

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KORTEWEG- de VRIES BURGERS' (KdVB) DENKLEMİNİN
SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Ali Rıza ABA**

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2015
NEVŞEHİR**

**T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KORTEWEG- de VRIES BURGERS' (KdVB) DENKLEMİNİN
SONLU ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL
ÇÖZÜMLERİ**

**Tezi Hazırlayan
Ali Rıza ABA**

**Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ocak 2015
NEVŞEHİR**

Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ danışmanlığında **Ali Rıza ABA** tarafından hazırlanan "**Korteweg-de Vries-Burgers' (KdVB) denkleminin sonlu eleman yöntemleri ile sayısal çözümleri**" başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

26/ 01/ 2015

JÜRİ:

İMZA:

Başkan : Doç. Dr. Adnan TUNA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ

ONAY:

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun...27.01.2015...tarih ve...04.04... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

17/02/2015
Doç. Dr. Şahin ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.



Ali Rıza ABA

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ' a, bu zorlu süreçte sabır ve sevgi ile maddi, manevi desteklerini esirgemeyen eşim Sebil, çocuklarım Hasan Melih ve Ahmet Furkan'a, hiçbir zaman emeklerini ödeyemeyeceğim sevgili annem ve babama, desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Aytekin ERYILMAZ' a teşekkürü bir borç bilirim.

**KORTEWEG- de VRIES BURGERS' (KdVB) DENKLEMİNİN SONLU
ELEMAN YÖNTEMLERİ İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

Ali Rıza ABA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2015

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinin giriş kısmında B- spline fonksiyonlar, sonlu eleman yöntemleri, Korteweg- de Vries (KdV), Burgers' ve Korteweg- de Vries Burgers' (KdVB) denklemleri hakkında temel bilgiler verildi.

Tezin ikinci bölümünde KdVB denkleminin sayısal çözümleri quartic B- spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki sayısal sonuçlar ile karşılaştırılarak tablolar halinde verildi. Elde edilen sonuçlara ait grafikler çizildi.

Tezin üçüncü bölümünde KdVB denkleminin sayısal çözümleri Kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Elde edilen sayısal sonuçlar tablolar halinde verilerek grafikleri çizildi.

Tezin dördüncü bölümünde KdVB denkleminin sayısal çözümleri Petrov- Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki mevcut sonuçlar ile karşılaştırılarak tablolar halinde verildi. Elde edilen sonuçlara ait grafikler çizildi.

Tezin beşinci bölümünde KdVB denkleminin sayısal çözümleri Subdomain sonlu eleman yöntemi ile elde edildi.

Anahtar kelimeler: *B- spline, KdV, KdVB, Sonlu eleman metodu, Burgers'*

Tez Danışman: Yrd. Doç. Dr. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Sayfa Adeti: 106

**THE NUMERICAL SOLUTIONS OF KORTEWEG- de VRIES BURGERS'
(KdVB) WITH FINITE ELEMENT METHODS
(MASTER'S THESIS)**

Ali Rıza ABA

**NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL SCIENCE**

January 2015

ABSTRACT

Introduction of the thesis, fundamental informations about B- spline functions, finite element methods, Korteweg- de Vries (KdV), Burgers' and Korteweg- de Vries Burgers' (KdVB) equations are given.

In the second part, numerical solutions of KdVB equation are obtained by Galerkin finite element method with quartic B- spline functions. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature and given in the form of tables. Figures, related to the obtained results are plotted.

In the third part, numerical solutions of KdVB equation are obtained by Collocation finite element methods. The obtained numerical results are given in the form of tables and their figures are plotted.

In the fourth part, numerical solutions of KdVB equation are obtained by Petrov-Galerkin finite element methods. The obtained numerical results are compared with existing results in the literature and given in the form of tables. Figures related to the obtained results are plotted.

In the fifth part, numerical solutions of KdVB equation are obtained by Subdomain finite element methods.

Key Words: *B- spline, KdV, KdVB, Finite element methods, Burgers'*

Super Visor: Assist. Prof. Seydi Battal Gazi KARAKOÇ

Page Number: 106

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY SAYFASI	i
TEZ BİLDİRİM SAYFASI	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xiii
SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ	xvi
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1. 1. Sonlu Fark Yöntemleri	1
1. 2. Varyasyonel Yöntemler	2
1. 2. 1. Rayleigh- Ritz yöntemi	3
1. 3. Ağırlıklı Kalan Yöntemi	4
1. 3. 1. Galerkin Yöntemi	5
1. 3. 2. Petrov- Galerkin yöntemi	6
1. 3. 3. Kollokasyon yöntemi	6

1. 3. 4. Subdomain yöntemi	7
1. 4. Sonlu Elemanlar Yöntemi	7
1. 5. Spline Fonksiyonlar	9
1. 6. B- spline Fonksiyonlar	11
1. 6. 1. Lineer B- spline fonksiyonlar	11
1. 6. 2. Kuadratik B- spline fonksiyonlar	12
1. 6. 3. Kübik B- spline fonksiyonlar	13
1. 6. 4. Kuartik B- spline fonksiyonlar	15
1. 6. 5. Kuintik B- spline fonksiyonlar	18
1. 6. 6. Sektik B- spline fonksiyonlar	20
1. 6. 7. Septik B- spline fonksiyonlar	22
1. 7. Korteweg- de Vries (KdV) Denklemi	25
1. 8. Burgers' Denklemi	26
1. 9. Korteweg- de Vries Burgers' (KdVB) Denklemi	27
1. 9. 1. Hata normları ve korunum sabitleri	28

BÖLÜM 2

KdVB DENKLEMİNİN KUARTİK B- SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	30
2. 1. Kuartik B- spline Fonksiyonlar ile Galerkin Yöntemi	30
2. 2. <i>Test Problemleri</i>	33

2. 2. 1. <i>Burgers' tipi çözümler</i>	34
2. 2. 2. <i>KdV tipi çözümler</i>	38
2. 2. 3. <i>KdVB tipi çözümler</i>	39
2. 3. Sonuç	40

BÖLÜM 3

KdVB DENKLEMİNİN SEPTİK B- SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	42
3. 1. KdVB Denkleminin Analitik Çözümü	42
3. 2. Septik B- spline Sonlu Eleman Yöntemi	42
3. 3. Kararlılık Analizi	47
3. 4. Sayısal Sonuçlar	49
3. 5. Sonuç	57

BÖLÜM 4

KdVB DENKLEMİNİN PETROV- GALERKIN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	59
4. 1. Kübik B- spline Fonksiyonlar ile Petrov- Galerkin Yöntemi	59
4. 1. 1. <i>KdV tipi çözümler</i>	62
4. 1. 2. <i>Burgers' tipi çözümler</i>	64
4. 1. 3. <i>KdVB tipi çözümler</i>	67
4.2. Sonuç	68

BÖLÜM 5

KdVB DENKLEMİNİN SUBDOMAIN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ	71
5. 1. Quartik B- spline Fonksiyonlar ile subdomain Yöntemi	71
5. 2. <i>KdVB Tipi Çözümler</i>	74
5. 3. Sonuç	75
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	87

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1. 1. $\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....	13
Tablo 1. 2. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....	15
Tablo 1. 3. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri	17
Tablo 1. 4. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi^{(iv)}_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....	20
Tablo 1. 5. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$ ve $\phi^{(v)}_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....	22
Tablo 1. 6. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$, $\phi^{(v)}_m(x)$ ve $\phi^{(vi)}_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri.....	24
Tablo 2. 1. v ' nin farklı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin karşılaştırılması.....	35
Tablo 2. 2. Burgers' denkleminin $\Delta t = 0.01$ değerleri için elde edilen sonuçlarının [44-46] referansları ile karşılaştırılması.....	37
Tablo 2. 3. KdV denkleminin $\varepsilon = 1, v = 0, \mu = 4.84 \times 10^{-4}, C = 0.3$ ve $D = -6$ değerleri için elde edilen hata norm değerlerinin [8, 9, 40] referansları ile karşılaştırılması.....	39
Tablo 2. 4. $v = 0$ için $t = 800$ zamanına kadar elde edilen korunum sabitlerinin değerleri.....	40
Tablo 3. 1. $\phi_i(x)$ ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri.....	43
Tablo 3. 2. $v = 0.0005, \mu = 0.1, \Delta t = 0.02, \Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri.....	50

Tablo 3. 3. $v = 0.0005$ değeri için $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri.....	50
Tablo 3. 4. $v = 0.05$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri.....	51
Tablo 3. 5. $v = 0.05$ değeri için $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri.....	51
Tablo 3. 6. $v = 5$, $\mu = 6$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 4.4$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri.....	52
Tablo 3. 7. $v = 1$ değeri için $\mu = 2$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 4.4$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri.....	52
Tablo 4. 1. Tek dalga çözümü için $0 \leq x \leq 2$ aralığında $C = 0.3$, $h = 0.001$ ve $\Delta t = 0.005$ parametreleri ile elde edilen korunum sabitleri ve hata norm değerleri.....	63
Tablo 4. 2. Maxwellian başlangıç şartının $\mu = 0.04, 0.01, 0.001$ ve 0.0005 değerleri için elde edilen korunum sabitleri.....	65
Tablo 4. 3. $v = 0.5, 0.05$ ve 0.005 için farklı zaman adımlarında elde edilen hata norm değerleri.....	67
Tablo 4. 4. $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.4$ ve $t = 800$ parametreleri için KdV denkleminin çözümlerinden elde edilen korunum sabitleri.....	69
Tablo 5. 1. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri.....	76
Tablo 5. 2. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.0001$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri.....	76

Tablo 5. 3. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.005$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri.....	77
Tablo 5. 4. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.01$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri	77
Tablo 5. 5. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.03$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri	78

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. 1.	Lineer B- spline şekil fonksiyonları.....	12
Şekil 1. 2.	Kuadratik B- spline şekil fonksiyonları.....	14
Şekil 1. 3.	Kübik B- spline şekil fonksiyonları.....	16
Şekil 1. 4.	Kuartik B- spline şekil fonksiyonlar.....	18
Şekil 1. 5.	Kuintik B- spline şekil fonksiyonları.....	20
Şekil 1. 6.	Sektik B- spline şekil fonksiyonları.....	23
Şekil 1. 7.	Septik B- spline şekil fonksiyonları.....	25
Şekil 2. 1.	$t = 2, 3$ ve 4 zamanlarında $v = 0.5$ viskozite değeri için elde edilen çözümlerin grafiği.....	35
Şekil 2. 2.	$t = 2, 3$ ve 4 zamanlarında $v = 0.0005$ viskozite değeri için elde edilen çözümlerin grafiği.....	36
Şekil 2. 3.	$t = 4$ zamanı ve $v = 0.5$ için elde edilen hata norm değerlerinin grafiği.....	36
Şekil 2. 4.	$t = 4$ zamanı ve $v = 0.0005$ için elde edilen hata norm değerlerinin grafiği.....	37
Şekil 2. 5.	$0 \leq x \leq 2$ aralığında $\varepsilon = 1$, $v = 0$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$ ve $D = -6$ değerleri için tek soliton dalganın grafiği.....	38
Şekil 2. 6.	$-50 \leq x \leq 150$ aralığında $h = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $v = 0.0001$ için sayısal çözümlerin grafiği.....	41
Şekil 2. 7.	$-50 \leq x \leq 150$ aralığında $h = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $v = 0.4$ için sayısal çözümlerin grafiği.....	41

Şekil 3. 1(a). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 10$ zamanındaki hareketi	53
Şekil 3. 1(b). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hareketi	53
Şekil 3. 1(c). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 30$ zamandaki hareketi	54
Şekil 3. 1(d). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 40$ zamanındaki hareketi	54
Şekil 3. 1(e). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 50$ zamanındaki hareketi	55
Şekil 3. 1(f). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 60$ zamanındaki hareketi	55
Şekil 3. 2(a). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 10$ zamanındaki hareketi	56
Şekil 3. 2(b). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hareketi	56
Şekil 3. 2(c). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 30$ zamanındaki hareketi grafiği	57
Şekil 3. 2(d). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 40$ zamanındaki hareketi	58
Şekil 4. 1. Tek dalga çözümü için $t = 0, 1, 2$ ve 3 zaman adımlarında $C = 0.3$, $h = 0.001$ ve $\Delta t = 0.005$, $0 \leq x \leq 2$ parametreleri ile elde edilen grafikler	63

Şekil 4. 2.	Maxwellian başlangıç şartının $t = 12$ zamanında a) $\mu = 0.04$, b) $\mu = 0.01$, c) $\mu = 0.001$, d) $\mu = 0.0005$ değerleri için elde edilen grafikleri.....	66
Şekil 4. 3.	Tek dalganın a) $v = 0.5$, $h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 10$ b) $v = 0.05$, $h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 3$ c) $v = 0.005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 1.4$ değerleri için elde edilen grafikleri.....	67
Şekil 4. 4.	$t = 800$, (a) $v = 0$, (b) $v = 0.0001$, (c) $v = 0.005$, (d) $v = 0.01$, (e) $v = 0.03$, (f) $v = 0.05$, (g) $v = 0.2$, (h) $v = 0.4$ parametreleri için KdV tipi çözümler	70
Şekil 5. 1(a).	$t = 800$ zamanında ve $v = 0$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği.....	78
Şekil 5. 1(b).	$t = 800$ zamanında ve $v = 0.0001$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği.....	79
Şekil 5. 1(c).	$t = 800$ zamanında ve $v = 0.005$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği.....	79
Şekil 5. 1(d).	$t = 800$ zamanında ve $v = 0.01$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği.....	80
Şekil 5. 1(e).	$t = 800$ zamanında ve $v = 0.03$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği.....	80

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

KdV	Korteweg- de Vries
KdVB	Korteweg- de Vries Burgers'
W	Ağırlık fonksiyonu
c_j	Parametre
$L_m(x)$	Lineer B-spline fonksiyon
U_N	Yaklaşık çözüm
I_1	Kütle
I_2	Momentum
I_3	Enerji
L_2 ve L_∞	Hata normları
\gg	Çok daha büyük
\ll	Çok daha küçük

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde, Korteweg- de Vries, Burgers' ve Korteweg- de Vries Burgers' denklemleri tanıtılacaktır. Ayrıca, diğer bölümlerde kullanılacak olan sonlu fark, varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemlerinden bahsedilecektir. Tezde kullanılacak olan sonlu elemanlar metodu ile spline ve B-spline fonksiyonlar hakkında temel bilgiler verilecektir.

1. 1. Sonlu Fark Yöntemleri

Farklı başlangıç ve sınır koşulları ile verilen lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümünde sonlu fark yöntemi sıkça kullanılan bir yöntemdir. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımını elde etmek için aşağıdaki çözüm basamakları kullanılır.

1. Problemin çözüm bölgesi eşit veya farklı boyutta geometrik şekiller barındıran kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü oluşan tüm kafeslerin düğüm noktaları üzerinden hesaplanır.
2. Diferansiyel denklemde görülen türevler yerine Taylor seri açılımı ile elde edilen ileri, geri veya merkezi sonlu fark yaklaşımlarından herhangi biri yazılır. Buradan da başlangıçta verilen diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir.
3. Bulunan fark denkleminde çözüm bölgesinde olmayan hayali düğüm noktalarını ortadan kaldırabilmek için problem ile verilen sınır şartları yerine uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Bilinmeyen sayısı kadar cebirsel denklemden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Böylelikle elde edilmiş olan sayısal denklem sistemi doğrudan veya iteratif yöntemlerden herhangi biri yardımıyla rahatlıkla çözülür.

Herhangi bir diferansiyel denklem sonlu fark biçiminde aşağıdaki çözüm yollarından biri ile ifade edilebilir.

a) Açık

b) Kapalı

c) Crank-Nicolson

Sonlu fark yönteminde $a \leq x \leq b$ ve $t > 0$ olmak üzere problemin $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü düğüm noktaları üzerinde olacak şekilde problemin çözüm bölgesi N adet alt bölgeye parçalanır. Bu parçalama işleminde her bir $\Delta t \equiv k$ zaman adımı için

$$\Delta x \equiv h = \frac{b - a}{N}$$

olacak şekilde eşit aralıklar göz önünde bulundurulmalıdır.

Düğüm noktalarında problem ile beraber verilen sınır koşulları uygulandıktan sonra elde edilen fark denklemleri daha sonra çözüldüğünde problemin yaklaşık çözümüne ulaşılmış olur. Bu yöntem kolay uygulanabilir bir yöntem olmasına rağmen tam olarak belli olmayan sınır koşullarına uygulanmasındaki sorunlar ile karmaşık bölgelerdeki geometriksel gösterimin doğruluğundaki zorluklar ve yaklaşık çözümdeki türevlerin yanlışlığı gibi sebeplerden dolayı bu yöntemin uygulanmasında bazı istenmeyen aksaklıklar ortaya çıkmaktadır.

1. 2. Varyasyonel Yöntemler

Bu yöntem ise tam çözüm yerine kullanılacak olan yaklaşık çözümü, diferansiyel denklemin zayıf formundan veya kuadratik fonksiyonelin minimumundan veya ağırlıklı integral ifadesinden elde eder. Rayleigh- Ritz ve ağırlıklı kalan (Galerkin, kollokasyon, subdomain ve Petrov- Galerkin) bu yöntemlerden bazılarıdır. Bu tip yöntemlerde bir problemin yaklaşık çözümü $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ şeklinde bulunur. Burada ifade edilen ϕ_j ' ler polinom olan uygun yaklaşım fonksiyonları ve c_j ' ler ise bulunacak olan bilinmeyen parametrelerdir. c_j parametreleri denklemin ağırlıklı integral biçimini veya zayıf biçimini gerçekleştirecek veya denkleme karşılık gelen kuadratik fonksiyoneli minimum yapacak şekilde bulunur. $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ yaklaşımı, verilen diferansiyel denklemden direk yerine yazılırsa c_j parametrelerinin bulunması için her zaman gerekli ve yeterli sayıda lineer bağımsız denklem sistemi elde edilemeyebilir. Bu nedenle

ağırlıklı integral biçime ihtiyaç duyulur. Ağırlıklı integral formu $\sum c_j \phi_j + \phi_0$ yaklaşık çözümünün diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla elde edilen kalan ile ω ağırlık fonksiyonunun çarpımının bölge üzerindeki integralinin alınması işlemidir. Ağırlıklı integral formunda u_N çözümündeki ϕ_j yaklaşım fonksiyonları diferansiyel denklemin mertebesi kadar türevlenebilir olmalı ayrıca problem ile birlikte verilen tüm sınır koşullarını sağlamalıdır. Ağırlıklı integral formu problemin hiçbir sınır koşulunu içermediğinden yukarıda ifade edilenlerin gerçekleşmesi gerekir. Ağırlıklı integral formunda ω ağırlık fonksiyonunun lineer bağımsız N farklı seçimi için c_1, c_2, \dots, c_N bilinmeyenlerinden oluşan N tane sayısal denklem bulunur. Bu denklemler vasıtasıyla c_j parametreleri kolayca elde edilir. Zayıf form ise denklemdeki diferansiyelin bağımlı değişken ile ağırlık fonksiyonu arasında paylaştırıldığı ve verilen problemin doğal sınır koşullarını içeren ağırlıklı integral ifadesidir. Verilen her denklemin ağırlıklı integral ifadesi elde edilirken, zayıf formu elde edilemeyebilir. Varyasyonel yöntemler ω ağırlık fonksiyonu ve ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının seçimi bakımından birbirinden farklılık gösterirler. Varyasyonel yöntemlerde yaklaşık çözüm bulunurken ele alınan denkleme karşılık gelen zayıf form kullanılmalıdır. Yukarıda da ifade edildiği gibi her denklemin zayıf formu oluşturulamadığından ancak sınırlı sayıda denklemde uygulama imkânı vardır.

1. 2. 1. Rayleigh- Ritz yöntemi

Bu yöntemde, yaklaşımın c_j katsayıları verilen problemin zayıf biçimi kullanılarak elde edilir. Yine bu yöntemde ağırlık fonksiyonları ile yaklaşım fonksiyonları aynı ($\omega = \phi_j$) seçilir. Burada zayıf form; hem diferansiyel denklemi hem de problemin doğal sınır şartlarını içerdiğinden yaklaşım fonksiyonları üzerindeki süreklilik durumu, orijinal diferansiyel denklem veya ağırlıklı integral biçimindeki gerektirmelerden azdır. Rayleigh- Ritz yönteminde yaklaşık çözüm,

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1. 1)$$

biçiminde sonlu bir seri şeklinde elde edilmeye çalışılır. Yukarıda ki ifadede c_j sabitleri Ritz katsayıları olarak adlandırılır. Denklemin zayıf formunda ağırlık fonksiyonları

yerine yaklaşım fonksiyonları yazılırsa, c_j bilinmeyenleri için N adet lineer bağımsız cebirsel denklem sistemi bulunmuş olur. Burada ki ϕ_j ve ϕ_0 yaklaşım fonksiyonları bir takım şartları, u_N yaklaşımı ise problem ile verilen temel sınır şartlarını sağlamalıdır. Çünkü zayıf form problemin doğal sınır şartlarını kapsamaktadır. ϕ_0 fonksiyonun görevi, problem ile verilen temel sınır şartlarının homojen olmayan kısmını sağlamasıdır. Ayrıca ϕ_0 fonksiyonu yerine temel sınır şartlarını üzerinde barındıran daha düşük dereceden herhangi bir fonksiyon kullanılabilir. $\phi_0 = 0$ olması demek temel sınır şartlarının hepsinin homojen olması demektir. Buna göre de ϕ_j yaklaşım fonksiyonlarının aşağıda ifade edilen şartları sağlaması gerekmektedir.

1. Verilen problemin temel sınır şartlarının homojen kısmını sağlamalıdır.
2. Herhangi bir N değeri için $\{\phi_j\}_{j=1}^N$ kümesi lineer bağımsız olmalıdır.
3. $\{\phi_j\}$ yaklaşım fonksiyonları tam olmalıdır. ϕ_j yaklaşım fonksiyonları cebirsel polinomlar ise, tamlık $\{\phi_j\}$ yaklaşım fonksiyonları kümesinin izin verilen en düşük mertebeden, istenilen en yüksek mertebeye kadar olan tüm terimleri bünyesinde bulundurmasıdır.

1. 3. Ağırlıklı Kalan Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemine ağırlıklı kalan yaklaşımı denir. Bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı kalan yöntemi adı verilir. Her denklemin ağırlıklı integral formu oluşturulabileceği için her denkleme uygulanabilir. Bundan dolayı da varyasyonel yöntemlerden daha geniş bir aralıktaki problemlere uygulanabilirler. Ağırlıklı kalan yöntemleri her denklemin ağırlık integral formunu oluşturmakta kullanılabilir. Burada dikkat edilmesi gereken durum ise ağırlıklı integral form, problemin sınır şartlarından hiçbirini içermediğinden, ağırlık fonksiyonları yaklaşık çözümün hem doğal hem de temel sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilmelidir. Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade etmek için Ω bölgesinde

$$A(u) = f \tag{1. 2}$$

operatör denklemini göz önüne alalım. Burada A lineer veya lineer olmayan operatör, u bağımlı değişken ve f bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Buradaki u çözümüne, bir yaklaşım olarak

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (1.3)$$

kullanıldı. (1.2) denkleminde (1.3) ile verilen u_N yaklaşık çözümü yazılırsa $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon büyük çoğunlukla f' ye eşit değildir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (1.4)$$

yaklaşımın kalanı yani rezidüsü denir. Burada R kalan fonksiyonu c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x,y) R(x,y, c_j) dx dy = 0, \quad (i = 0,1,2, \dots, N) \quad (1.5)$$

ağırlıklı kalan integralindeki R kalanı sıfır olacak şekilde seçilir. Burada Ω iki boyutlu bir bölge ve ψ_i ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonlarıdır. (1.5) integralinin hesaplanması ile elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinden bazıları Galerkin, Petrov- Galerkin, Kollokasyon ve Subdomain' dir.

1.3.1. Galerkin yöntemi

Bu yöntemde ψ_i ağırlık fonksiyonları ϕ_i yaklaşım fonksiyonları ile aynı seçilir. Galerkin yönteminin sayısal denklemleri

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} c_j = F_i \quad (1.6)$$

şeklindedir. Burada

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i A(\phi_j) dx dy \quad (1.7)$$

$$F_i = \int_{\Omega} \phi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (1.8)$$

dir [1].

1. 3. 2. Petrov- Galerkin yöntemi

$\psi_i \neq \phi_i$ alınır bu yöntem ağırlıklı kalan yöntemlerinden Petrov- Galerkin yöntemi olarak bilinir. A lineer bir operatör olmak üzere Ω bölgesinde (1. 5) yaklaşımı

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_{\Omega} \psi_i A(\phi_j) dx dy \right] c_j = \int_{\Omega} \psi_i [f - A(\phi_0)] dx dy \quad (1.9)$$

veya

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} c_j = F_i \quad (1.10)$$

şeklinde basit bir biçimde yazılabilir [1]. Bu yöntemle elde edilen $[A_{i,j}]$ katsayılar matrisi simetrik değildir.

1. 3. 3. Kollokasyon yöntemi

Kollokasyon yönteminde Ω bölgesinden seçilen N adet $X^i \equiv (x^i, y^i)$ kollokasyon noktasında kalanın sıfır olması istenir. Yani

$$R(x^i, y^i, c_j) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.11)$$

olmalıdır. X^i kollokasyon noktaları denklem sistemi iyi şartlı olacak şekilde gerekir. Bu yöntemde $\psi_i = \delta(X - X^i)$ alınır ve (1. 5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(X - X^i) R(X, c_j) dx dy = 0 \quad (1.12)$$

ve

$$R(X^i, c_j) = 0 \quad (1.13)$$

elde edilir. Burada $\delta(x)$ fonksiyonuna Dirac delta fonksiyonu denir ve

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - \xi) dx dy = f(\xi) \quad (1. 14)$$

şeklinde tanımlanır [1].

1. 3. 4. Subdomain yöntemi

Bu yöntemde ψ_i ağırlık fonksiyonları

$$\psi_i = \begin{cases} 1 & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (1. 15)$$

şeklinde seçilir. Alt aralıkların sayısı c_j parametrelerinin sayısına eşit olacak şekilde belirlenmelidir. ψ_i ağırlık fonksiyonları (1. 5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\int_{\Omega} R(x, y, c_i) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (1. 16)$$

bulunur. Bu denklem sisteminin çözülmesi ile c_i parametreleri elde edilir [1].

