T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gökhan TÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2017
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Gökhan TÜRK tarafından hazırlanan “DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA” adlı tez çalışması 16.06.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN	…………………..
Danışman	
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	…………………..
Üye	
Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Gökhan TÜRK

Tarih: 16.06.2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÖRDÜNCÜ MERTEBEDEN RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gökhan TÜRK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2017, 38 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN
Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; negatif olmayan başlangıç şartları ve pozitif parametreler için

$$u_{n+1} = \frac{au_{n-1}}{b + cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1} = \frac{dv_{n-1}}{e + fu_{n-3}^{q}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin pozitif çözümlerinin global kararlılık karakteri literatürdeki bazı sonuçlar genelleştirilerek incelenmiştir. Ayrıca, denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği, sınırlılığı, sınırsızlığı ve salınımlılığı parametrelere ve başlangıç şartlarına bağlı olarak incelenmiş ve teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; bu çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Fark denklem sistemi, Global asimptotik kararlılık, Periyodiklik, Yarı dönme.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE RATIONAL DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS OF ORDER FOUR

Gökhan TÜRK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2017, 38 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assist. Prof. Dr. Ozan ÖZKAN
Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems related to difference equations were given.

In the second section, informations about global asymptotic stability of some difference equations and systems studied before were given.

In the third section, the difference equation system

$$u_{n+1}=\frac{au_{n-1}}{b+cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{dv_{n-1}}{e+fu_{n-3}^{q}},\ n\in\mathbb{N}_0$$

where the non-negative initial conditions and positive parameters was defined and global stability character of this difference equation system was studied. Also, periodicity, boundedness, unboundedness and oscillation of the positive solutions of this equation system were investigated depending on the parameters and the initial conditions. Some numerical examples of the theoretical results were given.

In the fourth section, some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Difference equation, System of difference equation, Global asymptotic stability, Periodicity, Semicycle.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda hiçbir desteği esirgemeyen saygıdeğer hocam Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya ve teknik desteklerinden dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Çalışmamı, beni bu günlere getiren, her anlamda destekleyen, mutluluk kaynağım olan, hayatımdaki en değerli iki insan: sevgili annem Şengül TÜRK ve sevgili babam Halil TÜRK'e ithaf ediyorum.

Gökhan TÜRK
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET .... **iv**

ABSTRACT .... **v**

ÖNSÖZ .... **vi**

İÇİNDEKİLER .... **vii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Fark Denklemleri İle İlgili Genel Tanım Ve Teoremler 2

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **8**

2.1. Fark Denklemlerinin Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar 8
2.2. Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar 11

3. $u_{n+1}=\dfrac{au_{n-1}}{b+cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1}=\dfrac{dv_{n-1}}{e+fu_{n-3}^{q}}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİNİN KARARLILIĞI** **17**

3.1. Sistemin Kararlılığı 17
3.2. Salınım Davranışı ve Sınırsız Çözümlerin Varlığı 21
3.3. Periyodiklik 22
3.4. Nümerik Örnekler 25

4. SONUÇ VE ÖNERİLER **33**

KAYNAKLAR **34**

ÖZGEÇMİŞ **38**

1. GİRİŞ

Doğadaki güzellik ve dengenin sırrı aslında bir bakıma matematik ile ilişkilendirilebilir. Evrendeki matematiksel düzene Fibonacci sayıları ve logaritmik spiraller örnek olarak verilebilir. Bilimsel ve teknolojik gelişmeler matematik biliminden elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak gerçekleştirilmektedir. Bilgisayarlarda kullanılan algoritmalardan tartılardaki ölçme işlemine, meteorolojideki hava tahminlerinden ekonomideki hesaplamalara kadar günlük hayatımızın pek çok yerinde matematiğe rastlamak mümkündür.

Uygulamalı matematik daha çok istatistik, kriptoloji vb. alanlarda kullanılan matematiğin bir alt dalıdır. Bu tez çalışmasında, uygulamalı matematiğin önemli konularından biri olan fark denklemleri ele alınmıştır. Fark denklemleri sadece diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi gibi alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde de ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alır. Bu denklemlerde bağımsız değişken tam sayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla, fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bu bakımdan fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Örneğin; genetik alanda kuşaklar arasındaki genetik başkalaşım ile ekonomide fiyat değişim problemleri açıkça sürekli olmayan problemlerdir. Çünkü bağımsız değişkenler birinde kuşak; diğerinde duruma göre gün, hafta, ay veya yıldır ve ikisi de doğal olarak ayrık cümleler üzerinde tanımlıdır (Elaydi, 1999).

Fark denklemleri son 20 yıl içerisinde pek çok bilim insanının ilgisini çekmiştir. Bu nedenle, fark denklemleri alanında zengin bir literatür meydana gelmiştir. Çalışmamızın ikinci bölümde fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin önemli çalışma alanlarından biri olan global asimptotik kararlılık ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bir literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde literatürdeki denklem ve sistemler göz önünde bulundurularak dördüncü mertebeden rasyonel bir fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin pozitif çözümlerinin global davranışı incelenmiştir. Daha sonra, bu rasyonel fark denklem sisteminden elde edilen çözümlerin kararlılığına dair bazı bilgiler verilmiştir. Ayrıca, bu fark denklem sisteminin salınım davranışı, sınırsız çözümlerinin varlığı ve periyodikliği incelenmiştir. Buna ilaveten çalışılan fark denklem sistemi için sayısal örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde yapılan çalışmaların sonuçları ve konuya dair bazı öneriler verilmiştir.

1.1. Fark Denklemleri İle İlgili Genel Tanım Ve Teoremler

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x),\ y''(x),\ ...,\ y^{(n)}(x),\ ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu kısımda x in tam sayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde durulacak ve bu denklemler ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilecektir (Camouzis ve Ladas, 2008; Elaydi, 1999).

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilirse, fark denklemlerinin n'in sürekli olduğu durumda diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır. Örneğin, $a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$ denklemi birinci mertebeden bir fark denklemi, $a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$ denklemi ise ikinci mertebeden bir fark denklemidir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Teorem 1.1. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f\ :\ I^{k+1} \to I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}\right),\ \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1}$$

fark denkleminin bir tek $\left\{x_n\right\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır.

Tanım 1.2. Eğer $\bar{x}$ için (1.1) denkleminde $\bar{x} = f\left(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}\right)$ ise $\bar{x}$ noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 1.3. Eğer her $n>0$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu *J* aralığına (1.1) denkleminin değişmez aralığı denir.

Tanım 1.4. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -k$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.1) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü *p* periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif *p* tam sayısına da asal periyod denir.

Tanım 1.6. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü er geç *p* periyotludur denir ve *p* bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.7. I reel sayıların bir aralığı, $k \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $i = 0,1,\ldots k$ olmak üzere

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}\right)$$

ifadesi $f : I^{k+1} \to I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} q_i z_{n-i}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.2}$$

denklemine (1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} q_i \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.3}$$

polinom denklemine ise (1.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki karakteristik denklemi denir.

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.8. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 1.9. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 1.10. $\{x_n - \overline{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir.

Tanım 1.11. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine sınırlıdır denir.

Teorem 1.3. I, J birer reel sayı aralığı, $f : I^{k+1} \times J^{k+1} \to I$ ve $g : I^{k+1} \times J^{k+1} \to J$ sürekli türevlere sahip fonksiyonlar ise her $(x_{-i}, y_{-i}) \in I \times J$ başlangıç şartı için

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}) \\ y_{n+1} &= g(x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k}) \end{aligned}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.4}$$

fark denklem sisteminin bir tek $\{(x_n, y_n)\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır.

Tanım 1.12. Eğer $(\overline{x}, \overline{y})$ için (1.4) fark denklem sisteminde

$$\overline{x} = f(\overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}), \ \overline{y} = g(\overline{x}, \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) \tag{1.5}$$

ise $(\overline{x}, \overline{y})$ noktasına (1.4) sisteminin denge noktası denir.

