kesirli türev ve integraller teorisinin gelişimi ve kuramsal matematikteki (tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü, yeni birtakım fonksiyon sınıflarının tanımları, serilerin toplamları, vs.) uygulamaları açısından büyük rol oynamıştır.

Ancak, modern teknolojinin gelişimi, köklü kuramsal matematikte belli bir revizyon gerektirmiştir. Özellikle malzeme özelliklerinin daha iyi tanımlanması için kesirli türevlerin kullanıldığı viskoelastisite teorisi ve kalıtsal katı mekaniğinde önemli sayıda çalışma ortaya çıkmıştır. Gelişmiş reolojik, yani cisimlerin yük, şekil değiştirme ve zaman faktörleri altındaki davranışlarını inceleyen modellere dayalı matematiksel modelleme, doğal olarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin ortaya çıkmasına ve bu denklemlere ait başlangıç koşulları formülasyonunun gerekliliğine yol açmıştır.

Uygulamalı problemler, fiziksel olarak yorumlanabilen $f(a), f'(a), \dots$ gibi başlangıç koşullarının kullanımına izin veren kesirli türevlerinin tanımlarını gerektirir.

Ne yazık ki, Riemann-Liouville yaklaşımı $t = a$ alt terminalinde Riemann-Liouville kesirli türevlerinin limit değerlerini içeren başlangıç koşullarına yol açar. Örneğin b_k , $k = 1, 2, \dots, n$ şeklindeki sabitler olmak üzere;

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) = b_2,$$

...

$$\lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) = b_n \quad (1.32)$$

eşitliklerine sahiptir. Buna rağmen, bu tip başlangıç koşullarına sahip başlangıç değer problemleri matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözülebilir. Fakat, bu tip çözümler pratikte işe yaramazlar. Çünkü bu tür başlangıç koşulları için bilinen fiziksel bir yorum yoktur.

Burada köklü bir matematiksel teori ve pratik ihtiyaçları arasında bir çatışma görülmektedir. Bu çatışmanın kesin çözümü M. Caputo tarafından bir makalesinde [9] ve iki yıl sonra da kitabında [10] önerilmiştir. Caputo tanımı şu şekilde yazılabilir:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (1.33)$$

$f(t)$ fonksiyonunun doğal koşullar altında, $\alpha \rightarrow n$ için Caputo türevi $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden klasik türevi haline gelir. Eğer $0 \leq n-1 < \alpha < n$ kabul edilip $f(t)$ fonksiyonunun her $T > a$ için $[a, T]$ aralığında $n+1$ ardışık türevi mevcutsa;

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.34)$$

yazılabilir. Bu bize Caputo yaklaşımının da Riemann Liouville yaklaşımında olduğu gibi, tamsayı mertebeden türevler arasında bir enterpolasyon sağladığını söyler. Caputo yaklaşımının temel avantajı; Caputo kesirli türevine sahip diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları ile tamsayı mertebeden diferansiyel denklemlerin başlangıç şartlarının aynı formda olmasıdır. Yani bilinmeyen fonksiyonun $t = a$ alt terminalindeki tamsayı mertebeden türevlerinin limit değerlerini içerir.

Riemann-Liouville ve Caputo türevleri açısından kesirli diferansiyel denklemlere eşlik etmesi gereken başlangıç koşullarının şekil olarak farkını vurgulamak amacıyla, ilgili Laplace dönüşüm formüllerine $a = 0$ için bakılırsa:

Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşüm formülü;

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0D_t^{\alpha} f(t) \} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t) |_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (1.35)$$

şeklinde iken Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşüm formülü [9]

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0^C D_t^{\alpha} f(t) \} dt = p^{\alpha} F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 \leq \alpha < n) \quad (1.36)$$

şeklindedir.

Görüldüğü üzere Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü onların fiziksel yorumunda bir takım problemlere yol açabilecek (1.32) şeklindeki başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir. Aksine Caputo kesirli türevinin Laplace dönüşümü, bilinen bir takım fiziksel yorumlara sahip klasik tamsayı mertebeden türevlerin başlangıç koşullarının kullanımına izin vermektedir.

Laplace dönüşüm metodu uygulamalı problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılır. Uygun olan Laplace dönüşüm formülünü seçmek için, hangi tipteki kesirli türev tanımının (bir başka deyişle hangi tipteki başlangıç koşullarının) kullanılacağına anlaşılması önemlidir.

Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki bir diğer fark ise; bir sabit sayının Caputo türevi sıfır iken, alt terminal a 'nın sonlu bir değeri için bir sabitin Riemann-Liouville kesirli türevinin sıfır değil;

$${}_0D_t^{\alpha} C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (1.37)$$

olmasıdır.

Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasında uygulama açısından önemli bir fark daha vardır. Caputo türevi için;

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0,1,2, \dots; \quad n - 1 < \alpha < n) \quad (1.38)$$

olmasına rağmen, Riemann-Liouville türevi için;

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0,1,2, \dots; \quad n - 1 < \alpha < n) \quad (1.39)$$

olmasıdır.

Bu formüllerdeki türev operatörlerinin yer değiştirebilmesi farklı şartlar altında mümkündür:

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (1.40)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = n, n + 1, \dots, m \quad (1.41)$$

$$(m = 0,1,2, \dots; \quad n - 1 < \alpha < n) \quad (1.42)$$

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \quad (1.43)$$

$$f^{(s)}(0) = 0, \quad s = 0,1,2, \dots, m \quad (1.44)$$

$$(m = 0,1,2, \dots; \quad n - 1 < \alpha < n) \quad (1.45)$$

Görüyoruz ki Riemann-Liouville yaklaşımının aksine, Caputo türevinin bu durumunda $f^{(s)}(0)$, $s = 0,1,2, \dots, n - 1$ değerlerinde hiçbir kısıtlama yoktur [11].

BÖLÜM 2

2.1. Giriş

Matematiğin önemli konularından biri olan diferansiyel denklemler, günlük hayattaki birçok problemin, özellikle değişim gösteren olayların anlaşılması ve çözümü için bir model oluşturur. Bu anlamda, matematik modellerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için yüzyıldan uzun bir süredir kullanılan yöntem pertürbasyon metotlarıdır. Bu metotların tanımını geniş bir şekilde Nayfeh [12], Jordan ve Smith [13] tarafından yazılan kitaplarda bulmak mümkündür. Cebirsel denklemler, integral diferansiyel denklemler ve fark denklemleri bu tekniklerle yaklaşık olarak çözülebilir.

Ancak pertürbasyon metotlarının uygulanmasındaki zorluklar; küçük bir parametrenin denkleme gereksinimi veya küçük bir parametrenin denkleme yapay olarak tanımlanmasıdır. Bu nedenle pertürbasyon metotlarının oluşturduğu dezavantajları gidermek için; literatürde J.H.He'nin iterasyon-pertürbasyon metodu [14], R.E Mickens'in iterasyon tekniği [15-17], Harmonik Balans metodu [18-20], J.H.He'nin Parametre-Genişletme metodu [21], Linsteid-Poincare metodu [22-24] ve Homotopi Pertürbasyon metodu [25] gibi çok çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Ayrıca güçlü nonlinear sistemlerin çözümleri için geçerli alternatif bir yöntem ise pertürbasyon-iterasyon (veya iterasyon-pertürbasyon) metotlarıdır. Genellikle denklemler iterasyon prosedürünü uygulamadan önce alternatif bir form içine sokulur. Bazı algoritmalar sadece özel problemler üzerinde çalışmak için geliştirilmiştir. Standart olmayan, ön dönüşüm ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen ve bütün denklem tipleri için geçerli olan bir yaklaşım, literatürde yoktur.

2.2. Pertürbasyon

Pertürbasyon teorisi, tam olarak çözülemeyen bir problemin, bu probleme bağlı başka bir problemden yola çıkılarak, yaklaşık bir çözümünü elde etmek için kullanılan matematiksel metotları içerir. Tam olarak çözümlenebilen problemin matematiksel

tanımına "küçük" bir terim eklenerek eldeki problem formüle edilebiliyorsa, pertürbasyon teorisi uygulanabilir.

Pertürbasyon teorisi, istenilen çözümün, tam çözümü olan problemden sapmanın miktarını belirleyen "küçük" bir parametre kullanılarak kuvvet serisi terimleri ile ifade edilmesine öncülük eder. Kuvvet serisinin ana terimi, tam çözümü olan problemin çözümü; diğer terimler ise ilk problemden sapma miktarına göre belirlenen, çözümdeki sapmayı tanımlar.

ε : Küçük parametre

y : Tam çözüm,

$y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots$: Tam çözüme yaklaşan çözüm,

y_0 : Tam çözümü olan problemin $O(1)$ mertebe çözümü olmak üzere;

y_1, y_2, \dots : Yüksek mertebeden sistematik prosedürde tekrarlanarak bulunan terimler olarak temsil edilir.

Pertürbasyon çözümü, yaklaşık seri çözümünü belli bir noktada kesmekle yapılır. Genellikle çözüm, ilk iki terim $y_0 + \varepsilon y_1$ 'de kesilebilir. Bu 1. dereceden pertürbasyon düzeltilmesi ve ilk çözümdür.

2.3. Pertürbasyon-İterasyon Algoritması

Pertürbasyon metotları fizik ve mühendislikte ortaya çıkan, lineer olmayan matematiksel modellerle ilgili çalışmalarda kullanılan en yaygın metotlardır. Cebirsel denklemler, integraller, diferansiyel denklemler, fark denklemleri ve integro-diferansiyel denklemleri, bu tekniklerle yaklaşık olarak çözülebilir. Bu metotlar için en büyük kısıtlama, zayıf nonlineer sistemler için çözümleri geçerli kılan küçük parametre sınırlamasıdır. Bu kısıtlamayı aşmak için son yıllarda modifiye edilmiş Linstedt-Poincare metodu, doğrusallaştırılmış pertürbasyon metodu, homotopi pertürbasyon metodu ve çok ölçekli Linstedt-Poincare metodu gibi alternatif pertürbatif yaklaşımlar önerilmiştir. [26]'da sunulan doğrusallaştırılmış pertürbasyon metodunda, lineer olmayan terim yerine yaklaşımdaki hatayı minimize edecek şekilde bir yaklaşık lineer terim alınmıştır.

Literatürdeki güçlü nonlinear sistemleri geçerli kılmak için kullanılan alternatiflerden birise de iterasyon-pertürbasyon metotlarının kullanılmasıdır. [27]'de nonlinear terimler, bir önceki iterasyon sonuçlarından elde edilen iteratif çözüm fonksiyonlarının yerine konulmasıyla doğrusallaştırılmıştır. Genellikle iterasyon-pertürbasyon metotlarında, denklemler, iterasyon prosedürü uygulamadan önce bir alternatif form içine atılır. Geliştirilen algoritmalarından bazıları sadece spesifik problemler için çalışır. Literatürde standart olmayan ön-dönüşümler ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen bütün tipteki denklemler için geçerli bir genel yaklaşım bulunmamaktadır.

Son zamanlarda özel dönüşümler ve başlangıç kabulleri gerektirmeyen çok farklı türdeki denklemler için uygun yeni bir pertürbasyon-iterasyon algoritması, Aksoy, Pakdemirli ve arkadaşları [29-31] tarafından geliştirilmiştir. Sistemik olarak kök bulma algoritmaları geliştirme çalışmaları [32-34], yöntemin diferansiyel denklemler için genellenmesine yol açmıştır [29-31]. Bu yeni teknik, pertürbasyon açılımının üzerine kurulan bir iterasyon şeması ile oluşturulmuştur. Yöntem birinci dereceden denklem [30] ve Bratu tipi ikinci dereceden denklemlere [29] başarıyla uygulanmıştır. Geliştirilen algoritmalar, bazı lineer olmayan ısı denklemlerinde [31] başarı ile test edilmiştir. Konu ile ilgili yapılan en son çalışmalar; metodun Fredholm ve Volterra integral denklemlerine [35] ve adi diferansiyel denklem sistemlerine [36] uygulanmasını içerir.

Bu çalışmada metod kesirli tipteki birtakım diferansiyel denkleme başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Adomian ayrıştırma metodu, varyasyonel iterasyon metodu, diferansiyel transform metodu, Taylor-matris metodu, sözde spektral algoritmaları, homotopi-pertürbasyon metodu, Laplace dönüşüm ayrıştırma algoritmaları, Chebyshev polinomları ve homotopi-analiz metodu bu tip lineer olmayan denklemlere etkili bir biçimde uygulanmıştır.

2.3.1. Pertürbasyon-iterasyon algoritması PIA(1,1)

Bu bölümde, pertürbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor seri açılımında ise sadece birinci türevler için $n = 1$ ve $m = 1$ gibi düzeltme terimleri seçilerek bir

pertürbasyon-iterasyon algoritması geliştirilmiş ve bu algoritma PIA(1,1) olarak adlandırılmıştır.

$$F(u', u, \varepsilon) = 0 \quad (2.1)$$

şeklindeki 1. mertebeden diferansiyel denklem sistemini ele alalım. Burada $u = u(t)$ ve ε pertürbasyon parametresidir. Pertürbasyon açılımında sadece bir düzeltme terimi alınır.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \varepsilon(u_c)_n \\ u'_{n+1} &= u'_n + \varepsilon(u'_c)_n \end{aligned} \quad (2.2)$$

olup bunu (2.1) denkleminde yerine yazıp, sadece birinci türevler için Taylor serisine açılırsa;

$$F(u', u, \varepsilon) \approx \frac{1}{0!} F(u', u, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{1!} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} (u', u, \varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = 0 \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}}_{(u_c)_n} + \frac{\partial F}{\partial u'} \underbrace{\frac{\partial u'}{\partial \varepsilon}}_{(u'_c)_n} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \quad (2.4)$$

ya da

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} = (u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} + (u'_c)_n \frac{\partial F}{\partial u'} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \quad (2.5)$$

olur. Denklem (2.5)'i denklem (2.3) içine yerleştirirsek, PIA(1,1) için uygulayacağımız diferansiyel denklem;

$$F + \varepsilon((u_c)_n F_{u'} + (u'_c)_n F_{u'} + F_\varepsilon) = 0 \quad (2.6)$$

biçiminde olur. Burada (.)' bağımsız değişkene göre türevi ifade eder ve

$$F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad F_{u'} = \frac{\partial F}{\partial u'}, \quad F_\varepsilon = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \quad (2.7)$$

dur.

Unutulmamalıdır ki bütün türevler $\varepsilon = 0$ da değerlendirilmiştir. Kolayca görülmektedir ki yukarıdaki denklem değişken katsayılı 1. mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Bir u_0 başlangıç varsayımı ile başlayarak, ilk $(u_c)_0$ (2.6)'dan yararlanarak hesaplanır ve sonra u_1 'i hesaplamak için (2.2)'de yerine yazılır. İterasyon prosedürü tatminkar bir sonuç elde edilene kadar (2.6) ve (2.2)'ü kullanarak tekrar edilir. Bu iterasyon algoritması [28]'de açıklanan Varyasyonel İterasyon Algoritması ile benzer sonuçlar doğurabilir. Önerilen 3 farklı varyasyonel iterasyon algoritması için [28]'e bakılabilir.

BÖLÜM 3

3.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Adi Kesirli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Bu çalışmada yeni bir teknik olan pertürbasyon-iterasyon metodu, bazı kesirli diferansiyel denklem tiplerine ilk defa uygulanmıştır. Bu bölümde; pertürbasyon açılımında bir düzeltme terimi ve Taylor seri açılımında ise sadece birinci türevler için $n = 1$ ve $m = 1$ gibi düzeltme terimleri seçilerek bir pertürbasyon-iterasyon algoritması geliştirilmiş ve bu algoritma PIA(1,1) olarak adlandırılmıştır.

Öncelikle aşağıdaki tipteki başlangıç değer problemini ele alalım.

$$D^\alpha u(t) + N[u(t)] + L[u(t)] = g(t), \quad \alpha > 0 \quad (3.1)$$

$$u^{(k)}(0) = c_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (3.2)$$

Burada L bir lineer operatörü, N bir nonlineer operatörü ve D^α ifadesi

$$D^\alpha u(t) = J^{m-\alpha} \left(\frac{d^m}{dt^m} u(t) \right), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

şeklindeki α . mertebeden Caputo kesirli türevini ifade eder.

Bu yöntemde ε yapay olarak tanımlanmış pertürbasyon parametresidir ve pertürbasyon açılımında sadece bir düzeltme terimi alınmıştır.

