T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜSTEL TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Tuğrul CÖMERT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos - 2017
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Tuğrul CÖMERT tarafından hazırlanan "ÜSTEL TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA" adlı tez çalışması 14/08/2017 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Necati TAŞKARA	………………
Danışman Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	………………
Üye Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU	………………

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet COŞKUN
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Tuğrul CÖMERT
14/08/2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL TİPTEN FARK DENKLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Tuğrul CÖMERT

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2017, 38 Sayfa

Jüri
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; üstel tipten fark denklemleri ve fark denklem sistemlerinin pozitif çözümleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; negatif olmayan x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları ve α, β, γ pozitif parametreleri için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemi tanımlanmış, bu denklemin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı, sınırlılığı ve periyodikliği parametrelere ve başlangıç şartlarına bağlı olarak incelenmiş ve teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-k}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

fark denklemi için genelleştirilmiş ve çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Global asimptotik kararlılık, Sınırlılık, Periyodiklik.

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE POSITIVE SOLUTIONS OF THE EXPONENTIAL TYPE DIFFERENCE EQUATIONS

Tuğrul CÖMERT

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2017, 38 Pages

Jury
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assist. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of four sections. In the first section, general definitions and theorems related to difference equations were given.

In the second section, informations about some of the studies regarding positive solutions of the exponential type difference equations and systems studied before were given.

In the third section, we defined the difference equation

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

where the non-negative initial conditions x_{-2}, x_{-1}, x_0 and positive parameters α, β, γ. Also, the convergence, the boundedness and the periodic character of the positive solutions of this equation was investigated depending on the parameters and the initial conditions, and some numerical examples regarding the theoretical results were given.

In the fourth section, the results obtained in the third section were generalized for the equation

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-k}},\ n \in \mathbb{N}_0$$

and some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Difference equations, Global asymptotic stability, Boundedness, Periodicity.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmalarımda yardımını ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya, teknik desteklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Durhasan Turgut TOLLU' ya ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tuğrul CÖMERT
KONYA-2017

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Matematiğin gelişmesi, teknolojinin ilerlemesi ve insanoğlunun yüksek bir medeniyete sahip olması için hayati öneme sahiptir. Mühendislik, genetik, iktisat, ekonomi, fizik, biyoloji gibi alanlarda karşımıza çıkan fark denklemleri bu anlamda önemlidir.

Temel bilimlerin yanı sıra mühendislik bilimlerinde de pek çok uygulama alanına sahip olan fark denklemleri bazen üreteç fonksiyonlarından, bazen diferansiyel denklemlerin nümerik yaklaşımlarından doğabildiği gibi bazen de matematiksel modellerde doğrudan veya dolaylı olarak ortaya çıkar. Fark denklemlerinin uygulamalarının gelişimi her şeyden önce teorisinin gelişimine bağlıdır. Bu doğrultuda hazırlanan çalışmalar uygulamalı matematiğin dolayısıyla bilim ve teknolojinin gelişimine büyük katkı sağlaması açısından oldukça önemlidir. Bu nedenle, fark denklemleri üzerine çalışmalar süregelmiş ve halen devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında, uygulamalı matematiğin gelişen konularından biri olan fark denklemleri ele alınmıştır. Bu denklemlerde bağımsız değişken tam sayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla, fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bundan dolayı fark denklemleri daha çok sürekli olmayan verilere sahip problemlerde karşımıza çıkar.

Çalışmamızın ikinci bölümünde; üstel tipten fark denklemlerinin pozitif çözümleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bir literatür taraması verilmiştir.

Üçüncü bölümde; literatürdeki denklemler göz önünde bulundurularak üstel tipten bir fark denklemi tanımlanmış ve bu denklemin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı, sınırlılığı ve periyodikliği incelenmiştir. Buna ilaveten çalışılan fark denklemi için nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise üçüncü bölümde yapılan çalışmanın sonuçları ve konuya dair bazı öneriler verilmiştir.

1.1. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler

x bağımsız değişkeninin sürekli değerler aldığı durumda, $y = y(x)$ fonksiyonunun değişimi $y'(x)$, $y''(x)$, ..., $y^{(n)}(x)$, ... türevleri yardımıyla açıklanabilir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu kısımda x in tam sayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde durulacak ve bu denklemler ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1. Bir $x:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü (ileri fark) veya x in birinci mertebeden (basamaktan) farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlanır; burada $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

Buna göre x in ikinci mertebeden farkı $(\Delta^2 x)$

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \tag{1.1.2}$$

ve böyle devam ederek x in k. mertebeden farkı $(\Delta^k x)$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \tag{1.1.3}$$

şeklinde hesaplanır; burada $k \geq j$ olmak üzere,

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{j!} \tag{1.1.4}$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 1.1.1. Δ fark operatörü lineerdir; yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \tag{1.1.5}$$

dir; burada a ve b sabitlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 1.1.1. $\Delta(7n^2 - 5n + 1) = 7\Delta n^2 - 5\Delta n + \Delta 1 = 14n + 2$ (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 1.1.2. E öteleme (kaydırma) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1) \tag{1.1.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$E^k x(n) = x(n+k) \tag{1.1.7}$$

dır. Ayrıca, a ve b sabitleri için

$$E(ax(n)+by(n)) = aEx(n)+bEy(n) \tag{1.1.8}$$

dir; yani E operatörü lineerlik özelliğine sahiptir.