(1.4) fark denklem sistemi

$$X_n = (x_n, \ldots, x_{n-k}, y_n, \ldots, y_{n-k})^T, \ F : I^{k+1} \times J^{k+1} \to I^{k+1} \times J^{k+1}$$

ve

$$F\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ . \\ . \\ . \\ u_k \\ v_0 \\ . \\ . \\ . \\ v_k \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_k)) \\ x_0 \\ . \\ . \\ x_{k-1} \\ g(x_0, \ldots, x_k, y_0, \ldots, y_k) \\ y_0 \\ . \\ . \\ y_{k-1} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

olmak üzere

$$X_{n+1} = F(X_n),\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.7}$$

vektör formunda yazılabilir. Eğer (1.4) sistemi $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasına sahip ise (1.7) sisteminin denge noktasının $\bar{X} = (\bar{x}, \ldots, \bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{y})^T$ şeklinde olduğu açıktır. Bu çalışmada, herhangi bir vektörün veya matrisin normu $\|\bullet\|$ ile ve (1.7) sisteminin bir başlangıç şartı $X_0 \in I^{k+1} \times J^{k+1}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 1.13. (1.7) sisteminin bir denge noktası $\bar{X}$ olsun. Bu durumda,

(a) Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$ olduğunda her $n \geq 0$ için $\|X_n - \bar{X}\| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyor ise $\bar{X}$ denge noktası kararlıdır denir. Aksi taktirde $\bar{X}$ denge noktası kararsızdır denir.

(b) Eğer $\bar{X}$ denge noktası kararlı ve $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$ olduğunda $n \to \infty$ iken $X_n \to \bar{X}$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sayısı bulunabiliyor ise $\bar{X}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer $n \to \infty$ iken $X_n \to \bar{X}$ ise $\bar{X}$ denge noktasına global çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{X}$ denge noktası hem lokal asimptotik kararlı hem de global çekim noktası ise $\bar{X}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

J_F, F dönüşümünün $\bar{X}$ denge noktasındaki Jacobian matrisi olmak üzere (1.7) sisteminin $\bar{X}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş sistemi

$$Z_{n+1} = J_F Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.8}$$

şeklindedir ve (1.7) sisteminin $\bar{X}$ denge noktası civarındaki karakteristik polinomu $a_0 > 0$ olmak üzere

$$P(\lambda) = a_0 \lambda^{2(k+1)} + a_1^{2k+1}\lambda + \cdots + a_{2k+1}\lambda + a_{2(k+1)} \tag{1.9}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 1.4. (1.7) sisteminin denge noktası $\overline{X}$ olsun. Eğer J_F Jacobian matrisinin tüm öz değerleri $\overline{X}$ denge noktası için $|\lambda|<1$ açık birim diskinde ise $\overline{X}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. Eğer öz değerlerden en az biri için $|\lambda|>1$ ise $\overline{X}$ denge noktası kararsızdır (Kocic, 1993).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin önemli çalışma alanlarından biri olan global asimptotik kararlılık ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir. Çalışmada kullanılan literatürün özeti iki ayrı kısımda ele alınmıştır.

2.1. Fark Denklemlerinin Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar

Bu kısımda, fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir.

El-Owaidy ve El-Afifi (2000); a_n ve b_n periyodik diziler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a_n + b_n x_n}{x_{n-1}} \tag{2.1.1}$$

fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Gibbons ve arkadaşları (2000); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta\, y_{n-1}}{\gamma + y_n} \tag{2.1.2}$$

lineer olmayan fark denklemini incelemişlerdir.

Amleh ve arkadaşları (2001); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a - b x_{n-1}}{A + B x_{n-2}} \tag{2.1.3}$$

fark denklemini incelemişlerdir.

Yan ve Li (2003); $\alpha \geq 0$ ve $\beta, \gamma > 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}} \tag{2.1.4}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişler ve pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2003); α, β negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n} \tag{2.1.5}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Chatterjee ve arkadaşları (2003); bütün parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}} \tag{2.1.6}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını, çözümlerinin sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Zeng ve arkadaşları (2004); pozitif parametreler ve sürekli bir $g(x)$ fonksiyonu için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g\left(x_{n-k}\right)} \tag{2.1.7}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik karalılığını incelemişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n} \tag{2.1.8}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının kararlılığını incelemişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n} \tag{2.1.9}$$

fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2005); negatif olmayan parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^{p}} \tag{2.1.10}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir.

Aloqeili (2006); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}}{a + x_{n-k} x_n} \tag{2.1.11}$$

fark denkleminin çözümlerini ve denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Camouzis ve arkadaşları (2007); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}} \tag{2.1.12}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Chen ve Li (2009); pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^{p}} \tag{2.1.13}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Battaloğlu ve arkadaşları (2010); negatif olmayan parametreler ve başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-(k+1)}^{p}} \tag{2.1.14}$$

fark denkleminin denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2013); Riccati fark denkleminin iki özel hali olan

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n},\ y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n} \tag{2.1.15}$$

denklemlerinin çözümlerinin Fibonacci sayılarıyla ilişkili olduğunu gösterip, bu denklemlerin çözümlerinin asimptotik özelliklerini incelemişlerdir.

Wang ve Feng (2016); katsayılar pozitif ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = a + b x_n e^{-x_{n-1}} \tag{2.1.16}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını ve sınırlılığını incelemişlerdir.

2.2. Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar

Bu kısımda, fark denklem sistemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir.

Kulenović ve Nurkanović (2005); başlangıç şartları ve parametreler negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a+x_n}{b+y_n},\ y_{n+1} = \frac{c+y_n}{d+z_n},\ z_{n+1} = \frac{e+z_n}{f+x_n} \tag{2.2.1}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Yalçınkaya (2010); başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_n+x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1} \tag{2.2.2}$$

fark denklem sisteminin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için bir yeter şart elde etmiştir.

Kurbanlı (2011); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1} \tag{2.2.3}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Stević (2011); bütün parametreler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-1}}{by_n x_{n-1}+c},\ y_{n+1}=\frac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1}+\gamma} \tag{2.2.4}$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu ve daha sonra da katsayılar iki periyotlu reel terimli diziler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a_n x_{n-1}}{b_n y_n x_{n-1}+c_n},\ y_{n+1}=\frac{\alpha_n x_{n-1}}{\beta_n y_n x_{n-1}+\gamma_n} \tag{2.2.5}$$

sisteminin çözülebileceğini göstermiştir.

Berg ve Stević (2011); u_0 ve v_0 kompleks başlangıç şartları olmak üzere

$$\begin{aligned}
&u_{n+1}=\frac{v_n}{1+v_n},\ v_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}\\
&u_{n+1}=\frac{v_n}{1+u_n},\ v_{n+1}=\frac{u_n}{1+v_n}\\
&u_{n+1}=\frac{u_n}{1+v_n},\ v_{n+1}=\frac{v_n}{1+u_n}
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

fark denklem sistemlerinin Riccati fark denkleminin genel çözümü yardımıyla açık olarak çözülebileceğini gösterip, genel çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Stević (2012); reel başlangıç şartları için u_n, v_n, w_n ve s_n dizilerinin her biri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{u_n}{1+v_n},\ y_{n+1} = \frac{w_n}{1+s_n} \tag{2.2.7}$$

sisteminin on altı muhtemel durumundan on dört tanesinde çözülebilir olduğunu göstermiştir.

El-Metwally (2013); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}},\ y_n = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}} \tag{2.2.8}$$

fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını bularak bu çözümlerin bazı özelliklerini incelemiştir.

Yazlık ve arkadaşları (2013); çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}} \tag{2.2.9}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini Padovan sayıları ile ilişkilendirerek formülüze edip, bu formülleri kullanarak her bir sistem için bütün çözümlerin asimptotik olarak tek bir noktaya yakınsadığını göstermişler ve sistemler için tanımlanamaz çözümleri veren başlangıç şartlarının kümelerini belirlemişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2014); reel başlangıç şartları için p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin her biri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n},\ y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \tag{2.2.10}$$

sisteminin on altı muhtemel durumundan on dört tanesinde çözülebilir olduğunu göstermişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2014); başlangıç şartları çözümleri iyi tanımlı yapan keyfi reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\pm 1 + y_{n-1}x_{n-3}y_{n-5}}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\pm 1 + x_{n-1}y_{n-3}x_{n-5}} \tag{2.2.11}$$

sistemlerinin açık çözümlerini elde edip, bu çözümlerin davranışlarını incelemişlerdir.