1. 4. Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar ifadesi ilk olarak Clough tarafından 1960 yılında kullanılmıştır. Son yıllarda dijital bilgisayarlardaki gelişmeler, sonlu eleman yönteminin çok hızlı bir şekilde gelişmesine yol açmış ve her geçen gün uygulamalı matematikçiler, mühendisler ve fizikçiler bu yöntem ile ilgili çok sayıda çalışmalar ortaya koymuşlardır.

Sonlu elemanlar yöntemleri; yapı mühendisliği, uzay bilimleri, akışkanlar mekaniği, nükleer enerji mühendisliği, dinamik ve ısı iletim problemleri ve diğer mühendislik alanlarındaki problemler başarılı bir şekilde uygulanır. Sonlu elemanlar yönteminin diğer yöntemlere göre avantajları aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

- 1) Düzensiz şeklindeki yapıları ve diğer yöntemlerle modellenemeyen farklı karmaşık bölgeleri oldukça kolay bir şekilde modelleyebilmesi.
- 2) Eleman denklemleri farklı farklı oluşturulduğundan farklı malzemelerden oluşan yapıları modelleyebilmesi.

- 3) Çok farklı sınır şartları ile birlikte kullanılabilmesi. Sınır koşullarının değişmesi durumunda sonlu eleman modelinin değişmemesi.
- 4) Gerektiğinde elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi.
- 5) Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi.
- 6) Bilgisayar programlama diline uygun olması.

Sonlu elemanlar yönteminin yukarıda sayılan avantajlarının yanında bazı dezavantajları da vardır. Bunlar;

- 1) Çözüm bölgesinin alt bölgelere ayırma işleminin belirli bir tecrübe istemesi.
- 2) Süreklilik şartlarının alt bölgelere uygulanmasında bazı zorluklarla karşılaşılması.
- 3) Bilgisayar programında veri girişi sırasında yapılan hatalar şeklinde sıralanabilir.

Bir sonlu eleman yönteminin her hangi bir probleme uygulanmasında genellikle aşağıdaki basamaklar izlenir:

- 1) Problemin çözüm bölgesinin sonlu sayıda alt bölge veya aralığa ayrıştırılması.
- 2) Çözüm bölgesinde bir aralık üzerinde verilen bütün tipik elemanlar için eleman denklemleri türetilir.
- 3) Verilen problemin denklemlerini elde etmek için çözüm bölgesinde ki tüm aralıklar birleştirilir.
- 4) Problemin sınır koşulları uygulanır.
- 5) Elde edilen birleştirilmiş denklem sistemleri çözülür.
- 6) Ortaya çıkan sonuçlar değerlendirilir.

Sonlu eleman yöntemlerinin integral formülasyonları genelde varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olarak iki farklı yoldan bulunur [2].

1. 5. Spline Fonksiyonlar

Yaklaşık yöntemler temel bilimlerin birçok alanında ve mühendislikte olduğu gibi matematikte de yaygın olarak kullanılmaktadır. İki tip yaklaşım probleminden söz edilebilir. Birinci tip problemlerde bu yöntemler, eldeki mevcut verileri kullanarak bilinmeyen fonksiyonları yaklaşık olarak bulmak için kullanılır. İkinci tip yaklaşımlar ise çeşitli fiziksel problemler için bir operatör denklem tarafından temsil edilen matematiksel modellemelerdir. Bu problemler, özdeğer ve özvektör problemleri, integro- diferansiyel denklemler, adi ve kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleridir. İki problem tipinde de, en iyi çözüm için iki önemli sorun ile karşılaşılabilir;

- 1) Yaklaşım şartlarını yerine getirecek uygun fonksiyonların sınıfını seçmek.
- 2) Yaklaşımın etkili olması amacıyla iyi bir yöntem seçmek.

Spline fonksiyonları ilk olarak “ Schoenberg” tarafından 1946 yılında ortaya atılmış, 1960 yılına kadar yavaş bir gelişim içinde olmuş ama son dönemde hızlı bir gelişim göstermiştir. Bundaki en önemli etken yapısal özellikleri, etkili yaklaşım gücü ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalardaki kolaylıktır. Depolanma, işlenmesi ve kullanılması kolay olan spline fonksiyonlar dijital bilgisayarlardaki gelişmeler ile daha önemli hale gelmiştir. Bilgisayarla hesaplamalardan dolayı interpolasyon, veri uydurma, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde, eğri ve yüzey yaklaşımında ve karmaşık geometrik nesnelerin matematiksel modellemesinde yaygın bir biçimde kullanılmaktadır [3].

Bu yaklaşım yöntemleri içinde polinom yaklaşımları önemli bir yer tutmakta fakat polinom yaklaşımı her zaman istenilen hassasiyette bir sonuç vermeyebilir. Genelde köşeleri keskin olan, yüksek mertebeden türevlerde hızlı değişim gösteren fonksiyonlara ve bazen bazı düzgün fonksiyonlara yüksek dereceden polinomlar ile istenilen hassasiyette bir yaklaşım yapılamayabilir. Nokta sayısı arttığında yaklaşımda

kullanılacak polinomun derecesi artar, bu da çözümün ıraksaması anlamına gelir. Bu olumlu görünse de bazı hesaplama hatalarına sebep olabilir. İstenilen fonksiyonun belli aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise de fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak bizi uygun sonuçlara götürmez. Bundan dolayı yüksek dereceden olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur. Buradan da anlaşılacağı gibi Spline interpolasyon yaklaşımı aslında parçalı polinom yaklaşımı demektir. Yani verilen çözüm aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımıyla yaklaşımlar yapılır.

Spline fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- 1) Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır.
- 2) Spline fonksiyonlar düzgün fonksiyonlardır.
- 3) Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır.
- 4) Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanırlar.
- 5) Spline fonksiyonlar dijital bilgisayarlarda işleme, hesaplama ve depolama açısından uygun fonksiyonlardır.
- 6) Nümerik analizde ve yaklaşım teorisinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrisler uygun işaretleri ve determinant özellikleri bakımından kolay hesaplanabilirler.
- 7) Düşük dereceli spline fonksiyonlar oldukça esnektir ve polinomlardaki gibi keskin salınımlar sergilemezler.
- 8) Yaklaşım işlemi sonucunda elde edilen yapılar polinomların yapıları ile de ilgilidir.
- 9) Spline fonksiyonlar yardımıyla sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir.
- 10) Spline fonksiyonlar ve türevleri aynı anda yaklaşık olarak hesaplanır [4].

1.6. B- spline Fonksiyonlar

Spline fonksiyonların hesaplanması ile lineer veya lineer olmayan sistemler elde edilir. Bu sistemler istenilen parametrelerin hesaplanmasına izin vermeyecek şekilde iyi şartlı olmayabilir. Spline yaklaşımları elde etme sürecinde sayısal kararsızlıklarla karşılaşılabilir. İşte bu tür zorluklar “B- spline” olarak adlandırılan farklı bir spline fonksiyon sınıfı ile aşılabılır. İşte bu tür fonksiyonlara spline fonksiyon denmesinin sebebi, bütün spline fonksiyonlar kümesi için bir baz oluşturmalarındandır. B- spline fonksiyonlar sayısal hesaplamalar için oldukça faydalıdır.

1. 6. 1. Linear B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığında düzgün bir parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $L_m(x)$ lineer B- spline fonksiyonlar $m = 0(1)N$ noktaları için

$$L_m = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x) & , [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1. 17)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Lineer B- spline fonksiyon ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığı dışında ki değeri sıfırdır. Şekil 1. 1’ de görüldüğü üzere her bir L_m B- spline fonksiyonu $[x_{m-1}, x_{m+1}]$ aralığında arda arda gelen iki elemanı örter ve bundan dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman L_m, L_{m+1} gibi iki lineer B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

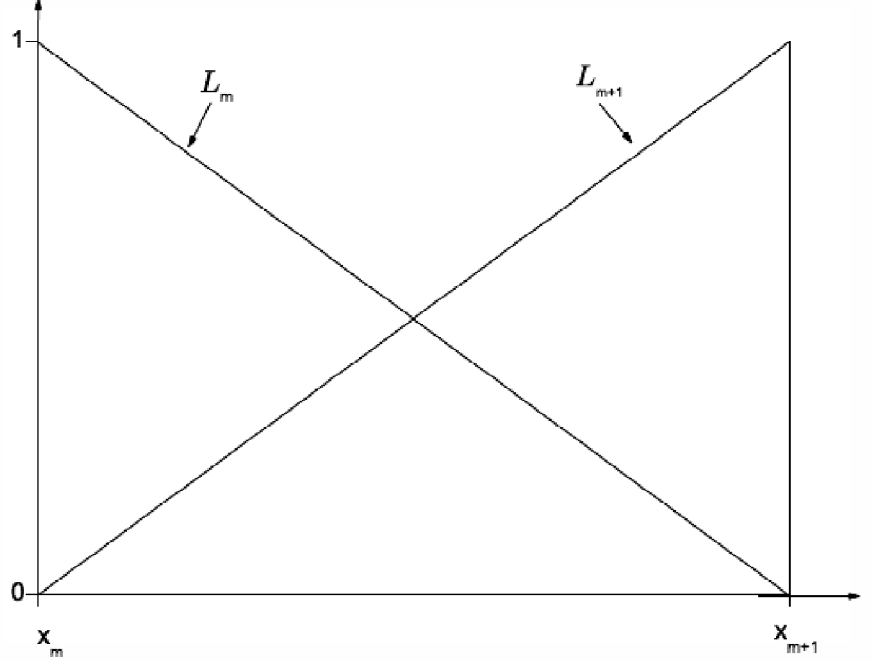
$$\xi, h = x - x_m, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1. 18)$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Buradan da lineer B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ türünden

$$L_m = 1 - \xi,$$

$$L_{m+1} = \xi. \quad (1. 19)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 1. 1. Linear B- spline şekil fonksiyonları

1. 6. 2. Kuadratik B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuadratik B- spline fonksiyonlar $m = -1(1)N$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 + 3(x_m - x)^2 & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+2} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^2 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^2 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1. 20)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuadratik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevi $[x_{m-1}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 2' de her bir $\phi_m(x)$ kuadratik B- spline fonksiyonu bu aralıkta ardışık üç elamanı örtmekte ve bundan dolayı her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$ gibi üç kuadratik B- spline fonksiyon

tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve birinci mertebeden türevinin düğüm noktalarındaki değerleri aşağıdaki tabloda gösterildi. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

Tablo 1. 1. $\phi_m(x)$ ve $\phi'_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	1	0
$h\phi'_m$	0	2	-2	0

(1. 18) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0,1]$ aralığına dönüşür. Böylelikle kuadratik B- spline fonksiyonlar $[0,1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\phi_{m-1} = (1 - \xi)^2,$$

$$\phi_m = 1 + 2\xi - 2\xi^2,$$

$$\phi_m = \xi^2. \quad (1. 21)$$

şeklinde bulunur. (1. 21) kuadratik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktalarında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre birinci mertebeden türevi δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + \delta_m,$$

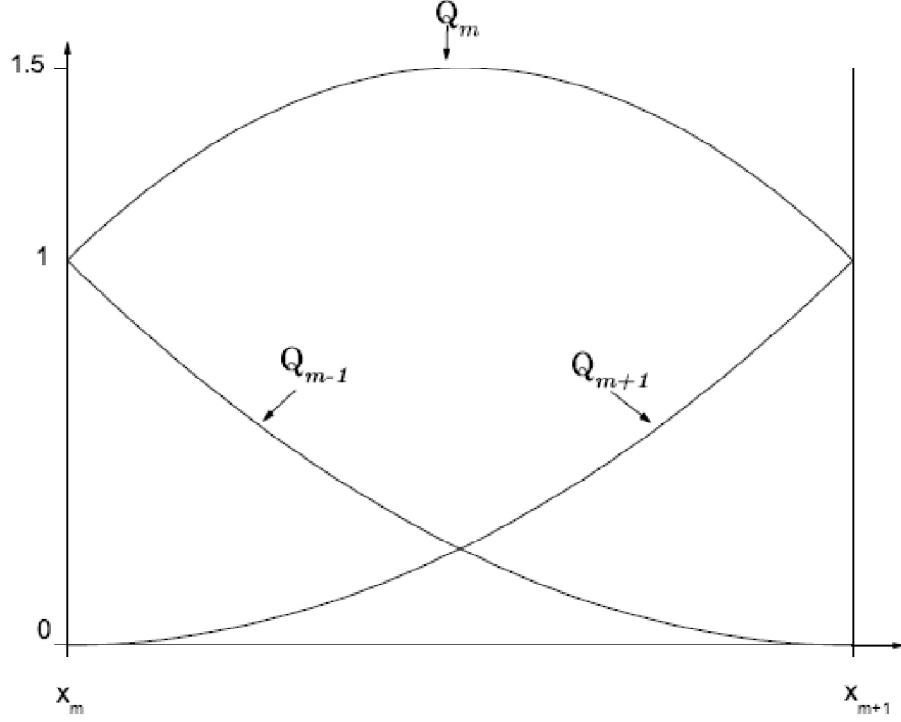
$$U'_m = \frac{2}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_m). \quad (1. 22)$$

biçiminde yazılabilir.

1. 6. 3. Kübik B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kübik B- spline fonksiyonlar $m = -1(1)N + 1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m-2})^3 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & , [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.23)$$



Şekil 1. 2. Kuadratik B- spline şekil fonksiyonları

şeklinde ifade edilir [3]. $\{\phi_{-1}(x), \phi_0(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kübik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 3' te görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ kübik B- spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+2}]$ aralığında ardışık dört elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığındaki sonlu eleman $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ gibi dört kübik B-spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve ikinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktadaki değerleri Tablo 1. 2 ile verildi. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1. 18) lokal koordinat

Tablo 1. 2. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$ ve $\phi''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}
ϕ_m	0	1	4	1	0
$h\phi'_m$	0	3	0	-3	0
$h^2\phi''_m$	0	6	-12	6	0

dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ kübik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\phi_{m-1} = (1 - \xi)^3,$$

$$\phi_m = 1 + 3(1 - \xi) + 3(1 - \xi)^2 - 3(1 - \xi)^3,$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 3\xi + 3\xi^2 - 3\xi^3,$$

$$\phi_{m+2} = \xi^3. \quad (1. 24)$$

şeklinde bulunur. (1. 24) kübik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre ikinci mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1},$$

$$U'_m = \frac{3}{h}(-\delta_{m-1} + \delta_{m+1}),$$

$$U''_m = \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}). \quad (1. 25)$$

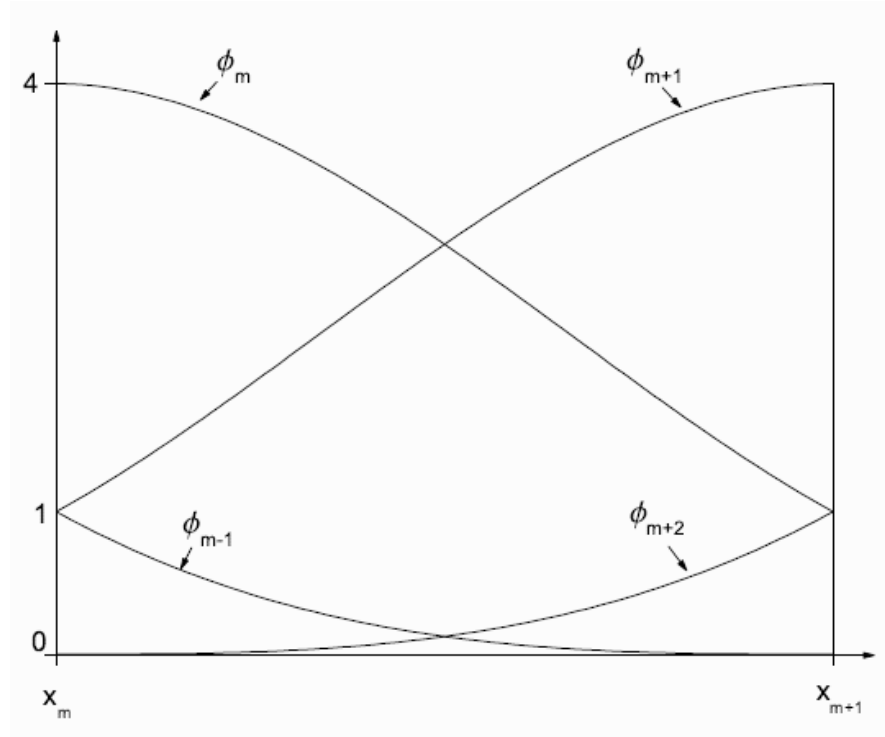
biçiminde yazılabilir.

1. 6. 4. Kuartik B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuartik B- spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 1$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x - x_{m-2})^4 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-2})^4 - 5(x - x_{m-1})^4 + 10(x - x_m)^4 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4 & , [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.26)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$



Şekil 1. 3. Kübik B- spline şekil fonksiyonları

aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuartik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 4' de görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ kuartik B- spline fonksiyonu $[x_{m-2}, x_{m+3}]$ aralığında ardışık beş elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ gibi beş kuartik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve üçüncü mertebeye kadar olan $\phi'_m(x), \phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1. 3' te gösterilmiştir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman(1. 18) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür.

Tablo 1. 3. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$ ve $\phi'''_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	11	11	1	0
$h\phi'_m$	0	4	12	-12	-4	0
$h^2\phi''_m$	0	12	-12	-12	12	0
$h^3\phi'''_m$	0	24	-72	72	-24	0

Böylece kuartik B- spline fonksiyonlar bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığını örten ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} kuartik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\phi_{m-2} = 1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4,$$

$$\phi_{m-1} = 11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - \xi^4,$$

$$\phi_m = 11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + \xi^4,$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - \xi^4,$$

$$\phi_{m+2} = \xi^4. \quad (1. 27)$$

şeklinde bulunur. (1. 27) kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre üçüncü mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-2} + 11\delta_{m-1} + 11\delta_m + \delta_{m+1},$$

$$U'_m = \frac{4}{h}(-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}),$$

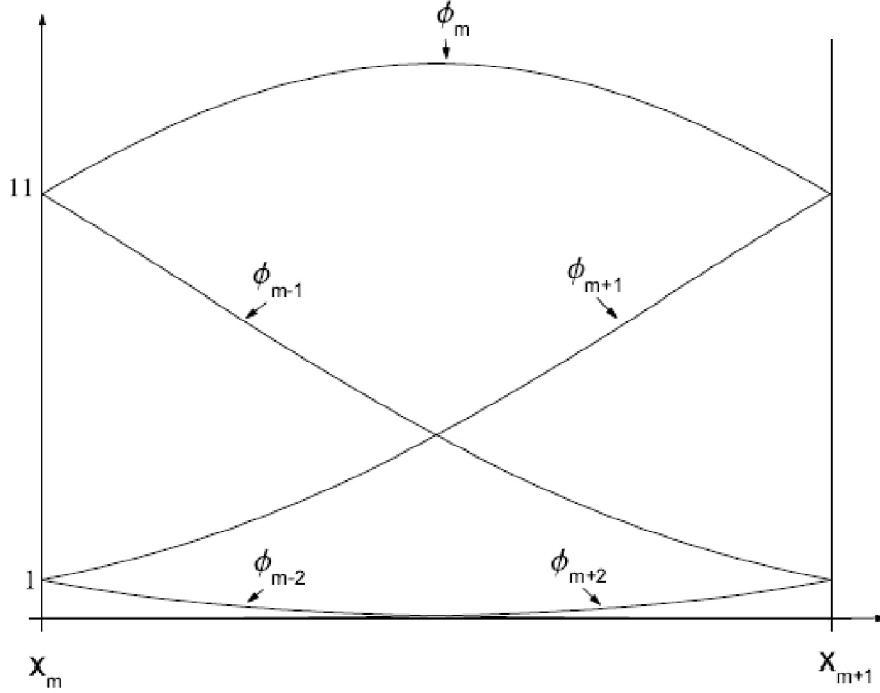
$$U''_m = \frac{12}{h^2}(\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}),$$

$$U'''_m = \frac{24}{h^3}(-\delta_{m-2} + 3\delta_{m-1} - 3\delta_m + \delta_{m+1}). \quad (1. 28)$$

biçiminde yazılabilir.

1. 6. 5. Kuintik B- spline fonksiyonlar

[a, b] aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ kuintik B- spline fonksiyonlar $m = -2(1)N + 2$ noktaları için;



Şekil 1. 4. Kuartik B- spline şekil fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & , [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 - 20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & , [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1. 29)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{\phi_{-2}(x), \phi_{-1}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Kuintik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 5' te görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ kuintik B- spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+3}]$ aralığında

ardışık altı elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman ϕ_{m-2} , ϕ_{m-1} , ϕ_m , ϕ_{m+1} , ϕ_{m+2} , ϕ_{m+3} gibi altı kuintik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve dördüncü mertebeye kadar olan $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi_m^{(iv)}(x)$ türevlerinin düğüm noktadaki değerleri Tablo 1. 4' de verilmiştir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1. 18) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece kuintik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned}
\phi_{m-2} &= 1 - 5\xi + 10\xi^2 - 10\xi^3 + 5\xi^4 - \xi^5, \\
\phi_{m-1} &= 26 - 50\xi + 20\xi^2 + 20\xi^3 - 20\xi^4 + 5\xi^5, \\
\phi_m &= 66 - 60\xi^2 + 30\xi^4 - 10\xi^5, \\
\phi_{m+1} &= 26 + 50\xi + 20\xi^2 - 20\xi^3 - 20\xi^4 + 10\xi^5, \\
\phi_{m+2} &= 1 + 5\xi + 10\xi^2 + 10\xi^3 + 5\xi^4 - 5\xi^5, \\
\phi_{m+3} &= \xi^5.
\end{aligned} \tag{1. 30}$$

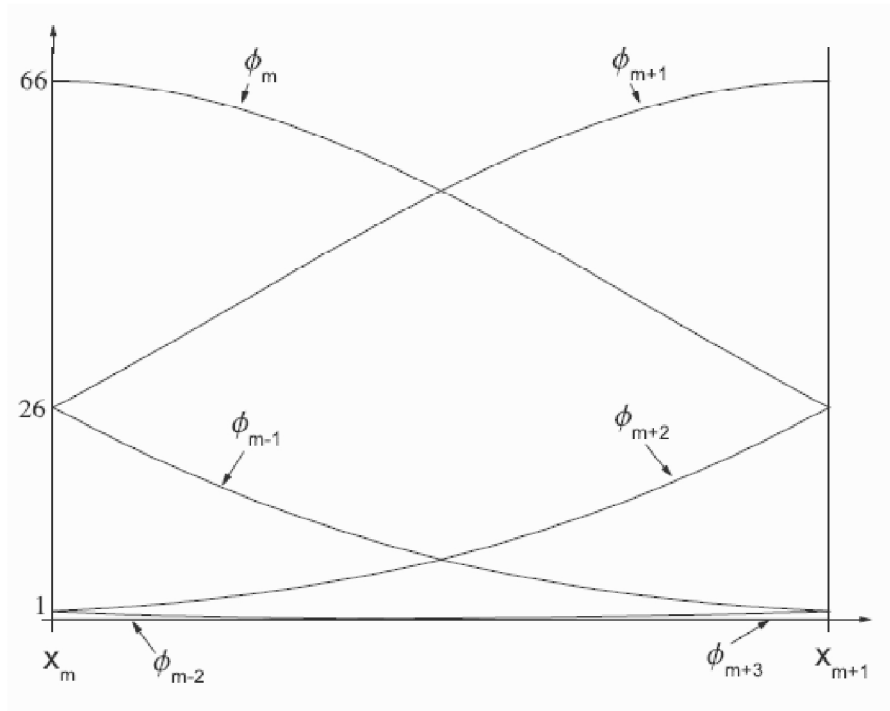
şeklinde bulunur. (1. 30) kuintik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre dördüncü mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$\begin{aligned}
U_N(x_m, t) &= U_m = \delta_{m-2} + 26\delta_{m-1} + 66\delta_m + 26\delta_{m+1} + \delta_{m+2}, \\
U'_m &= \frac{5}{h}(-\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U''_m &= \frac{20}{h^2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U'''_m &= \frac{60}{h^3}(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \\
U_m^{(iv)} &= \frac{120}{h^4}(\delta_{m-2} - 4\delta_{m-1} + 6\delta_m - 4\delta_{m+1} + \delta_{m+2}).
\end{aligned} \tag{1. 31}$$

biçiminde bulunur.