Δ ve E operatörleri arasında

$$\Delta = E - I \tag{1.1.9}$$

ilişkisi vardır; burada I özdeşlik operatörüdür; yani $Ix(n) = x(n)$.

Buradan

$$\Delta E = E\Delta \tag{1.1.10}$$

değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden, k. mertebeden fark ve öteleme operatörleri, sırasıyla,

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} \tag{1.1.11}$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^{k-j} \tag{1.1.12}$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 1.1.2.

(a) Her $k,l \in \mathbb{Z}^+$ için $\Delta^k \Delta^l = \Delta^l \Delta^k = \Delta^{k+l}$ ve $E^k E^l = E^l E^k = E^{k+l}$;

(b) $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$;

(c) $\Delta\left(\dfrac{x(n)}{y(n)}\right) = \dfrac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 1.1.3. $n \in \mathbb{N}_0$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \qquad (1.1.13)$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.

$E = \Delta + I$ operatörü göz önüne alınırsa, (1.1.13) fark denklemi

$$G(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^k x(n)) = 0 \qquad (1.1.14)$$

formunda yazılabilir.

(1.1.13) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)) \qquad (1.1.15)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n)) \qquad (1.1.16)$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)) \qquad (1.1.17)$$

formunda ise, normal fark denklemi adını alır (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 1.1.2. Bir S cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$\Delta x(n) + 3x(n) = 0, \qquad (1.1.18)$$

$$\Delta^2 x(n) + 2\Delta x(n) + x(n) = 0, \qquad (1.1.19)$$

$$\Delta^2 x(n) - nx(n) = 2n + 7, \qquad (1.1.20)$$

$$x(n)\Delta^3 x(n) = \frac{1}{2}, \qquad (1.1.21)$$

$$(\Delta x(n))^2 + x^2(n) = -1 \qquad (1.1.22)$$

fark denklemlerini göz önüne alalım; burada S, bir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sayısından başlayan ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir kümesidir. Bu denklemlerin hepsinde bağımsız değişken n ve bilinmeyen fonksiyon x tir. (1.1.22) hariç diğerleri normal formda yazılabilen denklemlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Fark denklem literatüründe $x(n)$ yerine sık sık x_n sembolü kullanılabilmektedir. Buna göre $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ olup yukardaki denklemlerin eşdeğerleri sırasıyla

$$x_{n+1} + 2x_n = 0, \tag{1.1.23}$$

$$x_{n+2} = 0, \tag{1.1.24}$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + (1-n)x_n = 2n+7, \tag{1.1.25}$$

$$x_n x_{n+3} - 3x_n x_{n+2} + 3x_n x_{n+1} - x_n^2 = \frac{1}{2}, \tag{1.1.26}$$

$$(x_{n+1} - x_n)^2 + x_n^2 = -1 \tag{1.1.27}$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 1.1.4. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin (indislerinin) farkına o denklemin mertebesi (basamağı) denir.

Örneğin, $x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} = 0$ ve $x_{n+4} + x_n x_{n+2} = 1$ denklemlerinin mertebeleri, sırasıyla, $n+3-(n+1) = 2$ ve $n+4-n = 4$ tür. $x_{n+7} = n(n-2)$ ise sıfırıncı mertebeden bir denklemdir; yani, açık olarak bir fonksiyondur (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Tanım 1.1.5. $\mathbb{N}_0$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (1.1.13) denklemini sağlıyorsa, o zaman $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}_0$ üzerinde (1.1.13) denkleminin bir çözümü denir. k. mertebeden bir fark denkleminin,

$$\psi(n, x, c_1, c_2, ..., c_k) = 0 \tag{1.1.28}$$

veya

$$x = \varphi(n, c_1, c_2, ..., c_k) \tag{1.1.29}$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 1.1.3. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f : I^{k+1} \to I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}\right), \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.30}$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.6. Eğer $\bar{x}$ için (1.1.30) denkleminde $\bar{x} = f\left(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}\right)$ ise $\bar{x}$ noktasına (1.1.30) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.7. Eğer her $n > 0$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu J aralığına (1.1.30) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.8. $\bar{x}$, (1.1.30) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(i) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(ii) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer her $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(vi) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -k$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.9. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.1.30) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif p tam sayısına da asal periyod denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.10. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.11. I reel sayıların bir aralığı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 0,1,\ldots,k$ olmak üzere

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}\right) \tag{1.1.31}$$

ifadesi $f : I^{k+1} \to I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} q_i z_{n-i}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.32}$$

denklemine (1.1.30) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} q_i \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.1.33}$$

polinom denklemine ise (1.1.30) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.1.4. (Lineer Kararlılık Teoremi)

- **(i)** Eğer (1.1.33) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.
- **(ii)** Eğer (1.1.33) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.12. $\bar{x}$, (1.1.30) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -k$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.13. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.14. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.15. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.1.5. (Clark Teoremi) (1.1.32) fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için yeter şart $\sum_{i=0}^{k} |q_i| < 1$ olmasıdır.

Lemma 1.1.1. $f : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ sürekli bir fonksiyon ve a, b pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}), \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.34}$$

denklemini ele alalım. Eğer f fonksiyonu,

(i) $f(u,v)$ fonksiyonu hem u hem de v ye göre artmayandır.

(ii) Eğer $(m, M) \in [a,b] \times [a,b]$, $M = f(m,m)$ ve $m = f(M,M)$ sisteminin bir çözümü ise $m = M$ dir.