El-Dessoky (2015); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_n(\pm 1 \pm y_{n-1}y_{n-2})}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_{n-2}}{y_n(\pm 1 \pm x_{n-1}x_{n-2})} \tag{2.2.12}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemiştir.

Elsayed ve Ahmed (2015); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2} \pm z_{n-1}}, \; y_{n+1} = \frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2} \pm x_{n-1}}, \; z_{n+1} = \frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2} \pm y_{n-1}} \tag{2.2.13}$$

üç boyutlu rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Gümüş ve Soykan (2016); (2.1.10) denklemini iki boyutlu bir sisteme genelleştirerek pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$u_{n+1} = \frac{\alpha u_{n-1}}{\beta + \gamma v_{n-2}^{p}}, \; v_{n+1} = \frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 u_{n-2}^{p}} \tag{2.2.14}$$

fark denklem sistemini tanımlamışlar ve bu sistemin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2016); parametreler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{a_0 x_n + b_0 y_{n-2}}, \; y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{a_1 y_n + b_1 z_{n-2}}, \; z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{a_2 z_n + b_2 x_{n-2}} \tag{2.2.15}$$

üç boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişler ve literatürde var olan sonuçları genelleştirerek bu sistemin iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

El-Dessoky (2016); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm 1\pm t_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm 1\pm x_n t_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}},$$
$$z_{n+1}=\frac{z_{n-3}}{\pm 1\pm y_n x_{n-1} t_{n-2} z_{n-3}},\quad t_{n+1}=\frac{t_{n-3}}{\pm 1\pm z_n y_{n-1} x_{n-2} t_{n-3}} \tag{2.2.16}$$

dört boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığını incelemiştir.

El-Dessoky (2016); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-2}}{-1+y_{n-2} x_{n-1} y_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{\pm 1\pm x_{n-2} y_{n-1} x_n} \tag{2.2.17}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemiştir.

El-Dessoky (2016); başlangıç şartları reel sayılar ve katsayılar tam sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{z_{n-3}}{a_1+b_1 z_n y_{n-1} x_{n-2} z_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{a_2+b_2 x_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}},$$
$$z_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{a_3+b_3 y_n x_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}} \tag{2.2.18}$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve periyodikliğini incelemiştir.

Elsayed ve Alghamdi (2016); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-7}}{1+x_{n-7} y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-7}}{\pm 1\pm x_{n-3} y_{n-7}} \tag{2.2.19}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Tollu ve Yalçınkaya (2017); (2.2.14) sistemini üç boyutlu bir sisteme genelleştirerek pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$u_{n+1}=\frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1+\gamma_1 v_{n-2}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2+\gamma_2 w_{n-2}^{q}},\ w_{n+1}=\frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3+\gamma_3 u_{n-2}^{r}} \tag{2.2.20}$$

fark denklem sistemini tanımlamışlar ve bu sistemin çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada sistemin denge noktaları, lokal asimptotik kararlılığı, global asimptotik kararlılığı, iki periyotlu çözümlerin varlığı ve çözümlerin bu periyodik çözümlere yakınsaması parametrelerin durumuna göre incelenmiştir.

3. $u_{n+1}=\frac{au_{n-1}}{b+cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{dv_{n-1}}{e+fu_{n-3}^{q}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN KARARLILIĞI

Bu bölümde; başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar ve katsayılar pozitif reel sayılar olmak üzere

$$u_{n+1}=\frac{au_{n-1}}{b+cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{dv_{n-1}}{e+fu_{n-3}^{q}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığı, salınım davranışı, sınırsız ve iki periyotlu çözümlerin varlığı konuları incelenmiştir.

(3.1) fark denklem sistemi $u_n=\left(\frac{e}{f}\right)^{1/q}x_n,\ v_n=\left(\frac{b}{c}\right)^{1/p}y_n,\ \alpha=\frac{a}{b},\ \beta=\frac{d}{e}$ değişken değiştirmeleri ile

$$x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-1}}{1+y_{n-3}^{p}},\ y_{n+1}=\frac{\beta y_{n-1}}{1+x_{n-3}^{q}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.2}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle, çalışmamızın kalan kısmında (3.1) denklem sisteminin yerine (3.2) denklem sistemini incelemek yeterli olacaktır.

Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda (3.2) denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı, ikinci kısımda çözümlerin salınım davranışı ve sınırsız çözümlerin varlığı, üçüncü kısımda ise iki periyotlu çözümlerin varlığı konuları ele alınmıştır. Dördüncü ve son kısımda da (3.2) denklem sistemi için nümerik örnekler verilmiştir.

3.1. Sistemin Kararlılığı

Bu kısımda, (3.2) sisteminin iki denge noktasının lokal ve global asimptotik kararlılığı incelenmiştir. $\alpha,\beta\in(0,1)$ iken $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ noktasının (3.2) sisteminin negatif olmayan tek denge noktası olduğu aşikardır. $\alpha,\beta\in(1,\infty)$ iken (3.2) sisteminin tek pozitif denge noktası $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)=\left((\beta-1)^{1/q},(\alpha-1)^{1/p}\right)$ şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1.1. (3.2) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) Eğer $\alpha,\beta\in(0,1)$ ise (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer $\alpha\in(1,\infty)$ veya $\beta\in(1,\infty)$ ise (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktası kararsızdır.

(c) Eğer $\alpha,\beta\in(1,\infty)$ ise (3.2) sisteminin $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)=\left((\beta-1)^{1/q},(\alpha-1)^{1/p}\right)$ pozitif denge noktası kararsızdır.

İspat. (3.2) sistemi

$$X_n=\left(x_n,x_{n-1},x_{n-2},x_{n-3,}y_n,y_{n-1},y_{n-2,}y_{n-3}\right)^T \tag{3.3}$$

ve

$$F\left(\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ z_2\\ z_3\\ t_0\\ t_1\\ t_2\\ t_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha z_1/(1+t_3^p)\\ z_0\\ z_1\\ z_2\\ \beta t_1/(1+z_3^q)\\ t_0\\ t_1\\ t_2\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

olmak üzere $X_{n+1}=F(X_n)$ şeklinde yazılabilir.

(a) (3.2) sisteminin $\bar{X}_0=(0,0,0,0,0,0,0,0)^T$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş formu

$$X_n=\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n-1}\\ x_{n-2}\\ x_{n-3}\\ y_n\\ y_{n-1}\\ y_{n-2}\\ y_{n-3}\end{pmatrix}\text{ ve } J_F(\bar{X}_0)=\begin{pmatrix} 0&\alpha&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\beta&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

olmak üzere

$$X_{n+1} = J_F(\bar{X}_0)X_n \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $J_F(\bar{X}_0)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^4\left(\lambda^2-\alpha\right)\left(\lambda^2-\beta\right)=0 \tag{3.7}$$

şeklinde verilir. Eğer $\alpha,\beta\in(0,1)$ ise (3.7) karakteristik denkleminin tüm kökleri $|\lambda|<1$ açık birim diskinin içindedir. Bu nedenle, Teorem 1.4'e göre (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer $\alpha\in(1,\infty)$ veya $\beta\in(1,\infty)$ ise (3.7) karakteristik denkleminin bazı kökleri için $|\lambda|>1$ eşitsizliğinin sağlandığı açıktır. Bu nedenle, Teorem 1.4'e göre (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktası kararsızdır.