Tablo 1. 4. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$ ve $\phi_m^{(iv)}(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	26	66	26	1	0
$h\phi'_m$	0	5	50	0	-50	-5	0
$h^2\phi''_m$	0	20	40	-120	40	20	0
$h^3\phi'''_m$	0	60	-120	0	120	-60	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	120	-480	720	-480	120	0



Şekil 1. 5. Kuintik B- spline şekil fonksiyonları

1. 6. 6. Sektik B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ sektik B- spline fonksiyonlar $m = -3(1)N + 2$ noktaları için;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^6} \begin{cases} (x - x_{m-3})^6 & , [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^6 - 7(x - x_{m-2})^6 + 21(x - x_{m-1})^6 - 35(x - x_m)^6 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 + 21(x - x_{m+2})^6 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m+4})^6 - 7(x - x_{m+3})^6 & , [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x - x_{m+4})^6 & , [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1.32)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_N(x), \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Sektik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 6' da görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ sektik B- spline fonksiyonu $[x_{m-3}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık yedi elamanı örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$ ve ϕ_{m+3} gibi yedi sektik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve beşinci mertebeye kadar olan $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi^{(iv)}_m(x)$ ve $\phi^{(v)}_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1. 5' te verilmiştir. Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1. 18) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece sektik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\begin{aligned} \phi_{m-3} &= 1 - 6\xi + 15\xi^2 - 20\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 + \xi^6, \\ \phi_{m-2} &= 57 - 150\xi + 135\xi^2 - 20\xi^3 - 45\xi^4 + 30\xi^5 - 6\xi^6, \\ \phi_{m-1} &= 302 - 240\xi - 150\xi^2 + 160\xi^3 + 30\xi^4 - 60\xi^5 + 15\xi^6, \\ \phi_m &= 302 + 240\xi - 150\xi^2 - 160\xi^3 + 30\xi^4 + 60\xi^5 - 20\xi^6, \\ \phi_{m+1} &= 57 + 150\xi + 135\xi^2 + 20\xi^3 - 45\xi^4 - 30\xi^5 + 15\xi^6, \\ \phi_{m+2} &= 1 + 6\xi + 15\xi^2 + 20\xi^3 + 15\xi^4 + 6\xi^5 - 6\xi^6, \\ \phi_{m+3} &= \xi^6. \end{aligned} \quad (1.33)$$

şeklinde bulunur. (1. 18) sektik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm

Tablo 1. 5. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi_m^{(iv)}(x)$ ve $\phi_m^{(v)}(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+3}
ϕ_m	0	1	57	302	302	57	1	0
$h\phi'_m$	0	6	150	240	-240	-150	-6	0
$h^2\phi''_m$	0	30	270	-300	-300	270	30	0
$h^3\phi'''_m$	0	120	120	-960	960	-120	-120	0
$h^4\phi_m^{(iv)}$	0	360	-1080	720	720	-1080	360	0
$h^5\phi_m^{(v)}$	0	720	-3600	7200	7200	3600	-720	0

noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre beşinci mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = U_m = \delta_{m-3} + 57\delta_{m-2} + 302\delta_{m-1} + 302\delta_m + 57\delta_{m+1} + \delta_{m+2},$$

$$U'_m = \frac{6}{h}(-\delta_{m-3} - 25\delta_{m-2} + 10 - 40\delta_{m-1} + 40\delta_m + 25\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U''_m = \frac{30}{h^2}(\delta_{m-3} + 9\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} - 10\delta_m + 9\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U'''_m = \frac{120}{h^3}(-\delta_{m-3} - \delta_{m-2} + 8\delta_{m-1} - 8\delta_m + \delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

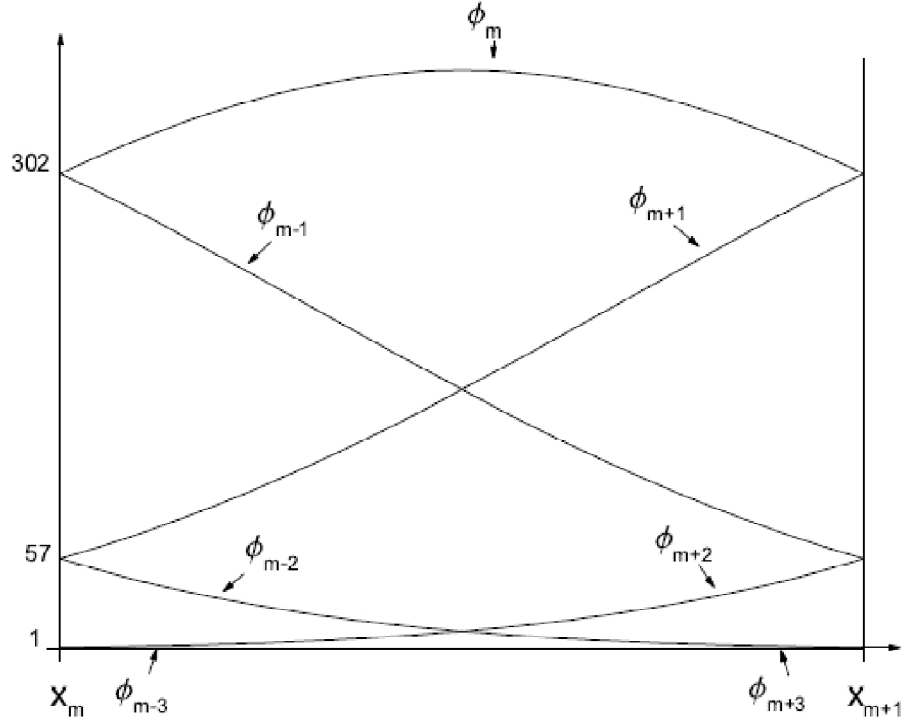
$$U_m^{(iv)} = \frac{360}{h^4}(\delta_{m-3} - 3\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + 2\delta_m - 3\delta_{m+1} + \delta_{m+2}),$$

$$U_m^{(v)} = \frac{720}{h^5}(-\delta_{m-3} + 5\delta_{m-2} - 10\delta_{m-1} + 10\delta_m - 5\delta_{m+1} + \delta_{m+2}). \quad (1.34)$$

biçiminde ifade edilebilir.

1. 6. 7. Septik B- spline fonksiyonlar

$[a, b]$ aralığının bir düzgün parçalanışı $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ olsun. $h = x_{m+1} - x_m$ olmak üzere x_m düğüm noktalarında $\phi_m(x)$ septik B- spline fonksiyonlar $m = -3(1)N + 3$ noktaları için;



Şekil 1. 6. Septik B- spline şekil fonksiyonları

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^7} \begin{cases} (x - x_{m-4})^7 & , [x_{m-4}, x_{m-3}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 & , [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 & , [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-4})^7 - 8(x - x_{m-3})^7 + 28(x - x_{m-2})^7 - 56(x - x_{m-1})^7 & , [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 - 56(x_{m+1} - x)^7 & , [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 + 28(x_{m+2} - x)^7 & , [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+4} - x)^7 - 8(x_{m+3} - x)^7 & , [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+4} - x)^7 & , [x_{m+3}, x_{m+4}] \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (1. 35)$$

şeklinde tanımlanır [3]. $\{\phi_{-3}(x), \phi_{-2}(x), \dots, \phi_{N+1}(x), \phi_{N+2}(x), \phi_{N+3}(x)\}$ kümesi $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturur. Septik B- spline $\phi_m(x)$ fonksiyonu ve türevleri $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığı dışında sıfırdır. Şekil 1. 7' de görüldüğü üzere her bir $\phi_m(x)$ septik B- spline fonksiyonu $[x_{m-4}, x_{m+4}]$ aralığında ardışık sekiz elamani örtmekte ve dolayısıyla her bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman $\phi_{m-3}, \phi_{m-2}, \phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}, \phi_{m+3}$ ve ϕ_{m+4} gibi sekiz septik B- spline fonksiyonu tarafından örtülmektedir [2]. $\phi_m(x)$ ve altıncı mertebeye kadar olan $\phi'_m(x), \phi''_m(x), \phi'''_m(x), \phi^{(iv)}_m(x), \phi^{(v)}_m(x)$ ve $\phi^{(vi)}_m(x)$ türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri Tablo 1. 6' da gösterilmiştir.

Tablo 1. 6. $\phi_m(x)$, $\phi'_m(x)$, $\phi''_m(x)$, $\phi'''_m(x)$, $\phi^{(iv)}_m(x)$, $\phi^{(v)}_m(x)$ ve $\phi^{(vi)}_m(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{m-4}	x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	x_{m+3}	x_{m+4}
ϕ_m	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$h\phi'_m$	0	-7	-392	-1715	0	1715	392	7	0
$h^2\phi''_m$	0	42	1008	630	-3360	630	1008	42	0
$h^3\phi'''_m$	0	-210	-1680	3990	0	-3990	1680	210	0
$h^4\phi^{(iv)}_m$	0	840	0	-7560	13440	-7560	0	840	0
$h^5\phi^{(v)}_m$	0	-2520	10080	-12600	0	12600	-10080	2520	0
$h^6\phi^{(vi)}_m$	0	5040	-30240	75600	-100800	75600	-30240	5040	0

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ sonlu eleman (1. 18) lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, 1]$ aralığına dönüşür. Böylece septik B- spline fonksiyonlar $[0, 1]$ aralığında ξ cinsinden

$$\phi_{m-3} = 1 - 7\xi + 21\xi^2 - 35\xi^3 + 35\xi^4 - 21\xi^5 + 7\xi^6 - \xi^7,$$

$$\phi_{m-2} = 120 - 392\xi + 504\xi^2 - 280\xi^3 + 84\xi^5 - 42\xi^6 + 7\xi^7,$$

$$\phi_{m-1} = 1191 - 1715\xi + 315\xi^2 + 665\xi^3 - 315\xi^4 - 105\xi^5 + 105\xi^6 - 21\xi^7,$$

$$\phi_m = 2416 - 1680\xi^2 + 560\xi^4 - 140\xi^6 + 35\xi^7,$$

$$\phi_{m+1} = 1191 + 1715\xi + 315\xi^2 - 665\xi^3 - 315\xi^4 + 105\xi^5 + 105\xi^6 - 35\xi^7,$$

$$\phi_{m+2} = 120 + 392\xi + 504\xi^2 + 280\xi^3 - 84\xi^5 - 42\xi^6 + 21\xi^7,$$

$$\phi_{m+3} = 1 + 7\xi + 21\xi^2 + 35\xi^3 + 35\xi^4 + 21\xi^5 + 7\xi^6 - 7\xi^7,$$

$$\phi_{m+3} = \xi^7. \tag{1. 36}$$

şeklinde bulunur. (1. 36) septik B- spline fonksiyonlar kullanılarak x_m düğüm noktasında U_N yaklaşık çözümü ve x' e göre altıncı mertebeye kadar olan türevleri δ_m eleman parametreleri cinsinden

$$U_N(x_m, t) = \delta_{m-3} + 120\delta_{m-2} + 1191\delta_{m-1} + 2416\delta_m + 1191\delta_{m+1} + 120\delta_{m+2} + \delta_{m+3},$$

$$U'_m = \frac{7}{h} (-\delta_{m-3} - 56\delta_{m-2} - 245\delta_{m-1} + 245\delta_{m+1} + 56\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

$$U''_m = \frac{42}{h^2} (\delta_{m-3} + 24\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 80\delta_m + 15\delta_{m+1} + 24\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

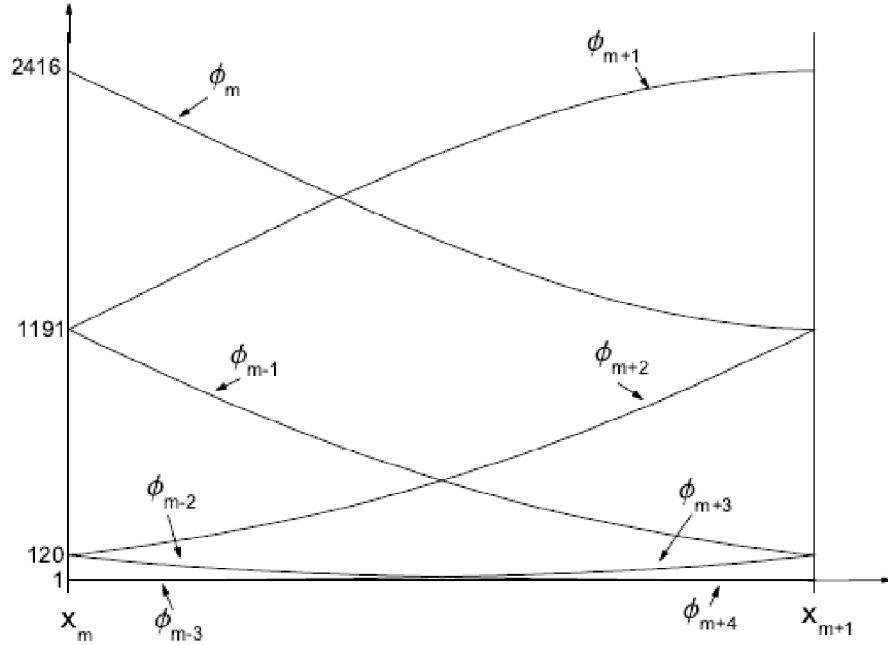
$$U'''_m = \frac{210}{h^3} (-\delta_{m-3} - 8\delta_{m-2} + 19\delta_{m-1} - 19\delta_{m+1} + 8\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

$$U_m^{(iv)} = \frac{840}{h^4} (\delta_{m-3} - 9\delta_{m-1} + 16\delta_m - 9\delta_{m+1} + \delta_{m+3}),$$

$$U_m^{(v)} = \frac{2520}{h^5} (-\delta_{m-3} + 4\delta_{m-2} - 5\delta_{m-1} + 5\delta_{m+1} - 4\delta_{m+2} + \delta_{m+3}),$$

$$U_m^{(vi)} = \frac{5040}{h^6} (\delta_{m-3} - 6\delta_{m-2} + 15\delta_{m-1} - 20\delta_m + 15\delta_{m+1} - 6\delta_{m+2} + \delta_{m+3}). \quad (1.37)$$

biçiminde gösterilir.



Şekil 1. 7. Septik B- spline şekil fonksiyonları

1. 7. Korteweg- de Vries (KdV) Denklemi

Sığ su da doğrusal olmayan dalgalar birçok araştırmacı için büyük bir ilgi oluşturmaktadır. Korteweg- de Vries (KdV) denklemi doğrusal olmayan dağıtıcı

dalgaların çalışmasında ortaya çıkan literatürde iyi bilinen bir denklemdir. KdV denklemini dar bir kanalda yüzey suyu dalgaların tek yönlü yayılma yaptıklarını gözlemleyen Korteweg ile de Vries tarafından 1895 yılında elde edilmiştir. Bu lineer olmayan dalgaların matematiksel modellemeleri Korteweg- de Vries tarafından yapılmıştır. Bu denklem fizik, matematik ve mühendislik alanlarında pek çok fiziksel olayı tanımlamak için kullanılmaktadır. Denklem analitik çözümleri sınırlı sayıda farklı başlangıç değeri için elde edilebildiğinden farklı başlangıç değerlerini kullanan sayısal yöntemlere ihtiyaç vardır. Bundan dolayı birçok araştırmacı KdV denklemini çözmek için çeşitli sayısal yöntemler kullanmışlardır. Genel olarak, KdV denkleminin sayısal çözümü sonlu fark ya da sonlu elemanlar yöntemi ile yapılmaktadır. Ayrıca, sayısal çözümler spektral yöntem ve ısı dengesi integral yöntemi kullanılarak da elde edilmiştir. KdV denkleminin sayısal çözümleri de birçok matematikçi ve fizikçi tarafından incelenmiştir. A. C. Vliengenhart [5] K. Goda [6] I. S. Greig ve J. L. Morris sonlu fark yöntemi [7] M. E. Alexander ve J. L. Morris [8] J. M. Sanz Serna ve I. Christie [9] S. W. Schoombie [10] G. A. Gardner ve A. H. A. Ali [11] ise KdV denklemini sonlu elemanlar yöntemi ile çözmüşlerdir. KdV denkleminin analitik çözümü ile ilgili özellikleri Zabusky Kruskal [12] Lax [13] ve Gardner [14] tarafından incelenmiştir. Ayrıca tsunami olarak bilinen dev okyanus dalgaları ve okyanuslarda sıcaklık farkından oluşan gemilerin tahrip olmasına neden olan dev dalgalar da KdV denklemini ile modellenabilir [15].

1. 8. Burgers' Denklemi

Burgers' denklemi literatürde bilinen önemli bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem keyfi başlangıç ve sınır koşulları için analitik çözümü bulunabilen bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu tip denklemler ilk olarak Bateman [16] tarafından ifade edilmiş ve denklemin kararlı durum çözümleri de Bateman tarafından gösterilmiştir. Bu denklem Burgers' tarafından geliştirmiştir [17]. Burgers' denklemi konveksiyon, difüzyon ve ters etkilerin etkileşime neden olduğu bir kanalda ki sıvının özelliklerini belirlemek için kullanılmıştır [17, 18]. Burgers' denkleminin yapısı tek boyutlu gerilme süresi olmadan Navier Stokes [19] denkleminde benzerdir. Bu akışkanlar dinamiği sürekli dalgalar için doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerle modellenmektedir. Bu model, tek boyutlu ses, şok, yapışkan bir ortam içindeki

dalgalar, sonlu elektrik iletkenliği, turbulanslı sıvı matematiksel modelleme ile bir ortam içinde yapışkan esnek tüpler, manyeto hidrodinamik dalgalar ve sürekli stokastik süreçler de dâhil olmak üzere birçok fiziksel problemlerden ortaya çıkar [20]. Son yıllarda Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini etkili bir şekilde hesaplayabilmek için dar ve geniş kinematik viskozite değerleri alınmıştır. Burgers' denkleminin sayısal çözümlerini hesaplamak için çeşitli sayısal yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemler; otomatik farklılaşma yöntemi [20] sonlu elemanlar yöntemi [21,22] spektral düzenleme yöntemi [23] sinc diferansiyel quadrature yöntemi [24] polinom esaslı diferansiyel quadrature yöntemi [25] kübik B- spline diferansiyel quadrature yöntemi [26] sonlu fark yöntemi [27, 28] çarpanlarına ayrılmış köşegen Padé yaklaşımı [29] polinom olmayan spline yaklaşımı [30] Hopf- Cole dönüşümü [31,32] en küçük kareler yöntemi [33] varyasyon yöntemi [34] dir. Bu denklemin farklı çözümleri Benton ve Platzman [35] tarafından sınıflandırılmıştır.

1. 9. Korteweg- de Vries Burgers' (KdVB) Denklemi

Lineer olmayan dağılımlı dalga denklemleri olarak bilinen denklem sınıfları üzerinde son zamanlarda özel bir ilgi oluşmuştur. Bu denklemler hem dağılımlı hem de lineer olmayan özelliktedir. Dolayısıyla çok farklı problemler için dağılımlı dalga denklemleri modellenmiştir. Fizik ve uygulamalı matematikte önemli rol oynayan KdVB denklemi hem sönmüleme hem de dağılma özelliği içerdiği için zayıf, doğrusal ve uzun dalga boyu yaklaşımların da doğrusal olmayan sistemlerin geniş bir sınıfı Su ve Gardner [36] tarafından elde edilmiştir. Su ve Gardner tarafından türetilen KdVB denklemi, doğrusal olmadığından dolayı, uzun dalga boyu yaklaşımları ve doğrusal olmayan sistemler için bir model teşkil etmektedir. Doğrusal olmayan zayıf plazma dalgaların tanımındaki elektron eylemsizlik etkilerinden bu denklem elde edilmiştir. Yayılım dağılıma baskın olduğunda KdVB denkleminin kararlı durum çözümleri monotondur [31]. KdVB denklemi yapışkan bir sıvı ile doldurulmuş esnek borunun içinden, sığ su dalgalarının dalga yayılımını ve kararlı durum çözümleri ise manyetik bir alana dik olarak yayılan zayıf plazma şoklarını ifade etmek için kullanılmıştır. Johnson [37] pertürbasyon yöntemi ile fazda düzlem yoluyla KdVB denklemini gezen dalga yöntemi ile incelemiş ve çözümleri için de düzgün asimptotik açılımlar geliştirmiştir. Ayrıca Bona ve Schonbek KdVB denkleminin sınırlandırılmış gezici dalga çözümünün fiziksel durumunu ve

teklifini incelemiştir [38]. KdVB denkleminin analitik çözümleri, başlangıç ve sınır şartlarının tespiti için kullanılır. Bu nedenle şartların tespiti için doğru ve etkili sayısal yöntemlerin bulunması gerekmektedir. Çeşitli başlangıç ve sınır şartları için sayısal çözümler içeren birçok yöntem önerilmiştir.

KdVB denklemi:

$$U_t + \varepsilon. U. U_x - v. U_{xx} + \mu. U_{xxx} = 0, \quad (1.38)$$

şeklinde olup,

$$U(a, t) = 0, \quad U(b, t) = 0, \quad U_x(a, t) = 0, \quad U_x(b, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.39)$$

sınır şartları

$$U(x, 0) = f(x), \quad (1.40)$$

ve başlangıç şartı ile verilir.

Buradan ε , v , μ pozitif parametreler x ve t sırasıyla konuma ve zamana bağlı türevleri göstermektedir.

Denklemden $v = 0$ alınırsa KdV denklemi elde edilirken, $\mu = 0$ alınırsa Burgers' denkleminin elde edilir. Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için Maple ve Mathematica gibi bilgisayar programları yaygın olarak kullanılmaktadır. Yukarıdaki programlar bize zor ve uzun bilgileri işleme imkânı verir. Ayrıca bu programlar doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemler için yeni tam çözümler bulmamıza yardımcı olabilir.

1. 9. 1. Hata normları ve korunum sabitleri

KdV ($v = 0$), Burgers' ($\mu = 0$) ve KdVB denklemi ile ilgili test problemler için L_2 ve L_∞ hata normları sırasıyla;

$$L_2 = \|U^{\text{tam}} - U_N\|_2 \approx \sqrt{h \sum_{j=1}^N |U_j^{\text{tam}} - (U_N)_j|^2},$$

$$L_\infty = \|U^{\text{tam}} - U_N\|_\infty \simeq \max_j |U_j^{\text{tam}} - (U_N)_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N-1,$$

şeklinde tanımlanır.

Hata normları mevcut yöntemin doğruluğunu ve bazı zaman adımlarında tam ve sayısal çözümler arasındaki farkı ölçmek için kullanılır [37]. Kütle, momentum ve enerjiye karşılık gelen korunum sabitleri ise sırasıyla

$$I_1 = \int_a^b U \, dx \simeq h \sum_{j=1}^N U_j^n, \quad (1.41)$$

$$I_2 = \int_a^b U^2 \, dx \simeq h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2, \quad (1.42)$$

$$I_3 = \int_a^b \left(U^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} U_x^2 \right) dx \simeq h \sum_{j=1}^N \left[(U_j^n)^3 - \frac{3\mu}{\varepsilon} (U_x)_j^2 \right]. \quad (1.43)$$

şeklinde verilir.

BÖLÜM 2

KdVB DENKLEMİNİN KUARTİK B-SPLINE GALERKİN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde lineer olmayan KdVB denkleminin sayısal çözümleri şekil fonksiyonları ve ağırlık fonksiyonları kuartik B- spline fonksiyonlar alınarak Galerkin sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Yöntemin doğruluğu ve etkinliği üç tane test problemi ile gösterildi. Elde edilen sonuçlar literatürdeki makaleler ile karşılaştırıldı. Bu kısımda kullanılacak olan sonuçlar ve grafikler referans [39]' dan alınmıştır.

2. 1. Kuartik B- spline Fonksiyonlar ile Galerkin Yöntemi

Bu kısımda (1. 38) ile verilen KdVB denklemine Galerkin sonlu eleman yöntemi uygulandı. Ağırlık fonksiyonları olarak bölüm 1' de (1. 26) ile verilen kuartik B- spline fonksiyonları alınırsa problemin $U(x, t)$ tam çözümüne karşılık gelen $U_N(x, t)$ yaklaşık çözümü

$$U_N(x, t) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m(t) \cdot \phi_m(x) \quad (2. 1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada δ_m ' ler hesaplanması gereken zamana bağlı parametrelerdir.

(1. 26) ile verilen kuartik B- spline fonksiyonlar ve (2. 1) yaklaşımı kullanılırsa x_m düğüm noktasında U_m ve U_m ' nin x e göre 1. mertebeden türevinin δ_m eleman parametrelerine göre noktasal değerleri bölüm 1' de verilen (1. 28)' deki gibi elde edilir.

Bir $[x_m, x_{m+1}]$ aralığı

$$\xi = x - x_m, \quad 0 < \xi < h$$

lokal koordinat dönüşümü yardımıyla $[0, h]$ dönüşür. Böylece kuartik B- spline fonksiyonlar $[0, h]$ aralığında ξ cinsinden,

$$\phi_{m-2} = 1 - 4\frac{\xi}{h} + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + \left(\frac{\xi}{h}\right)^4,$$

$$\phi_{m-1} = 11 - 12\frac{\xi}{h} - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 12\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^4,$$

$$\phi_m = 11 + 12\frac{\xi}{h} - 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 12\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^4,$$

$$\phi_{m+1} = 1 + 4\frac{\xi}{h} + 6\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^3 - 4\left(\frac{\xi}{h}\right)^4,$$

$$\phi_{m+2} = \left(\frac{\xi}{h}\right)^4.$$

şeklinde bulunur. Herhangi bir sonlu eleman üzerinde U ' nun değeri, ϕ_i ' ler B- spline şekil fonksiyonları olmak üzere

$$U_N^e(\xi, t) = \sum_{i=m-2}^{m+2} \delta_i(t) \cdot \phi_i(\xi)$$

şeklinde elde edilir.

(1. 38) denkleminde Galerkin yöntemi uygulanırsa;

$$\int_a^b (U_t + \varepsilon U U_x - v U_{xx} + \mu U_{xxx}) \cdot \omega \cdot dx = 0 \quad (2. 2)$$

integral denklemi elde edilir. Burada ω ağırlık fonksiyonudur. Ağırlık fonksiyonları olarak kuartik B- spline şekil fonksiyonları alınır ve (2. 2) integral denkleminde U_N^e deneme fonksiyonu yerine yazılırsa

$$\sum_{j=m-2}^{m+2} \left\{ \left(\int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j + \varepsilon \sum_{k=m-2}^{m+2} \left[\left(\int_0^h \phi_i \phi_j \phi_k' d\xi \right) \delta_k \right] \delta_j - v \left(\int_0^h \phi_i \phi_j'' d\xi \right) \delta_j + \mu \left(\int_0^h \phi_i \phi_j''' d\xi \right) \delta_j \right\} \quad (2. 3)$$

denklemini elde edilir. Burada i, j ve k sadece $m-2, m-1, m, m+1, m+2$ ve $m=0, 1, \dots, N-1$, “ δ ” zamana göre türevi temsil eder. (2. 3) denklemini matris formunda

$$\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T \text{ olmak üzere}$$

$$A^e \cdot \delta^e + [\varepsilon \cdot (\delta^e)^T \cdot L^e - v \cdot D^e + \mu \cdot C^e] \cdot \delta^e \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir.

A^e, C^e ve D^e eleman matrislerinin boyutları 5×5 , L^e ise $5 \times 5 \times 5$ tipindedir. Ve

$$A_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \cdot \phi_j \, d\xi, \quad C_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \cdot \phi_j''' \, d\xi, \quad L_{i,j,k}^e = \int_0^h \phi_i \cdot \phi_j \cdot \phi_k' \, d\xi, \\ D_{i,j}^e = \int_0^h \phi_i \cdot \phi_j'' \, d\xi. \quad (2.5)$$

dir.

L^e matrisi boyutları 5×5 olan B^e matrisi olarak düzenlenirse

$$B_{i,j}^e = \sum_{k=m-2}^{m+2} L_{i,j,k}^e \cdot \delta_k^e \quad (2.6)$$

elde edilir.