özelliklerine sahip ise (1.1.34) denklemi tek bir $\bar{x}$ pozitif denge noktasına sahiptir ve bütün çözümler bu denge noktasına yakınsar (DeVault ve ark., 2001).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; üstel tipten fark denklemleri ve fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir.

El-Metwally ve arkadaşları (2001), yaptıkları çalışmada α, β parametreleri pozitif reel sayılar ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere, bir popülasyon modeli olan

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n} \tag{2.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Aboutaleb ve arkadaşları (2001), yaptıkları çalışmada α, β, γ parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + x_{n-1}} \tag{2.2}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Öztürk ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada α, β, γ parametreleri pozitif reel sayılar ve y_{-1}, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-y_n}}{\gamma + y_{n-1}} \tag{2.3}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin yakınsaklığını, sınırlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Öztürk ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada α, β parametreleri pozitif reel sayılar ve $y_{-k}, \ldots, y_{-1}, y_0$ başlangıç şartları keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$y_{n+1} = \frac{\alpha e^{-(ny_n + (n-k)y_{n-k})}}{\beta + ny_n + (n-k)y_{n-k}} \tag{2.4}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve global asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Ding ve Zhang (2008), yaptıkları çalışmada $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in (0,\infty)$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})e^{-x_n} \tag{2.5}$$

fark denkleminin çözümlerinin kararlığını ve periyodikliğini incelemişlerdir. Buradaki (2.5) denklemi ayrık gecikmeli sivrisinek popülasyon modelidir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2010), yaptıkları çalışmada $A, B \in (0,\infty)$ ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = (1 - y_n - y_{n-1})(1 - \mathrm{e}^{-Ay_n}),\ y_{n+1} = (1 - x_n - x_{n-1})(1 - \mathrm{e}^{-Bx_n}) \tag{2.6}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini ve pozitif çözümlerin negatif olmayan denge noktasına yakınsaklığını incelemişlerdir. Buradaki (2.6) sistemi bir salgın hastalık modeli olan $x_{n+1} = (1 - x_n - x_{n-1})(1 - \mathrm{e}^{-Ax_n})$ üstel tipten fark denkleminin iki boyutlu bir genelleştirmesidir (Kocic ve Ladas, 1993).

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2011), yaptıkları çalışmada a, b, c, d parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-y_n},\ y_{n+1} = c + dy_{n-1}e^{-x_n} \tag{2.7}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Fotiades ve Papaschinopoulos (2012), yaptıkları çalışmada a, b parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-x_n} \tag{2.8}$$

fark denkleminin iki periyotlu çözümlerinin varlığını, tekliğini ve kararlılığını incelemişlerdir.

Fotiades ve Papaschinopoulos (2012), yaptıkları çalışmada $i=1,2,...,k$ için a_i, b_i parametreleri ve $x_{i,n}$, $n=-1,0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{i,n+1}=a_i+b_i x_{i,n-1}e^{-x_{i+1,n}} \tag{2.9}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2012), yaptıkları çalışmada $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta$ parametreleri ve x_{-1},x_0,y_{-1},y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=\frac{\alpha+\beta e^{-y_n}}{\gamma+y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{\delta+\varepsilon e^{-x_n}}{\zeta+x_{n-1}}\\ x_{n+1}&=\frac{\alpha+\beta e^{-y_n}}{\gamma+x_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{\delta+\varepsilon e^{-x_n}}{\zeta+y_{n-1}}\\ x_{n+1}&=\frac{\alpha+\beta e^{-x_n}}{\gamma+y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{\delta+\varepsilon e^{-y_n}}{\zeta+x_{n-1}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2012), yaptıkları çalışmada a,b,c,d parametreleri ve x_{-1},x_0,y_{-1},y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=a+by_{n-1}e^{-x_n},\ y_{n+1}=c+dx_{n-1}e^{-y_n} \tag{2.11}$$

ve

$$x_{n+1}=a+by_{n-1}e^{-y_n},\ y_{n+1}=c+dx_{n-1}e^{-x_n} \tag{2.12}$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Khuong ve Phong (2013), yaptıkları çalışmada a,b,c parametreleri ve x_0,y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{a+be^{-x_n}}{c+y_n},\ y_{n+1}=\frac{a+be^{-y_n}}{c+x_n} \tag{2.13}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Din ve Elsayed (2014), yaptıkları çalışmada $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta$ parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1} e^{-y_n},\ y_{n+1} = \delta + \varepsilon y_n + \zeta y_{n-1} e^{-x_n} \tag{2.14}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2014), yaptıkları çalışmada a, b, c, d parametreleri ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = ax_n + by_{n-1} e^{-x_n},\ y_{n+1} = cy_n + dx_{n-1} e^{-y_n} \tag{2.15}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2014), yaptıkları çalışmada $0 < a < 1$ ve b, c, d, k parametreleri ile x_0 başlangıç şartı pozitif reel sayı olmak üzere, bir biyolojik model olan

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^2}{x_n + b} + c\frac{e^{k-dx_n}}{1 + e^{k-dx_n}} \tag{2.16}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin karalılığını ve sınırlılığını incelemişlerdir.