(c) (3.2) sisteminin

$$\bar{X}_{\alpha,\beta}=\left((\beta-1)^{1/q},(\beta-1)^{1/q},(\beta-1)^{1/q},(\beta-1)^{1/q},(\alpha-1)^{1/p},(\alpha-1)^{1/p},(\alpha-1)^{1/p},(\alpha-1)^{1/p}\right)^T \tag{3.8}$$

pozitif denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş formu

$$A=-\frac{p\left(\beta-1\right)^{1/q}\left(\alpha-1\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\alpha},\ B=-\frac{q\left(\alpha-1\right)^{\frac{1}{p}}\left(\beta-1\right)^{\frac{q-1}{q}}}{\beta} \tag{3.9}$$

ve

$$X_n=\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n-1}\\ x_{n-2}\\ x_{n-3}\\ y_n\\ y_{n-1}\\ y_{n-2}\\ y_{n-3}\end{pmatrix},\ J_F(\bar{X}_{\alpha,\beta})=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&A\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&B&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

olmak üzere

$$X_{n+1} = J_F(\bar{X}_{\alpha,\beta})X_n \tag{3.11}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $J_F(\bar{X}_0)$ matrisinin karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^8-2\lambda^6+\lambda^4-\frac{pq(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

şeklinde verilir. Burada,

$$P(1)=-\frac{pq(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta}<0 \text{ ve } \lim_{\lambda\to\infty}P(\lambda)=\infty \tag{3.13}$$

olduğundan $P(\lambda)$ polinomu $(1,\infty)$ aralığında bir köke sahiptir. Bu nedenle, Teorem 1.4'e göre $\alpha,\beta\in(1,\infty)$ iken $(\bar{x}_2,\bar{y}_2)=\left((\beta-1)^{1/q},(\alpha-1)^{1/p}\right)$ pozitif denge noktası kararsızdır.

Teorem 3.1.2. Eğer $\alpha,\beta\in(0,1)$ ise (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 3.1.1. den $\alpha,\beta\in(0,1)$ için (3.2) sisteminin $(\bar{x}_1,\bar{y}_1)=(0,0)$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, ispatı tamamlamak için

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(0,0) \tag{3.14}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (3.2) sisteminden $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$0\le x_{n+1}=\frac{\alpha x_{n-1}}{1+y_{n-3}^p}\le\alpha x_{n-1},\quad 0\le y_{n+1}=\frac{\beta y_{n-1}}{1+x_{n-3}^q}\le\beta y_{n-1} \tag{3.15}$$

yazılabilir. Burada

$$0\le x_1=\frac{\alpha x_{-1}}{1+y_{-3}^p}\le\alpha x_{-1},\quad 0\le y_1=\frac{\beta y_{-1}}{1+x_{-3}^q}\le\beta y_{-1}$$

$$0\le x_2=\frac{\alpha x_0}{1+y_{-2}^p}\le\alpha x_0,\quad 0\le y_2=\frac{\beta y_0}{1+x_{-2}^q}\le\beta y_0$$

$$0\le x_3=\frac{\alpha x_1}{1+y_{-1}^p}\le\alpha x_1\le\alpha^2 x_{-1},\quad 0\le y_3=\frac{\beta y_1}{1+x_{-1}^q}\le\beta y_1\le\beta^2 y_{-1}$$

$$0 \le x_4 = \frac{\alpha x_2}{1+y_0^p} \le \alpha x_2 \le \alpha^2 x_0, \quad 0 \le y_4 = \frac{\beta y_2}{1+x_0^q} \le \beta y_2 \le \beta^2 y_0$$

olup, tümevarım yöntemi yardımıyla $x_{-i},\ y_{-i}\ (i=0,1)$ başlangıç şartları olmak üzere

$$0 \le x_{2n-i} \le \alpha^n x_{-i},\ 0 \le y_{2n-i} \le \beta^n y_{-i}, \tag{3.16}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $\alpha, \beta \in (0,1)$ iken (3.16) da verilen eşitsizliklerde $n \to \infty$ için limit alınırsa (3.14) limiti elde edilir ki ispat tamamlanmış olur.

3.2. Salınım Davranışı ve Sınırsız Çözümlerin Varlığı

Bu kısımda, (3.2) sisteminin pozitif çözümlerinin $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left((\beta-1)^{1/q}, (\alpha-1)^{1/p}\right)$ denge noktası civarında salınımı ve sistemin sınırsız çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. $\alpha, \beta \in (1, \infty)$ ve (3.2) sisteminin bir çözümü $\{(x_n, y_n)\}_{n=-3}^{\infty}$ olsun. Eğer

(a) $x_{-1}, x_{-3} < \bar{x}_2;\ x_0, x_{-2} \ge \bar{x}_2;\ y_{-1}, y_{-3} \ge \bar{y}_2;\ y_0, y_{-2} < \bar{y}_2$

veya

(b) $x_{-1}, x_{-3} \ge \bar{x}_2;\ x_0, x_{-2} < \bar{x}_2;\ y_{-1}, y_{-3} < \bar{y}_2;\ y_0, y_{-2} \ge \bar{y}_2$

ise $\{(x_n, y_n)\}_{n=-3}^{\infty}$ çözümü $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left((\beta-1)^{1/q}, (\alpha-1)^{1/p}\right)$ denge noktası civarında bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.

İspat. (a) da verilen eşitsizliklerin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, (3.2) sisteminden

$$x_1 = \frac{\alpha x_{-1}}{1+y_{-3}^p} < \bar{x}\ , \quad x_2 = \frac{\alpha x_0}{1+y_{-2}^p} \ge \bar{x}, \quad x_3 = \frac{\alpha x_1}{1+y_{-1}^p} < \bar{x}, \quad x_4 = \frac{\alpha x_2}{1+y_0^p} \ge \bar{x},\ ... \tag{3.17}$$

ve

$$y_1 = \frac{\beta y_{-1}}{1+x_{-3}^q} \ge \bar{y}, \quad y_2 = \frac{\beta y_0}{1+x_{-2}^q} < \bar{y}, \quad y_3 = \frac{\beta y_1}{1+x_{-1}^q} \ge \bar{y}, \quad y_4 = \frac{\beta y_2}{1+x_0^q} < \bar{y},\ ... \tag{3.18}$$

yazılabilir. Buradan tümevarım yöntemi yardımıyla ispat tamamlanır. (İspat (b) de verilen eşitsizlikler için de benzer şekilde yapılabilir.)

Teorem 3.2.2. Eğer $\alpha,\beta \in (1,\infty)$ ise (3.2) sistemi sınırsız çözümlere sahiptir.

İspat. Teorem 3.2.1. den, $n \in \mathbb{N}_0$ için $x_{2n-3} < \overline{x}_2$, $x_{2n-2} \geq \overline{x}_2$, $y_{2n-3} \geq \overline{y}_2$ ve $y_{2n-2} < \overline{y}_2$ olmak üzere genelliği bozmadan $\{(x_n, y_n)\}_{n=-3}^{\infty}$ dizisinin (3.2) sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, (3.2) sisteminden

$$x_{2n+2} = \frac{\alpha x_{2n}}{1+y_{2n-2}^{p}} > x_{2n},\ y_{2n+1} = \frac{\beta y_{2n-1}}{1+x_{2n-3}^{q}} > y_{2n-1} \tag{3.19}$$

ve

$$x_{2n+1} = \frac{\alpha x_{2n-1}}{1+y_{2n-3}^{p}} < x_{2n-1},\ y_{2n+2} = \frac{\beta y_{2n}}{1+x_{2n-2}^{q}} < y_{2n} \tag{3.20}$$

yazılabilir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}(x_{2n}, y_{2n}) = (\infty, 0) \text{ ve } \lim_{n\to\infty}\left(x_{2n-1}, y_{2n-1}\right) = (0,\infty)$$

elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Periyodiklik

Bu kısımda, (3.2) sisteminin iki periyotlu çözümlerinin varlığı konusu incelenmiştir.

Teorem 3.3.1. Eğer $\alpha = \beta = 1$ ise (3.2) sistemi iki periyotlu çözüme sahiptir ve bu çözüm $r, s, \mu, v > 0$ olmak üzere

$$\cdots,(0,r),(0,s),(0,r),(0,s),\cdots \tag{3.21}$$

veya

$$\cdots,(\mu,0),(v,0),(\mu,0),(v,0),\cdots \tag{3.22}$$

şeklindedir.