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \quad (3.4)$$

(3.4) denklemini (3.1) denkleminde yerine yazıp sadece birinci türevler için Taylor serisine açarsak;

$$\begin{aligned}
& F(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \\
& + F_{u^{(\alpha)}}(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon(u_c^{(\alpha)})_n \\
& + F_{u^{(m)}}(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon(u_c^{(m)})_n \\
& + F_{u^{(m-1)}}(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon(u_c^{(m-1)})_n + \dots \\
& + F_{u'}(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon(u_c')_n \\
& + F_u(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon(u_c)_n \\
& + F_\varepsilon(u_n^{(\alpha)}, u_n^{(m)}, u_n^{(m-1)}, \dots, u_n', u_n, 0) \varepsilon \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

veya

$$\begin{aligned}
& (u_c^{(\alpha)})_n \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} + (u_c^{(m)})_n \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} + (u_c^{(m-1)})_n \frac{\partial F}{\partial u^{(m-1)}} + \dots + (u_c')_n \frac{\partial F}{\partial u'} + (u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} \\
& + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{F}{\varepsilon} = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

denklemini elde ederiz. Burada bütün türevler $\varepsilon = 0$ da değerlendirilmiştir. Bir u_0 başlangıç varsayımı ile başlayarak, ilk $(u_c)_0$ hesaplanır ve sonra u_1 'i hesaplamak için (3.4)'te yerine yazılır ve iterasyon süreci bu şekilde devam ettirilir.

Örnek 3.1. Aşağıdaki kesirli Riccati diferansiyel denklemini el alalım [37]:

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = -u^2(t) + 1, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.7}$$

$u(0) = 0$ başlangıç şartıyla verilen bu denklem için $\alpha = 1$ olduğunda tam çözüm

$$u(t) = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \tag{3.8}$$

şeklindedir. (3.7) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazalım. ε küçük bir parametre olmak üzere; İterasyon formülü gereği, denkleme $u'(t)$ değerini ekleyip çıkarırsak yeni denklem

$$\varepsilon \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} + u'(t) - \varepsilon u'(t) + \varepsilon u^2(t) - 1 = 0 \quad (3.9)$$

halini alır.

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds + u'(t) - \varepsilon u'(t) + \varepsilon u^2(t) - 1 \quad (3.10)$$

için (3.6) denklemindeki terimler

$$F = u'_n(t) - 1$$

$$F_u = 0$$

$$F_{u'} = 1$$

$$F_\varepsilon = -u'_n(t) + u_n^2(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (3.11)$$

şeklinde olur. (3.6) denkleminde integralli terimin katsayısı olarak eklediğimiz küçük ε parametresi denklemin çözülür hale getirir. Bu durumda bu örnek için (3.6) denkleminde gerekli yerine koymalar gerçekleştirildikten sonra;

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds + u_n^2(t) + (u'_c(t))_n = \frac{1 + (-1 + \varepsilon)u'_n(t)}{\varepsilon} \quad (3.12)$$

diferansiyel denklemin elde edilir. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(t) = 0$ seçilip, (3.12) denklemin $n = 0$ için çözüldüğünde

$$(u_c(t))_0 = \frac{t}{\varepsilon} + C_1 \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu ifade

$$u_1 = u_0 + \varepsilon(u_c)_0 \quad (3.14)$$

denkleminde yerine yazılırsa;

$$u_1(t) = 0 + \varepsilon \left(\frac{t}{\varepsilon} + C_1 \right) \quad (3.15)$$

olup $u_1(0) = 0$ denkleminin çözümünden

$$C_1 = 0 \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ değeri için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse;

$$u_1(t) = t \quad (3.17)$$

elde edilir. İterasyon prosedürü benzer şekilde devam ettirilirse, diğer iterasyonlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_2(t) = 2t - \frac{t^3}{3} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \quad (3.18)$$

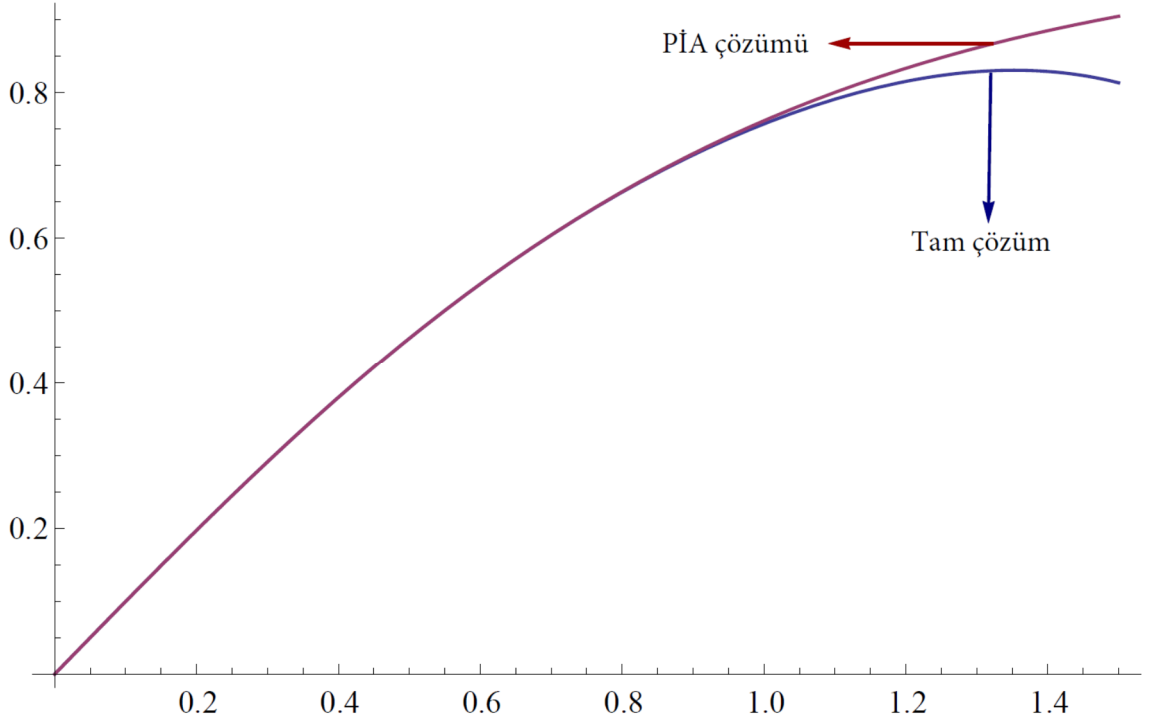
$$u_3(t) = 3t - \frac{5t^3}{3} + \frac{4t^5}{15} - \frac{t^7}{63} + \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{t^{5-2\alpha}}{(-5+2\alpha)\Gamma(3-3\alpha)^2} \\ + \frac{t^{-\alpha}(2t^6(-4+\alpha)(-3+\alpha) - 9t^2(-6+\alpha)(-4+\alpha)(-3+\alpha))}{3(-6+\alpha)\Gamma(5-\alpha)} \\ - \frac{6t^4(-6+\alpha)(-7+2\alpha)}{3(-6+\alpha)\Gamma(5-\alpha)} \quad (3.19)$$

Diğer iterasyonlar daha uzun ifadelerle sahip olduğu için burada verilmemiştir. Ancak Mathematica gibi bir yazılım kullanılarak bu iterasyonlar istenen mertebeye kadar hesaplanabilir. Tablo 3.1.'de bazı PIA iterasyonları tam çözümle ve modifiye edilmiş homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçta kullandığımız yöntemin çok daha iyi sonuçlar verdiği ve daha yaklaşık çözümler

sunduğu kanıtlanmıştır. Şekil 3.1.'de ise elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak tam çözüm ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Tablo 3.1. Örnek 3.1. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$			
	PİA	MHPM	PİA	MHPM	PİA	MHPM	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000000
0.1	0.273239	0.273875	0.184607	0.184795	0.099667	0.099668	0.099668	8.4031E-12
0.2	0.450722	0.454125	0.312989	0.313795	0.197375	0.197375	0.197375	4.20830E-9
0.3	0.566159	0.573932	0.413024	0.414562	0.291312	0.291312	0.291313	1.55996E-7
0.4	0.632329	0.644422	0.490946	0.492889	0.379947	0.379944	0.379949	1.97606E-6
0.5	0.659574	0.674137	0.550818	0.462117	0.462103	0.462078	0.462117	0.00001382
0.6	0.657975	0.671987	0.596448	0.597393	0.536983	0.536857	0.537050	0.00006618
0.7	0.637491	0.648003	0.631701	0.631772	0.604124	0.603631	0.604368	0.00024330
0.8	0.607570	0.613306	0.660394	0.660412	0.663300	0.661706	0.664037	0.00073584
0.9	0.576669	0.579641	0.686074	0.687960	0.714382	0.709919	0.716298	0.00191553
1.0	0.551855	0.558557	0.711773	0.718260	0.757166	0.746032	0.761594	0.00442789



Şekil 3.1. Örnek 3.1. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin grafiksel çözümlerinin $\alpha = 1$ için karşılaştırılması

Örnek 3.2. Yine bir diğer kesirli Riccati diferansiyel denklemini ele alalım [37]:

$$\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = 2u(t) - u^2(t) + 1, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.20)$$

$u(0) = 0$ başlangıç şartıyla verilen bu denklem için $\alpha = 1$ olduğunda tam çözüm

$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right) \right) \quad (3.21)$$

şeklindedir. (3.20) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazalım. ε küçük bir parametre olmak üzere; İterasyon formülü gereği, denkleme $u'(t)$ değerini ekleyip çıkarırsak yeni denklem

$$\varepsilon \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} + u'(t) - \varepsilon u'(t) - 2\varepsilon u(t) + \varepsilon u^2(t) - 1 = 0 \quad (3.22)$$

halini alır.

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^\alpha} ds + u_n'(t) - \varepsilon u_n'(t) - 2\varepsilon u_n(t) + \varepsilon u_n^2(t) - 1 \quad (3.23)$$

olmak üzere (3.6) denklemindeki terimler

$$F = u_n'(t) - 1$$

$$F_u = 0$$

$$F_{u'} = 1$$

$$F_\varepsilon = -u_n'(t) + u_n^2(t) - 2u_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (3.24)$$

şeklinde olur. Yine hatırlatmalıyız ki (3.6) denkleminde integralli terimin ve $u^2(t)$ 'nin katsayısı olarak eklediğimiz küçük ε parametresi denklemin çözülebilir hale getirir. Bu durumda bu örnek için (3.6) denkleminde gerekli yerlere koymalar gerçekleştirildikten sonra;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^\alpha} ds + u_n^2(t) + (u_c'(t))_n \\ &= \frac{1 + 2\varepsilon u_n(t) + (-1 + \varepsilon)u_n'(t)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.25)$$

diferansiyel denklemin elde edilir. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(t) = 0$ seçilip, (3.25) denkleminde $n = 0$ için çözüldüğünde

$$(u_c(t))_0 = \frac{t}{\varepsilon} + C_1 \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu ifade;

$$u_1 = u_0 + \varepsilon(u_c)_0 \quad (3.27)$$

denkleminde yerine yazılırsa;

$$u_1(t) = 0 + \varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon} + C_1\right) \quad (3.28)$$

olup $u_1(0) = 0$ denkleminin çözümünden;

$$C_1 = 0 \quad (3.29)$$

olarak bulunur. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ değeri için $u_1(t)$ yeniden düzenlenirse

$$u_1(t) = t \quad (3.30)$$

elde edilir. İterasyon prosedürü benzer şekilde devam ettirilirse diğer iterasyonlar aşağıdaki gibi elde edilir:

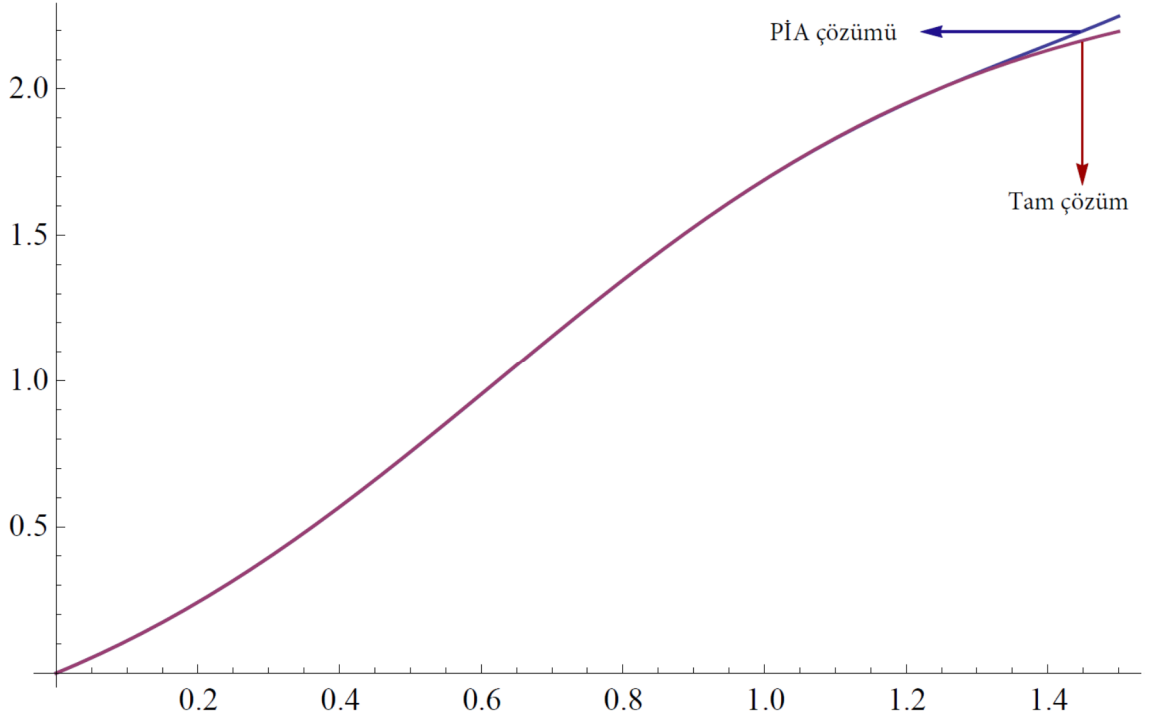
$$u_2(t) = 2t + t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} u_3(t) = & 3t + 3t^2 - t^3 - \frac{7t^4}{6} + \frac{t^6}{9} - \frac{t^7}{63} + \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{t^{5-2\alpha}}{(-5+2\alpha)\Gamma(3-3\alpha)^2} \\ & + \frac{1}{3\Gamma(7-\alpha)} t^{2-\alpha} (12t(-6+\alpha)(-5+\alpha)(-4+\alpha) \\ & - 6t^3(-6+\alpha)(-4+\alpha)(-3+\alpha) - 9(-6+\alpha)(-5+\alpha) \\ & (-4+\alpha)(-3+\alpha) - 6t^2(-6+\alpha)(-5+\alpha)(-7+2\alpha)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Yine diğer iterasyonlar daha uzun ifadelerle sahip olduğu için burada verilmemiştir. Tablo 3.2.'de bazı PIA iterasyonları tam çözümle ve modifiye edilmiş homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçta kullandığımız yöntemin çok daha iyi sonuçlar verdiği ve daha yaklaşım çözümler sunduğu kanıtlanmıştır. Şekil 3.2.'de ise elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak tam çözüm ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Tablo 3.2. Örnek 3.2. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

t	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$			
	PİA	MHPM	PİA	MHPM	PİA	MHPM	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.320883	0.321730	0.216584	0.216866	0.110294	0.110294	0.110295	1.0851E-6
0.2	0.623380	0.629666	0.426883	0.428892	0.241949	0.241965	0.241977	0.0000268
0.3	0.920289	0.940941	0.647833	0.654614	0.394957	0.395106	0.395105	0.0001474
0.4	1.202508	1.250737	0.874795	0.891404	0.567397	0.568115	0.567812	0.0004142
0.5	1.456864	1.549439	1.099158	1.132763	0.755256	0.757564	0.756014	0.0007575
0.6	1.669872	1.825456	1.310787	1.370240	0.952588	0.958259	0.953566	0.0009775
0.7	1.829997	2.066523	1.499559	1.594278	1.152054	1.163459	1.152949	0.0008948
0.8	1.929388	2.260633	1.656755	1.794879	1.345789	1.365240	1.346364	0.0005736
0.9	1.965134	2.396839	1.776325	1.962239	1.526505	1.554960	1.526911	0.0004056
1.0	1.939933	2.466004	1.855903	2.087384	1.688651	1.723810	1.689498	0.0008470



Şekil 3.2. Örnek 3.2. de elde edilen $u_4(t)$ 'nin grafiksel çözümlerinin $\alpha = 1$ için karşılaştırılması

Örnek 3.3. Son olarak aşağıdaki kesirli diferansiyel denklemi ele alalım [38]:

$$D^{1/2}u(t) + u(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{\Gamma(7/2)}t^{\frac{5}{2}} + \frac{24}{\Gamma(9/2)}t^{\frac{7}{2}} = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.33)$$