Din (2015), yaptığı çalışmada $\alpha \in (0,\infty),\ \beta \in (0,\infty),\ \gamma \in (0,1),\ \alpha + \beta > 1 + \beta/\gamma$ ve x_0, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere, bitki otçul modeli olarak bilinen

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{\beta x_n + e^{y_n}},\ y_{n+1} = \gamma(x_n + 1) y_n \tag{2.17}$$

fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının lokal ve global davranışını incelemiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2015), yaptıkları çalışmada $i=1,2,...,m$ için $a_i,\ b_i$ parametreleri ve $x_{-1}^i,\ x_0^i$ başlangıç şartları pozitif sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} x_{n+1}^{(i)} &= a_i x_n^{(i+1)} + b_i x_{n-1}^{(i)} e^{-x_n^{(i+1)}} \\ x_{n+1}^{(m)} &= a_m x_n^{(1)} + b_m x_{n-1}^{(m)} e^{-x_n^{(1)}} \end{aligned} \tag{2.18}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Wang ve Feng (2016), yaptıkları çalışmada a,b parametreleri ve x_{-1},x_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere, bir popülasyon modeli olan

$$x_{n+1} = a + b x_n e^{-x_{n-1}} \tag{2.19}$$

fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Feng ve arkadaşları (2016), yaptıkları çalışmada (2.1) denklemini genelleştirerek $a\in(0,\infty),\ b\in(0,1),\ c\in(0,\infty)$ ve x_{-1},x_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = a + b x_{n-1} + c x_{n-1} e^{-x_n} \tag{2.20}$$

fark denklemini tanımlamışlar ve bu denklemin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve sınırlılığını incelemişlerdir.

Bu çalışmada üstel tipten fark denklemleri ile ilgili literatür taramasının ışığında 2006 yılında Öztürk ve arkadaşları tarafından çalışılmış (2.3) denkleminin mertebesi arttırılarak yeni bir denklem tanımlanmış ve tanımlanan denklemin pozitif çözümlerinin bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar denklemin en genel hali için genelleştirilerek Sonuç ve Öneriler bölümünde sunulmuştur.

3. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}}$ FARK DENKLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde; α, β, γ parametreleri pozitif reel sayılar ve x_{-2}, x_{-1}, x_0 başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}},\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.1}$$

fark denklemi tanımlanmış, bu denklemin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı, sınırlılığı ve periyodikliği parametrelere ve başlangıç şartlarına bağlı olarak incelenmiş ve teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Öncelikle (3.1) denkleminin denge noktasını elde edelim:

Denge noktası tanımına göre

$$\bar{x} = \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} \text{ veya } \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} - \bar{x} = 0 \tag{3.2}$$

yazılabilir.

$$f(x) = \frac{\alpha + \beta e^{-x}}{\gamma + x} - x \tag{3.3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre, (3.1) denkleminin denge noktası $f(x) = 0$ denkleminin köküdür. $f(0) = \dfrac{\alpha + \beta}{\gamma} > 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ve $f'(x) < 0$ olduğundan (3.1) denkleminin tek bir pozitif denge noktasına sahip olduğu açıktır.

Teorem 3.1. Eğer

$$\beta < \gamma e^{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha - \gamma)}}{2}} \tag{3.4}$$

ise (3.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. (3.1) denkleminin lineerleştirilmiş denklemi

$$x_{n+1}+\frac{\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}}x_n+\frac{\bar{x}}{\gamma+\bar{x}}x_{n-2}=0 \tag{3.5}$$

şeklindedir. Öncelikle Teorem 1.1.5 te verilen lokal asimptotik kararlık için yeterli olan şart göz önünde bulundurulursa

$$\left|\frac{\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}}\right|+\left|\frac{\bar{x}}{\gamma+\bar{x}}\right|<1 \tag{3.6}$$

olduğunu göstermeliyiz. Buradan

$$\frac{\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}}+\frac{\bar{x}}{\gamma+\bar{x}}<1 \text{ veya } \beta e^{-\bar{x}}<\gamma \tag{3.7}$$

yazılabilir. (3.2) den elde edilen $\beta e^{-\bar{x}}=\gamma\bar{x}+\bar{x}^2-\alpha$ eşitliği (3.7) de yerine yazılırsa

$$\bar{x}^2+\gamma\bar{x}-(\alpha+\gamma)<0 \tag{3.8}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten iki farklı reel denge noktası elde edilebilir. Bunlardan pozitif olan

$$\bar{x}_1=\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+4(\alpha+\gamma)}}{2} \tag{3.9}$$

denge noktasını ele alalım. Bu denge noktası (3.7) de yerine yazılırsa

$$\beta<\gamma e^{\frac{-\gamma+\sqrt{\gamma^2+4(\alpha+\gamma)}}{2}} \tag{3.10}$$

elde edilir ki bu ispatın tamamlandığını gösterir.

Teorem 3.2. (3.1) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Eğer $\alpha<x_n$ ise (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

(ii) Eğer $\alpha<\bar{x}_1$ ise $\bar{x}_1<\dfrac{\alpha+\beta e^{-\alpha}}{\gamma}$ dır.

İspat.

(i) $\alpha < x_n$ olduğunu kabul edelim. (3.1) denkleminin bir pozitif çözümü $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ olsun. Bu durumda, $n = 0,1,2,...$ için

$$0 < x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-2}} < \frac{\alpha + \beta e^{-\alpha}}{\gamma + x_{n-2}} < \frac{\alpha + \beta e^{-\alpha}}{\gamma} \tag{3.11}$$

olur ki bu (3.1) denkleminin bütün pozitif çözümlerinin sınırlı olduğunu gösterir.