İspat. (3.2) sisteminden $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$x_{2n+1} = \frac{x_{2n-1}}{1+y_{2n-3}^{p}},\ x_{2n+2} = \frac{x_{2n}}{1+y_{2n-2}^{p}} \tag{3.23}$$

ve

$$y_{2n+1} = \frac{y_{2n-1}}{1+x_{2n-3}^{q}},\ y_{2n+2} = \frac{y_{2n}}{1+x_{2n-2}^{q}} \tag{3.24}$$

yazılabilir. (3.23) ve (3.24) ten

$$x_{2n-1} = x_{-1}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+y_{2i-3}^{p}},\ x_{2n} = x_0\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+y_{2i-2}^{p}} \tag{3.25}$$

ve

$$y_{2n-1} = y_{-1}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+x_{2i-3}^{q}},\ y_{2n} = y_0\prod_{i=0}^{n-1}\frac{1}{1+x_{2i-2}^{q}} \tag{3.26}$$

elde edilir.

Eğer $(x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0) = (0,0,0,0)$ ise $x_n = 0$ ve $(y_{2n-1}, y_{2n}) = (y_{-1}, y_0)$ olduğu açıktır. Bu durumda, $y_{-3} = y_{-1} = r > 0$ ve $y_{-2} = y_0 = s > 0$ olmak üzere

$$\cdots,(0,r),(0,s),(0,r),(0,s),\cdots \tag{3.27}$$

çözümü elde edilir ki bu (3.2) sisteminin iki periyotlu bir çözümüdür.

Benzer şekilde, $(y_{-3}, y_{-2}, y_{-1}, y_0) = (0,0,0,0)$ ise $y_n = 0$ ve $(x_{2n-1}, x_{2n}) = (x_{-1}, x_0)$ olduğu açıktır. Bu durumda, $x_{-3} = x_{-1} = \mu > 0$ ve $x_{-2} = x_0 = \nu > 0$ olmak üzere

$$\cdots,(\mu,0),(\nu,0),(\mu,0),(\nu,0),\cdots \tag{3.28}$$

elde edilir ki bu çözüm (3.2) sisteminin iki periyotlu bir çözümüdür, böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. Eğer $\alpha = \beta = 1$ ise (3.2) sisteminin bütün çözümleri iki periyotlu çözümlere yakınsar.

İspat. (3.2) sisteminden,

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = -\frac{x_{2n-1}y_{2n-3}^p}{1+y_{2n-3}^p} \leq 0, \; y_{2n+1} - y_{2n-1} = -\frac{y_{2n-1}x_{2n-3}^q}{1+x_{2n-3}^q} \leq 0 \tag{3.29}$$

ve

$$x_{2n+2} - x_{2n} = -\frac{x_{2n}y_{2n-2}^p}{1+y_{2n-2}^p} \leq 0, \; y_{2n+2} - y_{2n} = -\frac{y_{2n}x_{2n-2}^q}{1+x_{2n-2}^q} \leq 0 \tag{3.30}$$

yazılabilir. (3.29) ve (3.30) dan

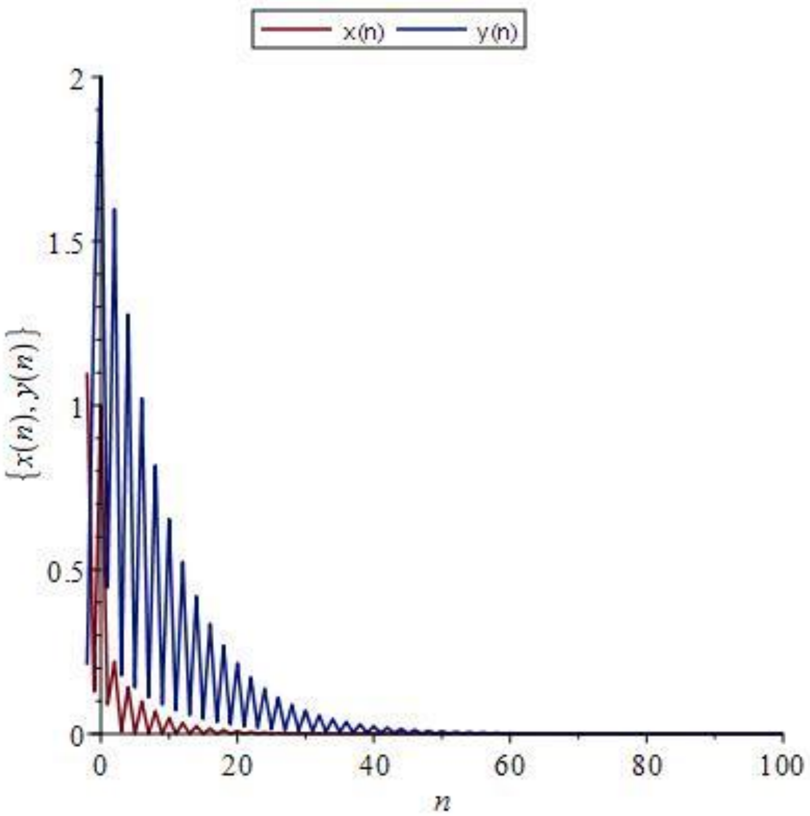
$$x_{2n+1} \leq x_{2n-1}, \; y_{2n+1} \leq y_{2n-1}, \; x_{2n+2} \leq x_{2n}, \; y_{2n+2} \leq y_{2n} \tag{3.31}$$

elde edilir. Yani, $\{(x_{2n-1}, y_{2n-1})\}$ ve $\{(x_{2n}, y_{2n})\}$ dizileri artmayan dizilerdir. Bu nedenle, tek indisli terimler bir noktaya yakınsarken, çift indisli terimler başka bir noktaya yakınsar. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.4. Nümerik Örnekler

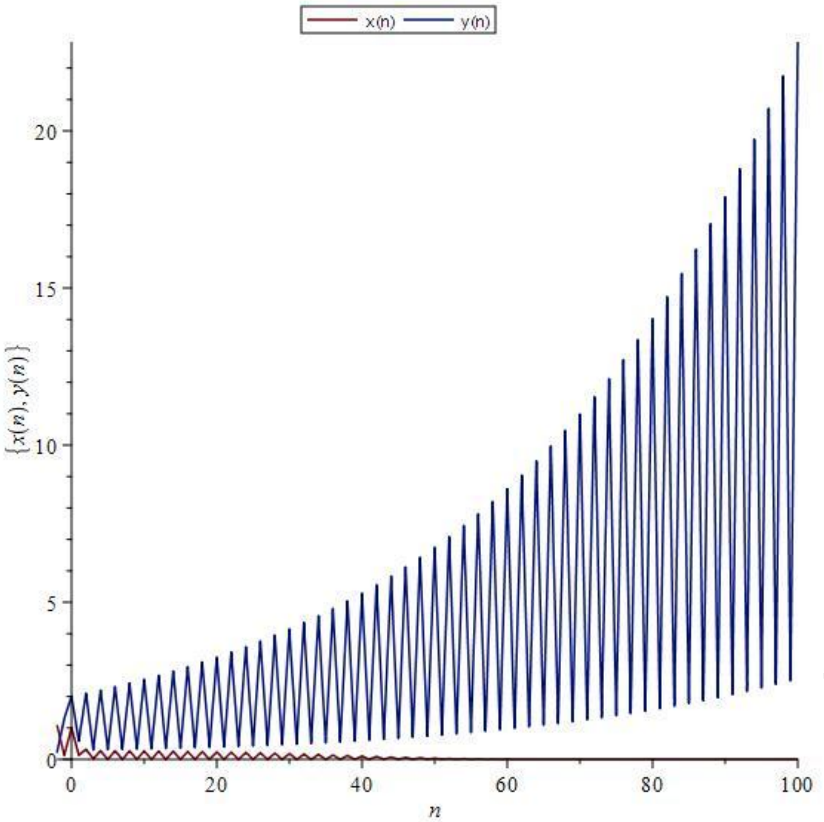
Bu kısımda, α ve β katsayılarının farklı değerleri dikkate alınarak (3.2) sistemi için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 3.4.1. $x_{-3}=1.2$, $x_{-2}=1.1$, $x_{-1}=0.13$, $x_0=1$, $y_{-3}=1.29$, $y_{-2}=0.21$, $y_{-1}=1.3$, $y_0=2$ olmak üzere $\alpha=0.7$ ve $\beta=0.8$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri pozitif denge noktasına yakınsar.