$u(0) = 0$ başlangıç şartıyla verilen bu denklem için tam çözüm

$$u(t) = t^4 - \frac{1}{2}t^3 \quad (3.34)$$

şeklindedir. (3.33) denklemini aşağıdaki formda yeniden yazalım. ε küçük bir parametre olmak üzere;

$$\varepsilon \frac{d^{1/2}u}{dt^{1/2}} + u(t) - t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}t^{\frac{5}{2}} - \frac{24}{\Gamma(9/2)}t^{\frac{7}{2}} = 0 \quad (3.35)$$

halini alır. Bu durumda

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \varepsilon \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^{1/2}} ds + u_n(t) - t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} t^{\frac{5}{2}} - \frac{24}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} t^{\frac{7}{2}} \quad (3.36)$$

olmak üzere bu denklem $u_n'(t)$ terimini ihtiva etmediğinden, (3.6) denklemini

$$(u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{F}{\varepsilon} = 0 \quad (3.37)$$

şeklinde güncellemek gerekir. Bu durumda denkleme yazılması gereken terimler;

$$F = u_n(t) - t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} t^{\frac{5}{2}} - \frac{24}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} t^{\frac{7}{2}}$$

$$F_u = 1$$

$$F_\varepsilon = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^{1/2}} ds \quad (3.38)$$

şeklinde olur. Burada küçük ε parametresi denklemi çözülebilir hale getirmek için sadece kesirli türevin katsayısı olarak ilave edilmiştir. Bu durumda bu örnek için (3.33) denkleminde gerekli yerine koymalar gerçekleştirildikten sonra;

$$\frac{8t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}} + \frac{t^3}{2} - \frac{128t^{7/2}}{35\sqrt{\pi}} - t^4 + \varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + (u_c(t))_n \right) + u_n(t) = 0 \quad (3.39)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde diğer örneklerden farklı olarak ε değeri parantez içine dağıtıldığında elde edilen $\varepsilon u(t) + u_n(t)$ ifadesi yerine, (3.4) denklemi gereği $u_{n+1}(t)$ yazılırsa iterasyon için kullanacağımız diferansiyel denklem;

$$\frac{8t^{5/2}}{5\sqrt{\pi}} + \frac{t^3}{2} - \frac{128t^{7/2}}{35\sqrt{\pi}} - t^4 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + (u_c(t))_{n+1} = 0 \quad (3.40)$$

şeklinde oluşur. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(t) = 0$ seçilip, (3.40) denklemi $n = 0$ için çözüldüğünde

$$u_1(t) = \frac{t^{5/2}}{70\sqrt{\pi}}(35\sqrt{\pi}\sqrt{t}(-1 + 2t) + 16(-7 + 16t)) \quad (3.41)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 9t^3 + 2t^4) \quad (3.42)$$

$$u_3(t) = -\frac{t^3}{2} + t^4 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}}4t^{3/2}(-5 + 16t) \quad (3.43)$$

$$u_4(t) = 3t - 12t^2 - \frac{t^3}{2} + t^4 \quad (3.44)$$

$$u_5(t) = -\frac{t^3}{2} + t^4 + \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}(-3 + 16t) \quad (3.45)$$

$$u_6(t) = 3 - 24t - \frac{t^3}{2} + t^4 \quad (3.46)$$

$$u_7(t) = \frac{48\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} - \frac{t^3}{2} + t^4 \quad (3.47)$$

$$u_8(t) = -24 - \frac{t^3}{2} + t^4 \quad (3.48)$$

$$u_9(t) = -\frac{t^3}{2} + t^4 \quad (3.49)$$

elde edilir ki bu tam çözümün kendisidir. Yani 9. iterasyon ve bundan sonraki iterasyonların tamamı tam çözümü vermiştir.

BÖLÜM 4

4.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Adi Kesirli Diferansiyel Denklem Sistemlerine Uygulanması

Aşağıdaki kesirli diferansiyel denklem sistemini alalım.

$$F_k(u_k^{(\alpha)}, u_j, \varepsilon, t) = 0 \quad (4.1)$$
$$k = 1, 2, \dots, K$$
$$j = 1, 2, \dots, K$$

Burada K sistemdeki diferansiyel denklem sayısını ifade etmektedir. Daha açık olarak denklem sistemleri şu şekilde ifade edilebilir.

$$F_1 = F_1(u_1^{(\alpha)}, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t) = 0$$
$$F_2 = F_2(u_2^{(\alpha)}, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t) = 0$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$F_K = F_K(u_k^{(\alpha)}, u_1, u_2, \dots, u_k, \varepsilon, t) = 0 \quad (4.2)$$

Pertürbasyon açılımında bir düzeltme terimi ihtiva eden sistem için şu yaklaşık çözümü alalım.

$$u_{k,n+1} = u_{k,n} + \varepsilon u_{k,n}^c \quad (4.3)$$

İfadedeki n indisi, yaklaşık çözümdeki n . iterasyonu temsil etmektedir. Bu sistem $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa;

$$F_K = \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left[\left(\frac{d}{d\varepsilon} \right)^m F_K \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon^m, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.4)$$

olup burada $\frac{d}{d\varepsilon}$ şu şekilde ifade edilir.

$$\frac{d}{d\varepsilon} = \frac{\partial u_{k,n+1}^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial u_{k,n+1}^{(\alpha)}} + \sum_{j=1}^K \left(\frac{\partial u_{j,n+1}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial u_{j,n+1}} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \quad (4.5)$$

Bu denklem $(n + 1)$. iterasyon denklemi olan

$$F_k(u_{k,n+1}^{(\alpha)}, u_{j,n+1}, \varepsilon, t) = 0 \quad (4.6)$$

için tanımlanmıştır. (4.5) denklemini (4.4) de yerine yazarsak

$$F_K = \sum_{m=0}^M \frac{1}{m!} \left[\left(\frac{(u_{k,n}^c)^{(\alpha)}}{\partial \varepsilon} \frac{\partial}{\partial u_{k,n+1}^{(\alpha)}} + \sum_{j=1}^K u_{j,n}^c \frac{\partial}{\partial u_{j,n+1}} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right)^m F_K \right]_{\varepsilon=0} \varepsilon^m = 0, \quad (4.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

iterasyon denklemi elde edilir. Bu denklem düzelme terimleri olan $u_{k,n}^c$ ler için çözülür. Daha sonra (4.3) denklemini kullanılarak $(n + 1)$. iterasyon çözümü bulunur ve iterasyon prosedürü bu şekilde devam ettirilir.

Örnek 4.1. Aşağıdaki kesirli lineer diferansiyel denklem sistemini ele alalım [39]:

$$D^\alpha u(t) = u(t) + k(t)$$

$$D^\beta k(t) = -u(t) + k(t) \quad (4.8)$$

$$0 < \alpha, \beta \leq 1 \quad (4.9)$$

$u(0) = 0$, $k(0) = 1$ başlangıç şartlarıyla verilen bu problem için $\alpha = \beta = 1$ şartı için bilinen tam çözümler;

$$u(t) = e^t \sin t \quad (4.10)$$

ve

$$k(t) = e^t \cos t \quad (4.11)$$

şeklindedir. (4.8) denklemini şu şekilde yeniden yazalım. Sistemi oluşturan denklemlerin her birine, sırasıyla $u'(t)$ ve $k'(t)$ ifadelerini ekleyip çıkarırsak yeni denklemler;

$$\varepsilon \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} + u'(t) - \varepsilon u'(t) - \varepsilon u(t) - \varepsilon k(t) = 0 \quad (4.12)$$

$$\varepsilon \frac{d^\beta k(t)}{dt^\beta} + k'(t) - \varepsilon k'(t) + \varepsilon u(t) - \varepsilon k(t) = 0 \quad (4.13)$$

halini alır.

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds + u_n'(t) - \varepsilon u_n'(t) - \varepsilon u_n(t) - \varepsilon k_n(t) \quad (4.14)$$

$$F(k', k, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \varepsilon \int_0^t \frac{k'(s)}{(t-s)^\beta} ds + k_n'(t) - \varepsilon k_n'(t) + \varepsilon u_n(t) - \varepsilon k_n(t) \quad (4.15)$$

olmak üzere

$$u'(t) + \frac{Fu}{Fu'} u(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fu'} \quad (4.16)$$

iterasyon formülündeki terimler;

$$F = u_n'(t)$$

$$Fu = 0$$

$$Fu' = 1$$

$$F\varepsilon = -u_n'(t) - u_n(t) - k_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (4.17)$$

ve

$$k'(t) + \frac{Fk}{Fk'} k(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fk'} \quad (4.18)$$

iterasyon formülündeki terimler;

$$F = k'_n[t]$$

$$Fk = 0$$

$$Fk' = 1$$

$$F\varepsilon = -k'_n(t) + u_n(t) - k_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{k'_n(s)}{(t-s)^\beta} ds \quad (4.19)$$

şeklinde oluşur. Bu terimler iterasyon formüllerinde yerine yazıldıktan sonra;

$$u_n(t) + k_n(t) + \frac{(-1+\varepsilon)u'_n(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'_n(s)}{(t-s)^\alpha} ds + (u'_c(t))_n \quad (4.20)$$

ve

$$-u_n(t) + k_n(t) + \frac{(-1+\varepsilon)k'_n(t)}{\varepsilon} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{k'_n(s)}{(t-s)^\beta} ds + (k'_c(t))_n \quad (4.21)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler başlangıç şartlarına uygun olarak $u_0(t) = 0$ ve $k_0(t) = 1$ seçilerek $n = 0,1,2, \dots$ için çözüldüğünde, iterasyonlar sırasıyla şu şekilde elde edilir:

$$u_1(t) = t \quad (4.22)$$

$$k_1(t) = 1 + t \quad (4.23)$$

$$u_2(t) = t \left(2 + t - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \quad (4.24)$$

$$k_2(t) = 1 + 2t - \frac{t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} \quad (4.25)$$

$$u_3(t) = \frac{1}{3} t \left(9 + t(9+t) + \frac{3t^{2-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{9t^{1-\alpha}(3+t-\alpha)}{\Gamma(4-\alpha)} - \frac{3t^{2-\beta}}{\Gamma(4-\beta)} \right) \quad (4.26)$$

$$k_3(t) = 1 + 3t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + t^{2-2\beta} \left(\frac{t}{\Gamma(4-2\beta)} - \frac{t^\beta(9+t-3\beta)}{\Gamma(4-\beta)} \right) \quad (4.27)$$

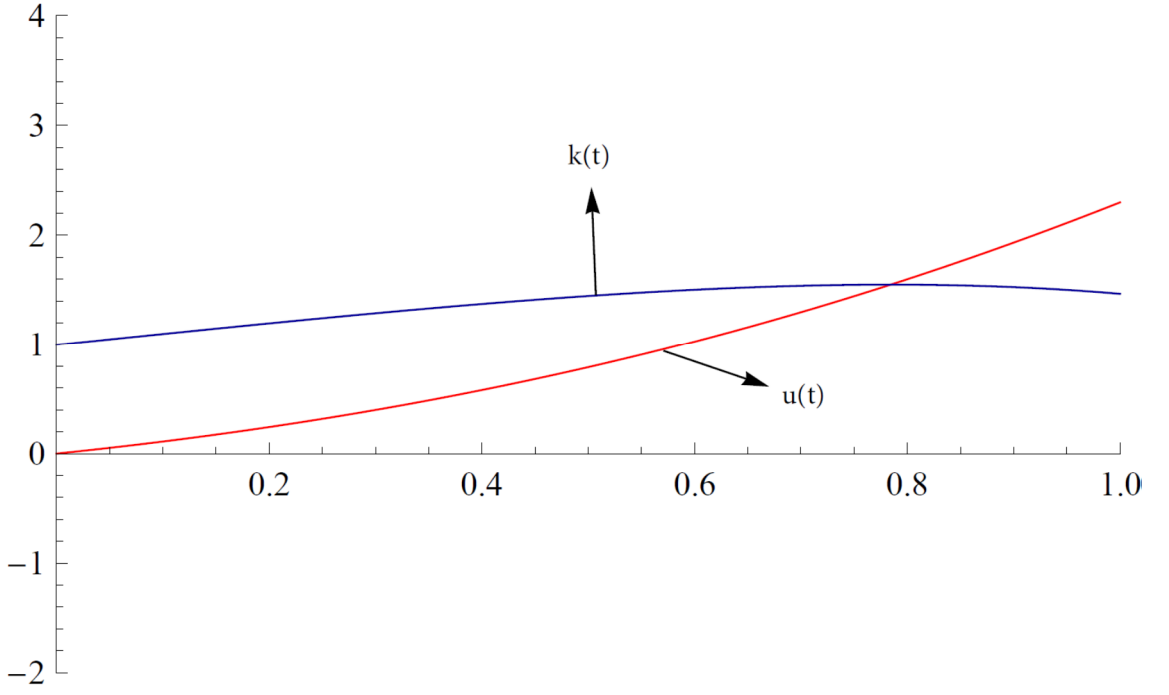
Bu şekilde devam edilerek 5. iterasyon sonuçları olan $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ değerleri hesaplanmıştır. Ancak ifadelerinin uzunluğundan dolayı burada verilmemiştir. Tablo 4.1. ve Tablo 4.2. de elde ettiğimiz bu iterasyon sonuçları tam çözümle karşılaştırılmış ve gayet yakın sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Şekil 4.1., Şekil 4.2. , Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.'de ise, elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak birbirleri ve tam çözüm ile karşılaştırılmaları yapılmıştır.

Tablo 4.1. Örnek 4.1.'de elde edilen $u(t)$ 'lerin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

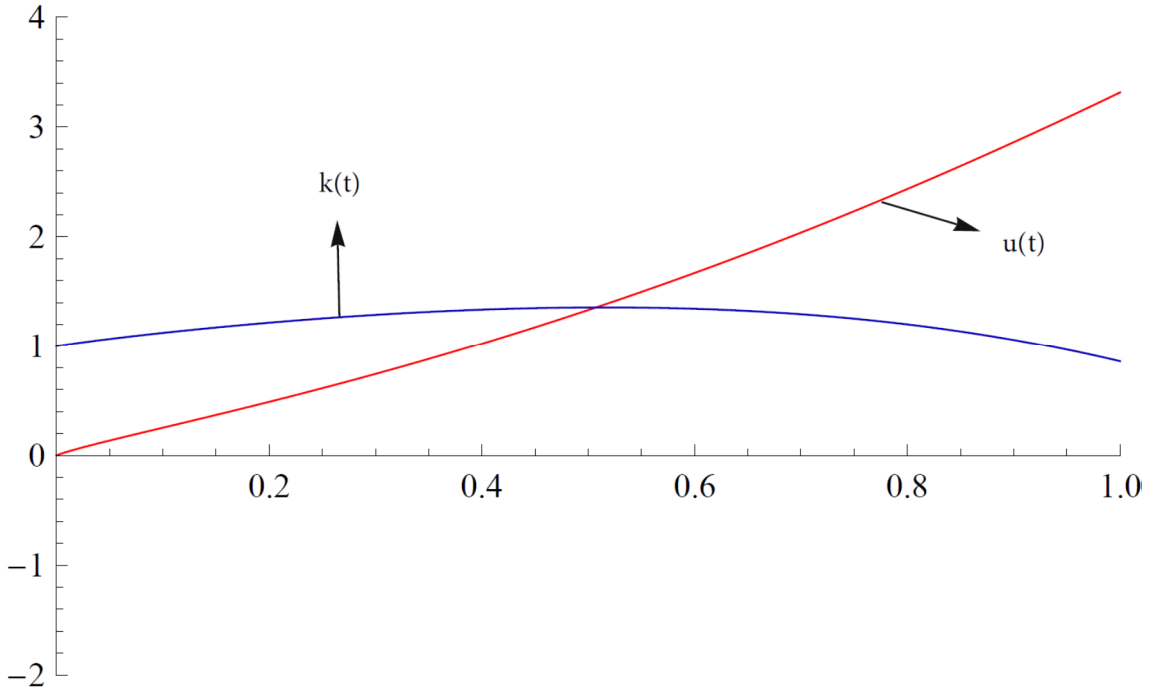
$\alpha = \beta = 1$							
t	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.1	0.100000	0.110000	0.110333	0.110333	0.110332	0.110332	1.12698E-8
0.2	0.200000	0.240000	0.242666	0.242666	0.242656	0.242655	7.31405E-7
0.3	0.300000	0.390000	0.399000	0.399000	0.398919	0.398910	8.44622E-6
0.4	0.400000	0.559999	0.581333	0.581333	0.580991	0.580943	0.00004809
0.5	0.500000	0.750000	0.791666	0.791666	0.790625	0.790439	0.00018591
0.6	0.600000	0.960000	1.032000	1.031999	1.029408	1.028845	0.00056233
0.7	0.700000	0.190000	1.304333	1.304333	1.298731	1.297295	0.00143589
0.8	0.800000	1.440000	1.610666	1.610666	1.599744	1.596505	0.00323866
0.9	0.900000	1.710000	1.953000	1.952999	1.933316	1.926673	0.00664370
1.0	1.000000	2.000000	2.333333	2.333333	2.300000	2.287355	0.01264471