Burada B^e matrisi δ^e eleman parametrelerine bağlıdır. Her bir eleman için tüm eleman matrisleri birleştirilirse

$$A \cdot \hat{\delta} + (\varepsilon \cdot B - v \cdot D + \mu \cdot C) \cdot \delta = 0 \quad \delta = (\delta_{-2}, \delta_{-1}, \dots, \delta_{N+1})^T \quad (2.7)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$(2.7) \text{ denkleminde zamana bağılı } \hat{\delta} \text{ parametreleri yerine } \hat{\delta} = \frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t} \quad (2.8)$$

ileri sonlu fark yaklaşımı ve δ parametresi yerine de $\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2}$ (2.9) Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa $(N + 4) \times (N + 4)$ boyutlu

$$(2A + \varepsilon \Delta t B - v \Delta t D + \mu \Delta t C) \delta^{n+1} = (2A - \varepsilon \Delta t B + v \Delta t D - \mu \Delta t C) \delta^n \quad (2.10)$$

denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözebilmesi için (1. 39) denklemi için seçilen sınır şartları uygulandığında δ_{-2}^{n+1} , δ_{-1}^{n+1} , δ_{N+1}^{n+1} parametreleri yok edilerek $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu denklem sistemi elde edilir. Yöntemin etkinliğini arttırmak için her bir zaman adımında

$$(\delta^*)^{n+1} = \delta^n + \frac{1}{2}(\delta^{n+1} - \delta^n) \quad (2. 11)$$

şeklinde bir iç iterasyon uygulandı. δ_m^{n+1} parametrelerini;

$$\begin{aligned} (1 - EZ_m - M)\delta_{m-2}^{n+1} + (26 - 10EZ_m - 2M)\delta_{m-1}^{n+1} + (66 + 6M)\delta_m^{n+1} + (26 + 10EZ_m - 2M)\delta_{m+1}^{n+1} + \\ (1 + EZ_m - M)\delta_{m+2}^{n+1} = (1 + EZ_m - M)\delta_{m-2}^n + (26 + 10EZ_m - 2M)\delta_{m-1}^n + (66 + 6M)\delta_m^n + \\ (26 - 10EZ_m - 2M)\delta_{m+1}^n + (1 - EZ_m - M)\delta_{m+2}^n \end{aligned} \quad (2. 12)$$

(2. 12) denklem sisteminden elde edebilmek için δ^0 başlangıç değerlerinin hesaplanması gerekir. δ^0 vektörü problem ile verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak hesaplanır. $t = 0$ ' da, δ_j^0 belirlenecek parametreler olmak üzere (2. 1) denklemi

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-2}^{N+1} \delta_m^0(t) \cdot \phi_m(x)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece başlangıç şartlarının x_i düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

değerleri kullanılarak δ_i^0 parametreleri için $(N + 4)$ - tane bilinmeyen ve $(N + 1)$ - tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bölüm 1' de (1. 28) ile verilen yaklaşımlarda U'_m ve U''_m ' nin sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-2}^0 , δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 ifadeleri yok edilirse $(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir [40].

2. 2. Test Problemleri

Yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu göstermek için Burgers', KdV ve KdVB denklemleri ele alındı.

2. 2. 1. Burgers' tipi çözümler

Burgers' denkleminin analitik çözümü [41]

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0 \cdot e^{(x^2/4vt)}}}, \quad t \geq 1 \quad (2. 13)$$

şeklinde olup burada $t_0 = e^{(1/8v)}$ ' dir. Sınır şartları $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ şeklindedir. Çözüm bölgesi üzerinde hesaplamalar $\varepsilon = 1$, $\mu = 0$ için;

i) $a = 0$, $b = 10$ ve $v = 0.5$, $h = \Delta t = 0.01$,

ii) $a = 0$, $b = 3$ ve $v = 0.05$, $h = \Delta t = 0.01$,

iii) $a = 0$, $b = 1.4$ ve $v = 0.005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$,

iv) $a = 0$ $b = 1.1$ ve $v = 0.0005$, $h = \Delta t = 0.001$.

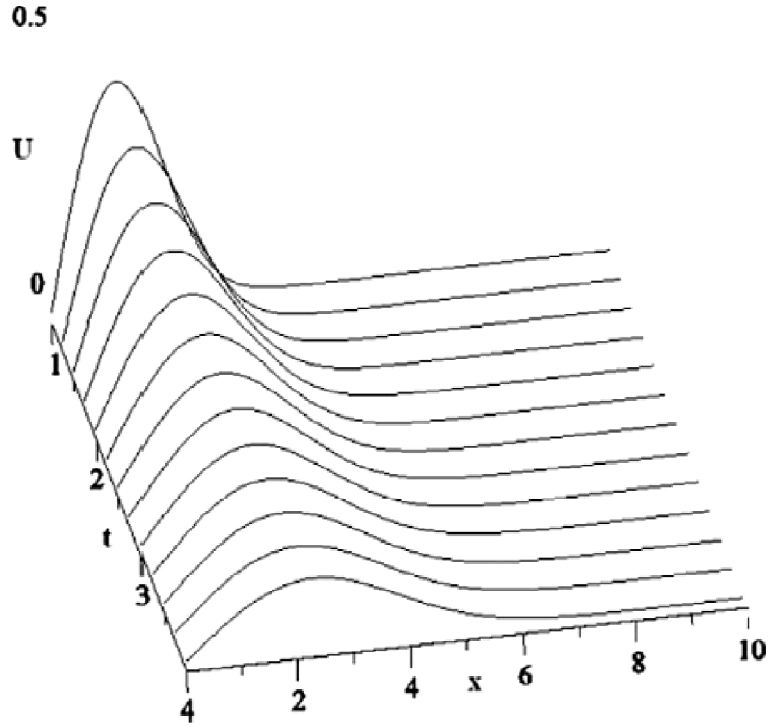
olarak alındı.

Hesaplamalar $t = 4$ zamanına kadar yapıldı. L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Tablo 2. 1' de $t = 2, 3$ ve 4 zamanlarında değişik viskozite değerleri için elde edilen çözümlerin grafikleri Şekil 2. 1 ve Şekil 2. 2' de verildi. Grafiklerin [33, 42- 44] referansları ile uyum içinde olduğu görülür. $t = 4$ zamanındaki hataların grafikleri Şekil 2. 3 ve Şekil 2. 4' de verildi. Grafiklerden görüldüğü gibi $v = 0.5$ ve $v = 0.0005$ hataların genellikle sağ sınırdaki büyüdüğü görülmektedir.

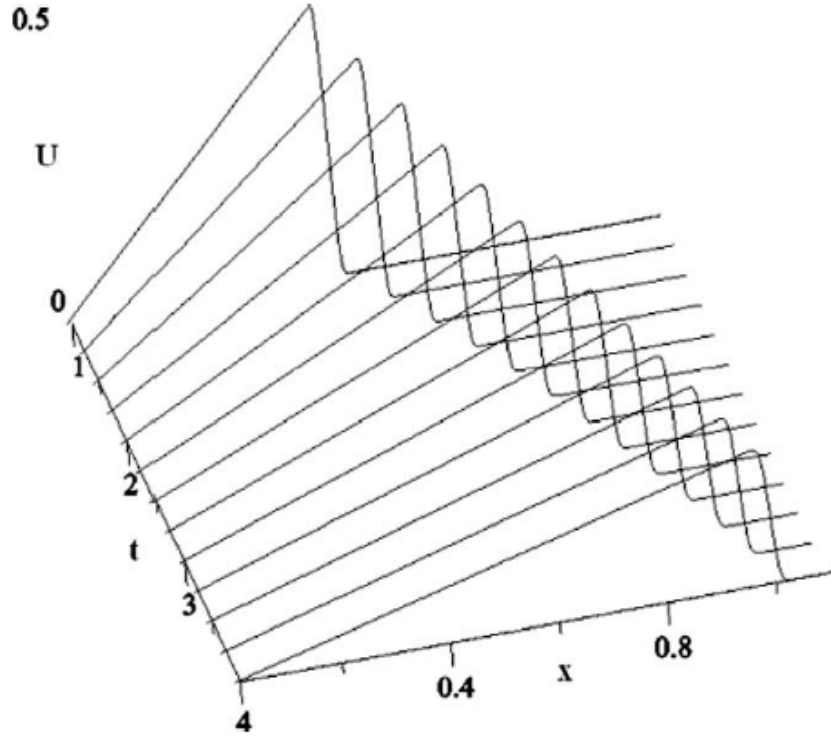
Tablo 2. 2' de elde edilen sonuçlar [44- 46] referansları ile karşılaştırıldı ve tablodan da anlaşılacağı gibi elde edilen sonuçların diğer sonuçlara göre daha iyi olduğu görüldü.

Tablo 2. 1. ν ' nin farklı değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin karşılaştırılması

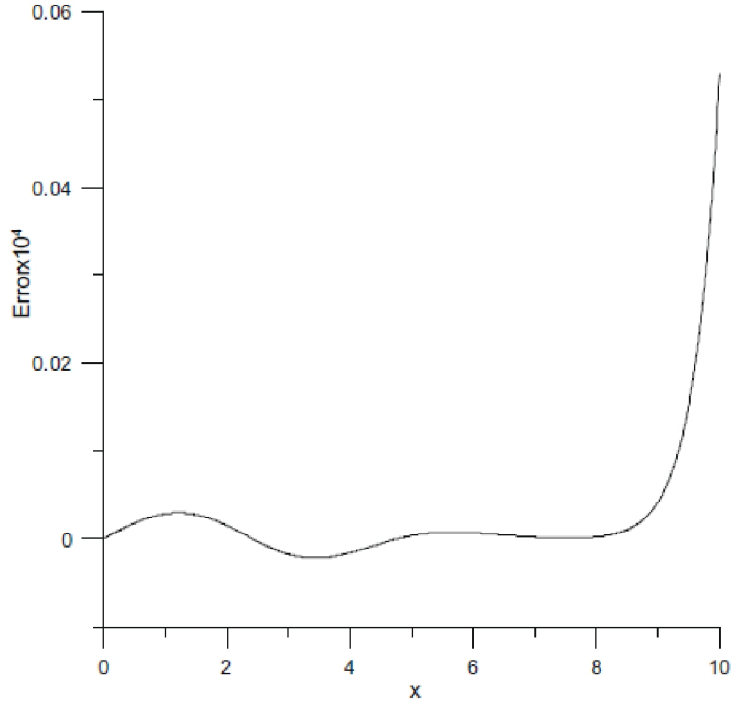
ν	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
	$t = 2$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 3$	$t = 4$	$t = 4$
0.5	0.163	0.133	0.077	0.058	0.245	0.528
0.05	0.060	0.086	0.032	0.062	0.461	1.703
0.005	0.828	3.086	0.369	1.271	0.208	0.692
0.0005	0.629	8.028	0.542	5.939	0.496	4.943



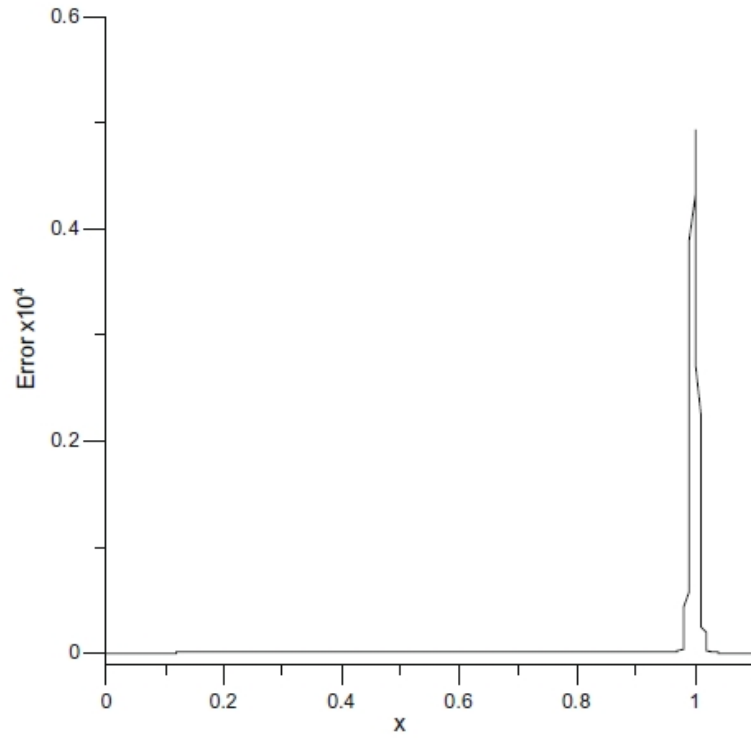
Şekil 2. 1. $t = 2, 3$ ve 4 zamanlarında $\nu = 0.5$ viskozite değeri için elde edilen çözümlerinin grafiği



Şekil 2. 2. $t = 2, 3$ ve 4 zamanlarında $v = 0.0005$ viskozite değeri için elde edilen çözümlerinin grafiği



Şekil 2. 3. $t = 4$ zaman ve $v = 0.5$ için elde edilen hata norm değerlerinin grafiği



Şekil 2. 4. $t = 4$ zaman ve $v = 0.0005$ için elde edilen hata norm değerlerinin grafiği

Tablo 2. 2. Burgers' denkleminin $\Delta t = 0.01$ değerleri için elde edilen sonuçlarının [44-46] referansları ile karşılaştırılması

	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
$h = 0.005,$ $v = 0.00$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.1$	$t = 3.1$
Sunum	0.01098	0.04284	0.00976	0.06464	0.65137	4.79061
Ref. [44]	0.35126	1.20726	0.24448	0.80176	0.63340	4.79061
Ref. [46]	0.857	2.576	0.423	1.242	0.235	0.688
$h = 0.02,$ $v = 0.005$	$t = 1.8$	$t = 1.8$	$t = 2.4$	$t = 2.4$	$t = 3.2$	$t = 3.2$
Sunum	0.00980	0.03546	0.01167	0.06464	1.26114	7.49147
Ref. [45]	0.68761	2.47189	0.67943	2.16784	1.48559	7.49146
$h = 0.02,$ $v = 0.01$	$t = 1.7$	$t = 1.7$	$t = 2.1$	$t = 2.1$	$t = 2.6$	$t = 2.6$
Sunum	0.01665	0.09592	0.20839	1.14760	1.57287	8.06799
Ref. [45]	0.69910	3.13476	0.72976	2.66986	1.74570	8.06798

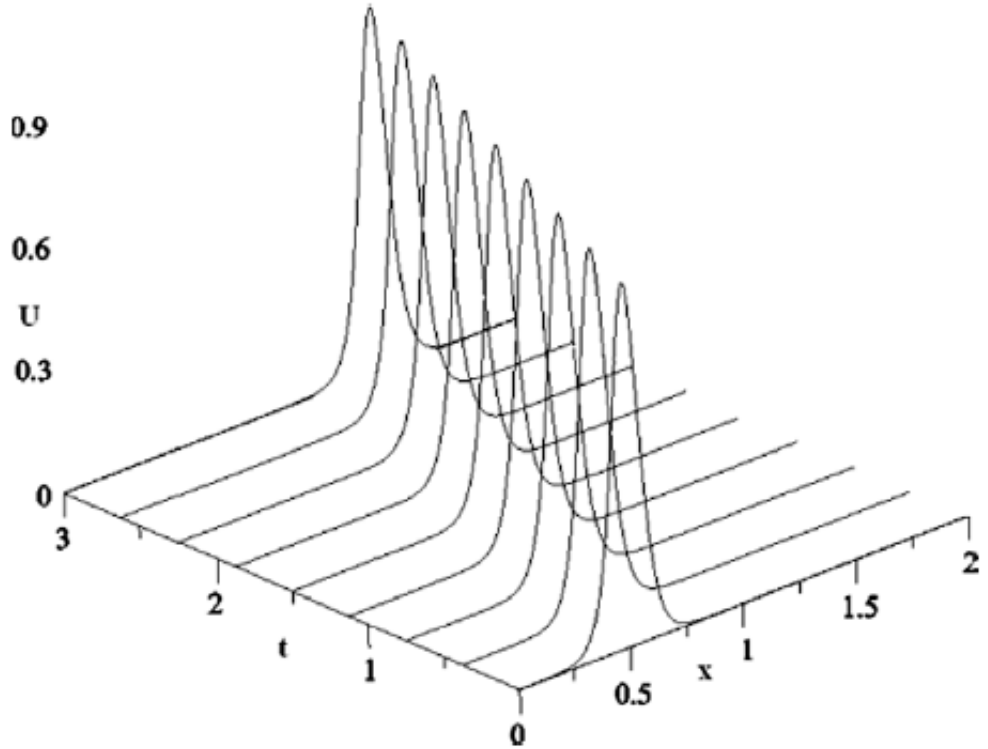
2. 2. 2. KdV tipi çözümler

KdV denklemin analitik çözümü

$$U(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(Ax - Bt + D), \quad A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}} \text{ ve } B = c\varepsilon A \quad (2. 14)$$

olmak üzere şeklindedir [47].

Bu çözüm $3c$ genişlikli, başlangıçta $x = 0$ merkezli soldan- sağa doğru c sabit hızıyla ilerleyen bir tek soliton dalgayı temsil eder. Sınır koşullarına karşılık gelen hesaplamalarda $\varepsilon = 1$, $\nu = 0$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$ ve $D = -6$ parametreleri kullanıldı. Çözüm aralığı $0 \leq x \leq 2$ olarak alındı. Seçilen bazı zamanlarda elde edilen hata normlarının değerleri Tablo 2. 3' te verildi. Elde edilen sonuçların literatürdeki [8, 9, 40] çalışmalardan daha iyi olduğu görüldü. Tek soliton dalganın hareketi Şekil 2. 5' de verildi.



Şekil 2. 5. $0 \leq x \leq 2$ aralığında $\varepsilon = 1$, $\nu = 0$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$ ve $D = -6$ değerleri için tek soliton dalganın grafiği

Tablo 2. 3. KdV denkleminin $\varepsilon = 1, v = 0, \mu = 4.84 \times 10^{-4}, C = 0.3$ ve $D = -6$ değerleri için elde edilen hata norm değerlerinin [8, 9, 40] referansları ile karşılaştırılması

Δt	$t = 0.25$	$t = 0.50$	$t = 0.75$	$t = 1.0$
$L_2 \times 10^3$	0.023	0.045	0.067	0.088
$L_2 \times 10^3, [9]$	4.46	7.01	10.08	13.46
$L_2 \times 10^3, [9]$	0.21	0.38	0.57	0.74
$L_2 \times 10^3, [40]$	0.02	0.05	0.07	0.09
$L_\infty \times 10^3$	0.068	0.124	0.180	0.233
$\Delta t = 0.0005$	$t = 0.25$	$t = 0.50$	$t = 0.75$	$t = 1.0$
$L_2 \times 10^3$	0.0010	0.0006	0.0007	0.0009
$L_2 \times 10^3, [8]$	3.79	9.28	14.14	18.72
$L_\infty \times 10^3$	0.0036	0.0012	0.0018	0.0023
$\Delta t = 0.0005$	$t = 1.5$	$t = 2.0$	$t = 2.5$	$t = 3.0$
$L_2 \times 10^3$	0.1291	0.1702	0.2110	0.2516
$L_2 \times 10^3, [40]$	0.13	0.18	0.23	0.28
$L_\infty \times 10^3$	0.3413	0.4484	0.5547	0.6603
$\Delta t = 0.0005$	$t = 1.5$	$t = 2.0$	$t = 2.5$	$t = 3.0$
$L_2 \times 10^3$	0.0013	0.0017	0.0021	0.0025
$L_\infty \times 10^3$	0.0034	0.0056	0.0056	0.0067

Bu problem için C_1, C_2 ve C_3 değişmezleri hesaplamada ve korunum sabitlerinin değerleri $0.14459753 \leq C_1 \leq 0.14459859$, $0.08675926 \leq C_2 \leq 0.08675968$, $0.04684983 \leq C_3 \leq 0.04685021$ aralıklarında olduğu görüldü.

2. 2. 3. KdVB tipi çözümler

KdVB denklemini için sınır şartları olarak $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ve başlangıç şartı olarak

$$U(x, 0) = 0.5 \left(1 - \tanh \frac{|x| - 25}{5} \right) \quad (2. 15)$$

alındı [48].

Hesaplamalar soliton dalgalarının gelişimini görmek için $-50 \leq x \leq 150$ aralığı üzerinde, $h = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$ ve $\Delta t = 0.05$, $v = 0.0001$, 0.4 alınarak $0 \leq t \leq 800$ zamanına kadar yapıldı.

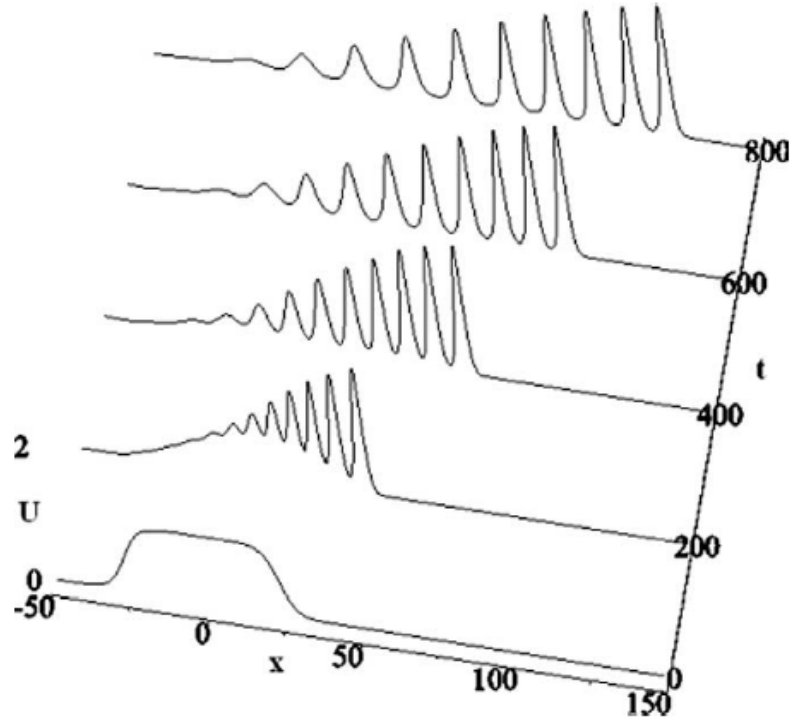
Şekil 2. 6' da görüldüğü gibi, küçük bir viskozite kullanıldığında, KdVB denkleminin çözümü KdV denkleminin benzer şekilde davranmaktadır. Başlangıç koşulları ile v ' nin daha küçük değerlerinin kullanılması ile 10 tane soliton dalga elde edildi. Daha büyük viskozite değerinin etkisini araştırmak için $v = 0.4$ alındı. Bu durum için KdVB denkleminin sayısal çözümleri Şekil 2. 7' de gösterildi. Şekilden de görüldüğü gibi Burgers' denkleminin çözümü KdVB denkleminin çözümü gibi davranmaktadır. Elde edilen sonuçlar Tablo 2. 4' de verildi. C_1 , C_2 ve C_3 korunum sabitlerindeki değişim 2.7×10^{-2} , 3.37×10^{-4} , 4×10^{-5} değerlerinden daha az olduğu görüldü.

2. 3. Sonuç

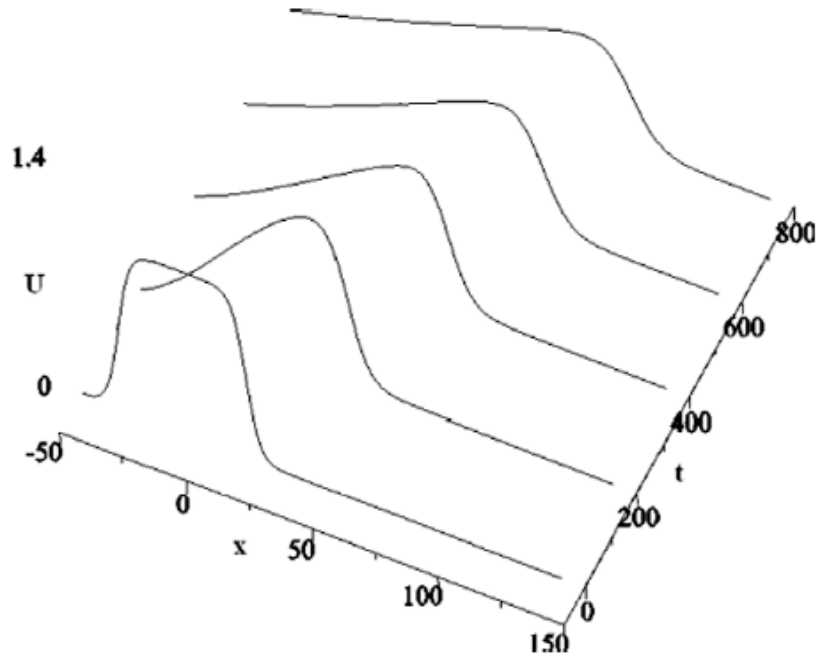
Bu bölümde KdVB denkleminin sayısal çözümleri kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak Galerkin yöntemi ile elde edildi. Beklenildiği gibi difüzyon baskın olduğunda, sayısal çözümler Burgers' denkleminin çözümü gibi davranmakta iken yayılma baskın olduğunda ise sayısal çözümler KdV denkleminin çözümü gibi davranmaktadır. Bu sayısal çözümlerin KdVB denklemini için yüksek doğrulukta çözümler ürettiği ve ayrıca elde edilen sayısal çözümlerin daha önce yayınlanmış çalışmalara göre daha iyi olduğu görüldü.

Tablo 2. 4. $v = 0$ için $t = 800$ zamanına kadar elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

t	C_1	C_2	C_3
0.0	50.000118	45.000454	42.300681
100	50.000215	45.000454	42.300675
200	50.002160	45.000449	42.300658
300	50.003640	45.000431	42.300655
400	49.997197	45.000402	42.300659
500	49.985593	45.000347	42.300680
600	49.971054	45.000326	42.300713
700	49.966670	45.000285	42.300716
800	49.972913	45.000117	42.300721



Şekil 2. 6. $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $h = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $v = 0.0001$ için sayısal çözümlerin grafiği



Şekil 2. 7. $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $h = 0.2$, $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ ve $v = 0.4$ için sayısal çözümlerin grafiği

BÖLÜM 3

KdVB DENKLEMİNİN SEPTİK B- SPLINE SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde KdVB denkleminin sayısal çözümleri septik B- spline fonksiyonlar kullanılarak elde edildi. Kollokasyon yönteminin uygulanması ile elde edilen sonlu eleman yaklaşımının kararlılık analizi Von- Neumann yöntemi ile incelendi. Yöntemin doğruluğu ve etkinliği L_2 ve L_∞ hata norm değerleri hesaplanarak gösterildi. Bu kısımda kullanılacak olan sonuçlar ile grafikler referans [49]' dan alındı.

3. 1. KdVB Denkleminin Analitik Çözümü

KdV- Burger denkleminin analitik çözümü; c pozitif sabit, ε lineer olmayan bir katsayı, v viskozite katsayısı ve μ dağıtıcı katsayısı olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{12v^2}{25\varepsilon\mu} \left(1 - \frac{e^{\left(\frac{2v}{\varepsilon\mu}(x-wt)\right)}}{e^{\left(\frac{v}{\varepsilon\mu}(x-wt)+c\right)^2}} \right), \quad w = \frac{6v^2}{25\mu} \quad (3. 1)$$

şeklinde yazılır [50, 51].