(ii) $\bar{x}_1 > 0$ olduğundan $\alpha < \bar{x}_1$ için

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}_1}}{\gamma + \bar{x}_1} < \frac{\alpha + \beta e^{-\alpha}}{\gamma + \alpha} < \frac{\alpha + \beta e^{-\alpha}}{\gamma} \tag{3.12}$$

olur ki bu (3.1) denkleminin $\bar{x}_1$ denge noktasının sınırlı olduğunu gösterir.□

Teorem 3.3. $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ (3.1) denkleminin pozitif çözümü olmak üzere,

(i) $x_{-2}, x_0 \geq \bar{x}$ ve $x_{-1} < \bar{x}$

veya

(ii) $x_{-2}, x_0 < \bar{x}$ ve $x_{-1} \geq \bar{x}$

ise $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $\bar{x}$ denge noktası civarında bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.

İspat. (i) de verilen eşitsizliklerin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, (3.1) denkleminden

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\alpha + \beta e^{-x_0}}{\gamma + x_{-2}} < \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} = \bar{x} \\
x_2 &= \frac{\alpha + \beta e^{-x_1}}{\gamma + x_{-1}} \geq \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} = \bar{x} \\
x_3 &= \frac{\alpha + \beta e^{-x_2}}{\gamma + x_0} < \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} = \bar{x} \\
x_4 &= \frac{\alpha + \beta e^{-x_3}}{\gamma + x_1} \geq \frac{\alpha + \beta e^{-\bar{x}}}{\gamma + \bar{x}} = \bar{x}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

yazılabilir. Buradan tümevarım yöntemi yardımıyla ispat (i) de verilen eşitsizlikler için tamamlanır.

Benzer şekilde (ii) de verilen eşitsizliklerin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, (3.1) denkleminden

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha+\beta e^{-x_0}}{\gamma+x_{-2}} \geq \frac{\alpha+\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}} = \bar{x} \\ x_2 &= \frac{\alpha+\beta e^{-x_1}}{\gamma+x_{-1}} < \frac{\alpha+\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}} = \bar{x} \\ x_3 &= \frac{\alpha+\beta e^{-x_2}}{\gamma+x_0} \geq \frac{\alpha+\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}} = \bar{x} \\ x_4 &= \frac{\alpha+\beta e^{-x_3}}{\gamma+x_1} < \frac{\alpha+\beta e^{-\bar{x}}}{\gamma+\bar{x}} = \bar{x} \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılabilir. Buradan tümevarım yöntemi yardımıyla ispat (ii) de verilen eşitsizlikler için tamamlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur.□

Lemma 3.1. $f(u,v)=\dfrac{\alpha+\beta e^{-u}}{\gamma+v}$ ve $u,v\in[0,\infty)$ ise $f(u,v)$ fonksiyonu hem u hem de v ye göre artmayandır.

İspat. $f(u,v)$ fonksiyonunun u ve v ye göre türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{-\beta e^{-u}}{\gamma+v} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-(\alpha+\beta e^{-u})}{(\gamma+v)^2} \tag{3.15}$$

elde edilir. $\dfrac{\partial f}{\partial u},\dfrac{\partial f}{\partial v}<0$ olduğundan $f(u,v)$ fonksiyonu hem u hem de v ye göre artmayandır.□

Teorem 3.4. Eğer (3.4) eşitsizliği sağlanır ve $\beta<\gamma$ ise (3.1) denkleminin $\bar{x}_1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Lemma 3.1 den $f(u,v)$ fonksiyonunun u ve v değişkenlerine göre artmayan olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $u,v\in[0,\infty)$ için

$$0 < f(u,v) = \frac{\alpha+\beta e^{-u}}{\gamma+v} < \frac{\alpha+\beta e^{-\alpha}}{\gamma} \tag{3.16}$$

yazılabilir.

$$\lambda = \liminf_{n\to\infty} x_n \text{ ve } \Lambda = \limsup_{n\to\infty} x_n \tag{3.17}$$

olduğu kabul edelim. Bu durumda, $\varepsilon < \min\left\{\frac{\alpha+\beta e^{-\alpha}}{\gamma} - \Lambda, \lambda\right\}$ şartını sağlayan her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\lambda - \varepsilon \le x_n \le \Lambda + \varepsilon$ ve $n \ge n_0 + 1$ için

$$\frac{\alpha+\beta e^{-(\Lambda+\varepsilon)}}{\gamma+(\Lambda+\varepsilon)} \le x_{n+1} \le \frac{\alpha+\beta e^{-(\lambda-\varepsilon)}}{\gamma+(\lambda-\varepsilon)} \tag{3.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan,

$$\frac{\alpha+\beta e^{-(\Lambda+\varepsilon)}}{\gamma+(\Lambda+\varepsilon)} \le \lambda \le \Lambda \le \frac{\alpha+\beta e^{-(\lambda-\varepsilon)}}{\gamma+(\lambda-\varepsilon)} \tag{3.19}$$

$$\frac{\alpha+\beta e^{-\Lambda}}{\gamma+\Lambda} \le \lambda \le \Lambda \le \frac{\alpha+\beta e^{-\lambda}}{\gamma+\lambda} \tag{3.20}$$

$$\frac{\alpha+\beta e^{-\Lambda}}{\gamma+\Lambda} \le \frac{\lambda\gamma+\lambda\Lambda}{\gamma+\Lambda} \text{ ve } \frac{\Lambda\gamma+\Lambda\lambda}{\gamma+\lambda} \le \frac{\alpha+\beta e^{-\lambda}}{\gamma+\lambda} \tag{3.21}$$