Tablo 4.2. Örnek 4.1.'de elde edilen $k(t)$ 'lerin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

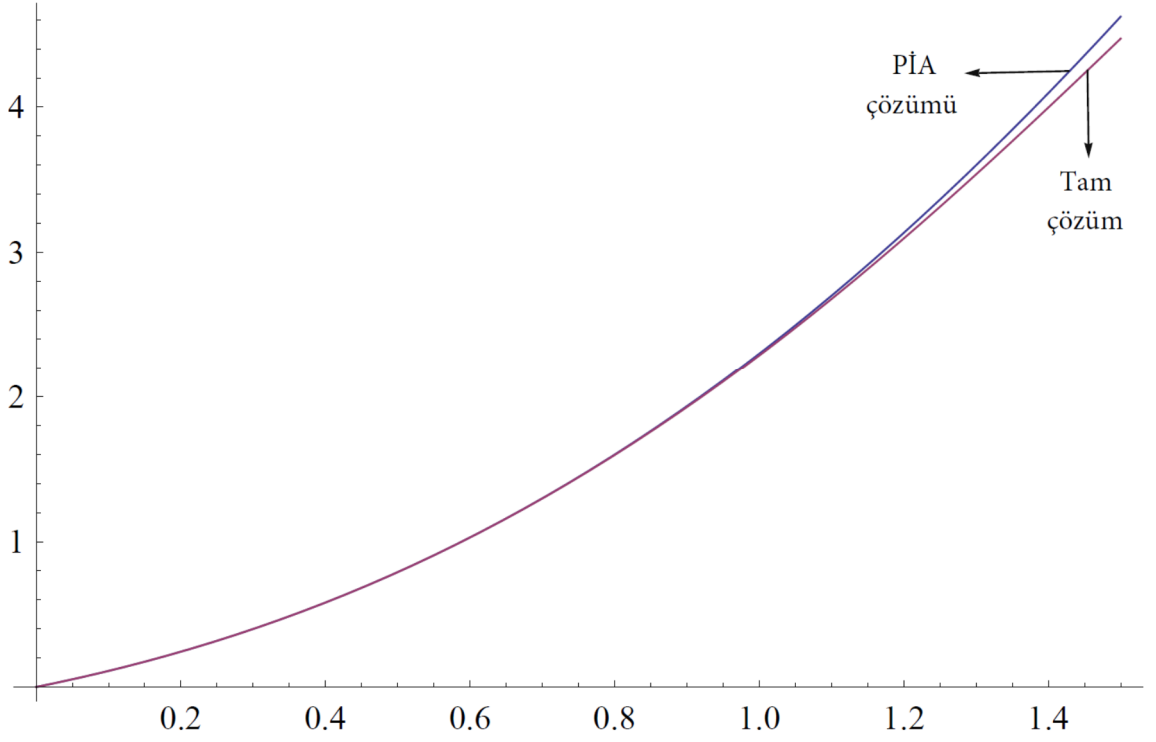
	$\alpha = \beta = 1$						
t	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.00000000
0.1	1.100000	1.099999	1.099666	1.099650	1.099649	1.099649	1.6274E-10
0.2	1.200000	1.200000	1.197333	1.197066	1.197055	1.197056	2.13559E-8
0.3	1.300000	1.300000	1.291000	1.289650	1.289568	1.289569	3.74045E-7
0.4	1.400000	1.400000	1.378666	1.374399	1.374058	1.374061	2.87222E-6
0.5	1.500000	1.500000	1.458333	1.447916	1.446874	1.446889	0.00001403
0.6	1.600000	1.600000	1.528000	1.506399	1.503807	1.503859	0.00005154
0.7	1.700000	1.700000	1.585666	1.545650	1.540047	1.540803	0.00015535
0.8	1.800000	1.800000	1.629333	1.561066	1.550144	1.550549	0.00040529
0.9	1.900000	1.900000	1.659999	1.547650	1.527966	1.528913	0.00094681
1.0	2.000000	2.000000	1.666666	1.500000	1.466666	1.468693	0.00202727



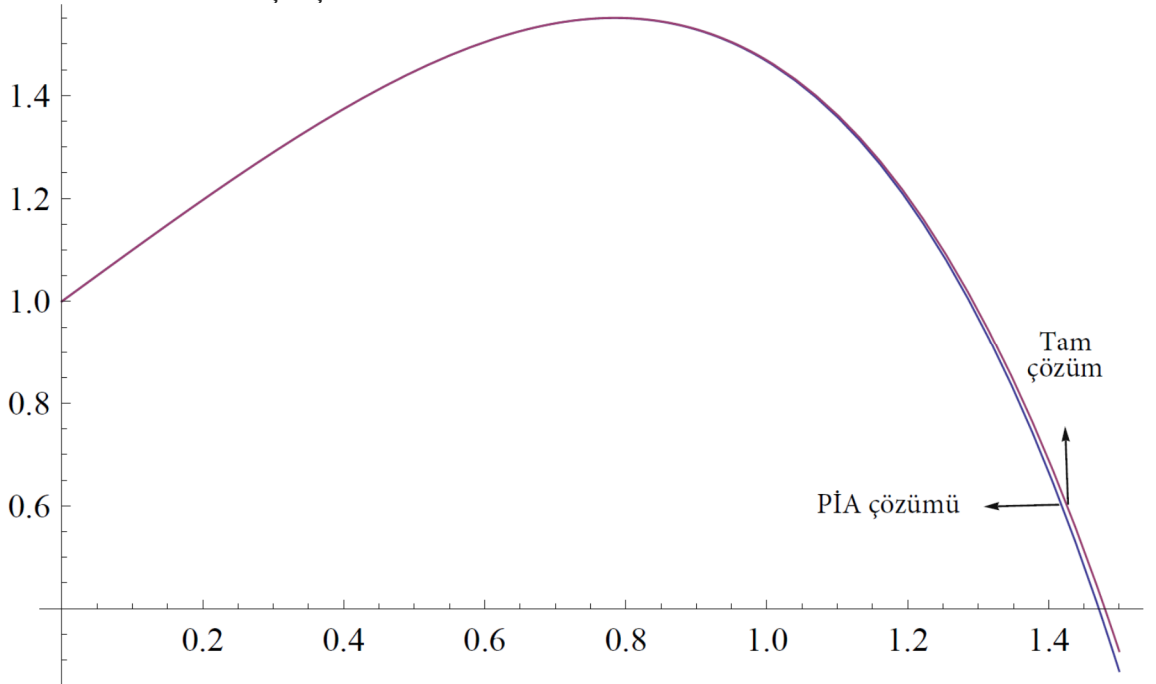
Şekil 4.1. Örnek 4.1.'de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.2. Örnek 4.1. de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha = 0.7$ ve $\beta = 0.9$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.3. Örnek 4.1. de elde edilen $u_5(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması



Şekil 4.4. Örnek 4.1. de elde edilen $k_5(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha = \beta = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması

Örnek 4.2. Şimdi de aşağıdaki kesirli lineer olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım [40]:

$$\begin{aligned} D^{\alpha_1} u(t) &= \frac{1}{2}u(t) \\ D^{\alpha_2} k(t) &= k(t) + u^2(t) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \quad (4.29)$$

$u(0) = 1, k(0) = 0$ başlangıç şartlarıyla verilen bu problem için $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ koşulu için bilinen tam çözümler

$$u(t) = e^{\frac{t}{2}} \quad (4.30)$$

$$k(t) = te^t \quad (4.31)$$

şeklindedir. (4.28) denklem sisteminde sistemi oluşturan denklemlerin her birine sırasıyla $u_n'(t)$ ve $k_n'(t)$ ifadelerini ekleyip çıkarırsak denklemler;

$$\varepsilon D^{\alpha_1} u(t) + u'(t) - \varepsilon u'(t) - \frac{1}{2} \varepsilon u(t) = 0 \quad (4.32)$$

$$\varepsilon D^{\alpha_2} k(t) + k'(t) - \varepsilon k'(t) - \varepsilon k(t) - \varepsilon u^2(t) = 0 \quad (4.33)$$

halini alır.

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \varepsilon \int_0^t \frac{u_n'(s)}{(t-s)^{\alpha_1}} ds + u_n'(t) - \varepsilon u_n'(t) - \frac{1}{2} \varepsilon u_n(t) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} F(k', k, \varepsilon) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \varepsilon \int_0^t \frac{k_n'(s)}{(t-s)^{\alpha_2}} ds + k_n'(t) - \varepsilon k_n'(t) - \varepsilon k_n(t) \\ &\quad - \varepsilon u_n^2(t) \end{aligned} \quad (4.35)$$

olmak üzere

$$u'(t) + \frac{Fu}{Fu'}u(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fu'} \quad (4.36)$$

iterasyon formülündeki terimler;

$$F = u'_n(t)$$

$$Fu = 0$$

$$Fu' = 1$$

$$F\varepsilon = -u'_n(t) - \frac{u_n(t)}{2} + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^t \frac{u'_n(s)}{(t-s)^{\alpha_1}} ds \quad (4.37)$$

ve

$$k'(t) + \frac{Fk}{Fk'}k(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fk'} \quad (4.38)$$

iterasyon formülündeki terimler;

$$F = k'_n(t)$$

$$Fk = 0$$

$$Fk' = 1$$

$$F\varepsilon = -k'_n(t) - k_n(t) - u_n^2(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)} \int_0^t \frac{k'_n(s)}{(t-s)^{\alpha_2}} ds \quad (4.39)$$

şeklinde oluşur. Bu terimler iterasyon formüllerinde yerine yazıldıktan sonra;

$$2 \left(\frac{\int_0^t (-s+t)^{-\alpha_1} (u'_n)'(s) ds}{\Gamma(1-\alpha_1)} + (u'_c(t))_n - \frac{(-1+\varepsilon)(u'_n)'(t)}{\varepsilon} \right) = u_n(t) \quad (4.40)$$

ve

$$k_n(t) + u_n(t)^2 + \frac{(-1+\varepsilon)(k'_n)'(t)}{\varepsilon} = \frac{\int_0^t (-s+t)^{-\alpha_2} (k'_n)'(s) ds}{\Gamma(1-\alpha_2)} + (k'_c(t))_n \quad (4.41)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemler başlangıç şartlarına uygun olarak $u_0(t) = 1$ ve $k_0(t) = 0$ seçilerek $n = 0,1,2, \dots$ için çözüldüğünde, iterasyonlar sırasıyla şu şekilde elde edilir:

$$u_1(t) = 1 + \frac{t}{2} \quad (4.42)$$

$$k_1(t) = t \quad (4.43)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{8} \left(8 + 8t + t^2 + \frac{4t^{2-\alpha_1}}{\Gamma(2-\alpha_1)(-2+\alpha_1)} \right) \quad (4.44)$$

$$k_2(t) = 2t + t^2 + \frac{t^3}{12} + \frac{t^{2-\alpha_2}}{\Gamma(2-\alpha_2)(-2+\alpha_2)} \quad (4.45)$$

$$u_3(t) = \frac{1}{48} \left(48 + 72t + 18t^2 + t^3 + \frac{24t^{3-2\alpha_1}}{\Gamma(4-2\alpha_1)} - \frac{24t^{2-\alpha_1}(9+t-3\alpha_1)}{\Gamma(4-\alpha_1)} \right) \quad (4.46)$$

$$k_3(t) = 3t + 3t^2 + \frac{5t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{320} + \frac{t^{3-2\alpha_2}}{\Gamma[4-2\alpha_2]} - \frac{t^{5-2\alpha_1}}{4\Gamma[3-\alpha_1]^2(-5+2\alpha_1)} - \frac{t^{3-\alpha_1} \left(4(40+3t(10+t)) + \alpha_1(-72-t(64+7t)) + (8+t(8+t))\alpha_1 \right)}{8\Gamma(6-\alpha_1)} - \frac{t^{2-\alpha_2}(72+t(24+t)) + 6\alpha_2(-7-t+\alpha_2)}{2\Gamma(5-\alpha_2)} \quad (4.47)$$

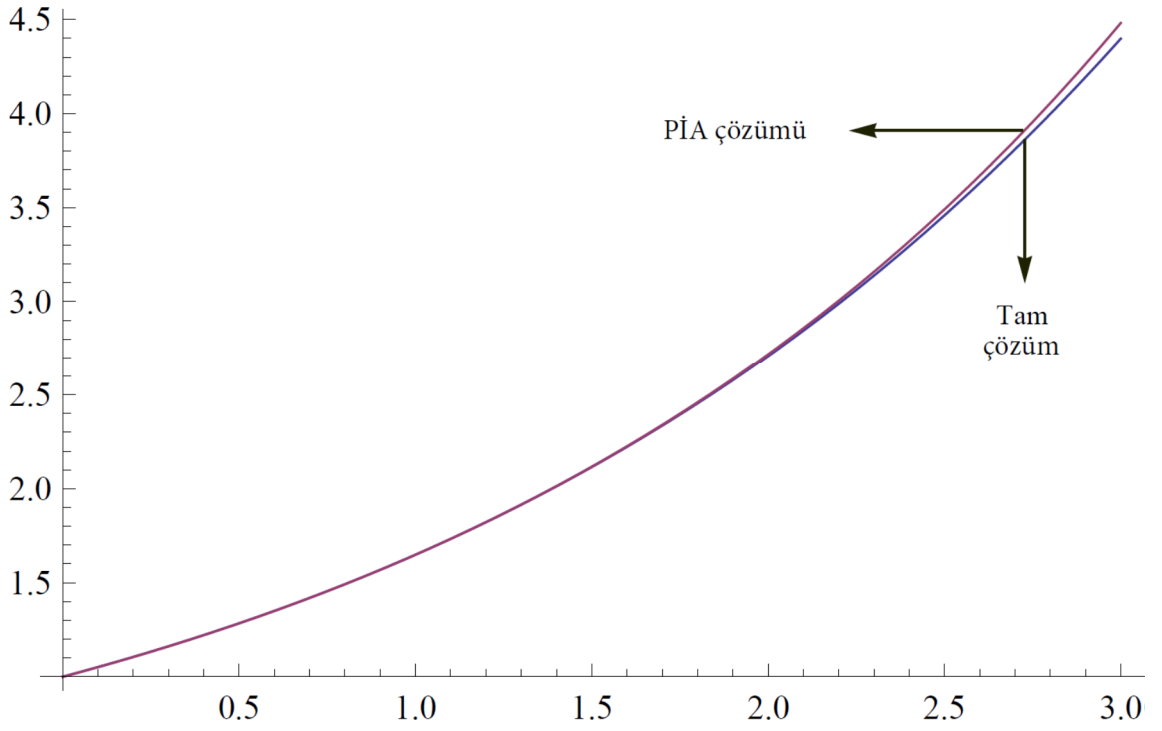
Bu şekilde devam edilerek 4. iterasyon sonuçları olan $u_4(t)$ ve $k_4(t)$ değerleri hesaplanmıştır. Ancak ifadelerinin uzunluğundan dolayı burada verilmemiştir. Tablo 4.3. ve Tablo 4.4.'de elde ettiğimiz bu iterasyon sonuçları tam çözümle karşılaştırılmış ve gayet yakın sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Şekil 4.5., Şekil 4.6., Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.'de ise elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak birbirleri ve tam çözüm ile karşılaştırılmaları yapılmıştır.