3. 2. Septik B- spline Sonlu Eleman Yöntemi

(1. 38) ile verilen KdVB denklemini (1. 39) sınır şartları ve (1. 40) başlangıç şartı ile ele alınacaktır.

x_j düğüm noktalarında $a \leq x \leq b$ problemin çözüm bölgesinin düzgün bir parçalanışı $h = x_{j+1} - x_j$, $j = -3, -2, -1, 0, \dots, N, N+1, N+2, N+3$ olmak üzere $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N = b$ dir.

Septik B- spline fonksiyonlar (1. 35)' de verildiği gibidir. $\{\phi_{-3}, \phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}, \phi_{N+3}\}$ fonksiyonları $a \leq x \leq b$ aralığında bir baz oluşturur [42]. $\phi_i(x)$ ' in değerleri ve 1. 2. ve 3. türevleri $[x_{i-4}, x_{i+4}]$

aralığı dışında sıfırdır. Tablo 3. 1' de $\phi_i(x)$ ' in düğüm noktalarındaki değerleri ile türevlerinin değerleri verildi.

(1. 38) ile verilen denklemin yaklaşık çözümü $U_N(x, t)$ olmak üzere bu yaklaşık çözüm (1. 35) ile verilen $\phi_i(x)$ septik B- spline fonksiyonları cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \cdot \delta_i(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3. 2.)$$

şeklinde yazılır. Burada $\delta_i(t)$ ' ler zamana bağlı parametreler olup:

$$U_N(a, t) = \beta_1, U_N(b, t) = \beta_2,$$

$$(U_x)_N(a, t) = (U_x)_N(b, t) = 0,$$

$$(U_{xx})_N(a, t) = (U_{xx})_N(b, t) = 0,$$

$$(U_{xxx})_N(a, t) = (U_{xxx})_N(b, t) = 0. \quad (3. 3)$$

sınır şartlarından elde edilecektir. β_1 ve β_2 sabitleri problem için gerekli olan kollokasyon şartıdır.

Tablo 3. 1. $\phi_i(x)$ ve türevlerinin düğüm noktalarındaki değerleri

x	x_{i-4}	x_{i-3}	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	x_{i+3}	x_{i+4}
$\phi_i(x)$	0	1	120	1191	2416	1191	120	1	0
$\phi_i'(x)$	0	$\frac{7}{h}$	$\frac{392}{h}$	$\frac{1715}{h}$	0	$-\frac{1715}{h}$	$-\frac{392}{h}$	$-\frac{7}{h}$	0
$\phi_i''(x)$	0	$\frac{42}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$-\frac{3360}{h^2}$	$\frac{630}{h^2}$	$\frac{1008}{h^2}$	$\frac{42}{h^2}$	0
$\phi_i'''(x)$	0	$\frac{210}{h^3}$	$\frac{1680}{h^3}$	$-\frac{3990}{h^3}$	0	$\frac{3990}{h^3}$	$-\frac{1680}{h^3}$	$-\frac{210}{h^3}$	0

(3. 2. 1) denklemi (3. 2. 2) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \frac{d\delta_i}{dt} + \varepsilon \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'(x_j) \delta_i(t) \left[\sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \delta_i(t) \right] - v \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i''(x_j) \delta_i(t) + \mu \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'''(x_j) \delta_i(t) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3. 4)$$

elde edilir. δ_i , "n" ve "n + 1" zaman adımlarında, $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere

$$\delta_i = (1 - \theta)\delta_i^n + \theta\delta_i^{n+1}, \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır. Sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa,

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \quad (3.6)$$

elde edilir.

(3.5) ve (3.6) denklemleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x_j) \left(\frac{\delta_i^{n+1} - \delta_i^n}{\Delta t} \right) + \varepsilon \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i'(x_j) \{ (1 - \theta)\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n \} \left[\sum_{k=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k(t) \right] - \\ & v_i = -3N + 3\phi_i''x_j - \theta\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n + \mu_i = -3N + 3\phi_i'''x_j - \theta\delta_i^{n+1} + \theta\delta_i^n = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

elde edilir. $\theta = \frac{1}{2}$ için Crank- Nicolson formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-3}^{N+3} \left\{ \phi_i(x_j) + \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left(\sum_{k=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k \right) - v \frac{\Delta t}{2} \phi_i''(x_j) + \mu \frac{\Delta t}{2} \phi_i'''(x_j) \right\} \delta_i^{n+1} = \\ & \sum_{i=-3}^{N+3} \left\{ \phi_i(x_j) - \frac{\Delta t}{2} \phi_i'(x_j) \left(\sum_{k=-3}^{N+3} \phi_k(x_j) \delta_k \right) + v \frac{\Delta t}{2} \phi_i''(x_j) - \mu \frac{\Delta t}{2} \phi_i'''(x_j) \right\} \delta_i^n \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur.

x_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N$ düğüm noktalarında (3.8) ile verilen denklem Tablo 3.1'deki değerler kullanılarak hesaplanır.

Genel olarak $x = x_i$ noktasında denklem

$$\begin{aligned} & a_i \delta_{i-3}^{n+1} + b_i \delta_{i-2}^{n+1} + c_i \delta_{i-1}^{n+1} + d_i \delta_i^{n+1} + e_i \delta_{i+1}^{n+1} + f_i \delta_{i+2}^{n+1} + g_i \delta_{i+3}^{n+1} = a_i' \delta_{i-3}^n + b_i' \delta_{i-2}^n + \\ & c_i' \delta_{i-1}^n + d_i' \delta_i^n + e_i' \delta_{i+1}^n + f_i' \delta_{i+2}^n + g_i' \delta_{i+3}^n \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.9)$$

olup burada:

$$a_i = 1 - r_1 Z_{i-3} - r_2 - r_3,$$

$$A_i' = 1 + r_1 Z_{i-3} + r_2 + r_3,$$

$$b_i = 120 - 56r_1 Z_{i-3} - 24r_2 - 8r_3,$$

$$B_i' = 120 + 56r_1 Z_{i-3} + 24r_2 + 8r_3,$$

$$\begin{aligned}
c_i &= 1191 - 245r_1Z_{i-3} - 15r_2 + 19r_3, & c'_i &= 1191 + 245r_1Z_{i-3} + 15r_2 - 19r_3, \\
d_i &= 2416 + 80r_2, & d'_i &= 2416 - 80r_2, \\
e_i &= 1191 + 245r_1Z_{i-3} - 15r_2 - 19r_3, & e'_i &= 1191 - 245r_1Z_{i-3} + 15r_2 + 19r_3, \\
f_i &= 120 + 56r_1Z_{i-3} - 24r_2 + 8r_3, & f'_i &= 120 - 56r_1Z_{i-3} + 24r_2 - 8r_3, \\
g_i &= 1 + r_1Z_{i-3} - r_2 + r_3, & g'_i &= 1 - r_1Z_{i-3} + r_2 - r_3.
\end{aligned} \tag{3. 10}$$

değerlerini alırlar.

$$Z_{i-3} = \delta_{i-3} + 120 \delta_{i-2} + 1191 \delta_{i-1} + 2416\delta_i + 1191\delta_{i+1} + 120\delta_{i+2} + \delta_{i+3} \quad j=0, 1, 2, \dots, N$$

dir.

(3. 9) denklem sisteminden açıkça görüldüğü gibi $(N + 7)$ tane bilinmeyen $(\delta_{-3}, \delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \delta_{N+3})$ ve $(N + 1)$ tane denklem vardır. Bu denklem sistemini çözmek için altı tane ek koşula ihtiyaç vardır. (3. 9) denklemindeki bilinmeyenler Tablo 3. 1' deki değerler ve (3. 3)' deki sınır koşulları kullanılarak elde edilir.

O zaman A ve B matrisleri $(N + 1) \times (N + 1)$ yedi bant matrisler, "r", $(N + 1)$ boyutlu sütun vektörü ve $\delta^n = [\delta_{-2}^n, \delta_{-1}^n, \delta_0^n, \delta_1^n, \dots, \delta_{N+2}^n]^T$ olmak üzere,

$$A\delta^{n+1} = B\delta^n + r \tag{3. 11}$$

matris denklemi elde edilir.

(3. 9) denklemini çözmek için yedi bant algoritma kullanıldı.

$\{\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \dots, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0, \delta_{N+3}^0\}$ başlangıç değerlerini hesaplamak için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-3}^{N+3} \phi_i(x)\delta_i^0 \tag{3. 12}$$

başlangıç şartı kullanıldı.

$U_N(x, 0)$ 'nin yaklaşık çözümü aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

1. x_j düğüm noktalarında $u(x, 0)$ başlangıç şartına eşit olmalı.
2. Başlangıç şartının birinci, ikinci ve üçüncü yaklaşık türevleri aralığın her iki ucunda analitik çözüm ile uyumlu olmalıdır.

Bu iki şart;

$$(U_x)_N(x_0, 0) = u_x(a, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_0, 0) = u_{xx}(a, 0) = 0,$$

$$(U_{xxx})_N(x_0, 0) = u_{xxx}(a, 0) = 0, \quad U_N(x_i, 0) = u(x_i, 0) = 0,$$

$$(U_{xxx})_N(x_N, 0) = u_{xxx}(b, 0) = 0, \quad (U_{xx})_N(x_N, 0) = u_{xx}(b, 0) = 0,$$

$$(U_x)_N(x_N, 0) = u_x(b, 0) = 0. \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinde gösterilir.

(3. 8) denklem sistemindeki $\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$ ve δ_{N+3}^0 değerler yok edilerek

D yedi köşegen matris olmak üzere;

$$D = \begin{bmatrix} 1536 & 2712 & 768 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{27,577}{27} & \frac{46,793}{18} & \frac{11,644}{9} & \frac{6709}{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{3200}{27} & \frac{10,733}{9} & \frac{21,752}{9} & \frac{32,158}{27} & 120 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & & & \\ & & \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 120 & 1191 & 2416 & 1191 & 120 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 120 & \frac{32,158}{27} & \frac{21,752}{9} & \frac{10,733}{9} & \frac{3200}{27} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{6709}{54} & \frac{11,644}{9} & \frac{46,793}{18} & \frac{27,577}{27} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 768 & 2712 & 1536 \end{bmatrix}$$

$$D\delta^0 = q, \quad (3.13)$$

eşitliği elde edilir. Burada $\delta^0 = [\delta_0^0, \delta_1^0, \delta_2^0, \dots, \delta_N^0]^T$, “r” bir vektör ve

$$q = [u(x_0, 0), u(x_1, 0), \dots, u(x_N, 0)]^T \text{ dir.}$$

Bu denklem sistemini çözmek için yedi bant algoritması $[\Delta_0^0, \Delta_1^0, \Delta_2^0, \dots, \Delta_N^0]^T$ ile $\delta_{-3}^0, \delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0$ ve δ_{N+3}^0 değerlerini hesaplamak için son üç denklem ile birinci denklem kullanılarak (3. 12) denkleminde uygulandı. Burada genel çözüm olarak $x = x_i$ yazılırsa

$$U_N(x_i, t) = \delta_{i-3} + 120 \delta_{i-2} + 1191 \delta_{i-1} + 2416\delta_i + 1191\delta_{i+1} + 120\delta_{i+2} + \delta_{i+3} \quad (3.14)$$

elde edilir.

3. 3. Kararlılık Analizi

Von- Neumann kararlılık analizini (3. 9) denkleminde uygulayabilmek için denklemi lineer hale getirmek gerekmektedir.

$$Z_{i-3} = (m + 120 m + 1191 m + 2416m + 1191m + 120m + m) + (5040m) \text{ olsun.}$$

Von- Neumann yaklaşımına göre,

$$\omega_j^n = \varepsilon^n \cdot e^{(ikjh)}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.15)$$

dir. Burada k mod sayısını ve h lineerleştirme için alınacak olan sayısal elemanın büyüklüğünü gösterir. (3. 10) denkleminde $x = x_j$ yazıldığında,

$$\begin{aligned} & a_j \delta_{j-3}^{n+1} + b_j \delta_{j-2}^{n+1} + c_j \delta_{j-1}^{n+1} + d_j \delta_j^{n+1} + e_j \delta_{j+1}^{n+1} + f_j \delta_{j+2}^{n+1} + g_j \delta_{j+3}^{n+1} \\ & = a'_j \delta_{j-3}^n + b'_j \delta_{j-2}^n + c'_j \delta_{j-1}^n + d'_j \delta_j^n + e'_j \delta_{j+1}^n + f'_j \delta_{j+2}^n + g'_j \delta_{j+3}^n \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir.

(3. 16) denklemi (3. 15) dekleminde yerine yazılırsa, $j = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1}\{a_j e^{(j-3)ikh} + b_j e^{(j-2)ikh} + c_j e^{(j-1)ikh} + d_j e^{(j)ikh} + e_j e^{(j+1)ikh} + \\ f_j e^{(j+2)ikh} + g_j e^{(j+3)ikh}\} = \varepsilon^n \{a'_j e^{(j-3)ikh} + b'_j e^{(j-2)ikh} + c'_j e^{(j-1)ikh} + d'_j e^{(j)ikh} + e'_j e^{(j+1)ikh} + \\ f'_j e^{(j+2)ikh} + g'_j e^{(j+3)ikh}\}, \end{aligned} \quad (3. 17)$$

bulunur. Burada;

$$\begin{aligned} a_i &= 1 - r_1^* - r_2 - r_3, & A'_i &= 1 + r_1^* + r_2 + r_3, \\ b_i &= 120 - 56r_1^* - 24r_2 - 8r_3, & B'_i &= 120 + 56r_1^* + 24r_2 + 8r_3, \\ c_i &= 1191 - 245r_1^* - 15r_2 + 19r_3, & c'_i &= 1191 + 245r_1^* + 15r_2 - 19r_3, \\ d_i &= 2416 + 80r_2, & d'_i &= 2416 - 80r_2, \\ e_i &= 1191 + 245r_1^* - 15r_2 - 19r_3, & e'_i &= 1191 - 245r_1^* + 15r_2 + 19r_3, \\ f_i &= 120 + 56r_1^* - 24r_2 + 8r_3, & f'_i &= 120 - 56r_1^* + 24r_2 - 8r_3, \\ g_i &= 1 + r_1^* - r_2 + r_3, & g'_i &= 1 - r_1^* + r_2 - r_3, \\ r_1^* &= (5040m).r_1. \end{aligned}$$

dır.

(3. 16) denkleminin her iki tarafı $e^{(jkh)}$ ile bölünürse

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1}\{a_j e^{(-3ikh)} + b_j e^{(-2ikh)} + c_j e^{(-ikh)} + d_j + e_j e^{(ikh)} + f_j e^{(2ikh)} + g_j e^{(3ikh)}\} = \\ \varepsilon^n \{a'_j e^{(-3ikh)} + b'_j e^{(-2ikh)} + c'_j e^{(-ikh)} + d'_j + e'_j e^{(ikh)} + f'_j e^{(2ikh)} + g'_j e^{(3ikh)}\} \end{aligned} \quad (3. 18)$$

bulunur. (3. 3. 4) denklemi daha basit bir formda

$$(A_1 + iB)\varepsilon^{n+1} = (A - iB)\varepsilon^n, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3. 19)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$A_1 = 2(1 - r_2) \cdot \cos(3kh) \\ + 2(120 - 24r_2) \cdot \cos(2kh) + 2(1191 - 15r_2) \cdot \cos(kh) + 2416 + 80r_2,$$

$$A = 2(1 + r_2) \cdot \cos(3kh) \\ + 2(120 + 24r_2) \cdot \cos(2kh) + 2(1191 + 15r_2) \cdot \cos(kh) + 2416 - 80r_2,$$

$$B = 2((r_1^* + r_3) \cdot \sin(3kh) + (56r_1^* + 8r_3) \cdot \sin(2kh) + (245r_1^* - 19r_3) \cdot \sin(kh))$$

dır. " k " için genişletme faktörü

$$g = \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} \quad (3. 20)$$

dir.

(3. 18) ve (3. 19) denklemleri kullanılarak

$$g = \frac{A-iB}{A_1+iB} \quad (3. 21)$$

bulunur. Burada

$$A_1 = 4 \left[\cos^2 \left(\frac{3kh}{2} \right) + 120\cos^2(kh) + 1191\cos^2 \left(\frac{kh}{2} \right) - 52 \right] - 4r_2 \left[\cos^2 \left(\frac{3kh}{2} \right) + 24\cos 2kh + 15\cos 2kh - 40 \right],$$

$$A = 4 \left[\cos^2 \left(\frac{3kh}{2} \right) + 120\cos^2(kh) + 1191\cos^2 \left(\frac{kh}{2} \right) - 52 \right] + 4r_2 \left[\cos^2 \left(\frac{3kh}{2} \right) + 24\cos 2kh + 15\cos 2kh - 40 \right].$$

$$\text{dır. } A < A_1 \text{ olup } |g| = \sqrt{\frac{g\bar{g}}{A_1\bar{A}_1}} = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A_1^2+B^2}} \leq 1 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla KdVB denklemi için lineerleştirilmiş algoritma şartsız kararlıdır. Sunulan sayısal yöntemin doğruluğunu ölçmek için bir test problemi çözüldü.

3. 4. Sayısal Sonuçlar

KdVB denkleminde elde edilen sayısal çözümler (3. 1)' de verilen tam çözüm arasındaki mutlak hata v viskozite parametresinin değişik değerleri için hesaplandı.

Tablo 3. 2. $v = 0.0005$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri

t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.0011	6E - 4
20	0.00116	6E - 4
30	0.00121	6E - 4
40	0.00126	6E - 4
50	0.00129	6E - 4
60	0.00132	6E - 4
70	0.00135	6E - 4
80	0.00137	6E - 4
90	0.00149	6E - 4
100	0.00279	0.00114

Tablo 3. 3. $v = 0.0005$ değeri için $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

t	I_1	I_2	I_3
10	4.38E - 0.5	0	0
20	4.37E - 0.5	0	0
30	4.37E - 0.5	0	0
40	4.37E - 0.5	0	0
50	4.37E - 0.5	0	0
60	4.36E - 0.5	0	0
70	4.36E - 0.5	0	0
80	4.36E - 0.5	0	0
90	4.35E - 0.5	0	0
100	4.35E - 0.5	0	0

Tablo 3. 4. $v = 0.05$, $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri

t	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	7.13E - 06	3.32E - 06
20	2.17E - 05	1.2E - 05
30	5.69E - 05	3.22E - 05
40	0.00014	7.97E - 05
50	0.000334	0.000192
60	0.000793	0.000455
70	0.001871	0.001074
80	0.00441	0.002533
90	0.0100388	0.005967
100	0.024467	0.014055

Tablo 3. 5. $v = 0.05$ değeri için $\mu = 0.1$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 2.2$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

t	I_1	I_2	I_3
10	0.162675	0.000292	0.000877
20	0.162795	0.000292	0.000877
30	0.162915	0.000293	0.000878
40	0.163035	0.000293	0.000879
50	0.163155	0.000293	0.000879
60	0.163275	0.000293	0.00088
70	0.163395	0.000294	0.000881
80	0.163515	0.000294	0.000882
90	0.163635	0.000294	0.000882
100	0.163755	0.000294	0.000883

Tablo 3. 6. $v = 5$, $\mu = 6$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 4.4$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata norm değerleri

t	$L_{\infty} \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$
10	0.02389	0.008277
20	0.019333	0.00621
30	0.01973	0.006318
40	0.024118	0.007519
50	0.022615	0.007902
60	0.018413	0.004962
70	0.021411	0.007042
80	0.024432	0.008068
90	0.020948	0.007207
100	0.019084	0.005274

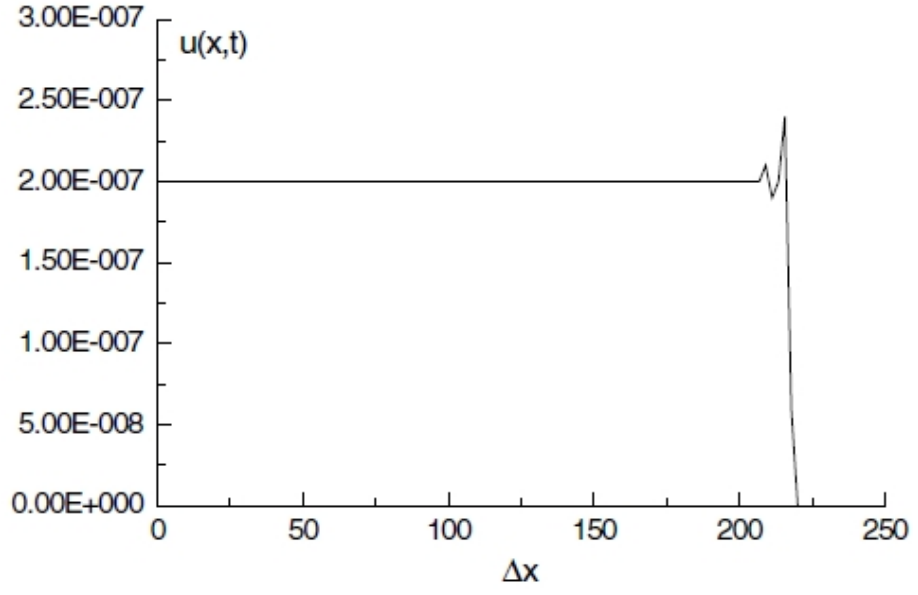
Tablo 3. 7. $v = 1$ değeri için $\mu = 2$, $\Delta t = 0.02$, $\Delta x = 4.4$ ve $\varepsilon = 6$ değerleri için elde edilen korunum sabitleri

Zaman	I_1	I_2	I_3
10	3.299101	0.11925	0.360392
20	3.34715	0.12117	0.366229
30	3.395097	0.12309	0.372065
40	3.443091	0.125009	0.3779
50	3.49108	0.126929	0.383734
60	3.539057	0.128847	0.389565
70	3.587011	0.130763	0.395391
80	3.634917	0.132676	0.401205
90	3.682729	0.134581	0.406996
100	3.730348	0.136474	0.412739

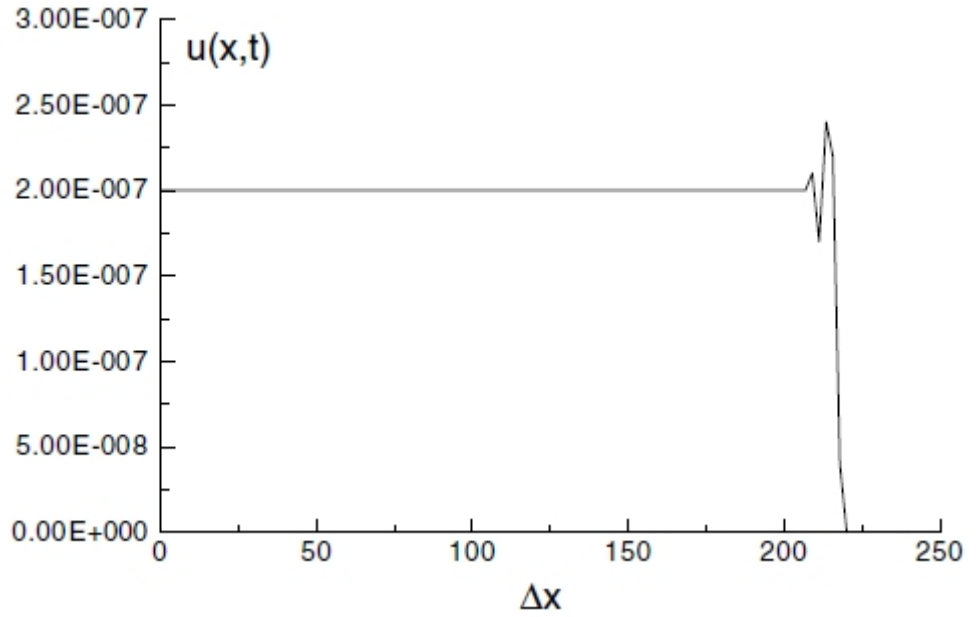
$t = 0$ zamanında (3. 22) denklemi için (3. 1.) denkleminin sınır şartları

$$u(0, t) = 1, \quad u(220, t) = 0 \quad (3. 22)$$

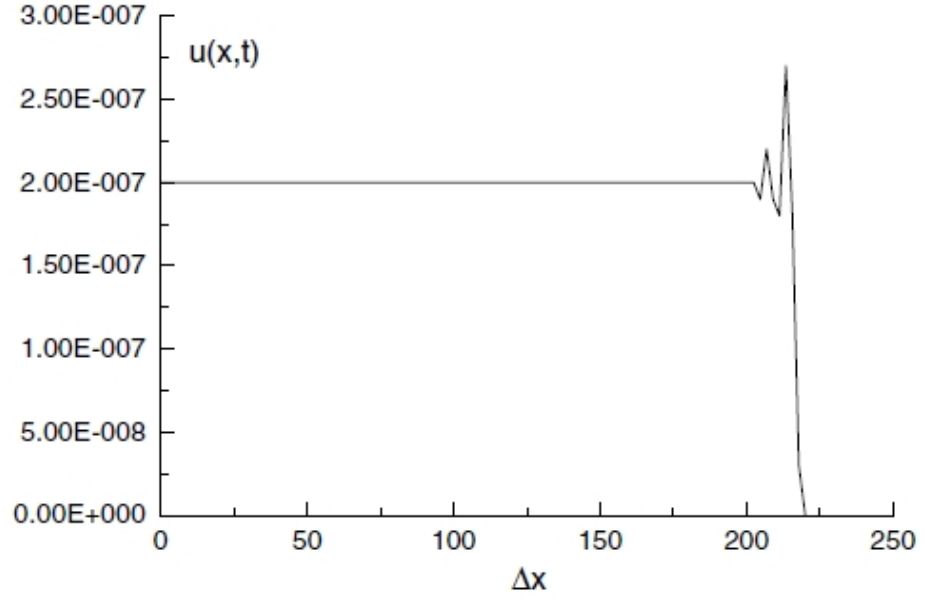
şeklinde alındı.