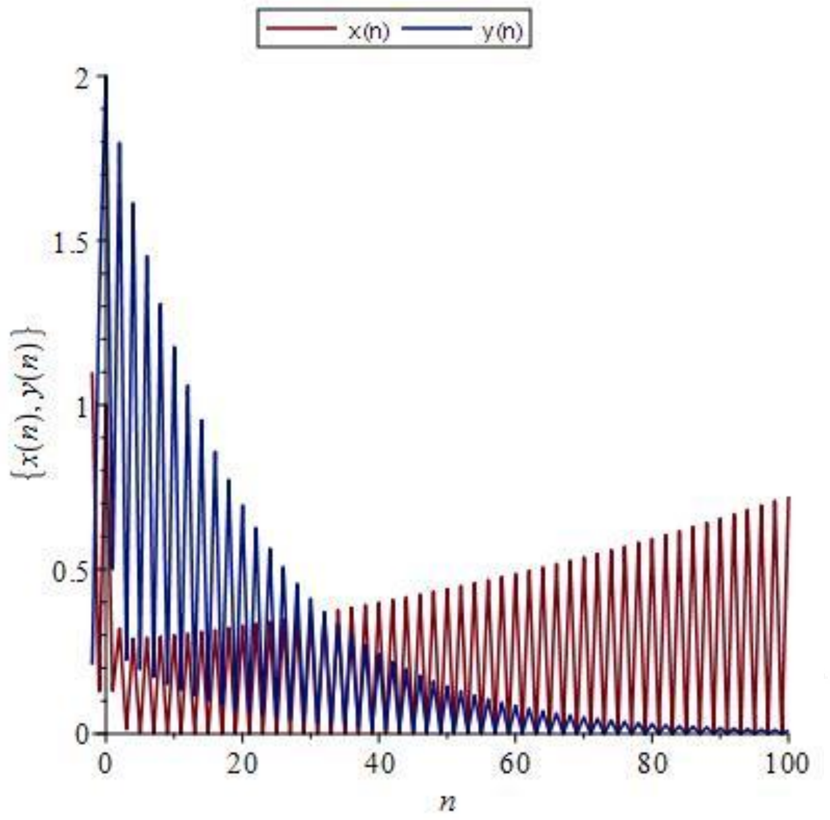
Şekil 3.4.1. $\alpha=0.7$, $\beta=0.8$

Örnek 3.4.2. $x_{-3}=1.3$, $x_{-2}=1.1$, $x_{-1}=0.13$, $x_0=1$, $y_{-3}=1.36$, $y_{-2}=0.21$, $y_{-1}=1.3$, $y_0=2$ olmak üzere $\alpha=1.02$ ve $\beta=1.05$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri sınırsızdır.



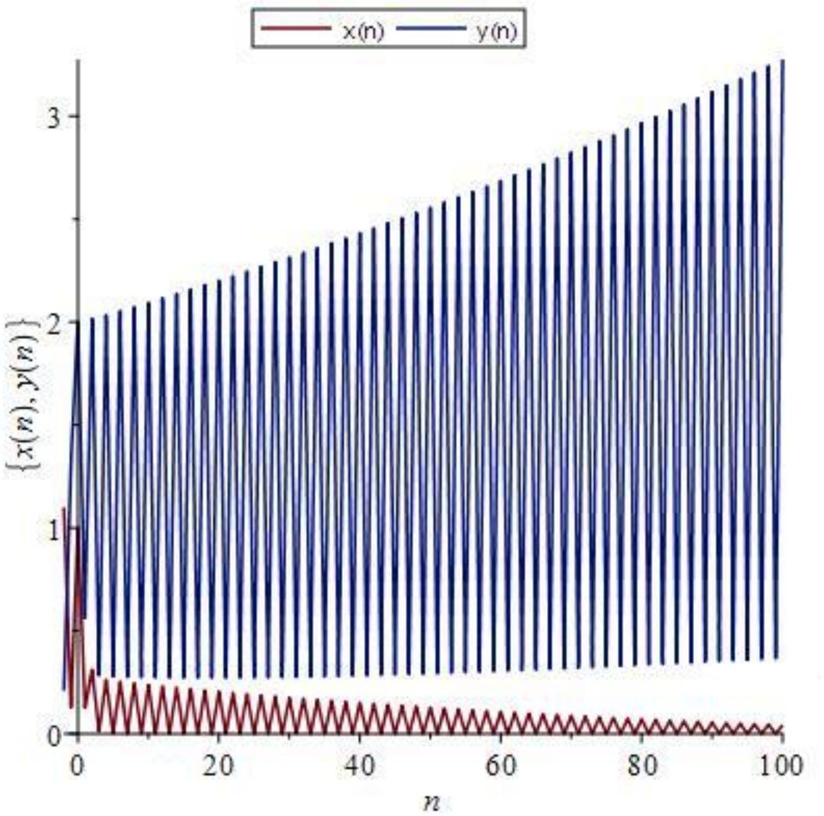
Şekil 3.4.2. $\alpha=1.02$, $\beta=1.05$

Örnek 3.4.3. $x_{-3} = 0.9$, $x_{-2} = 1.1$, $x_{-1} = 0.13$, $x_0 = 1$, $y_{-3} = 0.25$, $y_{-2} = 0.21$, $y_{-1} = 1.3$, $y_0 = 2$ olmak üzere $\alpha = 1.02$ ve $\beta = 0.9$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri pozitif denge noktasına yakınsamaz.



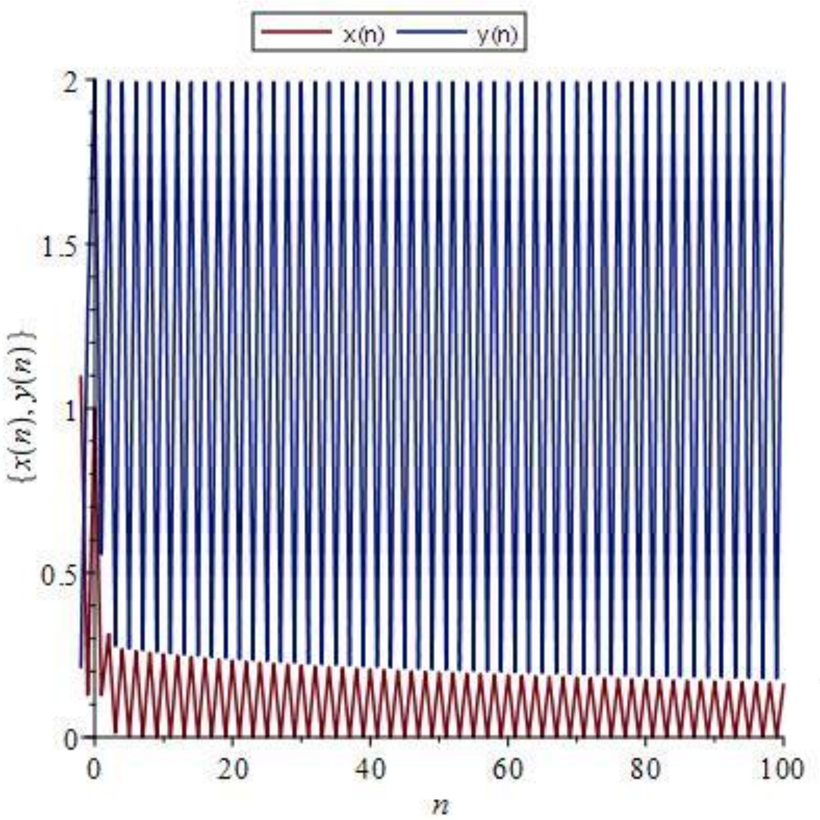
Şekil 3.4.3. $\alpha = 1.02$, $\beta = 0.9$

Örnek 3.4.4. $x_{-3}=1.4$, $x_{-2}=1.1$, $x_{-1}=0.13$, $x_0=1$, $y_{-3}=0.84$, $y_{-2}=0.21$, $y_{-1}=1.3$, $y_0=2$ olmak üzere $\alpha=0.99$ ve $\beta=1.01$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri pozitif denge noktasına yakınsamaz.