Tablo 4.3. Örnek 4.2.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

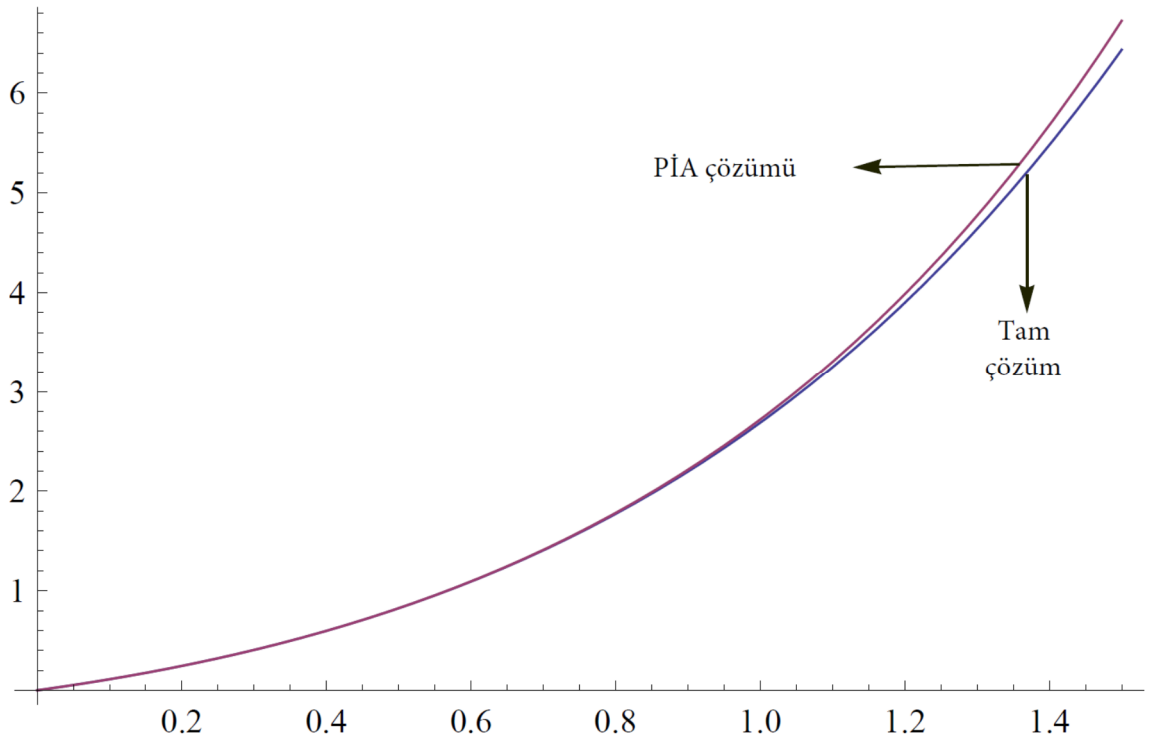
	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$					
t	u_1	u_2	u_3	u_4	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.0000000
0.1	1.050000	1.051250	1.051270	1.051271	1.051271	2.6260E-9
0.2	1.100000	1.105000	1.105166	1.105170	1.105170	8.4742E-8
0.3	1.150000	1.161250	1.161812	1.161833	1.161834	6.4897E-7
0.4	1.200000	1.220000	1.221333	1.221400	1.221402	2.7581E-6
0.5	1.250000	1.281250	1.283854	1.284016	1.284025	8.4896E-6
0.6	1.300000	1.345000	1.349500	1.349837	1.349858	0.0000213
0.7	1.350000	1.411250	1.418395	1.419021	1.419067	0.0000464
0.8	1.400000	1.480000	1.490666	1.491733	1.491824	0.0000913
0.9	1.450000	1.551250	1.566437	1.568146	1.568312	0.0001660
1.0	1.500000	1.625000	1.645833	1.648437	1.648721	0.0002837

Tablo 4.4. Örnek 4.2.'de elde edilen $k(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

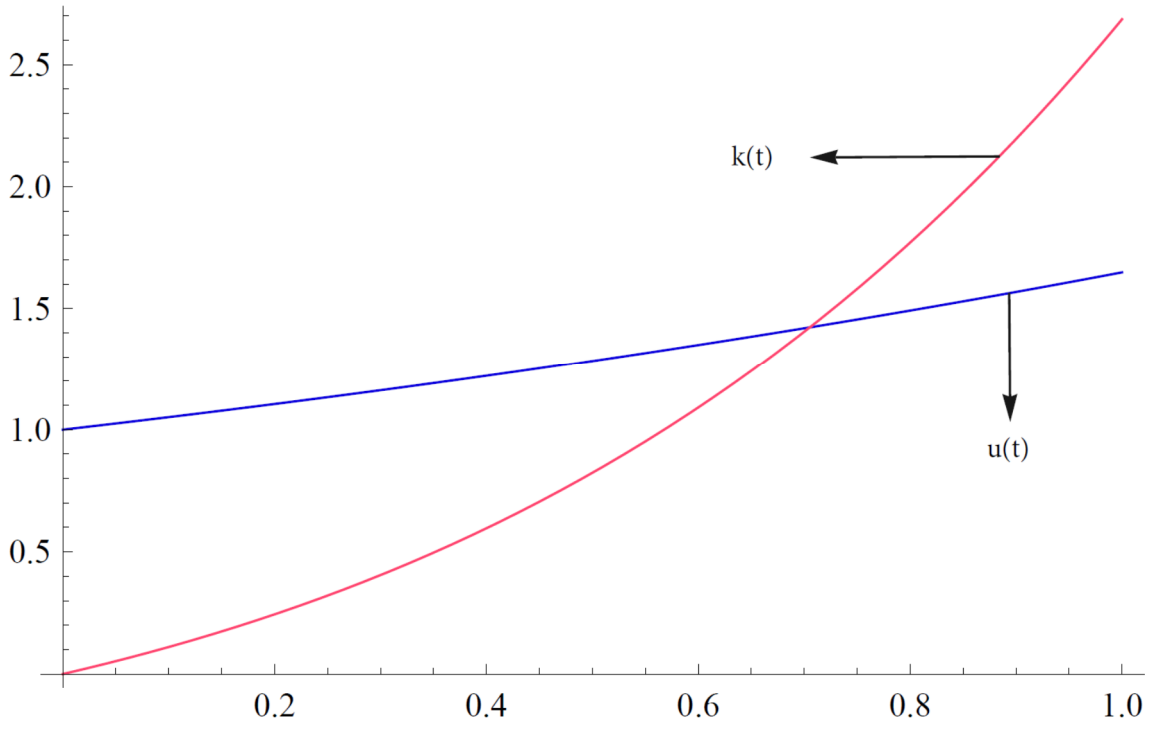
$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$						
t	k_1	k_2	k_3	k_4	Tam çözüm	Mutlak hata
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0000000
0.1	0.100000	0.110083	0.110505	0.110516	0.110517	2.4666E-7
0.2	0.200000	0.240666	0.244084	0.244272	0.244280	8.12862-6
0.3	0.300000	0.392250	0.403929	0.404894	0.404957	0.0000635
0.4	0.400000	0.565333	0.593365	0.596453	0.596729	0.0002760
0.5	0.500000	0.760416	0.815852	0.823492	0.824360	0.0008683
0.6	0.600000	0.978000	1.074993	1.091043	1.0932712	0.0022277
0.7	0.700000	1.218583	1.374530	1.404661	1.409626	0.0049654
0.8	0.800000	1.482666	1.718357	1.770446	1.780432	0.0099863
0.9	0.900000	1.770750	2.110517	2.195074	2.213642	0.0185684
1.0	1.000000	2.083333	2.555208	2.685825	2.718281	0.0324559



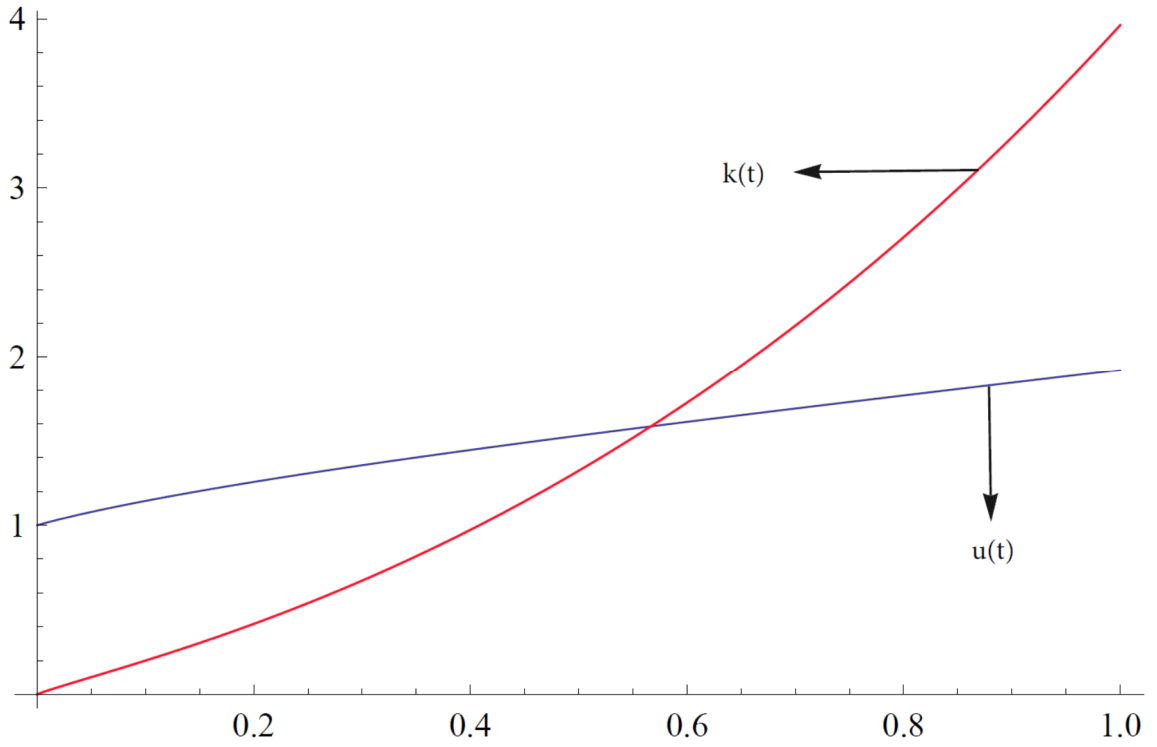
Şekil 4.5. Örnek 4.2.'de elde edilen $u_4(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması



Şekil 4.6. Örnek 4.2.'de elde edilen $k_4(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması



Şekil 4.7. Örnek 4.2.'de elde edilen $u_4(t)$ ve $k_4(t)$ 'nin $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması



Şekil 4.8. Örnek 4.2.'de elde edilen $u_5(t)$ ve $k_5(t)$ 'nin $\alpha_1 = 0.5$ ve $\alpha_2 = 0.8$ için grafiksel çözümlerinin karşılaştırılması

BÖLÜM 5

5.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Kesirli Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$$F(u^{(\alpha)}, u, u_x, u_{xx}, \dots, \varepsilon) = 0 \quad (5.1)$$

şeklindeki zaman-kesirli kısmi diferansiyel denklemini alalım. Burada $u = u(x, t)$ şeklinde olup ε küçük bir parametredir. Tek düzeltme terimli bir pertürbasyon açılımı

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \quad (5.2)$$

şeklinindedir. (5.1) denklemini (5.2) denkleminde yerine yazıp sadece birinci türevler için Taylor serisine açarsak;

$$\begin{aligned} F(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0) + F_u(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0)\varepsilon(u_c)_n \\ + F_{u^{(\alpha)}}(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0)\varepsilon(u_c^{(\alpha)})_n \\ + F_{u_x}(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0)\varepsilon((u_c)_x)_n \\ + F_{u_{xx}}(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0)\varepsilon((u_c)_{xx})_n + \dots \\ + F_\varepsilon(u_n^{(\alpha)}, u_n, (u_n)_x, (u_n)_{xx}, \dots, 0)\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

veya

$$(u_c^{(\alpha)})_n \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} + (u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} + ((u_c)_x)_n \frac{\partial F}{\partial u_x} + ((u_c)_{xx})_n \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{F}{\varepsilon} = 0 \quad (5.4)$$

denklemini elde ederiz. Burada bütün türevler $\varepsilon = 0$ civarında değerlendirilmiştir. Bir $u_0(x, t)$ başlangıç varsayımı ile başlayarak, öncelikle $(u_c)_0(x, t)$ hesaplanır ve sonra $u_1(x, t)$ yi hesaplamak için (5.2) de yerine yazılır. İterasyon prosedürü makul bir çözüm bulunana kadar bu şekilde devam ettirilir.

m, v den büyük en küçük tamsayı olmak üzere v . merteden Caputo zaman-kesirli türev operatörü;

$$D_{*t}^{\mu}u(x, t) = \frac{\partial^{\mu}u(x, t)}{\partial t^{\nu}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m - \mu)} \int_0^t (t - \tau)^{m-\mu-1} \frac{\partial^m u(x, \tau)}{\partial \tau^m} d\tau, & m - 1 < \mu < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \mu = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.5)$$

ve uzay-kesirli türev operatörü ise;

$$D_{*x}^{\nu}u(x, t) = \frac{\partial^{\nu}u(x, t)}{\partial x^{\nu}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m - \nu)} \int_0^x (x - \theta)^{m-\nu-1} \frac{\partial^m u(\theta, \tau)}{\partial \theta^m} d\theta, & m - 1 < \nu < m \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial x^m}, & \nu = m \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.6)$$

şeklindedir.

Örnek 5.1. Aşağıdaki zaman-kesirli difüzyon denklemini ele alalım [41]:

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.7)$$

Bu denklem için başlangıç şartı $u(x, 0) = \sin x$ şeklindedir. $\alpha = 1$ için bilinen tam çözüm ise;

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x \quad (5.8)$$

dir. (5.7) denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazalım. İterasyona başlamadan önce denkleme $u_t(x, t)$ ifadesini ekleyip çıkarırsak yeni denklem;

$$\varepsilon u_{\alpha}(x, t) + u_t(x, t) - \varepsilon u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0 \quad (5.9)$$

halini alır. Bu durumda

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{(u_n)_s(x, s) ds}{(t-s)^\alpha} + (u_n)_t(x, t) - \varepsilon (u_n)_t(x, t) - (u_n)_{xx}(x, t) \quad (5.10)$$

olmak üzere

$$(u)_t(x, t) + \frac{F_u}{F_{u_t}} u(x, t) = -\frac{F_\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{F_{u_t}} \quad (5.11)$$

iterasyon formülünde yerine koyacağımız değerler şu hali alır.

$$\begin{aligned} F &= (u_n)_t(x, t) - (u_n)_{xx}(x, t) \\ F_u &= 0 \\ F_{u_t} &= 1 \\ F_\varepsilon &= -(u_n)_t(x, t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (u_n)_s(x, s) ds \end{aligned} \quad (5.12)$$

Yerine koymalar gerçekleştirildikten sonra, bu özel problem için

$$\begin{aligned} &\frac{\int_0^t (t-s)^{-\alpha} (u_n)_s(x, s) ds}{\Gamma(1-\alpha)} + ((u_c)_t(x, t))_n \\ &= \frac{(-1 + \varepsilon)(u_n)_t(x, t) + (u_n)_{xx}(x, t)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.13)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(x, t) = \sin x$ seçilip, (5.13) denklemi $n = 0$ için çözüldüğünde

$$(u_c(x, t))_0 = -t \sin(x) + C_1(x) \quad (5.14)$$

elde edilir. Bu ifade;

$$u_1 = u_0 + \varepsilon(u_c(x, t))_0 \quad (5.15)$$

denkleminde yerine yazılırsa;

$$u_1(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon(-t\sin(x) + C_1(x)) \quad (5.16)$$

veya

$$u_1(x, t) = \sin x + \varepsilon(-t\sin(x) + C_1(x)) \quad (5.17)$$

olup,

$$u_1(x, 0) = \sin x \quad (5.18)$$

denkleminin çözümünden;

$$C_1(x) = 0 \quad (5.19)$$

olarak elde edilir. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ değeri için $u_1(x, t)$ ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$u_1(x, t) = \sin x - t\sin x \quad (5.20)$$

birinci iterasyonu elde edilir. İterasyon prosedürüne benzer şekilde devam edilirse diğer iterasyonlar aşağıdaki şekilde bulunur:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \left(2 - 2t + t(t - 2) + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \sin x \quad (5.21)$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{6} (6 + 3t(t - 4) - t(6 + t(t - 6))) + 6t^{2-2\alpha} \left(-\frac{t}{\Gamma(4-2\alpha)} - \frac{t^\alpha(-3 + \alpha + 2(t - 3 + \alpha))}{\Gamma(4-\alpha)} \right) \sin x \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) = & \frac{1}{24} \left(24 - 4t(t - 6)(t - 3) + t(-24 + t(-6 + t)^2) \right. \\
& + 24t^{2-3\alpha} \left(\frac{t^2}{\Gamma(5 - 3\alpha)} + \frac{t^{1+\alpha}(-4 + 3(t - 4) + 8\alpha)}{\Gamma(5 - 2\alpha)} \right. \\
& \left. \left. + \frac{t^{2\alpha}(3t^2 + 8t(\alpha - 4) + 6(\alpha - 4)(\alpha - 3))}{\Gamma(5 - \alpha)} \right) \right) \sin x \quad (5.23)
\end{aligned}$$

.