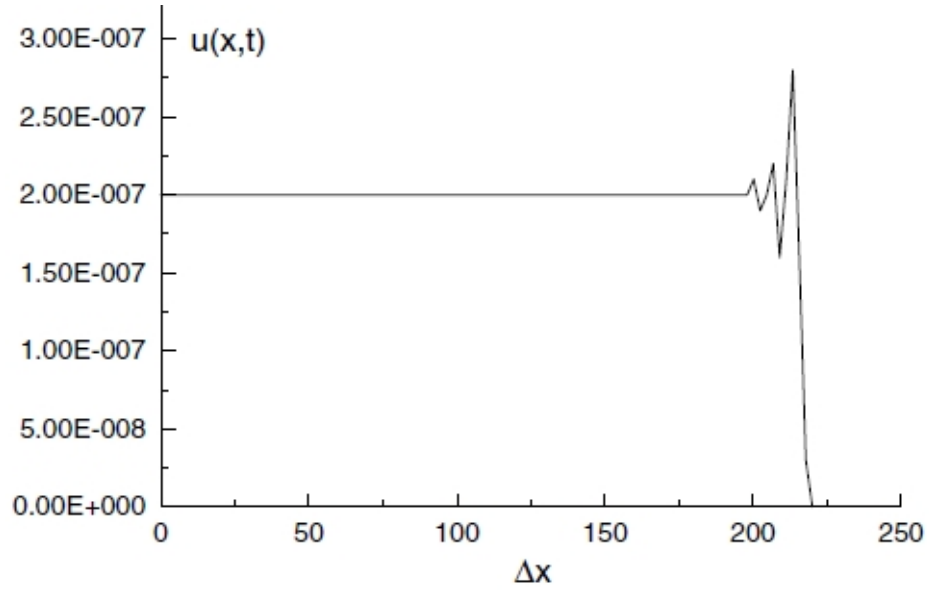
Şekil 3. 1(a). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 10$ zamanındaki hareketi



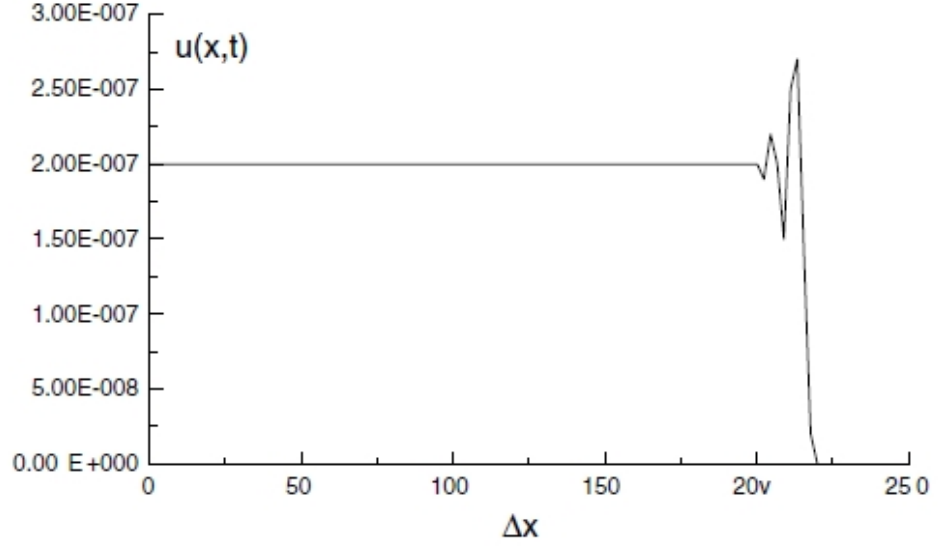
Şekil 3. 1(b). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hareketi



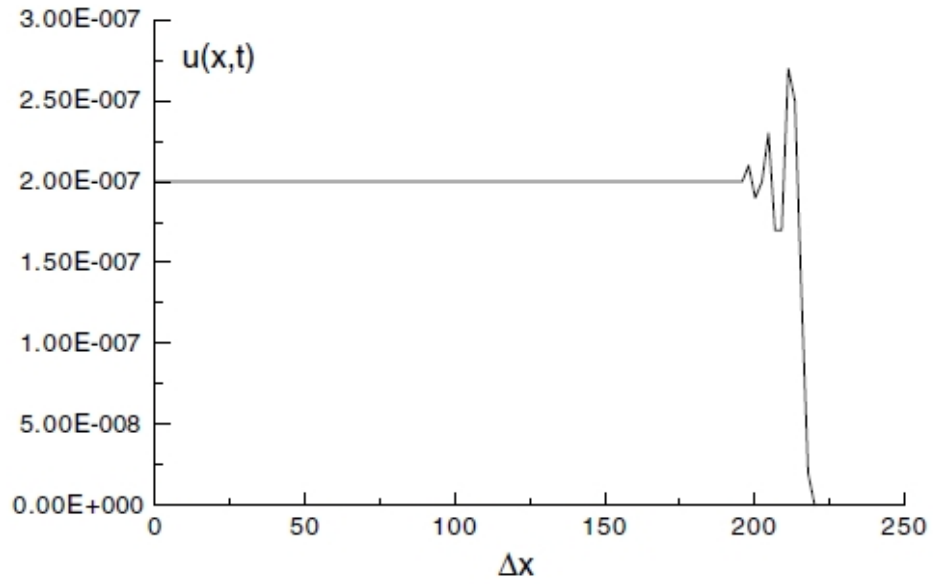
Şekil 3. 1(c). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 30$ zamandaki hareketi



Şekil 3. 1(d). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 40$ zamanındaki hareketi

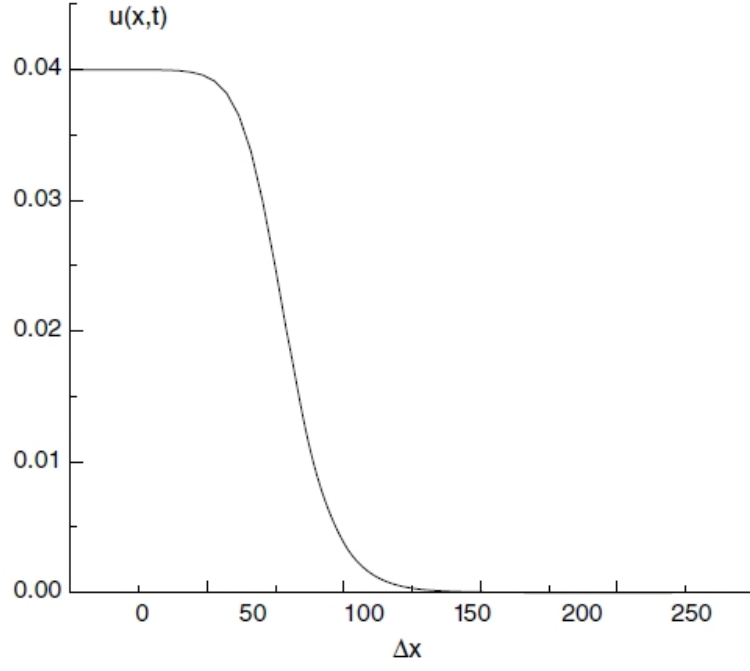


Şekil 3. 1(e). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 50$ zamanındaki hareketi

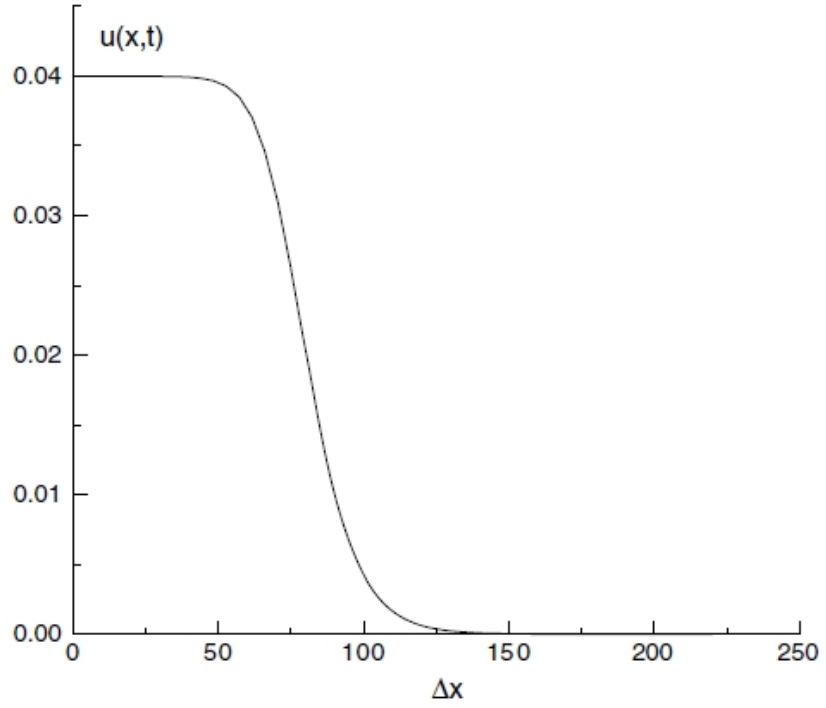


Şekil 3. 1(f). Tek dalganın $v = 0.0005$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 2.2$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 60$ zamanındaki hareketi

Tablo 3. 2, 3. 4 ve 3. 6 yaklaşık çözüm ile mutlak hatayı, Tablo 3. 3, 3. 5 ve 3. 7 ise tam çözümü ile iki normun farklı durumunda v viskozite parametresinin farklı değerlerini göstermektedir. Viskozitenin küçük değeri için elde edilen sonuçların daha iyi olduğu görülmektedir.



Şekil 3. 2(a). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 10$ zamanındaki hareketi



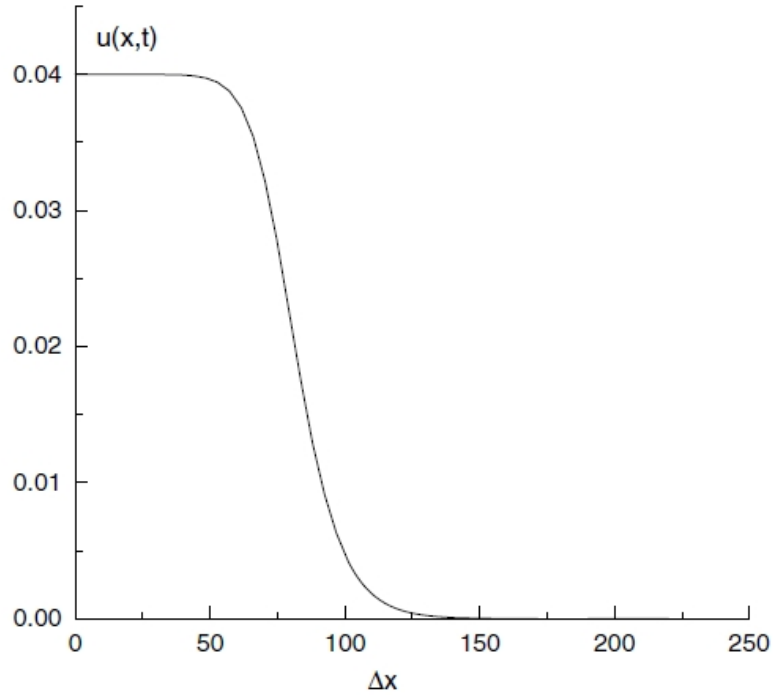
Şekil 3. 2(b). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 20$ zamanındaki hareketi

Şekiller 3. 1(a) - 3. 1(f) şekilleri hesaplanan sayısal çözümün v ' nin küçük değeri için bir şok dalgası gibi davranmakta olduğunu, yukarı ve aşağı doğru salınımlı monoton hale geldiğini gösterir [37, 42, 50, 51, 55, 56].

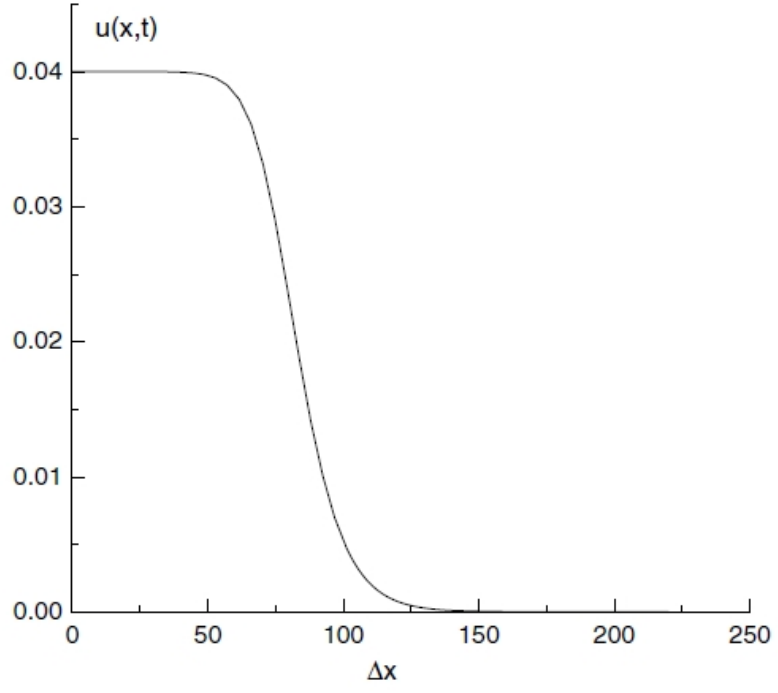
Şekil 3. 2(a) - 3. 2(d) şekilleri $4\mu = v^2$ olduğu zaman sayısal çözümün Burgers' denklemini gibi davranmakta olduğunu ve [52, 53, 57] referansları ile verilen grafiklerle de uyumlu olduğunu göstermektedir.

3. 5 Sonuç

Bu bölümde lineer olmayan KdVB denkleminin sayısal çözümleri septik B- spline kollokasyon yöntemi ile elde edildi. Yöntemin şartsız kararlı olduğu gösterildi. Viskozite parametresinin küçük değerleri için elde edilen sayısal çözümlerin tam çözümlere oldukça yakın olduğu görüldü.



Resim 3. 2(c). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 30$ zamanındaki hareketi



Resim 3. 2(d). Tek dalganın $v = 1$, $\mu = 2$, $\varepsilon = 6$, $\Delta x = 4.4$ ve $\Delta t = 0.02$ için $t = 40$ zamanındaki hareketi

BÖLÜM 4

KdVB DENKLEMİNİN PETROV- GALERKIN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde KdVB denkleminin sayısal çözümleri şekil fonksiyonları kübik, ağırlık fonksiyonları kuadratik B- spline fonksiyonları alınarak Petrov- Galerkin yöntemi ile elde edildi. Yöntemin doğruluğu ve etkinliği için üç tane test problemi ele alındı. Elde edilen denklem sistemleri Thomas algoritması ile çözüldü. Ayrıca elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırıldı. Bu tezde ele aldığımız KdVB denklemini lineer olmayan dağılımlı dalgalar konusunda önemli rol oynayan KdV denklemini ile akışkanlar dinamiğinde önemli bir türbülans model olan Burgers' denklemini ile ilişkilidir.

4. 1. Kübik B- spline Fonksiyonlar ile Petrov- Galerkin Yöntemi

Bu kısımda KdVB denkleminin (2. 2) ile verilen zayıf formundaki U_N yaklaşımında ϕ_i yaklaşım fonksiyonları yerine kübik B- spline fonksiyonlar, ω ağırlık fonksiyonları yerine ise kuadratik B- spline fonksiyonlar alındı. (1. 38) ile verilen KdVB denkleminin sayısal çözümleri için (1. 39) sınır şartları ile (1. 40) başlangıç şartı ele alınacaktır.

x_j düğüm noktalarında $a \leq x \leq b$ problemin çözüm bölgesinin düzgün bir parçalanışı $h = x_{j+1} - x_j, j = -1, 0, \dots, N, N + 1$ olmak üzere

$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{N-1} \leq x_N \leq x_{N+1} = b$ şeklindedir.

Bölüm 1' de (1. 21) ile verilen kuadratik B- spline fonksiyonlar ile

$$U_N(x, t) = \sum_{j=m-1}^{m+1} \phi_j(x) \cdot \delta_j(t) \quad (4. 1)$$

yaklaşım (2. 2) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left(\int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j^e + \varepsilon Z_m \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi \right) \delta_j^e \right] + v \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi \right) - \phi_i \phi_j' \Big|_0^1 \right] \delta_j^e - \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left[\left(\int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi \right) - \phi_i \phi_j'' \Big|_0^1 \right] \delta_j^e \quad (4. 2)$$

$i = 1, 2, 3$ ve $j = m - 2, m - 1, \dots, m + 2$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi matris formunda:

$$A^e \cdot \delta^e + [\varepsilon \cdot Z_m \cdot B^e + v \cdot (C^e - E^e) - \mu \cdot (D^e - F^e)] \cdot \delta^e \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. $\delta^e = (\delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T$ eleman parametrelerini ve δ ise t ' ye göre türevi göstermektedir. $A^e, B^e, C^e, D^e, E^e, F^e$ eleman matrisleri

$$A_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 10 & 71 & 38 & 1 \\ 19 & 221 & 221 & 19 \\ 1 & 38 & 71 & 10 \end{bmatrix},$$

$$B_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -6 & -7 & 12 & 1 \\ -13 & -41 & 41 & 13 \\ -1 & -12 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j' d\xi = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -7 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D_{ij}^e = \int_0^1 \phi_i' \phi_j'' d\xi = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -6 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E_{ij}^e = \phi_i \phi_j' \Big|_0^1 = \frac{3}{h} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve}$$

$$F_{ij}^e = \phi_i \phi_j'' \Big|_0^1 = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde 3×4 biçiminde matrislerdir. Eleman denklemlerinin birleştirilmesi ile

$$A \cdot \delta + [\varepsilon \cdot Z_m \cdot B + v \cdot (C - E) - \mu \cdot (D - F)] \cdot \delta = 0 \quad (4.4)$$

matris denklem sistemi elde edilir. Burada $\delta = (\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N, \delta_{N+1})^T$ global eleman parametreleri ve A, B, C, D, E ve F sırasıyla $A^e, B^e, C^e, D^e, E^e, F^e$ eleman matrislerinden elde edilmiştir.

δ türev parametresinin yerine $\delta = \left(\frac{\delta^{n+1} - \delta^n}{\Delta t}\right)$ ileri sonlu fark yaklaşımı ve δ parametresi yerine de $\delta = \frac{\delta^n + \delta^{n+1}}{2}$ Crank- Nicolson yaklaşımı yazılırsa $(N \times 2) \times (N \times 2)$ tipinde

$$[2A + \varepsilon Z_m B \Delta t + v \Delta t (C - E) - \mu \Delta t (D - F)] \delta^{n+1} = [2A - \varepsilon Z_m B \Delta t - v \Delta t (C - E) + \mu \Delta t (D - F)] \delta^n \quad (4.5)$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada Δt zaman adıdır. (1. 39) ile verilen sınır şartlarının (4. 5) sistemine uygulanmasıyla matris sistemi karesel matrise dönüştürülür. Elde edilen matrisler simetrik olmayan matrislerdir. Her bir zaman adımında

$$\delta^{n*} = \delta^n + \frac{(\delta^n - \delta^{n-1})}{2} \text{ iç iterasyonu iki veya üç defa uygulanarak çözümler iyileştirilir.}$$

(4. 5) matris denkleminin tipik bir elemanı δ_m^n düğüm parametreler cinsinden

$$\lambda_1 \delta_{m-2}^{n+1} + \lambda_2 \delta_{m-1}^{n+1} + \lambda_3 \delta_m^{n+1} + \lambda_4 \delta_{m+1}^{n+1} + \lambda_5 \delta_{m+2}^{n+1} + \lambda_6 \delta_{m+3}^{n+1} = \lambda_7 \delta_{m-2}^n + \lambda_8 \delta_{m-1}^n + \lambda_9 \delta_m^n + \lambda_{10} \delta_{m+1}^n + \lambda_{11} \delta_{m+2}^n + \lambda_{12} \delta_{m+3}^n \quad (4.6)$$

şeklinde yazılabilir. İterasyona başlamak için başlangıç vektörü $\delta^0 = (\delta_{-1}^0, \delta_0^0, \dots, \delta_{N+1}^0)$ olarak alınır. (4. 5) sistemi için $t = 0$ zamanında $[a, b]$ aralığı için yaklaşım yeniden yazılırsa

$$U_N(x, 0) = \sum_{m=-1}^{N+1} \phi_m(x) \cdot \delta_m^0$$

elde edilir. Bunun için, aşağıdaki iki şarta ihtiyaç vardır

$$U_N(x_m, 0) = U(x_m, 0), \quad m = 0, 1, \dots, N,$$

$$U_{N_x}(x_0, 0) = U_x(x_N, 0) = 0.$$

Böylece yukarıdaki şartlar ile aşağıdaki üç-köşegen matris sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ & & \vdots \\ & & \ddots \\ & & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^0 \\ \delta_0^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta_N^0 \\ \delta_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ U(x_N) \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. 1. 1. KdV tipi çözümler

(1. 40) denkleminde $v = 0$, $\mu = -1$ ve $\varepsilon = -6$ parametreleri alınır (1. 40) denkleminin KdV denklemine dönüşür. İlk model problem olarak KdV denkleminin

$$U(0, t) = U(2, t) = 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 3C \cdot \text{sech}^2[Ax + D]$$

başlangıç şartı ile ele alındı. Burada $A = \frac{1}{2} \cdot (\varepsilon \cdot C / \mu)^{1/2}$, $C = 0.3$, $D = -6$ dir. KdV denkleminin analitik çözümü

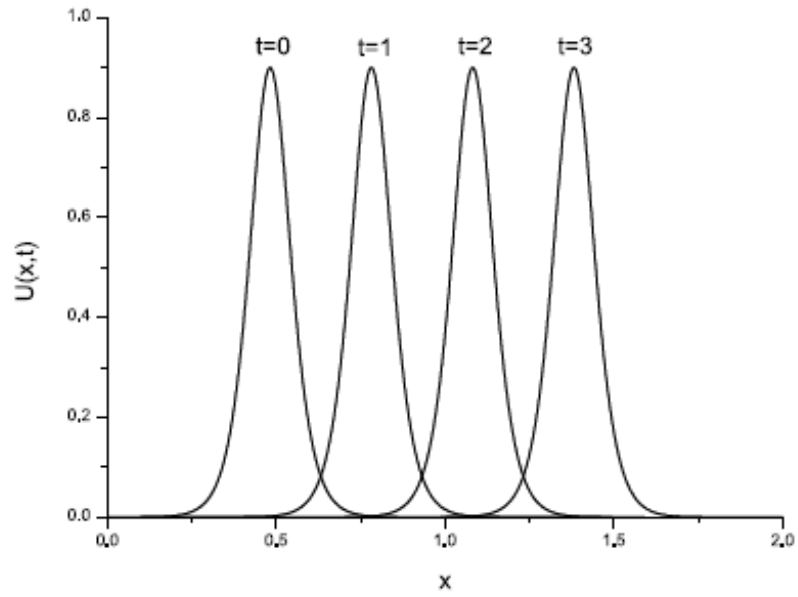
$$U(x, t) = 3C \cdot \text{sech}^2[Ax - Bt + D], \quad B = \varepsilon \cdot C \cdot A$$

şeklinindedir. Bu çözüm C genlikli, x_0 başlangıç konumlu ve x ekseninde sağa doğru εC hızıyla hareket eden bir tek dalgaya karşılık gelmektedir. Bilindiği gibi, KdV denkleminin sığ kanallarda su dalgalarının teorisini açıklar, istikrarlı ve zamanla yayılmayan solitonlar olarak bilinen özel çözümleri gösterirler [47]. Literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırmak için, $\varepsilon = 1$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$, $D = -6$, $h = 0.001$ ve $\Delta t = 0.005$ alındı. Algoritmanın çalışması $0 \leq x \leq 2$ problem bölgesinde $t = 3$ zamanında kadar yapıldı. Mevcut yöntem elde edilen korunum sabitleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının değerleri Tablo 4. 1' de gösterildi. Tablo 4. 1' de görüldüğü gibi L_2 ve L_∞ hata norm değerlerinin yeterince küçük olduğu ve elde edilen korunum sabitlerinin $I_1 = 0.144598$, $I_2 = 0.086759$ ve $I_3 = 0.046850$ analitik değerler ile uyum

içerisinde olduğu görüldü. I_1, I_2 ve I_3 korunum miktarlarının nispi hata yüzdesi $t = 0$ zamanına göre hesaplandı. $\Delta t = 0.005$ için I_1, I_2 ve I_3 korunum sabitlerinin değişim yüzdesi sırasıyla 0.03%, 0.00% ve 0.008% olarak bulundu. Elde edilen sonuçlardan korunum sabitlerinin hemen hemen değişmediği görülmektedir. $t = 0, 1, 2$ ve 3 zaman adımlarında solitanların grafikleri Şekil 4. 1’ de gösterilmiştir.

Tablo 4. 1. Tek dalga çözümü için $0 \leq x \leq 2$ aralığında $C = 0.3$, $h = 0.001$ ve $\Delta t = 0.005$ parametreleri ile elde edilen korunum sabitleri ve hata norm değerleri

t	I_1	I_2	I_3	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0	0.14459	0.08676	0.04685	0.00000	0.00000
1	0.14460	0.08676	0.04685	0.07839	0.20894
2	0.14460	0.08676	0.04685	0.13744	0.38602
3	0.14460	0.08676	0.04685	0.15426	0.42837
t = 3[42]	0.14460	0.08676	0.04685	0.02984	0.07525
t = 3[39]	0.14459	0.08675	0.04685	0.2516	0.6603
t = 3[40]				0.28	



Şekil 4. 1. Tek dalga çözümü için $t = 0, 1, 2$ ve 3 zaman adımlarında $C = 0.3$, $h = 0.001$ ve $\Delta t = 0.005, 0 \leq x \leq 2$ parametreleri ile elde edilen grafikler

Şekilden de görüldüğü gibi artan zamanlarda dalgaların şeklinde, büyüklüğünde ve hızında bir değişiklik olmamıştır.