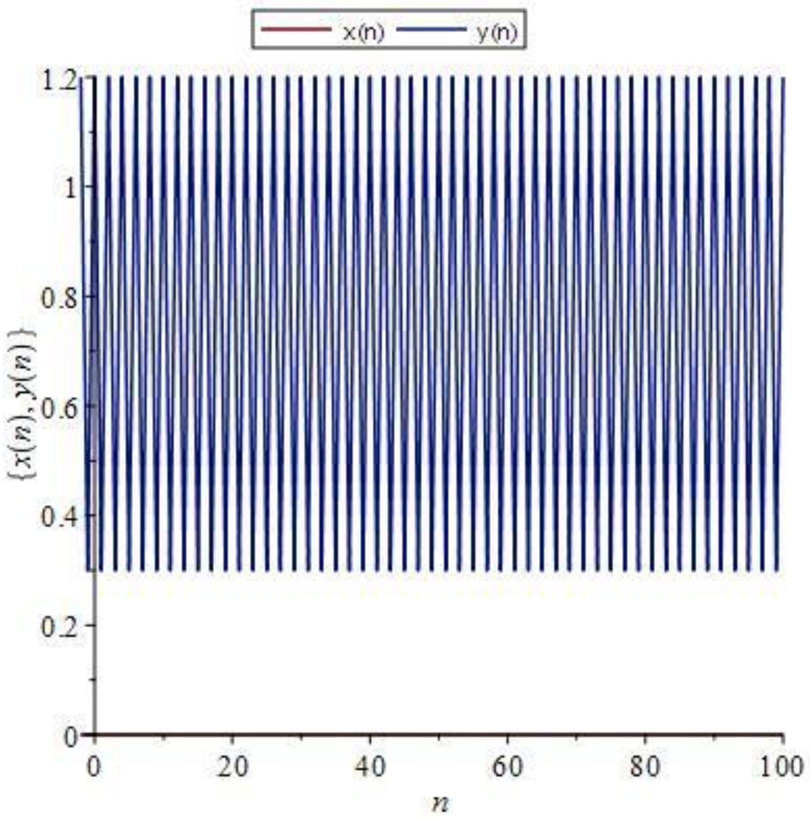
Şekil 3.4.4. $\alpha=0.99$, $\beta=1.01$

Örnek 3.4.5. $x_{-3}=0.8$, $x_{-2}=1.1$, $x_{-1}=0.13$, $x_0=1$, $y_{-3}=2.26$, $y_{-2}=0.21$, $y_{-1}=1.3$, $y_0=2$ olmak üzere $\alpha=\beta=1$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri bir periyodik çözüme yakınsar.



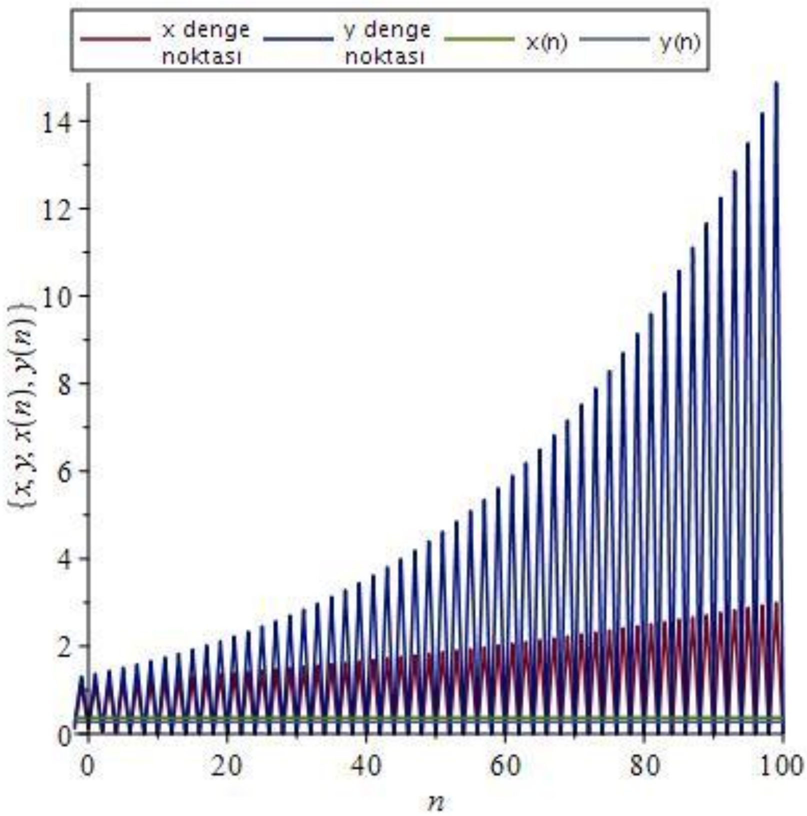
Şekil 3.4.5. $\alpha=\beta=1$

Örnek 3.4.6. $x_{-3} = 0.7$, $x_{-2} = x_{-1} = x_0 = 0$, $y_{-3} = 0.56$, $y_{-2} = 1.2$, $y_{-1} = 0.3$, $y_0 = 1.2$ olmak üzere $\alpha = \beta = 1$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri iki periyotlu bir çözüme yakınsar.



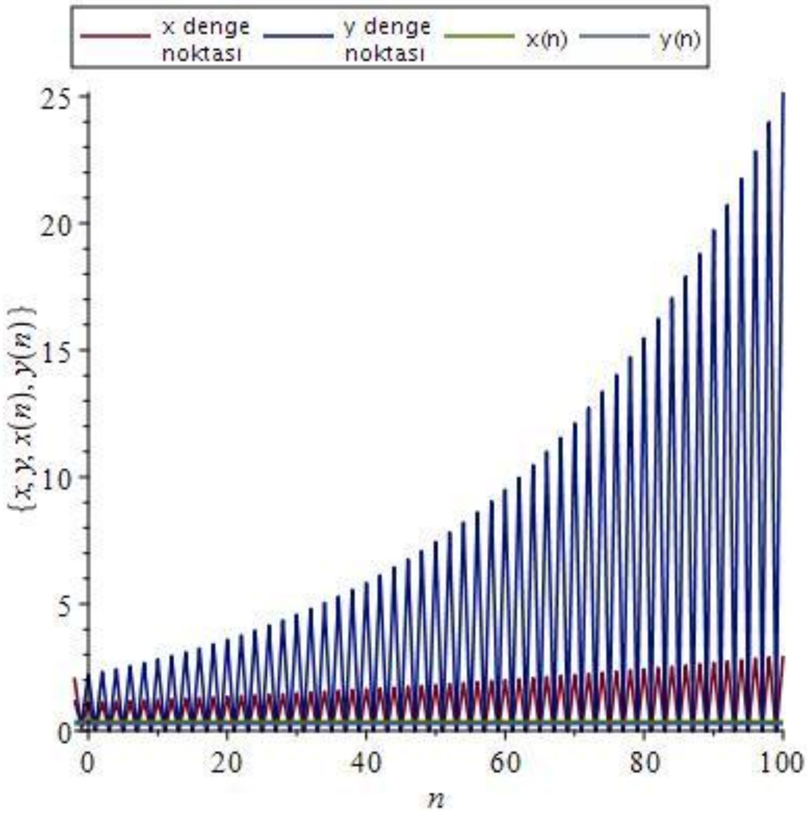
Şekil 3.4.6. $\alpha = \beta = 1$

Örnek 3.4.7. $x_{-3}=1.14$, $x_{-2}=0.1$, $x_{-1}=1.13$, $x_0=0.11$, $y_{-3}=3.65$, $y_{-2}=0.21$, $y_{-1}=1.3$, $y_0=0.2$ olmak üzere $\alpha=1.02$ ve $\beta=1.05$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri salınım hareketi yapar.