$$\alpha+\beta e^{-\Lambda} - \gamma\lambda \le \lambda\Lambda \text{ ve } \Lambda\lambda \le \alpha+\beta e^{-\lambda} - \gamma\Lambda \tag{3.22}$$

$$\alpha+\beta e^{-\Lambda} - \gamma\lambda \le \lambda\Lambda \le \alpha+\beta e^{-\lambda} - \gamma\Lambda \tag{3.23}$$

elde edilir. (3.23) ten,

$$\alpha+\beta e^{-\Lambda} - \gamma\lambda \le \alpha+\beta e^{-\lambda} - \gamma\Lambda \tag{3.24}$$

$$\beta(e^{-\Lambda} - e^{-\lambda}) \le \gamma(\lambda - \Lambda) \tag{3.25}$$

yazılabilir. $\beta < \gamma$ olduğundan $\Lambda \le \lambda$ elde edilir ki bu $\Lambda = \lambda = \overline{x}_1$ olduğu anlamına gelir. (3.1) denkleminin tek bir denge noktasına sahip olduğu ve Lemma 1.1 göz önünde bulundurulursa (3.1) denkleminin bütün çözümlerinin $\overline{x}_1$ denge noktasına yakınsadığı sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanır.□

Teorem 3.5. (3.1) denklemi üç periyotlu pozitif çözümlere sahip değildir.

İspat. (3.1) denkleminin üç periyotlu bir çözümü

$$\ldots,\phi,\psi,\eta,\phi,\psi,\eta\ldots \tag{3.26}$$

olsun. Bu durumda,

$$\phi = \frac{\alpha+\beta e^{-\psi}}{\gamma+\phi},\ \psi = \frac{\alpha+\beta e^{-\eta}}{\gamma+\psi} \text{ ve } \eta = \frac{\alpha+\beta e^{-\phi}}{\gamma+\eta} \tag{3.27}$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\alpha = \phi^2+\gamma\phi-\beta e^{-\psi} = \psi^2+\gamma\psi-\beta e^{-\eta} = \eta^2+\gamma\eta-\beta e^{-\phi} \tag{3.28}$$

elde edilir.

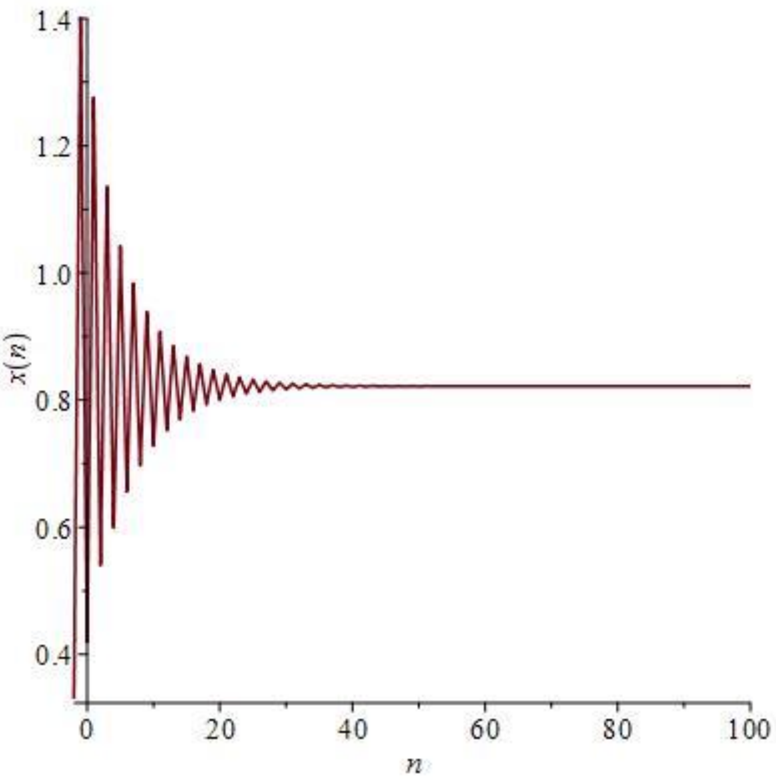
$$F(z) = z^2+\gamma z-\beta e^{-z}-\alpha \tag{3.29}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon için $F(\overline{x})=0$ ve $F'(z)>0$ olduğu açıktır. $F'(z)>0$ olduğundan $F(z)$ fonksiyonu artandır. Dolayısıyla, (3.28) de verilen eşitlikleri sağlayan üç farklı değerin var olamayacağı açıktır ki böylece ispat tamamlanır.□