İkinci problem olarak KdV denklemi μ ' nün değişik değerleri için

$$U(-15, t) = U(15, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4. 7)$$

sınır koşulları ve

$$U(x, 0) = e^{(-x^2)} \quad (4. 8)$$

Maxwellian' ın başlangıç şartı ile ele alındı. Bu problem için solitonun davranışları μ ' nün değerlerine bağlıdır [54]. $\mu \gg \mu_c$ olduğunda Maxwellian başlangıç şartı herhangi bir soliton üretmez fakat hızlı bir şekilde dalga paketleri sergiler. $\mu \approx \mu_c$ olduğunda karışık bir çözüm tipi bulunur ki bu çözüm soliton ve kuyruk oluşturur. $\mu < \mu_c$ için, μ değerlerine göre farklı sayıda solitonlar oluşur. Elde edilen çözümler [42, 47] referanslarındaki sonuçlar ile karşılaştırmak için hesaplamalar $\mu = 0.04, 0.01, 0.001$ ve 0.0005 değerleri için $\varepsilon = 1, h = 0.02$ ve $\Delta t = 0.03$ alınarak $t = 12$ zaman adımına kadar yapıldı. Şekil 4. 2(a)' da görüldüğü gibi $\mu = 0.04$ olduğunda bir soliton dalga ve bir kuyruk oluşur. Şekil 4. 2(b)' de $\mu = 0.01$ için çizildiği gibi Maxwellian başlangıç şartı üç tane soliton oluşturmuştur. $\mu = 0.001$ olduğunda Şekil 4. 2(c)' de görüldüğü gibi 9 tane soliton ve $\mu = 0.0005$ olduğunda Şekil 4. 2(d)' de görüldüğü gibi 12 tane soliton oluşmuştur. Bu grafiklerin [42, 47] referansları ile uyum içinde olduğu görülmektedir. μ ' nün farklı değerleri için elde edilen değerler Tablo 4. 2' de verildi. Elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi program boyunca korunum sabitlerinin değişmediği ve [42, 47] referansları ile uyum içinde olduğu görüldü.

4. 1. 2. Burgers' tipi çözümler

(1. 38) denkleminde $\mu = 0$ ve $\varepsilon = 1$ alındığında Burgers' denklemi elde edilir. Burgers' denklemi

$$U(a, t) = U(b, t) = 0, \quad t \geq 1$$

sınır koşulları ve $t = 1$ alınarak

$$U(x, 0) = \frac{x}{1 + e^{\left[\frac{1}{4v}(x^2 - 1/4)\right]}}$$

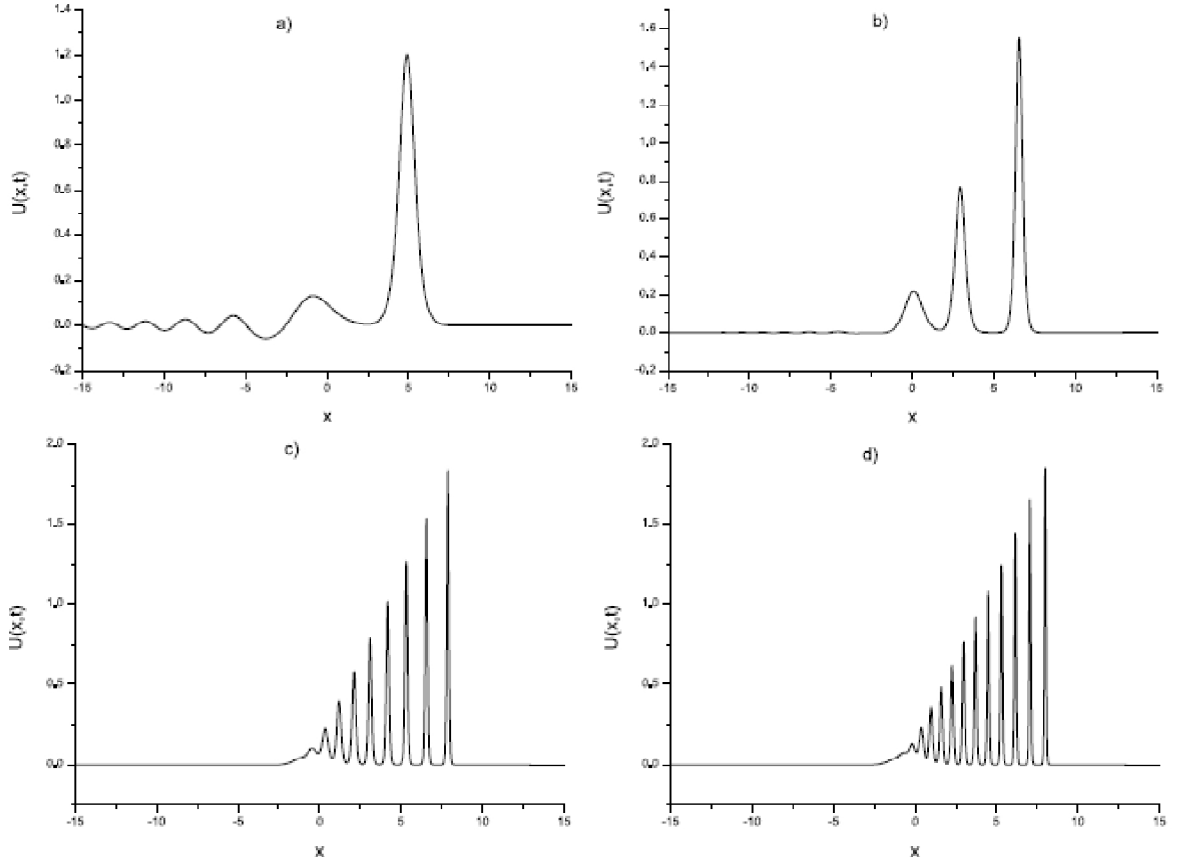
başlangıç şartı ile ele alındı. Burgers' denkleminin analitik çözümü,

$$U(x, t) = \frac{x/t}{1 + \sqrt{t/t_0} e^{[x^2/4vt]}}$$

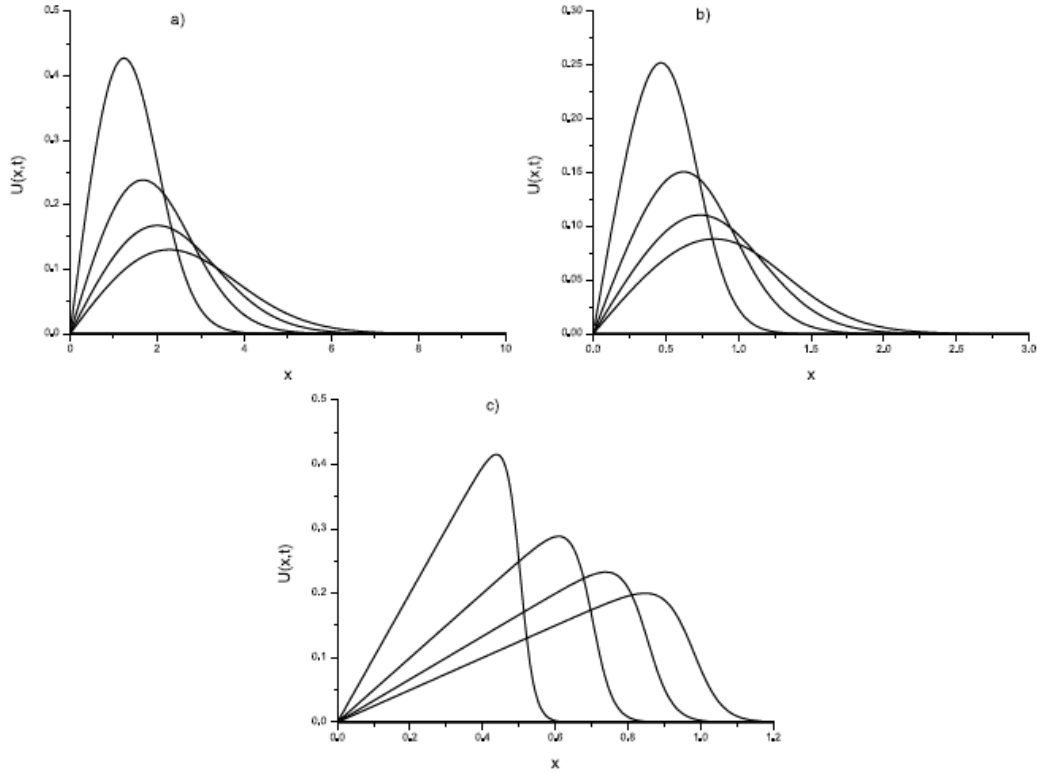
şeklindedir [33]. Burada $t_0 = e^{(1/8v)}$ dir. Bu çözüm şoka benzer çözümleri ifade etmektedir. [39, 42] referansları ile karşılaştırma yapmak için $v = 0.5, h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 10$, $v = 0.05, h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 3$, $v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 1.4$ gibi üç farklı değerler kümesi alındı. Hesaplamalar, $t = 5$ zamanına kadar yapıldı. Elde edilen sonuçlar ile literatürdeki sonuçların karşılaştırılması Tablo 4. 3' de verildi. Tablo 4. 3' de görüldüğü gibi L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük ve [39] referansı ile verilen değerlerden daha iyi olduğu görüldü. Şekil 4. 3, $v = 0.5, h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 10$, $v = 0.05, h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 3$, $v = 0.005, h = 0.005, \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 1.4$ değerleri ile çizilen grafikleri göstermektedir. Bu grafiklerin referans [39]' da çizilen grafiklerle uyum içinde olduğu görülür.

Tablo 4. 2. Maxwellian başlangıç şartının $\mu = 0.04, 0.01, 0.001$ ve 0.0005 değerleri için elde edilen korunum sabitleri

t	μ	I_1	I_2	I_3	μ	I_1	I_2	I_3
0	0.4	1.7724545	1.2533143	0.8729292	0.001	1.7724545	1.0195668	1.0195668
3		1.7725009	1.2532528	0.8728428		1.7724323	1.2477440	1.0138905
6		1.7721406	1.2532358	0.8709166		1.7723277	1.2459644	1.0121144
9		1.7730989	1.2532011	0.7871368		1.7722212	1.2455925	1.0116252
12		1.7672991	1.2531067	0.7337504		1.7721151	1.2453424	1.0112155
0	0.01	1.7724545	1.2533143	0.9857274	0.00005	1.7724545	1.2533143	1.0214468
3		1.7724545	1.2528271	0.9852049		1.7721824	1.2419779	1.0099962
6		1.7724530	1.2526859	0.9850665		1.7710074	1.2364783	1.0029630
9		1.7724540	1.2526720	0.9850535		1.7698574	1.2368802	0.9985923
12		1.7724932	1.2526694	0.9848915		1.7687514	1.2316253	0.9845714



Şekil 4. 2. Maxwellian başlangıç şartının $t = 12$ zamanında a) $\mu = 0.04$, b) $\mu = 0.01$, c) 0.001 , d) $\mu = 0.0005$ değerleri için elde edilen grafikler



Şekil 4. 3. Tek dalganın a) $v = 0.5$, $h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 10$ b) $v = 0.05$, $h = \Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 3$ c) $v = 0.005$, $h = 0.005$, $\Delta t = 0.01$ ve $0 \leq x \leq 1.4$ değerleri için elde edilen grafikler

Tablo 4. 3. $v = 0.5, 0.05$ ve 0.005 için farklı zaman adımlarında elde edilen hata norm değerleri

t	v = 0.5		v = 0.05		v = 0.005	
	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_2 \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$	$L_\infty \times 10^5$
2	0.194	0.120	0.249	0.528	0.837	0.390
3	0.121	0.060	0.215	0.333	0.238	0.263
4	0.369	0.527	0.473	1.639	0.381	0.564
t = 4[42]	0.116	0.389	0.092	0.101	0.212	1.423
t = 4[39]	0.245	0.528	0.461	1.703	0.208	0.692

4. 1. 3. KdVB tipi çözümler

Son problem olarak, KdVB denkleminin davranışı ve farklı v değerlerinin çözüm vektörü üzerindeki etkileri incelendi. Bu problem için

$$U(x, 0) = 0.5 \left[1 - \tanh \frac{|x| - x_0}{d} \right]$$

başlangıç şartı ve

$$U(-50, t) = U(150, t) = 0$$

sınır şartları alındı.

Hesaplamalar için $-50 \leq x \leq 150$ aralığında, $t = 800$ zamanına kadar $x_0 = 25$ ve $d = 5$ değerleri alındı. (1. 38) denklemi için viskozitenin etkilerini görmek amacıyla $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.4$ ile sırasıyla $v = 0, 0.0001, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05, 0.2$ ve 0.4 alındı. $t = 800$ zamanında v ' nin farklı değerleri için elde edilen grafikler Şekil 4. 4' de verildi. KdVB denklemi küçük viskozite değerlerinde KdV denklemi gibi davranmaktadır. Bu gibi durumlarda (1. 38) denklemi, KdV tipi bir denklem olup sırasıyla 10, 10, 9 ve 8 tane solitonlar oluşturmaktadır. Şekil 4. 4(g) ve Şekil 4. 4(h)' de görüldüğü gibi büyük v viskozite değerlerinde KdVB denklemi Burgers' denklemi gibi davranmakta ve çözümler sönümlü bir dalga gibi davranmaktadır. $t = 800$ zamanında $v = 0$ alınarak elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 4. 4' de verildi ve korunum sabitlerinin $t = 800$ zamanına kadar değişmediği görülmüştür.

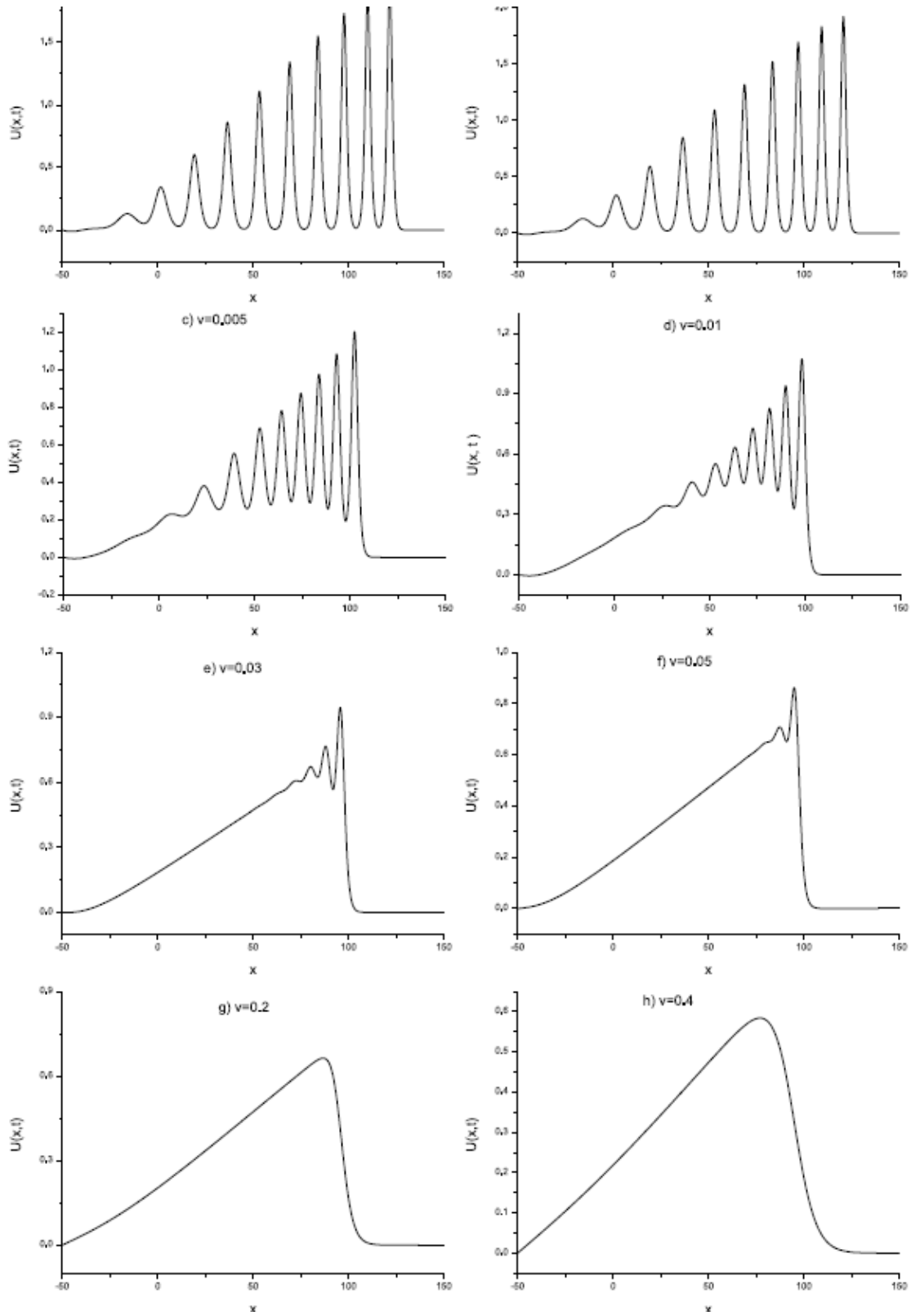
4. 2. Sonuç

KdVB denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için ağırlık fonksiyonu olarak kuadratik ve şekil fonksiyonları olarak kübik B- spline fonksiyonlar alınarak Petrov-Galerkin yöntemi uygulandı. Yöntemin geçerliliği ve önceki çalışmalarla karşılaştırmalar yapabilmek amacıyla uygun problemler seçildi. Farklı v ve μ değerleri için sayısal çözümler elde edildi. Elde edilen değerlerden yöntemin doğru ve etkili olduğu görüldü. Burada, dağılım baskın olduğu zaman sayısal çözümlerin KdV denklemi gibi davrandığı, difüzyon baskın olduğu zaman ise sayısal çözümlerin Burgers' denklemi gibi davrandığı görüldü. KdV denklemi ve Burgers' denklemleri için

elde edilen çözümlerin literatürdeki diğer çözümlerden daha iyi olduğu görüldü. Bu sayısal yöntem sahip olduğu uzun zaman adımına ($t = 800$) rağmen diğer yöntemlerden daha etkin sonuçlar vermiştir. Bu yöntem, aynı zamanda fiziksel olarak önemli olan lineer olmayan problemleri çözmek için etkin bir şekilde kullanılabilir

Tablo 4. 4. $-50 \leq x \leq 150$ aralığında $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.4$ ve $t = 800$ parametreleri için KdV denkleminin çözümlerinden elde edilen korunum sabitleri

Mevcut yöntem			
t	I_1	I_2	I_3
0	50.00030	45.00057	42.30076
100	50.00041	45.00000	42.30013
200	50.00233	44.99839	42.29833
300	50.00386	44.99733	42.29503
400	49.99742	44.99689	42.29549
500	49.98584	44.99668	42.29716
600	49.97126	44.99660	42.29716
700	49.96681	44.99653	42.29153
800	49.97301	44.99635	42.28482
800[39]	49.97291	45.00011	42.30072
800[42]MQ	49.96331	44.99803	42.29974



Şekil 4. 4. $t = 800$, (a) $\nu = 0$, (b) $\nu = 0.0001$, (c) $\nu = 0.005$, (d) $\nu = 0.01$, (e) $\nu = 0.03$, (f) $\nu = 0.05$, (g) $\nu = 0.2$, (h) $\nu = 0.4$ parametreleri için KdV tipi çözümler

BÖLÜM 5

KdVB DENKLEMİNİN SUBDOMAIN SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (1. 38) ile verilen KdVB denkleminin sayısal çözümleri kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak subdomain sonlu eleman yöntemi ile elde edildi. Farklı viskozite değerleri için tek dalga çözümleri elde edildi. Kuartik B- spline fonksiyonlar kullanılarak elde edilen sayısal çözümlerin grafikleri verildi. Subdomain sonlu eleman yönteminin uygulanması ile oluşan denklem sistemleri Thomas algoritması kullanılarak çözüldü.

5. 1. Kuartik B- spline Fonksiyonlar ile Subdomain Yöntemi

Bu bölümde (1. 38) ile verilen KdVB denkleminin kuartik B- spline subdomain yöntemi ile sayısal çözümleri elde edildi. Bu yöntemde W_m ağırlık fonksiyonları

$$W_m = \begin{cases} 1, & x_m \leq x \leq x_{m+1} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad m = 0(1)N \quad (5. 1)$$

şeklindedir. KdVB denklemindeki $U(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümü $U_N(x, t)$ olarak alınırsa bu yaklaşık çözüm kuartik B- spline fonksiyonlar cinsinden

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+1} \delta_j(t) \cdot \phi_j(x) \quad (5. 2)$$

şeklinde yazılır [3]. (5. 1) ile verilen ağırlık fonksiyonu bölüm 2' de (2. 2) ile verilen denklemde yerine yazılırsa her $[x_m, x_{m+1}]$ aralığında

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} 1 \cdot (U_t + \varepsilon U U_x - v U_{xx} + \mu U_{xxx}) dx = 0 \quad (5. 3)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem için bölüm 1' de (1. 18) ile verilen dönüşüm kullanılırsa

$$\int_0^1 h \cdot \left(U_t + \frac{\varepsilon}{h} U U_\xi - \frac{v}{h^2} U_{\xi\xi} + \frac{\mu}{h^3} U_{\xi\xi\xi} \right) d\xi = 0 \quad (5. 4)$$

bulunur. (5. 4) denklemindeki integrali hesaplamak için yaklaşım fonksiyonları yerine bölüm 1' de (1. 27) ile verilen kuartik B- spline fonksiyonlar yazılır ve her bir terim hesaplanırsa

$$\begin{aligned} h \cdot \int_0^1 U_t d\xi &= h \cdot \int_0^1 [\dot{\delta}_{m-2}(1 - 4\xi + 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4) \\ &\quad + \dot{\delta}_{m-1}(11 - 12\xi - 6\xi^2 + 12\xi^3 - 4\xi^4) \\ &\quad + \dot{\delta}_m(11 + 12\xi - 6\xi^2 - 12\xi^3 + 6\xi^4) \\ &\quad + \dot{\delta}_{m+1}(1 + 4\xi + 6\xi^2 + 4\xi^3 - 4\xi^4) + \dot{\delta}_{m+2}(\xi^4)] d\xi \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadeye gerekli integraller alınır ve düzenlemeler yapılırsa

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} U_t dx = h \cdot \int_0^1 U_t d\xi = \frac{h}{5} (\dot{\delta}_{m-2} + 26\dot{\delta}_{m-1} + 66\dot{\delta}_m + 26\dot{\delta}_{m+1} + \dot{\delta}_{m+2})$$

bulunur. Burada $\dot{\delta}$ yerine (2. 8) ile verilen ileri sonlu fark yaklaşımı kullanılırsa

$$h \int_0^1 U_t d\xi = \frac{h}{5\Delta t} [(\delta_{m-2}^{n+1} - \delta_{m-2}^n) + 26(\delta_{m-1}^{n+1} - \delta_{m-1}^n) + 66(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) +$$

$$26\delta_{m+1}^{n+1} - \delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} - \delta_{m+2}^n]$$

(5. 5)

bulunur. İkinci olarak $\varepsilon \int_{x_m}^{x_{m+1}} u \cdot u_x$ integrali

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot Z_m \cdot [u] \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} &= Z_m [(\delta_{m-1} + 11 \delta_m + 11 \delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &\quad - (\delta_{m-2} + 11 \delta_{m-1} + 11 \delta_m + \delta_{m+1})] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (2. 9) ile verilen Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{x_m}^{x_{m+1}} u u_x &= \frac{\varepsilon Z_m}{2} [-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) - 10(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) + 10(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) \\ &\quad + (\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n)] \end{aligned}$$

elde edilir. Üçüncü olarak $v \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{\xi\xi} d\xi$ integrali

$$\begin{aligned} v \cdot u_{\xi} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} &= v \cdot \left[\frac{4}{h} (-\delta_{m-2} - 3\delta_{m-1} + 3\delta_m + \delta_{m+1}) \right] \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \\ &= \frac{4v}{h} [(-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 6\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2})] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (2. 9) ile verilen Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} v \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{\xi\xi} d\xi &= \frac{4v}{2h} [(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) + 2(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) - 6(\delta_m^{n+1} - \delta_m^n) + \\ &2\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n + \delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n] \end{aligned} \quad (5. 6)$$

bulunur. Son olarak $\mu \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{\xi\xi\xi} d\xi$ integrali

$$\begin{aligned} \mu \cdot u_{\xi\xi} \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} &= \mu \left[\frac{12}{h^2} (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1}) \right] \Big|_{x_m}^{x_{m+1}} \\ &= \frac{12\mu}{h^2} [(\delta_{m-1} - \delta_m - \delta_{m+1} + \delta_{m+2}) \\ &- (\delta_{m-2} - \delta_{m-1} - \delta_m + \delta_{m+1})] \\ &= \frac{12\mu}{h^2} [-\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} - 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}] \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. (2. 9) ile verilen Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\begin{aligned} \mu \cdot \int_{x_m}^{x_{m+1}} u_{\xi\xi\xi} d\xi &= \frac{12\mu}{2h^2} [-(\delta_{m-2}^{n+1} + \delta_{m-2}^n) + 2(\delta_{m-1}^{n+1} + \delta_{m-1}^n) - 2(\delta_{m+1}^{n+1} + \delta_{m+1}^n) + \\ &\delta_{m+2}^{n+1} + \delta_{m+2}^n] \end{aligned} \quad (5. 7)$$

hesaplanır. Hesaplanan integraller (5. 4) ile verilen denklemde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} &\delta_{m-2}^{n+1} [1 - EZ_m - M - K] + \delta_{m-1}^{n+1} [26 - 10EZ_m - 2M + 2K] + \delta_m^{n+1} [66 + 6M] + \\ &\delta_{m+1}^{n+1} [26 + 10EZ_m - 2M - 2K] + \delta_{m+2}^{n+1} [1 + EZ_m - M + K] = \delta_{m-2}^n [1 + EZ_m + M + \\ &K + \delta_m - 1n26 + 10EZ_m + 2M - 2K + \delta_m n66 - 6M + \delta_{m+1} n26 - 10E \\ &Z_m + 2M + 2K + \delta_{m+2} n1 - EZ_m + M - K, \quad m=0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5. 8)$$

şeklinde $(N + 4)$ tane bilinmeyen ve $(N + 1)$ tane denklemden oluşan cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$E = \frac{5 \Delta t \varepsilon}{2h} \quad , \quad M = \frac{20 \Delta t v}{2h^2} \quad , \quad K = \frac{60\mu \Delta t}{h^3} \quad (5.9)$$

dir. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için denklem sayısı ile bilinmeyen sayısı eşit olmalıdır. Bölüm 1' de (1. 28) ile verilen yaklaşımlarda U_m ve U'_m ' nin sınırlardaki değerleri kullanılarak δ_{-2} , δ_{-1} , δ_N , δ_{N+1} bilinmeyenleri yok edilerek

$(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. δ_m^{n+1} parametrelerini (5. 8) denklem sisteminden elde edebilmek için δ^0 başlangıç değerlerinin hesaplanması gerekir. δ^0 başlangıç vektörü problem ile verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak hesaplanır. $t = 0$ zamanında δ_j^0 belirlenecek parametreler olmak üzere (5. 2) denklemi

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-2}^{N+1} \delta_j^0(t) \cdot \phi_i(x)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Başlangıç şartlarının x_i düğüm noktalarındaki

$$U_N(x, 0) = U(x_i, 0) \quad i = 0, 1, \dots, N$$

değerleri kullanılarak δ_i^0 parametreleri için $(N + 4)$ tane bilinmeyen ve $(N + 1)$ tane denklem elde edilir. Bölüm 1' de (1. 28) ile verilen yaklaşımlarda U'_m ve U''_m ' nin sınırdaki değerleri kullanılarak δ_{-2}^0 , δ_{-1}^0 ve δ_{N+1}^0 ifadeleri yok edilirse

$(N + 1) \times (N + 1)$ boyutlu cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5. 8) denklem sisteminde başlangıç vektörü kullanılarak istenilen t zamanındaki yaklaşık çözümler iterasyon yardımıyla elde edilir. (5. 8) sisteminin lineer olmayan terimlerine her zaman adımında (2. 11) ile verilen iterasyon formülü üç veya dört defa uygulanırsa U_N yaklaşık çözümleri iyileştirilebilir.