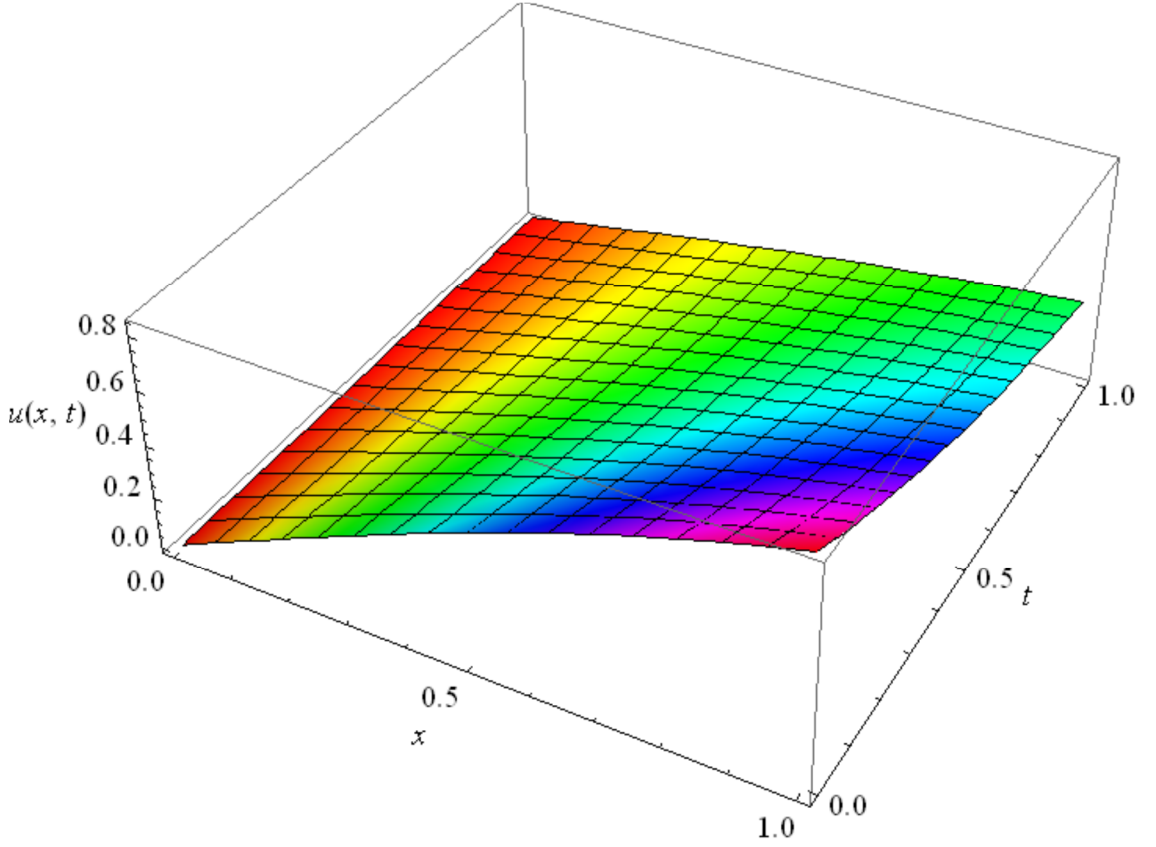
.

.

Diğer iterasyonlar daha uzun ifadelere sahip olduğu için burada verilmemiştir. Ancak Mathematica gibi bir yazılım kullanılarak bu iterasyonlar istenen mertebeye kadar hesaplanabilir. Tablo 5.1. de bazı PIA iterasyonları tam çözümle ve VIM (Varyasyonel İterasyon Metodu) ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçta kullandığımız yöntemin çok daha iyi sonuçlar verdiği ve daha yaklaşık çözümler sunduğu kanıtlanmıştır. Şekil 5.1. de ise elde ettiğimiz çözümün grafiksel olarak gösterimi yapılmıştır.

Tablo 5.1. Örnek 5.1.'de elde edilen $u_4(x, t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

t	x	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$			
		PİA	VIM	PİA	VIM	PİA	VIM	Tam çözüm	Mutlak hata
0.2	0.25	0.149847	0.155803	0.179420	0.179253	0.202557	0.202541	0.202557	6.3836E-7
	0.50	0.290377	0.301919	0.347685	0.347362	0.392521	0.392489	0.392520	1.2370E-6
	0.75	0.412853	0.429263	0.494333	0.493873	0.558080	0.558034	0.558078	1.7588E-6
	1.0	0.509660	0.529917	0.610246	0.609678	0.688940	0.688884	0.688938	2.1721E-6
0.4	0.25	0.121113	0.113646	0.147780	0.143863	0.165859	0.165595	0.165839	0.0000197
	0.50	0.234695	0.220226	0.286371	0.278783	0.321406	0.320895	0.321368	0.0000383
	0.75	0.333686	0.313114	0.407158	0.396370	0.456970	0.456243	0.456916	0.0000544
	1.0	0.411930	0.386533	0.502629	0.489311	0.564122	0.563224	0.564054	0.0000672
0.6	0.25	0.119469	0.100206	0.128645	0.124705	0.135923	0.134587	0.135778	0.0001455
	0.50	0.231510	0.194182	0.249293	0.241650	0.263396	0.260807	0.263114	0.0002820
	0.75	0.329157	0.276084	0.354440	0.343574	0.374492	0.370811	0.374091	0.0004010
	1.0	0.406339	0.340821	0.437550	0.424136	0.462304	0.457766	0.451809	0.0004950



Şekil 5.1. Örnek 5.1.'de elde edilen $u_4(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için çözüm grafiği

Örnek 5.2. Aşağıdaki zaman-kesirli denklemi ele alalım [42]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} + u(x, t)u_x(x, t) = x + xt^2, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (5.24)$$

Bu denklem için başlangıç şartı $u(x, 0) = 0$ şeklindedir. $\alpha = 1$ için bilinen tam çözüm ise

$$u(x, t) = xt \quad (5.25)$$

dir. (5.24) denklemini aşağıdaki gibi yeniden yazalım. Denkleme $u_t(x, t)$ ifadesini ekleyip çıkarırsak yeni denklem;

$$\varepsilon u_\alpha(x, t) + u_t(x, t) - \varepsilon u_t(x, t) + \varepsilon u(x, t)u_x(x, t) - x - xt^2 = 0 \quad (5.26)$$

halini alır. Bu durumda

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{(u_n)_s(x, s) ds}{(t-s)^\alpha} + (u_n)_t(x, t) - \varepsilon (u_n)_t(x, t) + \varepsilon u_n(x, t) (u_n)_x(x, t) - x - xt^2 \quad (5.27)$$

olmak üzere

$$(u)_t(x, t) + \frac{F_u}{F_{u_t}} u(x, t) = -\frac{F_\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{F_{u_t}} \quad (5.28)$$

iterasyon formülünde yerine koyacağımız değerler şu hali alır:

$$F = (u_n)_t(x, t) - x - xt^2$$

$$F_u = 0$$

$$F_{u_t} = 1$$

$$F_\varepsilon = (u_n)_t(x, t) + u_n(x, t) (u_n)_x(x, t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (u_n)_s(x, s) ds \quad (5.29)$$

Yerine koymalar gerçekleştirildikten sonra, bu özel problem için;

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^t (t-s)^{-\alpha} (u_n)_s(x, s) ds}{\Gamma(1-\alpha)} + ((u_c)_t(x, t))_n \\ &= \frac{x + t^2 x + (-1 + \varepsilon) (u_n)_t(x, t) - \varepsilon u_n(x, t) (u_n)_x(x, t)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.30)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(x, t) = 0$ seçilip, (5.30) denklemi $n = 0$ için çözüldüğünde

$$(u_c(x, t))_0 = \left(t + \frac{t^3}{3} \right) x + C_1(x) \quad (5.31)$$

elde edilir. Bu ifade

$$u_1 = u_0 + \varepsilon (u_c(x, t))_0 \quad (5.32)$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$u_1(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon \left(\left(t + \frac{t^3}{3} \right) x + C_1(x) \right) \quad (5.33)$$

veya $u_0(x, t) = 0$ olduğundan

$$u_1(x, t) = \varepsilon \left(\left(t + \frac{t^3}{3} \right) x + C_1(x) \right) \quad (5.34)$$

olup,

$$u_1(x, 0) = 0 \quad (5.35)$$

denkleminin çözümünden

$$C_1(x) = 0 \quad (5.36)$$

olarak elde edilir. Bu değer ve $\varepsilon = 1$ değeri için $u_1(x, t)$ ifadesi yeniden düzenlenirse;

$$u_1(x, t) = \frac{1}{3} t(t^2 + 3)x \quad (5.37)$$

Birinci iterasyonu elde edilir. İterasyon prosedürüne benzer şekilde devam edilirse diğer iterasyonlar aşağıdaki şekilde bulunur:

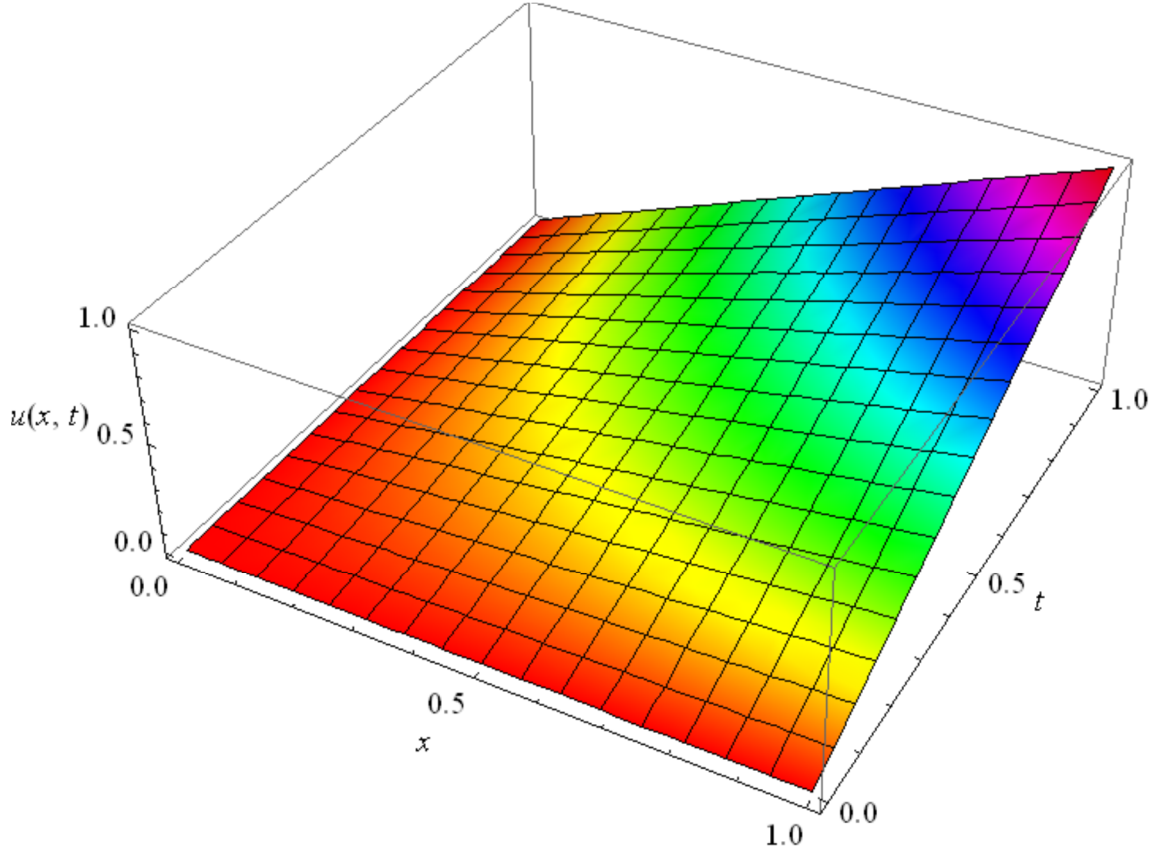
$$u_2(x, t) = 2tx + \frac{t^3x}{3} - \frac{2t^5x}{15} - \frac{t^7x}{63} - \frac{t^{2-\alpha}x(2t^2 + (\alpha - 4)(\alpha - 3))}{\Gamma(5 - \alpha)} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & 3tx - \frac{2t^3x}{3} - \frac{2t^5x}{5} + \frac{2t^7x}{45} + \frac{16t^9x}{945} - \frac{34t^{11}x}{51975} - \frac{4t^{13}x}{12285} - \frac{t^{15}x}{59535} \\
& + \frac{2t^{3-2\alpha}x(t^2 + (-2 + \alpha)(-5 + 2\alpha))}{\Gamma(6 - 2\alpha)} \\
& + \frac{t^{5-2\alpha}x((-4 + \alpha)^2(-3 + \alpha)^2(-9 + 2\alpha)(-7 + 2\alpha)}{(-9 + 2\alpha)(-7 + 2\alpha)(-5 + 2\alpha)\Gamma(5 - \alpha)^2} \\
& + \frac{4t^2(-4 + \alpha)(-3 + \alpha)(-9 + 2\alpha)(-5 + 2\alpha) + 4t^4(-7 + 2\alpha)(-5 + 2\alpha)}{(-9 + 2\alpha)(-7 + 2\alpha)(-5 + 2\alpha)\Gamma(5 - \alpha)^2} \\
& + \frac{1}{315(-12 + \alpha)(-10 + \alpha)\Gamma(9 - \alpha)} t^{2-\alpha}x(20t^{10}(-10 + \alpha)(-8 + \alpha)(-7 \\
& + \alpha)(-6 + \alpha)(-5 + \alpha) - 945(-12 + \alpha)(-10 + \alpha)(-8 + \alpha)(-7 + \alpha)(-6 \\
& + \alpha)(-5 + \alpha)(-4 + \alpha)(-3 + \alpha) - 1260t^2(-12 + \alpha)(-10 + \alpha)(-8 \\
& + \alpha)(-7 + \alpha)(-6 + \alpha)(-5 + \alpha)(-2 + \alpha) + 2t^8(-12 + \alpha)(-8 + \alpha)(-7 \\
& + \alpha)(-6 + \alpha)(-5 + \alpha)(144 + 5(-7 + \alpha)\alpha) - 210t^4(-12 + \alpha)(-10 \\
& + \alpha)(-8 + \alpha)(-7 + \alpha)(-144 + \alpha(59 + (-12 + \alpha)\alpha)) + 84t^6(-12 \\
& + \alpha)(-10 + \alpha)(-1170 + \alpha(2219 + \alpha(-1085 + \alpha(240 + (-25 \\
& + \alpha)\alpha))))))
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Diğer iterasyonlar daha uzun ifadelere sahip olduğu için burada verilmemiştir. Ancak Mathematica gibi bir yazılım kullanılarak bu iterasyonlar istenen mertebeye kadar hesaplanabilir. Tablo 5.2. de bazı PIA iterasyonları tam çözümle ve VIM (Varyasyonel İterasyon Metodu) ile elde edilmiş sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçta kullandığımız yöntemin çok daha iyi sonuçlar verdiği ve daha yaklaşımlar sunduğu kanıtlanmıştır. Şekil 5.2. de ise elde ettiğimiz çözümün grafiksel olarak gösterimi verilmiştir. Ayrıca daha yüksek iterasyonlar için, çözümün tam çözüme daha da yakınsayacağını söyleyebiliriz.