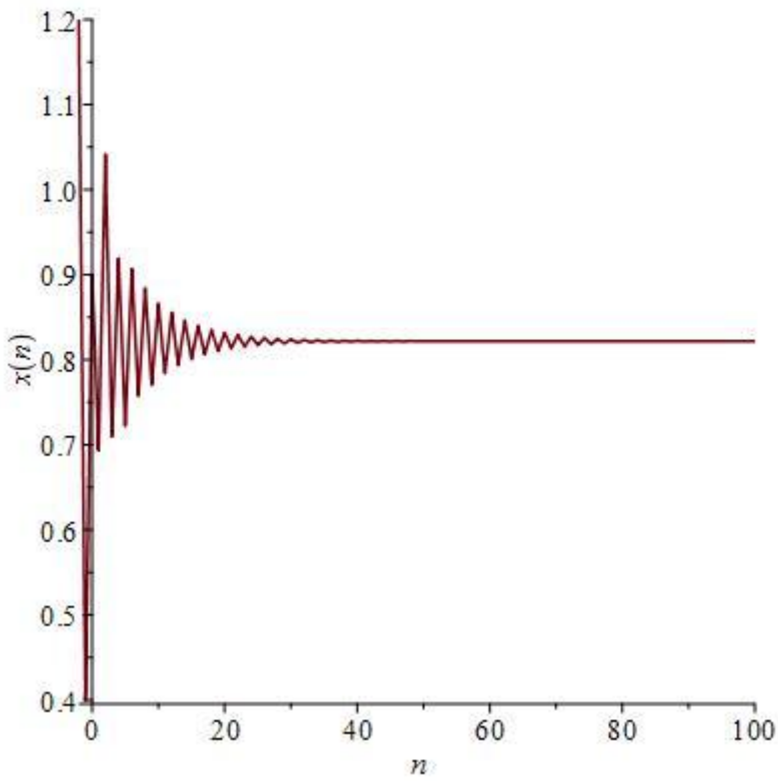
3.1. Nümerik Örnekler

Bu kısımda, başlangıç şartları ve katsayıların farklı değerleri dikkate alınarak (3.1) denklemi için bazı nümerik örnekler verilmiştir. Ayrıca, (3.1) denkleminin mertebesi arttırılarak elde edilen bazı denklemler için de nümerik örneklere yer verilmiştir.

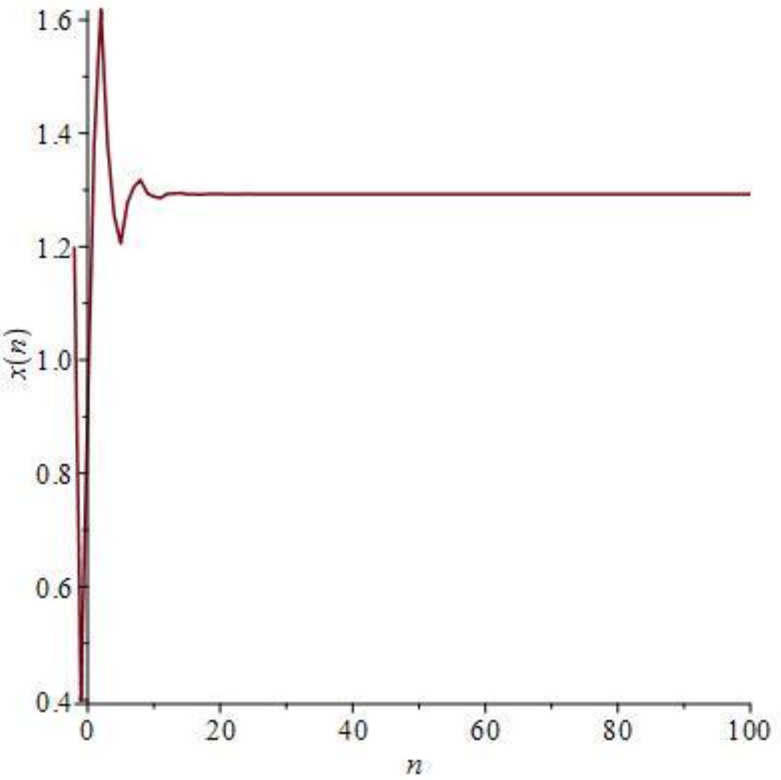
Örnek 3.1.1. $x_{-2} = 1.2$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 0.9$ olmak üzere $\alpha = 1$, $\beta = 3$ ve $\gamma = 2$ değerleri için (3.1) denkleminin çözümü bir tek denge noktasına yakınsar.



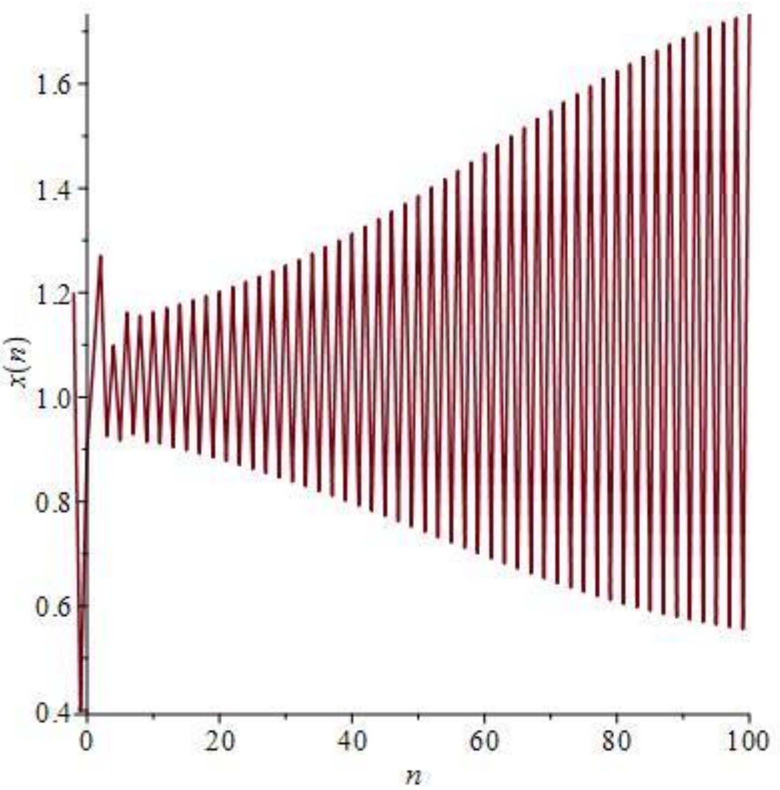
Örnek 3.1.2. $x_{-2} = 0.33$, $x_{-1} = 1.4$, $x_0 = 0.42$ olmak üzere $\alpha = 1$, $\beta = 3$ ve $\gamma = 2$ değerleri için (3.1) denkleminin çözümü bir tek denge noktasına yakınsar.