5. 2. KdVB Tipi Çözümler

Bu bölümde KdVB denkleminin farklı v değerleri için çözümleri ele alındı. Bunun için

$$U(x, 0) = 0.5 \left[1 - \tanh \frac{|x| - x_0}{d} \right]$$

başlangıç şartı ile

$$U(-50, t) = U(150, t) = 0$$

sınır şartları alındı.

Hesaplamalar için $-50 \leq x \leq 150$ bölgesinde, $0 \leq t \leq 800$ zamanı boyunca $x_0 = 25$ ve $d = 5$ değerleri ele alındı. (1. 38) denkleminde viskozitenin etkilerini görmek amacıyla $\varepsilon = 0.2$, $\mu = 0.1$, $h = 0.05$, $\Delta t = 0.4$ ile sırasıyla $v = 0, 0.0001, 0.005, 0.01$ ve 0.03 değerleri ele alındı. $t = 800$ zamanında v' nin farklı değerleri sonucunda bulunan grafikler Şekil 5. 1(A)- 5. 1(E) ile gösterildi. Şekil 5. 1(A)- 5. 1(D) görüldüğü gibi KdVB denkleminin küçük viskozite değerlerinde KdV denkleminde hareket ettiği görülmektedir. Bundan dolayı (1. 38) denkleminin, KdV tipi bir denklem olarak da ifade edilebilir. Burada sırasıyla 10, 10, 9, 8 soliton oluşmaktadır. Şekil 5. 1(E)' den de görüldüğü gibi v' nin viskozite değerinde KdVB denkleminin Burgers' denkleminin gibi davranmakta olduğu görülmektedir. Burada ise 4 soliton oluşmaktadır. $t = 800$ zamanında v' nin farklı değerleri için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri Tablo 5. 1- 5. 5 de verilmiş olup, korunum sabitlerinin $t = 800$ zamanına kadar hemen hemen değişmediği gözlenmiştir.

5. 3. Sonuç

KdVB denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için ağırlık fonksiyonu olarak kuartik B- spline fonksiyonlar alınarak Subdomain yöntemi uygulandı. Yöntemin geçerliliği için uygun bir problem seçildi ve farklı v değerleri için çözümler elde edildi. Elde edilen sonuçlardan yöntemin doğru ve etkili olduğu gözlemlendi. Dağılım etkin olduğunda sayısal çözümlerin KdV denkleminin gibi davrandığı, difüzyon etkin olduğunda ise sayısal çözümlerin Burgers' denkleminin gibi davrandığı görüldü. Bu sayısal yöntem $t = 800$ zaman adımı etkin sonuçlar vermiştir.

Tablo 5. 1. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

t	I_1	I_2	I_3
0	50.0000671	45.0004272	42.3007385
100	49.9898438	44.9998596	42.3697540
200	50.0653320	45.0000397	42.4898438
300	49.7624603	45.0002167	42.5646790
400	49.5940674	45.0002563	43.0517242
500	49.5097382	45.0008240	43.3303314
600	49.5764893	45.0007172	43.3879395
700	49.9359467	45.0011353	43.5156769
800	50.2526672	45.0022064	43.9799927

Tablo 5. 2. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.0001$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

t	I_1	I_2	I_3
0	50.0000671	45.0004272	42.3007385
100	49.9899628	44.9973236	42.3661194
200	50.0650757	45.9944550	42.4824951
300	49.7684753	44.9900269	42.5580322
400	49.6005432	44.9864258	43.0295074
500	49.5167023	44.9831696	43.3008301
600	49.5795868	44.9796844	43.3633209
700	49.9282349	44.9746979	43.4837341
800	50.2378204	44.9692505	43.9359375

Tablo 5. 3. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.005$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

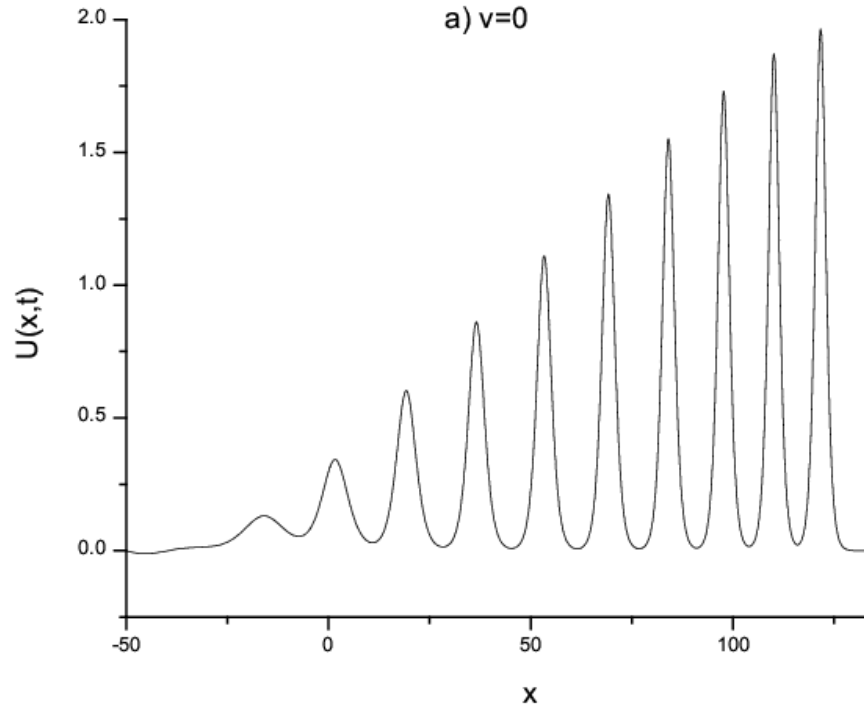
t	I_1	I_2	I_3
0	50.0000671	45.0004272	42.3007385
100	49.9904083	44.8678772	42.1798859
200	50.0535248	44.7343872	42.1219299
300	49.9106812	44.5947052	42.0818420
400	49.7754150	44.4556335	42.1030670
500	49.7091797	44.3160339	42.0886475
600	49.6996307	44.1687256	42.0303314
700	49.8175293	44.0065979	41.9749542
800	49.9578094	43.8409332	41.9638123

Tablo 5. 4. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.01$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

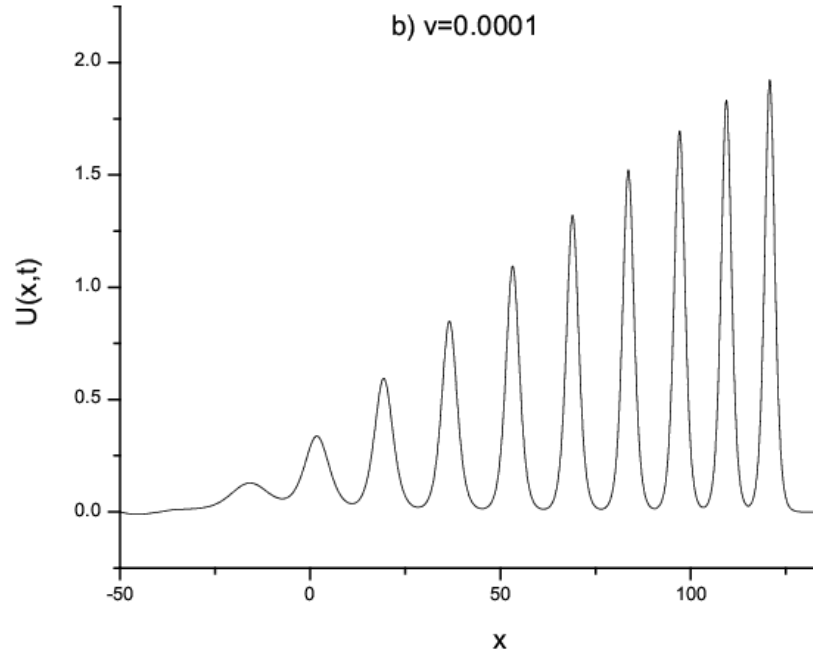
t	I_1	I_2	I_3
0	50.0000671	45.0004272	42.3007385
100	49.9927704	44.7404083	41.9880096
200	50.0420044	44.4868896	41.7354309
300	49.9334839	44.2330353	41.5008087
400	49.8258209	43.9836700	41.2812744
500	49.7773102	43.7348450	41.0466309
600	49.7779205	43.4812073	40.7950104
700	49.8539581	43.2198853	40.5403717
800	49.9482849	42.9552643	40.2865997

Tablo 5. 5. $0 \leq t \leq 800$ aralığında $v = 0.03$ için elde edilen korunum sabitlerinin değerleri

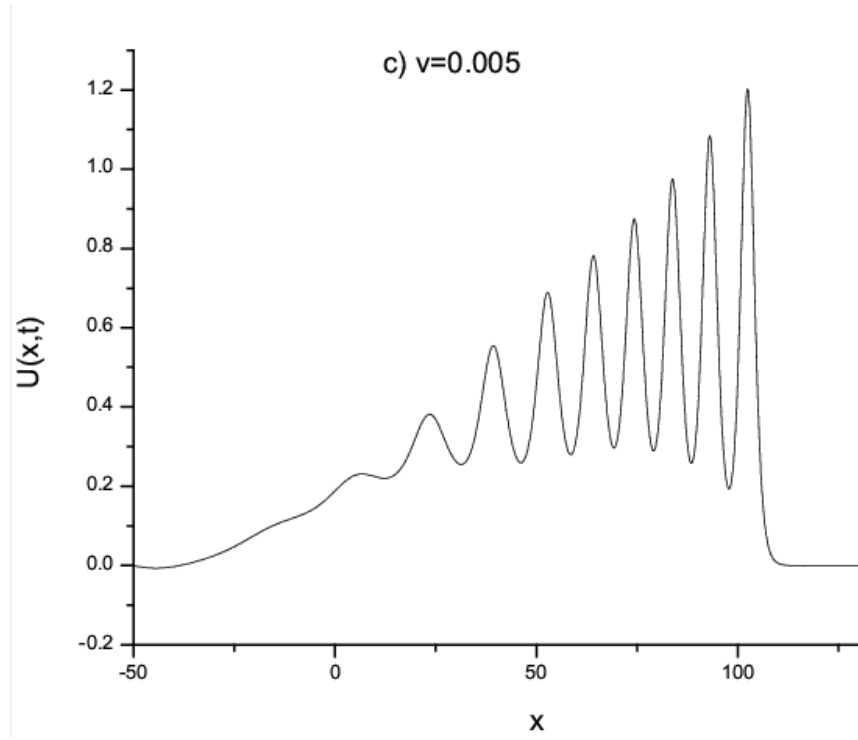
t	I_1	I_2	I_3
0	50.0000671	45.0004272	42.3007385
100	49.9986908	44.2605652	41.2657501
200	50.0095886	43.6014008	40.3569977
300	49.9506653	42.9936981	39.5150116
400	49.9174103	42.4227814	38.7152893
500	49.9256073	41.8775482	37.9459320
600	49.9635223	41.3533386	37.2031067
700	50.0164978	40.8460876	36.4809998
800	50.0718384	40.3541504	35.7766296



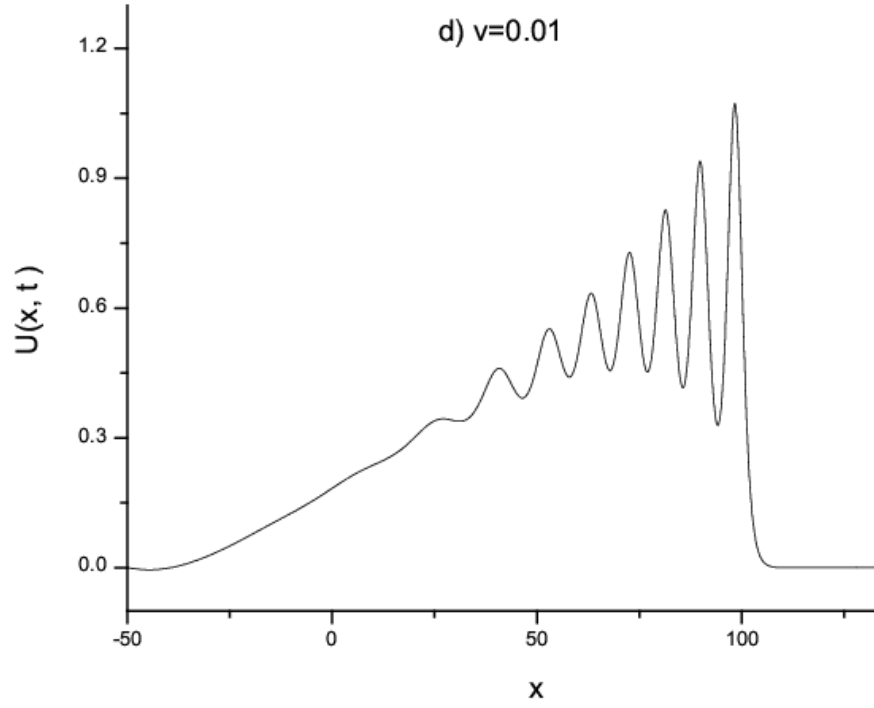
Şekil 5. 1(a). $t = 800$ zamanında ve $v = 0$ parametresi için elde edilen için KdVB tipi çözümlerin grafiği



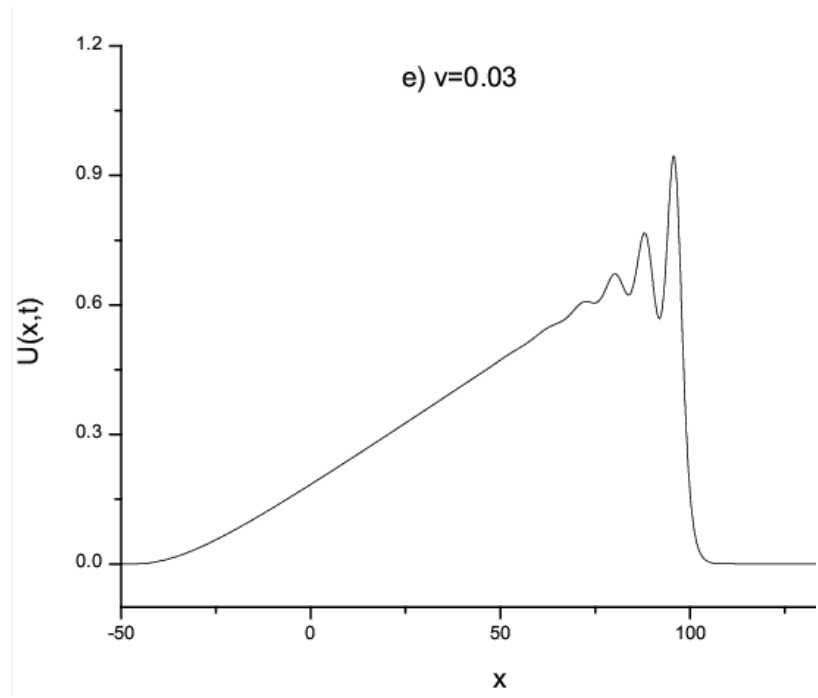
Şekil 5. 1(b). $t = 800$ zamanında ve $\nu = 0.0001$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği



Şekil 5. 1(c). $t = 800$ zamanında ve $\nu = 0.005$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği



Şekil 5. 1(d). $t = 800$ zamanında ve $v = 0.01$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği



Şekil 5. 1(e). $t = 800$ zamanında ve $v = 0.03$ parametresi için elde edilen KdVB tipi çözümlerin grafiği

KAYNAKLAR

- [1] Reddy, J. N., “ An introduction to nonlinear finite element analysis”, *Oxford University Press Inc.*, New York, 2004.
- [2] Karakoç, S. B. G., “ Sonlu elamanlar yöntemi ile modifiye edilmiş eşit genişlikli dalga denkleminin sayısal çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, s. 16- 29, Malatya, 2011.
- [3] Prenter, P. M., “Splines and variational methods”, 1975.
- [4] Uçar ,Y., “ B- spilene sonlu eleman yöntemleri ile Coupled diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri”, *İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora tezi*, Malatya, 2011.
- [5] Vliegenheitart, A. C., “ On finite- difference methods for The Korteweg– de Vries equation”, *J. Eng. Math.*, (5) 137- 155, 1971.
- [6] Goda, K., “ On stability of some finite difference schemes for the Korteweg– de Vries equation”, *Phys. Soc. Jpn.*, 39, 229- 236, 1975.
- [7] Greig, I. S., Morris, J. L. L., “ A Hopscotch method for the Korteweg– de Vries equation”, *J. Comput. Phys.*, 20, 64- 80, 1976.
- [8] Alexander, M. E., Morris, J. L. L., “ Galerkin methods for some model equations for nonlinear dispersive wave”, *J. Comput. Phys.*, 30, 428- 451, 1979.
- [9] Serna, J. M. S., Christie, I., “ Petrov- Galerkin methods for nonlinear dispersive wave”, *J. Comput. Phys.*, 39, 94- 102, 1981.
- [10] Schoombie, S. W., “ Spline Petrov- Galerkin methods for the numerical solution of the Korteweg– de Vries equation”, *IMA J. Numer. Anal.*, 2, 95- 109, 1982.
- [11] Gardner, L. R. T., Ali, A. H. A., “ A numerical solutions for the Korteweg– de Vries equation using Galerkins method with Hermite polynomial shape

- functions”, in: *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulations*, s. 81–93, Istanbul, 1988.
- [12] Zabusky, N. J., Kruskal, M. D., “ Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states”, *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240– 243, 1965.
- [13] Lax, P. D., “ Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves”, *Commun., Pure Appl., Math.*, 21, 467– 490, 1968.
- [14] Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., Miura, R. M., “ Korteweg– de Vries equation and generalizations VI. Methods for exact solution”, *Commun., Pure Appl., Math.*, 27, 97–133, 1974.
- [15] Rathish Kumar, B. V., Mehra, M., “ Time accurate solutions of Korteweg– de Vries equation using wavelet Galerkin method. *Department of Mathematics and Scientific Computing*”, Indian Institute of Technology.
- [16] Bateman, H., “ Some recent researches on the motion of fluids”, *Mon., Weather Rev.*, 43, 163- 170, 1915.
- [17] Burgers, J. M., “ Mathematical example illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion”, *Trans. Roy. Neth. Acad. Sci.* 17, 1- 53, 1939.
- [18] Burgers, J. M., “ A mathematical model illustrating the theory of turbulence”, *Adv. Appl. Mech. vol. I, Academic Press*, 171- 199, 1948.
- [19] Arora, G., Singh, B. K., “ Numerical solution of Burgers’ equation with modified cubic B- spline differential quadrature method”, *Department of Mathematics, School of Allied Sciences*.
- [20] Asaithambi, A., “ Numerical solution of the Burgers’ equation by automatic differentiation”, *Appl. Math. Comput.*, 216, 2700– 2708, 2010.
- [21] Cecchi, M. M., Nociforo, R., Grego, P. P., “ Space- time finite elements numerical solution of Burgers problems”, *Le Matematiche LI* , Fasc. I, 43- 57, 1996.

- [22] Ozis, T., Aksan, E. N., Ozdes, A., “ A finite element approach for solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 139, 43- 57, 2003.
- [23] Khalifa, A. K., Noor, K. I., Noor, M. A., “ Some numerical methods for solving Burgers’ equation”, *Int. J. Phys. Sci.*, 216 (10), 3105– 3110, 2010.
- [24] Korkmaz, A., Dag, I., “ Shock wave simulations using sinc differential quadrature method”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 28 (6), 654– 674, 2011.
- [25] Korkmaz, A., Dag, I., “ Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers’ equation”, *J. Franklin Inst.*, 348 (10), 2863–2875, 2011.
- [26] Korkmaz, A., Dag, I., “ Cubic B- spline differential quadrature methods and stability for Burgers’ equation”, *Eng. Comput. Int. J. Comput. Aided Eng.*, 30 (3), 320– 344, 2013.
- [27] Ozis, T., Esen, A., Kutluay, S., “ Numerical solution of Burgers’ equation by quadratic B- spline finite elements”, *Appl. Math. Comput.*, 165, 237– 249, 2005.
- [28] Aksan, E. N., “ Quadratic B- spline finite element method for numerical solution of the Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 174, 884– 896, 2006.
- [29] Altparmak K., “ Numerical solution of Burgers’ equation with factorized diagonal Pade approximation”, *Int. J. Numer.*, 21 (3), 310– 319, 2011.
- [30] Ramadan, M. A., El- Danaf, T. S., Abd Alaal, F. E. I., “ Application of the non-polynomial spline approach to the solution of the Burgers’ equation”, *Open Appl. Math.*, 15– 20, 2007.
- [31] Cole, J. D., “ On a quasi- linear parabolic equations occurring in aerodynamics”, *Quart. Appl. Math.*, 9, 225– 236, 1951.

- [32] Kutluay, S., Bahadir, A. R., Ozdes, A., “ Numerical solution of one- dimensional Burgers’ equation: explicit and exact- explicit finite difference methods”, *J. Comput. Appl. Math.*, 103, 251– 261, 1999.
- [33] Kutulay, S., Esen, A., Dag, I., “ Numerical solutions of the Burgers’ equation by the least- squares quadratic B- spline finite element method”, *J. Comput. Appl. Math.*, 167, 21–33, 2004.
- [34] Aksan, E. N., Ozdes, A., “ A numerical solution of Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 156, 395– 402, 2004.
- [35] Benton, E. R., Platzman, G. W., “ A table of solutions of the one dimensional Burgers’ equations”, *Quart. Appl. Math.*, 30, 195– 212, 1972.
- [36] Su, C. H., Gardner, C. S., “ Derivation of the Korteweg- de Vries and Burgers’ equation”, *J. Math. Phys.*, 10, 536– 539, 1969.
- [37] Johnson, R. S., “ A nonlinear equation incorporating damping and dispersion” , *J. Fluid Mech.*, 42, 49- 60, 1970.
- [38] Bona, J. L., Schonbek, M. E., “ Travelling wave solutions to the Korteweg- de Vries-Burgers’ equation”, *Proc. Roy. Soc. Edingburg*, 101A, 207– 226, 1985.
- [39] Saka, B., Dag, I., “ Quartic B- spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation” *Appl. Math. And Comput.*, 215, 746- 758, 2009.
- [40] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ali, A. H. A., “ A finite element solution for the Korteweg- de Vries equation using cubic B- splines”, *U. C. N. W. Maths*, 1989.
- [41] Nguyen, H., Reynen, J., “ A space– time finite element approach to Burgers’ equation”, *Numerical Methods for Non-Linear Problems, 2, Pineridge Publisher, Swansea*, 1982, pp., 718– 728.
- [42] Zaki, S. I. , “ A quintic B- spline finite elements scheme for the KdVB equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 188, 121- 134, 2000.

- [43] Zaki, S. I., “ Solitary waves of the Korteweg- de Vries– Burgers’ equation”, *Comput. Phys. Commun.*, 126, 207– 218, 2000.
- [44] Dag, I., Saka, B., Boz, A., “ B- spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers’ equation”, *Appl. Math. Comput.*, 166, 506– 522, 2005.
- [45] Ramadan, M. A., El- Danaf, T. S., Alaal, F., “ A numerical solution of the Burgers’ equation using septic B- splines”, *Chaos Soliton. Fract.*, 26, 795– 804, 2005.
- [46] Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., “ A Galerkin approach to the solution of Burgers’ equation”, *U. C. N. W. Maths*, 1990.
- [47] Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., Ali, A. H. A., “ Simulations of solitons using quadratic spline finite elements”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 92,231– 243, 1991.
- [48] Ali, A. H. A., Gardner, L. R. T., Gardner, G. A., “ Numerical studies of the Korteweg- de Vries– Burgers’ equation using B- spline finite elements”, *J. Math. Phys. Sci.*, 27, 37– 53, 1993.
- [49] Aly El-Danaf, T. S., “ Septic B- spline method of the Korteweg- de Vries– Burger’s equation”, Mathematics Department, *Faculty of Science*, Menoufia University, Shibin El-Kom, Egypt, Received 15 February 2006; received in revised form 14 April 2006; accepted 18 May 2006 Available online 31 July 2006.
- [50] El- Danaf, T. S., “ Numerical solution of the KdV– Burgers’ equation by quintic spline method”, *Studia Univ, Babes-Bolyai, Mathematica XLVII(2)*, 2002.
- [51] Halford W. D., Vlieg- Hulstman, M., “ The Korteweg- de Vries– Burgers’ equation: A reconstruction of exact solutions. Wave Motion”, 14, 267– 271, 1991.
- [52] Dag, I., Saka, B., Boz, A., “ B- spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers’ equation”, *J. Appl. Math. Comput.*, 2004.
- [53] Prenter, P. M., “ Splines and variational methods”, *Wiley*, 1975.

- [54] Jeffrey, A., Kakutani, T., “ Weak non- linear dispersive waves, A discussion centered around the KdV equation”, *SIAM Rev.*, 14, 582- 643, 1972.
- [55] Withman G.B., “Linear and nonlinear waves”, 2. New York: *John Wiley*; 1974. p. 1555– 65.
- [56] Wadati M., Toda M., “The exact n- soliton solution of the Korteweg- de Vries equation”, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1972; 32: 1403– 11.
- [57] Dag, I., Irk D., Saka B., “A numerical solution of the Burger’s equation using cubic B-splines”, *J. Appl. Math. Comput.*, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

10.04.1976 tarihinde Antakya’ da doğdu. İlköğrenimini Osmaniye’ de, ortaöğrenimini Adana’da tamamladı.1999 yılında Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 1999 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’na matematik öğretmeni olarak atandı. 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını tamamladı. Halen Niğde Anadolu İmam Hatip lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve iki çocuk babasıdır.