Tablo 5.2. Örnek 5.2.'de elde edilen $u_3(x, t)$ 'nin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

t	x	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$			
		PİA (3 Adım)	VIM (4 Adım)	PİA (3 Adım)	VIM (4 Adım)	PİA (3 Adım)	VIM (4 Adım)	Tam çözüm	Mutlak hata
0.2	0.25	0.103619	0.103750	0.077699	0.077933	0.050000	0.050309	0.050000	1.22348E-7
	0.50	0.207238	0.207499	0.155399	0.155865	0.100000	0.100619	0.100000	2.44696E-7
	0.75	0.310857	0.311249	0.233099	0.233798	0.150000	0.150928	0.150000	3.67044E-7
	1.0	0.414477	0.414999	0.310798	0.311730	0.200000	0.201237	0.200000	4.89392E-7
0.4	0.25	0.170839	0.172012	0.133148	0.134855	0.100015	0.101894	0.100000	0.0000158
	0.50	0.341679	0.344025	0.266296	0.269710	0.200031	0.203787	0.200000	0.0000316
	0.75	0.512519	0.516037	0.399445	0.404565	0.300047	0.305681	0.300000	0.0000474
	1.0	0.683359	0.688050	0.532593	0.539420	0.400063	0.407575	0.400000	0.0000632
0.6	0.25	0.212586	0.215641	0.176296	0.179990	0.150273	0.153094	0.150000	0.0002739
	0.50	0.425173	0.431283	0.352592	0.359979	0.300547	0.306188	0.300000	0.0005478
	0.75	0.637759	0.646924	0.528888	0.539969	0.450821	0.459282	0.450000	0.0008217
	1.0	0.850346	0.862566	0.705184	0.719958	0.601095	0.612376	0.600000	0.0010956



Şekil 5.2. Örnek 5.2. de elde edilen $u_5(x, t)$ 'nin $\alpha = 1$ için çözüm grafiği

BÖLÜM 6

6.1. Pertürbasyon-İterasyon Metodunun Kesirli-İntegro Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

$$F\left(u^{(\alpha)}, u, \int_0^t g(t, s, u(s)) ds, \varepsilon\right) = 0 \quad (6.1)$$

şeklindeki kesirli integro diferansiyel denklemini alalım. Burada $u = u(x, t)$ şeklinde olup ε küçük bir parametredir. Tek düzeltme terimli bir pertürbasyon açılımı

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon(u_c)_n \quad (6.2)$$

şeklinindedir. (6.2) denklemini (6.1) denkleminde yerine yazıp sadece birinci türevler için Taylor serisine açarsak

$$\begin{aligned} F\left(u_n^{(\alpha)}, u_n, \int_0^t g(t, s, u_n(s)) ds, 0\right) + F_u\left(u_n^{(\alpha)}, u_n, \int_0^t g(t, s, u_n(s)) ds, 0\right) \varepsilon(u_c)_n \\ + F_{u^{(\alpha)}}\left(u_n^{(\alpha)}, u_n, \int_0^t g(t, s, u_n(s)) ds, 0\right) \varepsilon(u_c^{(\alpha)})_n \\ + F_{\int u}\left(u_n^{(\alpha)}, u_n, \int_0^t g(t, s, u_n(s)) ds, 0\right) \varepsilon \int (u_c)_n \\ + F_\varepsilon\left(u_n^{(\alpha)}, u_n, \int_0^t g(t, s, u_n(s)) ds, 0\right) \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

veya

$$\left(u_c^{(\alpha)}\right)_n \frac{\partial F}{\partial u^{(\alpha)}} + (u_c)_n \frac{\partial F}{\partial u} + \left(\int (u_c)_n\right) \frac{\partial F}{\partial \left(\int u\right)} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{F}{\varepsilon} = 0 \quad (6.4)$$

denklemini elde ederiz. Burada bütün türevler $\varepsilon = 0$ civarında değerlendirilmiştir. Bir $u_0(x, t)$ başlangıç varsayımı ile başlayarak, öncelikle $(u_c)_0(x, t)$ hesaplanır ve sonra $u_1(x, t)$ yi hesaplamak için (6.2) de yerine yazılır. İterasyon prosedürü makul bir çözüm bulunana kadar bu şekilde devam ettirilir.

Örnek 6.1. Aşağıdaki kesirli lineer olmayan integro-diferansiyel denklemini el alalım [43].

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} - \int_0^1 ts(u(s))^2 ds = 1 - \frac{t}{4}, \quad t > 0, \quad 0 \leq t < 1, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (6.5)$$

$u(0) = 0$ başlangıç şartıyla verilen bu denklem için $\alpha = 1$ olduğunda tam çözüm

$$u(t) = t \quad (6.6)$$

şeklindedir. (6.1) denklemini, denkleme $u'(t)$ değerini ekleyip çıkararak aşağıdaki formda yeniden yazalım:

$$\varepsilon \frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} - u'(t) + \varepsilon u'(t) - \varepsilon \int_0^1 ts(u(s))^2 ds - 1 + \frac{t}{4} = 0 \quad (6.7)$$

halini alır. Bu durumda

$$F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \varepsilon \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds - u'_n(t) + \varepsilon u'_n(t) - \varepsilon \int_0^1 ts(u_n(s))^2 ds - 1 + \frac{t}{4} \quad (6.8)$$

olmak üzere

$$u'(t) + \frac{Fu}{F_{u'}} u(t) = -\frac{F_\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{F_{u'}} \quad (6.9)$$

iterasyon denklemindeki terimler

$$F = u'_n(t) - 1 + \frac{t}{4}$$

$$F_u = 0$$

$$F_{u'} = 1$$

$$F_\varepsilon = -u'_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds - \int_0^1 ts(u(s))^2 ds \quad (6.10)$$

şeklinde olur. Denklemden gerekli yerlere koymalar gerçekleştirildikten sonra (6.5) denklemini;

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^t (-s+t)^{-\alpha} u'_n(s) ds}{\Gamma(1-\alpha)} + (u'_c(t))_n \\ & = \int_0^1 st(u_n(s))^2 ds + \frac{4-t+4(-1+\varepsilon)u'_n(t)}{4\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.11)$$

halini alır. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(t) = 0$ seçilip, (6.11) denklemini $n = 0$ için çözüldüğünde $\varepsilon = 1$ değeri için $u_1(t)$ şu şekilde elde edilir.

$$u_1(t) = t - \frac{t^2}{8} \quad (6.12)$$

İterasyon prosedürüne benzer şekilde devam edilirse diğer iterasyonlar aşağıdaki gibi bulunur:

$$u_2(t) = 2t - \frac{571t^2}{3840} + \frac{t^{2-\alpha}(t+4(-3+\alpha))}{4\Gamma(4-\alpha)} \quad (6.13)$$

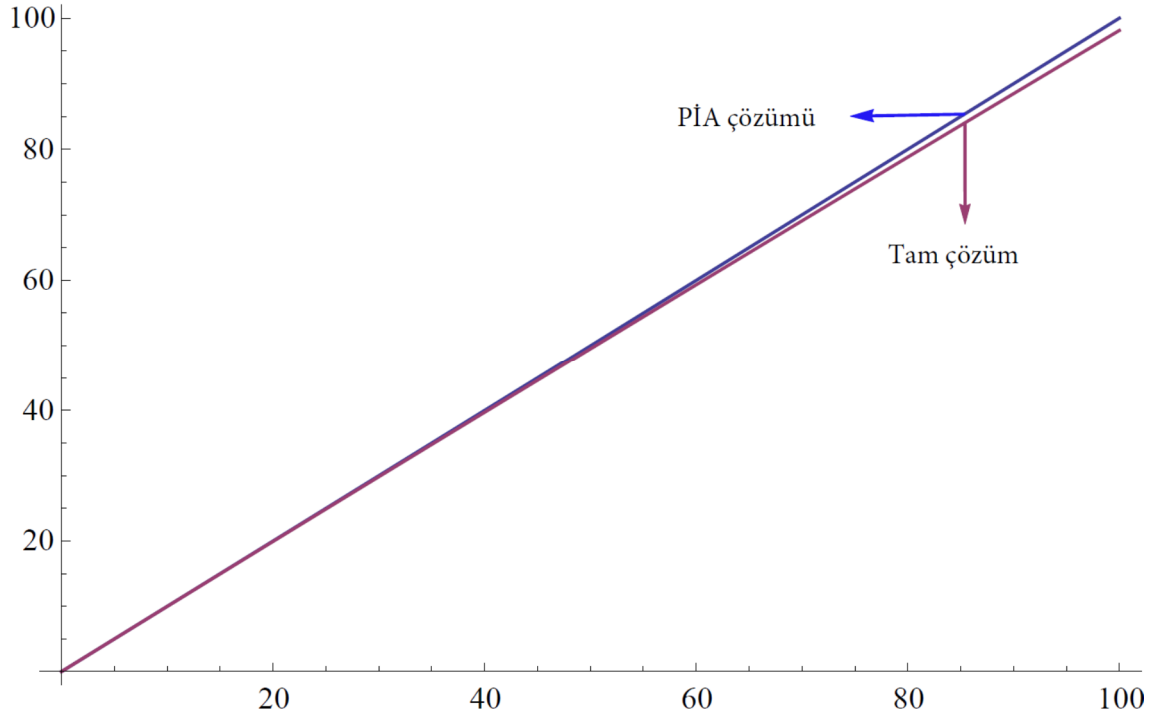
$$\begin{aligned} & u_3(t) \\ & = 3t + \frac{29844889t^2}{176947200} - \frac{t^{3-2\alpha}(t+8(-2+\alpha))}{4\Gamma(5-2\alpha)} \\ & + \frac{t^2 \left(3379230 + 8t^{-\alpha}(1051t + 5760(-3+\alpha))(-7+\alpha)(-6+\alpha)(-5+\alpha) \right)}{15360(-7+\alpha)(-6+\alpha)(-5+\alpha)\Gamma(4-\alpha)} \\ & - \frac{2240277\alpha + (450151 - 28436\alpha)\alpha^2}{15360(-7+\alpha)(-6+\alpha)(-5+\alpha)\Gamma(4-\alpha)} \\ & - \frac{t^2(-4+\alpha)(-1159 + 2\alpha(529 + 16(-10+\alpha)\alpha))}{64(-7+2\alpha)\Gamma(5-\alpha)^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

⋮
⋮
⋮

Tablo 6.1. de bazı PIA iterasyonları tam çözümle karşılaştırılmış ve yapılan mutlak hata verilmiştir. Sonuçta kullandığımız yöntemin gayet iyi sonuçlar verdiği ve yaklaşık çözümler sunduğu kanıtlanmıştır. Şekil 6.1. de ise elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak tam çözüm ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Tablo 6.1. Örnek 6.1.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

	$\alpha = 1$					
t	u_2	u_3	u_4	u_5	Tam çözüm	Mutlak hata(u_5)
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000000
0.1	0.099763	0.099953	0.099990	0.099981	0.100000	1.872712E-6
0.2	0.199052	0.199812	0.199962	0.199992	0.200000	7.490848E-6
0.3	0.297867	0.299577	0.299915	0.299983	0.300000	0.000016854
0.4	0.396208	0.399249	0.399850	0.399970	0.400000	0.000029963
0.5	0.494075	0.498826	0.499765	0.499953	0.500000	0.000046817
0.6	0.591468	0.598310	0.599662	0.599932	0.600000	0.000067417
0.7	0.688388	0.697700	0.699541	0.699908	0.700000	0.000091762
0.8	0.784833	0.796996	0.799400	0.799880	0.800000	0.000119853
0.9	0.880804	0.896198	0.899241	0.899848	0.900000	0.000151689
1.0	0.976302	0.995307	0.999063	0.999812	1.000000	0.000187271



Şekil 6.1. Örnek 6.1.'de elde edilen $u_5(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması

Örnek 6.2. Şimdi ise aşağıdaki kesirli lineer olmayan integro-diferansiyel denklem sistemini çözelim [44]:

$$\frac{d^{\alpha_1} u(t)}{dt^{\alpha_1}} = 1 - \frac{1}{2} (k'(t))^2 + \int_0^t ((t-s)k(s) + u(s)k(s)) ds$$

$$\frac{d^{\alpha_2} k(t)}{dt^{\alpha_2}} = 2t + \int_0^t ((t-s)u(s) - k^2(s) + u^2(s)) ds \quad 0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 1 \quad (6.15)$$

$u(0) = 0, k(0) = 1$ başlangıç şartlarıyla verilen bu problem için $\alpha = \beta = 1$ için bilinen tam çözümler;

$$u(t) = \sin ht \quad (6.16)$$

$$k(t) = \cos ht \quad (6.17)$$

şeklinindedir. (6.15) denklem sisteminde sistemi oluşturan denklemlerin her birine sırasıyla $u'(t)$ ve $k'(t)$ ifadelerini ekleyip çıkarırsak denklemler;

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^{\alpha_1} u(t)}{dt^{\alpha_1}} + u'(t) - \varepsilon u'(t) - 1 + \frac{1}{2} (k'(t))^2 \\ - \varepsilon \int_0^t ((t-s)k(s) - \varepsilon u(s)k(s)) ds \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\varepsilon \frac{d^{\alpha_2} u(t)}{dt^{\alpha_2}} + k'(t) - \varepsilon k'(t) - 2t - \varepsilon \int_0^t ((t-s)u(s) + \varepsilon k^2(s) - \varepsilon u^2(s)) ds \quad (6.19)$$

halini alır. Buna göre

$$\begin{aligned} F(u', u, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \varepsilon \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha_1}} ds - \varepsilon \int_0^t ((t-s)k(s) + u(s)k(s)) ds - 1 \\ + \frac{1}{2} (k'(t))^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} F(k', k, \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)} \varepsilon \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha_2}} ds - \varepsilon \int_0^t ((t-s)u(s) - k^2(s) + u^2(s)) ds \\ - 2t \end{aligned} \quad (6.21)$$

olmak üzere

$$u'(t) + \frac{Fu}{Fu'} u(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fu'} \quad (6.22)$$

iterasyon formülündeki terimler;

$$\begin{aligned} F &= u'_n(t) - 1 + \frac{k'_n(t)^2}{2} \\ Fu &= 0 \\ Fu' &= 1 \\ F\varepsilon &= -u'_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^t \frac{u'_n(s)}{(t-s)^{\alpha_1}} ds \\ &\quad - \int_0^t ((t-s)k_n(s) + u_n(s)k_n(s)) ds \end{aligned} \quad (6.23)$$

ve

$$k'(t) + \frac{Fk}{Fk'}k(t) = -\frac{F\varepsilon + \frac{F}{\varepsilon}}{Fk'} \quad (6.24)$$

iterasyon formülündeki terimler ise

$$F = k'_n(t) - 2t$$

$$Fk = 0$$

$$Fk' = 1$$

$$F\varepsilon = -k'_n(t) + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \int_0^t \frac{k'_n(s)}{(t-s)^{\alpha_2}} ds - \int_0^t ((t-s)u_n(s) - k_n(s)^2 + u_n(s)^2) ds \quad (6.25)$$

şeklinde oluşur. Bu terimler iterasyon formüllerinde yerine yazıldıktan sonra sırasıyla;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_1)} \int_0^t (-s+t)^{-\alpha_1} u'_n(s) ds + (u'_c(t))_n + \frac{-1 + \frac{1}{2}k'_n(t)^2 + u'_n(t)}{\varepsilon} = \\ = \int_0^t k_n(s)(-s+t+u_n(s)) ds + u'_n(t) \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_2)} \int_0^t (-s+t)^{-\alpha_2} k'_n(s) ds + (k'_c(t))_n = \\ = \int_0^t (-k_n(s)^2 + u_n(s)(-s+t+u_n(s))) ds \\ + \frac{2t + (-1 + \varepsilon)k'_n(t)}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.27)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir. Başlangıç şartına uygun olarak $u_0(t) = 0$ ve $k_0(t) = 1$ seçilip, (6.26) ve (6.27) denklemleri $n = 0$ için çözüldüğünde iterasyonlar sırasıyla şu şekilde elde edilir.

$$u_1(t) = \frac{1}{6}(6t + t^3) \quad (6.28)$$

$$k_1(t) = 1 + \frac{t^2}{2} \quad (6.29)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{504}t(1008 + 168t^2 + 21t^4 + t^6) - \frac{t^{2-\alpha_1}(12 + t^2 + (-7 + \alpha_1)\alpha_1)}{\Gamma(5 - \alpha_1)} \quad (6.30)$$

$$k_2(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{240} + \frac{t^8}{2016} - \frac{t^{3-\alpha_2}}{\Gamma(4 - \alpha_2)} \quad (6.31)$$

.
.

.