Şekil 3.4.7. $\alpha=1.02$, $\beta=1.05$

Örnek 3.4.8. $x_{-3}=0.78$, $x_{-2}=2.1$, $x_{-1}=0.13$, $x_0=1.11$, $y_{-3}=0.70$, $y_{-2}=1.21$, $y_{-1}=0.23$, $y_0=2.2$ olmak üzere $\alpha=1.02$ ve $\beta=1.05$ değerleri için (3.2) sisteminin çözümleri salınım hareketi yapar.



Şekil 3.4.8. $\alpha=1.02$, $\beta=1.05$

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; negatif olmayan başlangıç şartları ve pozitif parametreler için

$$u_{n+1} = \frac{au_{n-1}}{b + cv_{n-3}^{p}},\ v_{n+1} = \frac{dv_{n-1}}{e + fu_{n-3}^{q}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığı, salınım davranışı, sınırsız ve iki periyotlu çözümlerin varlığı konuları incelenmiştir.

Tanımlanan bu sistemde katsayıların yerine farklı diziler alınarak yeni çalışmalar yapılabileceği gibi sistemdeki bilinmeyen sayısı veya sistemin mertebesi artırılarak daha genel çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Aloqeili, M., 2006, Dynamics of a kth order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 181(2), 1328-1335.

Amleh, A. M., Kirk, V. and Ladas, G., 2001, On the dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{a - bx_{n-1}}{A + Bx_{n-2}}$ *Mathematical Sciences Research Hotline*, , 5, 1-15.

Battaloglu, N., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2010, The dynamics of the difference equation, *ARS Combinatoria (ISI),* 97, 281-288.

Berg, L. and Stević, S., 2011, On some systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218*,* 1713-1718.

Biçer, H., 2014, Fark Denklemleri ve Fark Denklemlerinde Kararlılık, Yüksek Lisans Tezi, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Van.

Camouzis, E., Chatterjee., E. and Ladas, G. 2007, On the Dynamics of $x_{n+1} = \dfrac{\delta x_{n-2} + x_{n-3}}{A + x_{n-3}}$, *Mathematical Analysis and Applications*, 331, 230-239.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. and Ladas, G., 2003, On the trichotomy character of $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + x_{n-2}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(12), 1113-1128.

Chen, D., and Li, X., 2009, Dynamics for Nonlinear Difference Equation $x_{n+1} = \dfrac{\alpha x_{n-k}}{\beta + \gamma x_{n-l}^{p}}$, *Advances in Difference Equations*, 235691.

Elaydi, S., 1999, An introduction to difference equations, third edition, undergraduate texts in mathematics, *Springer,* New York.

Elsayed, E. M. and Ahmed, A. M., 2015, Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1026-1038.

Elsayed, E. M. and Alghamdi, A., 2016, The form of the solutions of nonlinear difference equations systems, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 3179-3196.

El-Dessoky, M. M., 2016, On a solvable for some systems of rational difference equations, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 3744-3759.

El-Dessoky, M. M., 2016, Solution for rational systems of difference equations of order three, *Mathematics*, doi:10.3390/math 4030053.

El-Dessoky, M. M., 2015, The form of solutions and periodicity for some systems of third-order rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1076-1092.

El-Dessoky, M. M., 2016, On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 2190-2207.

El-Metwally, H., 2013, Solutions form for some rational systems of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 903593, 10 pages.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsady, Z., 2004, Global attractivity of recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-k}}{\gamma + x_n}$, *Journal of Applied Mahtematics .and Computing*, 16, 243-249.

El-Owaidy, H. M., Ahmed A. M. and Elsady, Z., 2004, Global attractivity of recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 151, 827-833.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2003, On the recursive sequences $x_{n+1} = \frac{-\alpha x_{n-1}}{\beta \pm x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 145, 747-753.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M., 2005, The dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha x_{n-1} / (\beta + \gamma x_{n-2}^{p})$, *Applied Mathematics Letters*, 18(9), 1013-1018.

El-Owaidy, H. M. and El-Afifi, M. M., 2000, A note on the periodic cycle of $x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 109, 301-306.

Gibbons, C. H., Kulenovic, M. and Ladas, G., 2000, On the recursive sequence $y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta y_{n-1}}{\gamma + y_n}$, *Mathematical Sciences Research Hot-Line*, 4 (2), 1-11.

Gumus, M. and Soykan, Y., 2016, Global character of a six dimensional nonlinear system of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 6842521, 7 pages.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Vol. 256. Springer Science & Business Media.

Kulenović, M. R. S. and Nurkanović, M., 2005, Asymptotic behavior of a competitive system of linear fractional difference equations, *Advances in Difference Equations*, Art. ID 19756, 13pp.

Kurbanli, A. S., Cinar, C. and Yalcinkaya, I., 2011, On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} + 1)$ $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} + 1)$, *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5-6), 1261-1267.

Kurbanli, A. S., 2011, On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} - 1), y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} - 1), z_{n+1} = 1 / \left(y_n z_n \right)$, *Advances in Difference Equations*, 40.

Kurbanli, A. S., 2011, On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} - 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} - 1)$, $z_{n+1} = z_{n-1} / \left(y_n z_{n-1} - 1 \right)$, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 932362,12 pages.

Kutay, V., 2010, Fark Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara.

Stević, S., 2011, On a system of difference equations with period two coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4317-4324.

Stević, S., 2012, On some solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5010-5018.

Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2013, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2013:174.

Tollu, D. T., 2014, Bazı Rasyonel Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine, Doktora Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Tollu, D. T., Yazlik Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.

Tollu, D. T. and Yalcinkaya, I., 2017, Global behavior of a three – dimensional system of difference equations of order three, *Communications Faculty of Scences University of Ankara Series A1*, in press.

Wang, W. and Feng, H., 2016, On the dynamics of positive solutions for the difference equation in a new population model, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 1748-1754.

Yalcinkaya, I., Cinar, C. and Simsek, D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis*, 87, No.6, 689-699.

Yalcinkaya, I., 2008, On the global asymptotic stability of a second-order system of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 860152, 12 pages.

Yalcinkaya, I. 2010, On the global asymptotic behavior of a system of two nonlinear difference equations, *Ars Combinatoria*, 95, 151-159.

Yalcinkaya, I., Cinar, C. and Atalay, M., 2008, On the solutions of systems of difference equations, *Advances in Difference Equations*, 9, Article ID 143943.

Yan, X. X. and Li, W. T., 2003, Global attractivity in the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 138, 415-423.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4, 15-20.

Yazlik, Y., 2014, On the solutions and behavior of rational difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 17(3), 584-594.

Yazlik, Y., Elsayed, E. M. and Taskara, N., 2014, On the behaviour of the solutions of difference equation systems, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 16(5), 932-941.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2015, On the behaviour of solutions for some systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis & Applications*, 18(1), 166-178.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2015, On the solutions of a max-type difference equation system, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, doi: 10.1002/mma.3377.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2016, On the solutions of a three-dimensional system of difference equations, *Kuwait Journal of Science & Engineering*, 43(1), 95-111.

Zeng, X. Y., Shi, B. and Zhang, D. C., 2004, Stability of solutions for the recursive sequence $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176, 283-291.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Gökhan TÜRK
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Konya -19.02.1989
Telefon	**:** (0506) 4317018
e-mail	**:** gturk53@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Selçuklu Anadolu Lisesi, Konya	2007
Üniversite	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	2014
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Tezsiz Yüksek Lisans, Konya	2014
		Necmettin Erbakan Üniversitesi, Tezli Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı, Konya	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-2014	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya	Öğrenci Asistanlığı
2015-	Eyyübiye Sanayi Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Şanlıurfa	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

A study on the rational difference equation systems of order four, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*, Harran Üniversitesi, 11-13 Mayıs 2017 (Sözlü Sunum / Özet Metin).