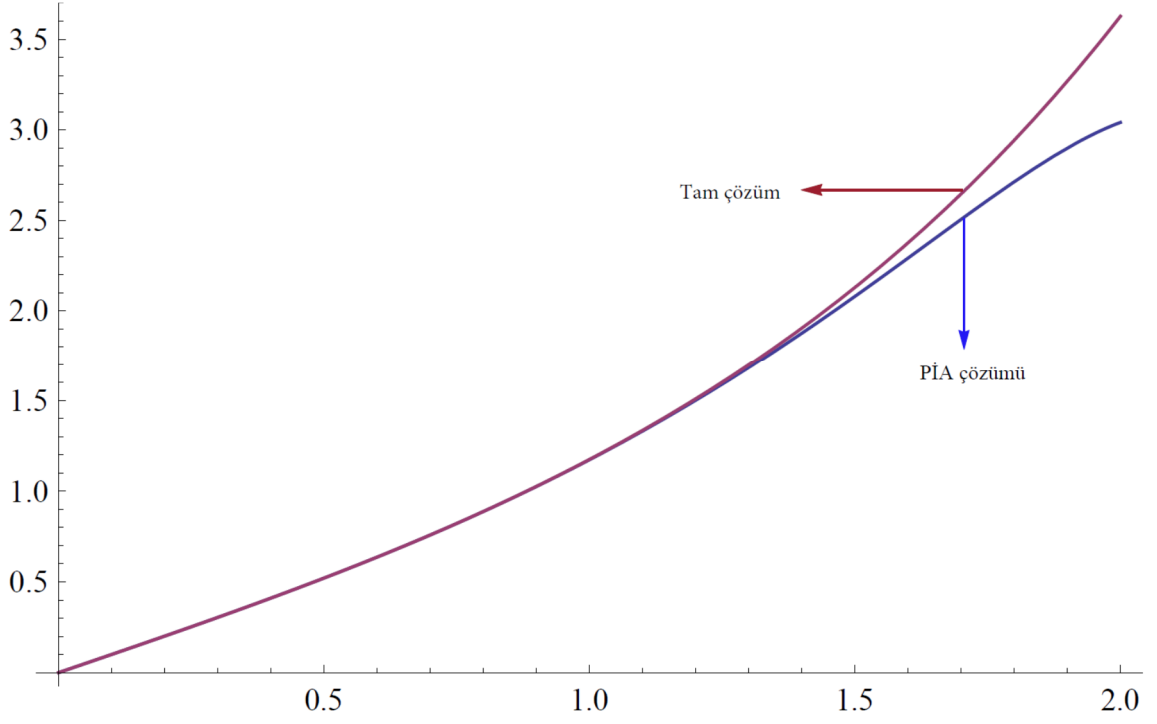
Bu şekilde devam edilerek 3. iterasyon sonuçları olan $u_3(t)$ ve $k_3(t)$ değerleri hesaplanmıştır. Ancak ifadelerinin uzunluğundan dolayı burada verilmemiştir. Tablo 6.2. ve Tablo 6.3.'de elde ettiğimiz bu iterasyon sonuçları tam çözümlerle karşılaştırılmış ve gayet yakın sonuçlar elde edildiği gösterilmiştir. Şekil 6.2. ve Şekil 6.3.'de ise elde ettiğimiz çözümlerin grafiksel olarak tam çözüm ile karşılaştırılmaları yapılmıştır.

Tablo 6.2. Örnek 6.2.'de elde edilen $u(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

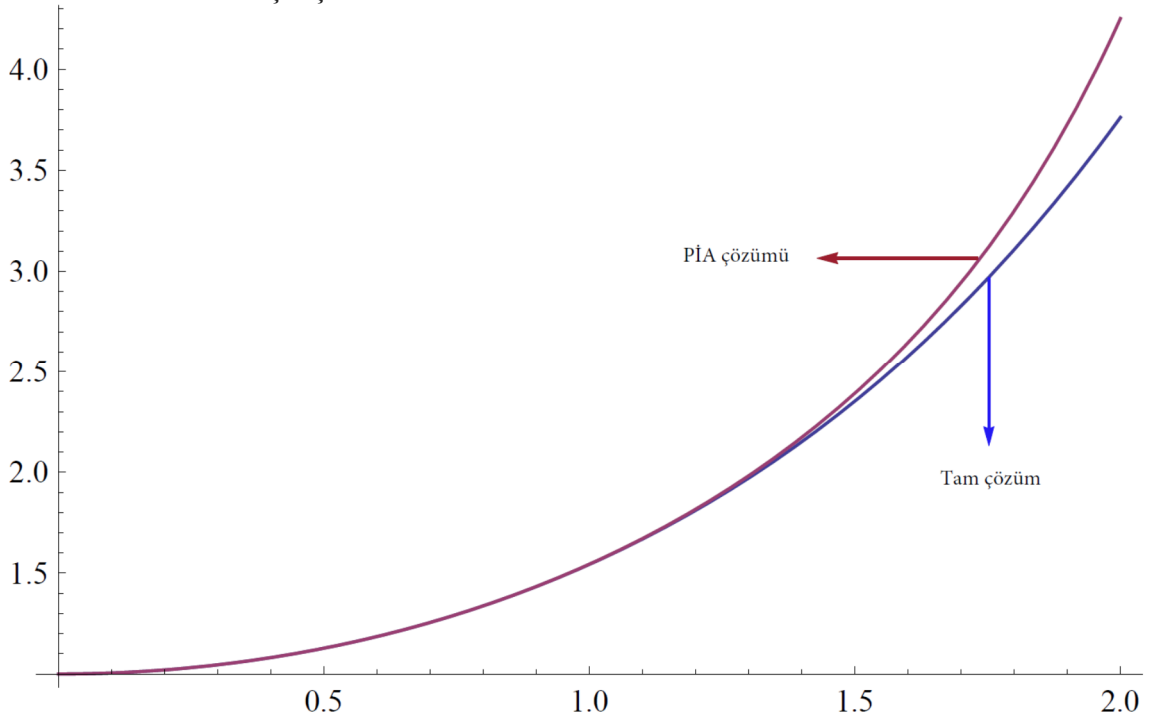
	$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$				
t	u_2	u_3	Tam çözüm	Mutlak hata(u_2)	Mutlak hata(u_3)
0.0	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000000	0.00000000
0.1	0.100167	0.100166	0.100166	3.335119E-7	1.5915E-10
0.2	0.201346	0.201335	0.201336	0.00001068	2.05372E-8
0.3	0.304601	0.304519	0.304520	0.00008139	3.55643E-7
0.4	0.411096	0.410749	0.410752	0.00034425	2.71484E-6
0.5	0.522150	0.521082	0.521095	0.00105561	0.00001326
0.6	0.639295	0.636604	0.636653	0.00264196	0.00004893
0.7	0.764332	0.758434	0.758583	0.00574928	0.00014904
0.8	0.899402	0.887710	0.888105	0.01129678	0.00039502
0.9	1.047052	0.025574	0.026516	0.02053602	0.00094260
1.0	1.210317	0.173128	0.175201	0.03511626	0.00207271

Tablo 6.3. Örnek 6.2.'de elde edilen $k(t)$ değerlerinin sayısal çözümlerinin karşılaştırılması

$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$					
t	k_2	k_3	Tam çözüm	Mutlak hata(k_2)	Mutlak hata(k_3)
0.0	1.000000	1.000000	1.000000	0.00000000	0.00000000
0.1	1.005004	1.005004	1.005004	2.782490E-9	1.1917E-11
0.2	1.020066	1.020066	1.020066	1.789840E-7	3.06039E-9
0.3	1.045340	1.045338	1.045338	2.055915E-6	7.88473E-8
0.4	1.081084	1.081073	1.081072	0.00001168	7.93421E-7
0.5	1.127671	1.127630	1.127625	0.00004524	4.77457E-6
0.6	1.185602	1.185485	1.185465	0.00013751	0.00002077
0.7	1.255522	1.255241	1.255169	0.00035396	0.00007230
0.8	1.338242	1.337648	1.337434	0.00080720	0.00021390
0.9	1.434765	1.433645	1.433086	0.00167897	0.00055925
1.0	1.546329	1.544407	1.543080	0.00324873	0.00132271



Şekil 6.2. Örnek 6.2.'de elde edilen $u_3(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması



Şekil 6.3. Örnek 6.2.'de elde edilen $k_3(t)$ 'nin tam çözümle $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ için grafiksel olarak karşılaştırılması

BÖLÜM 7

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada lineer ve lineer olamayan bazı kesirli diferansiyel denklem tiplerinin Pertürbasyon-İterasyon Algoritması yardımıyla yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Bulunan bu çözümler tam çözüm ve diğer bazı metotlar ile elde edilen çözümlerle karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçların hayli örtüştüğü tespit edilmiştir. Ayrıca tezde kullanılan yöntemin literatürde yer alan varyasyonel-iterasyon metodu ve modifiye edilmiş homotopi-pertürbasyon metodu gibi birtakım metodlarla elde edilen çözümlerden sayısal olarak çok daha yaklaşık sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Bu ise söz konusu metodun daha birçok tipteki diferansiyel denkleme başarıyla uygulanabileceğini göstermektedir. Ayrıca bu çalışmadan sonra yapılacak bir çalışma, yöntemin yakınsaklık kriterleri üzerine bir analiz olabilir.

KAYNAKLAR

1. Leibniz, G. W., "1695 A Letter from Hanover, Germany to GFA L'Hospital, September 30" *Math. Schriften* (1849), 301-302, 1695.
2. Lacroix, S. F., "Traité du calcul différentiel et du calcul integral", (Vol. 1). *Courcier*, 1810.
3. Abel, N. H., "Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales definies", *Oeuvres Completes*, Christiania (Grondahl) 1, 16-18, 1881.
4. Liouville, J., "Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires", *J. Reine Angew. Math.*, 11, 1-19. 1834.
5. Davis, H. T., "The Theory of Linear Operators", *Principia Press, Bloomington, Indiana*, 1936.
6. Peacock, G., "Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis", *Report to the British Assoc. for the Advancement of Science*, 185-352, 1835.
7. Laurent, H. "Sur le calcul des dérivées à indices quelconques", *Nouvelles annales de mathématiques*, 3, Gauthier-Villars, 1884.
8. Ross, B., "Fractional Calculus", *Mathematics Magazine*, 115-122, 1977.
9. Caputo, M., "Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent—II", *Geophys. J. Int.*, 13.5, 529-539, 1967.
10. Caputo, M., *Elasticità e dissipazione*. Zanichelli, 1969.
11. Podlubny, I., "Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications", *Academic Press*, 198, 1998.
12. Nayfeh, A. H., "Perturbation Methods", *Wiley-Interscience*, New York, 1973.
13. Jordan, D.W., Smith, P., "Nonlinear Ordinary Differential Equations", *Clarendon Press*, Oxford, 1987.
14. He, J. H., "Iteration Perturbation Method for Strongly Nonlinear Oscillators", *J. Sound Vibr*, 7, 631-642, 2001.
15. Mickens, R.E., "Iteration procedure for determining approximate solutions to non-linear oscillator equations", *J. Sound Vibr*, 116, 185-187, 1987.

16. Mickens, R.E., “A generalized iteration procedure for calculating approximations to periodic solutions of truly nonlinear oscillators”, *J. Sound Vibr*, 287, 1045–1052, 2005.
17. Mickens, R.E., “Iteration method solutions for conservative and limit-cycle $x^{1/3}$ force oscillators”, *J. Sound Vibr*, 292, 964–968, 2006.
18. Mickens, R.E., “Generalized harmonic balance/numerical method for determining analytical approximation to the periodic solutions of the $x^{4/3}$ potential”, *J. Sound Vibr*, 250, 951-954, 2002.
19. Hu, H., Xiong, Z.G., “Oscillations in an $x^{(2m+1)/(2n+1)}$ potential”, *J. Sound Vibr*, 259, 8, 977-980, 2003.
20. He, J. H., “Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems”, *Dissertation. De-verlag Im Internet GmbH*, Berlin, 2006.
21. Wang, S.Q., He, J.H., “Nonlinear oscillator with discontinuity by parameter-expansion method”, *Chaos Solitons Fractals*, 35, 688-691, 2008.
22. He, J. H., “Modified Linstedt–Poincare methods for some non-linear oscillations Part I: Expansion of constant”, *J. Non-linear Mech*, 37, 309–314, 2002.
23. Ramos, J.I., “On Linstedt–Poincare’ techniques for the quintic duffing equation”, *Appl. Math. Comput*, 193, 2, 303-310, 2007.
24. Öziş, T., Yıldırım, A., “Determination of periodic solution of a $x^{1/3}$ force by He’s modified Linstedt–Poincare’ method”, *J. Sound Vibr*. 301, 415–419, 2007.
25. Mickens, R.E., “Oscillations in an $x^{4/3}$ potential”, *J. Sound Vibr*, 246(2), 375-378, 2001.
26. J.H. He, “Linearized perturbation technique and it’s applications to strongly nonlinear oscillators”, *Comp. Math. Appl.*, 45, 1-8, 2003.
27. He, J.H., “Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations”, *Internat. J. Modern Phys. B*, 1141-1199, 2006.
28. He, J.H., Wu, G. C., Austin, F., "The variational iteration method which should be followed”, *Nonlinear Sci. Lett. A*, 1-30, 2010.

29. Aksoy, Y., Pakdemirli, M., "New perturbation-iteration solutions for Bratu-type equations", *Comput. Math. Appl*, 59, 2802-2808, 2010.
30. Pakdemirli, M, Aksoy, Y., Boyacı, H., "A new perturbation-iteration approach for first order differential equations", *Math. Comp. App.*, 16, 4, 890-899, 2011.
31. Aksoy, Y., Pakdemirli, M., Abbasbandy, S., Boyacı H., "New perturbation-iteration solutions for nonlinear heat transfer equations", *Internat. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 22, 7, 2012.
32. Pakdemirli, M., Boyacı, H., "Generation of root finding algorithms via perturbation theory and some formulas", *Appl. Math. Comput.*, 184, 783-788, 2007.
33. Pakdemirli, M., Boyacı, H., Yurtsever, H.A., "Perturbative derivation and comparisons of root finding algorithms with fourth order derivatives", *Math. Comp. App.*, 12(2), 117-124, 2007.
34. Pakdemirli, M., Boyacı, H., Yurtsever, H.A., "A root finding algorithm with fifth order derivatives", *Math. Comp. App.*, 13, 2, 123-128, 2008.
35. Dolapci, İ. T., Senol, M., Pakdemirli, M., "New perturbation iteration solutions for Fredholm and Volterra integral equations", *J. Appl. Math.*, 1-5, 2013.
36. Senol, M., Dolapci, İ. T., Aksoy, Y., Pakdemirli, M., "Perturbation-iteration method for first order differential equations and systems", *Abstr. Appl. Anal*, 1-6, 2013.
37. Odibat, Z., Momani, S., "Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order" *Chaos, Solitons Fractals*, 36.1, 167-174, 2008.
38. Diethelm, K., Walz, G., "Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation", *Numer. Algorithms*, 16.3-4, 231-253, 1997
39. Abdulaziz, O., Hashim, I., Momani, S., "Solving systems of fractional differential equations by homotopy-perturbation method", *Phys. Lett. A*, 372.4, 451-459, 2008.
40. Zurigat, M., Momani, S., Odibat, Z., Alawneh, A., "The homotopy analysis method for handling systems of fractional differential equations" *Appl. Math. Model.*, 34.1, 24-35, 2010.

41. Momani, S., Odibat, Z., "Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics", *Phys. Lett. A*, 355.4, 271-279, 2006.
42. Momani, S., Odibat, Z., "A novel method for nonlinear fractional partial differential equations: Combination of DTM and generalized Taylor's formula", *J. Comput. Appl. Math.*, 220.1, 85-95, 2008.
43. Hou, J., Qin, B., Yang, C., "Numerical solution of nonlinear Fredholm integrodifferential equations of fractional order by using hybrid functions and the collocation method", *J. Appl. Math.*, 1-11, 2012.
44. Zurigat, M., Momani, S., Alawneh, A., "Homotopy analysis method for systems of fractional integro-differential equations" *Neural Parallel Sci. Comput.*, 17.2, 169, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Mehmet ŞENOL 1978 yılında Ankara’da doğdu. İlkokulu Nevşehir’de, ortaokulu Erzurum’da, liseyi Aksaray ve Malatya’da okudu. 1995-1996 yılları arasında, Amerika’da bir üniversitede 1 yıl süreyle İngilizce ve mühendislik eğitimi aldı.1996 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ne başladı ve 2000 yılında mezun oldu. 2000-2001 Öğretim yılında Nevşehir Derinkuyu ilçesi Özlüce Köyü İlköğretim Okulu’nda bir dönem süresince Matematik ve İngilizce öğretmenliği yaptı. 2001 yılı başında tekrar Amerika’ya İngilizce öğrenimi için gitti ve burada TOEFL sınavından 240 CBT (587 PBT) puan alarak başarılı oldu. Ekim-Aralık 2001 tarihleri arasında Elazığ ili Kovancılar ilçesi İsmetpaşa İlköğretim Okulu’nda Matematik ve İngilizce öğretmenliği yaptı. 2001 yılı sonunda Amerika’da South Carolina Clemson University’ ye yüksek lisans için başvuru yaptı ve bu üniversiteye burslu araştırma görevlisi olarak kabul edildi. Ancak geçirdiği ciddi bir rahatsızlık neticesinde eğitimini yarıda bırakıp yurda geri dönmek zorunda kaldı. 2002 yılında Nevşehir Özel Altınyıldız Koleji’ nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2006 yılında vatani görevini İzmir Bornova 57. Topçu Tugayı’nda tamamladı. 2011 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü’nde yüksek lisans eğitimimi tamamladı. Halen aynı üniversitenin Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. İyi derecede İngilizce bilmekte, evli ve 2 çocuk sahibidir.

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü - Nevşehir
Telefon: 0 384 2281000 -14104
Belgegeçer: 0 384 215 39 48
e-posta : msenol@nevsehir.edu.tr