Örnek 3.1.3. $x_{-2} = 1.2$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 0.9$ olmak üzere $\alpha = 5$, $\beta = 2$ ve $\gamma = 3$ değerleri için (3.1) denkleminin çözümü bir tek denge noktasına yakınsar.



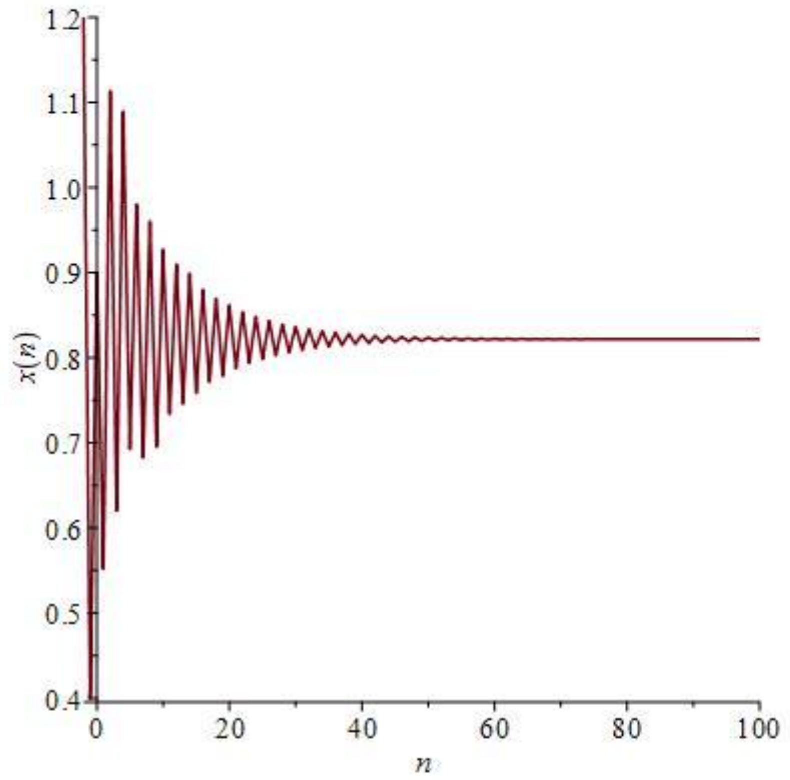
Örnek 3.1.4. $x_{-2} = 1.2$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 0.9$ olmak üzere $\alpha = 1$, $\beta = 6$ ve $\gamma = 2$ değerleri için (3.1) denkleminin çözümü bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.



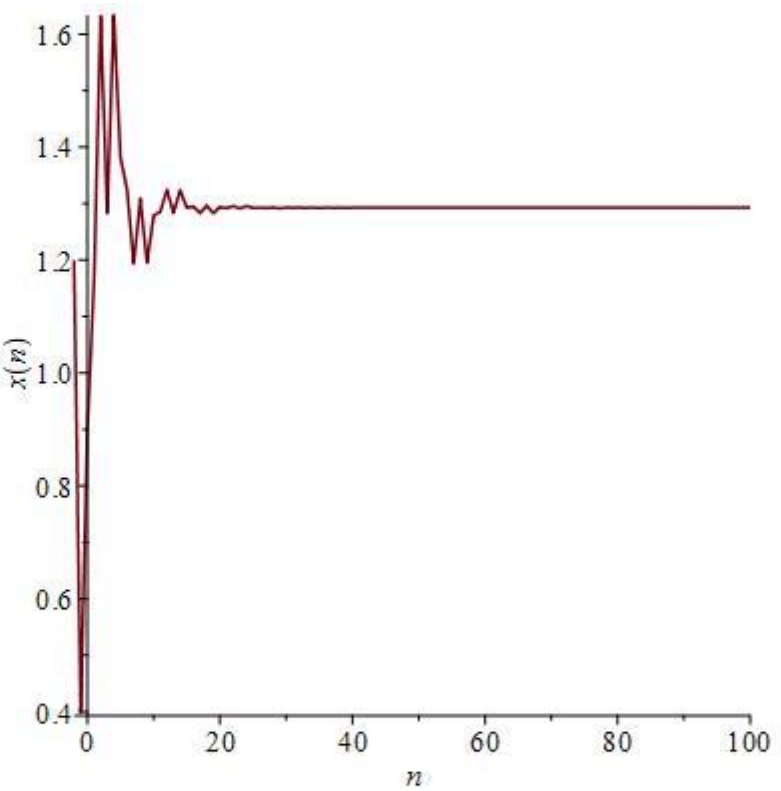
Örnek 3.1.5. $x_{-4}=2.02$, $x_{-3}=0.45$, $x_{-2}=1.2$, $x_{-1}=0.4$, $x_0=0.9$ olmak üzere $\alpha=1$, $\beta=3$ ve $\gamma=2$ değerleri için

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+\beta e^{-x_n}}{\gamma+x_{n-4}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.1.1}$$

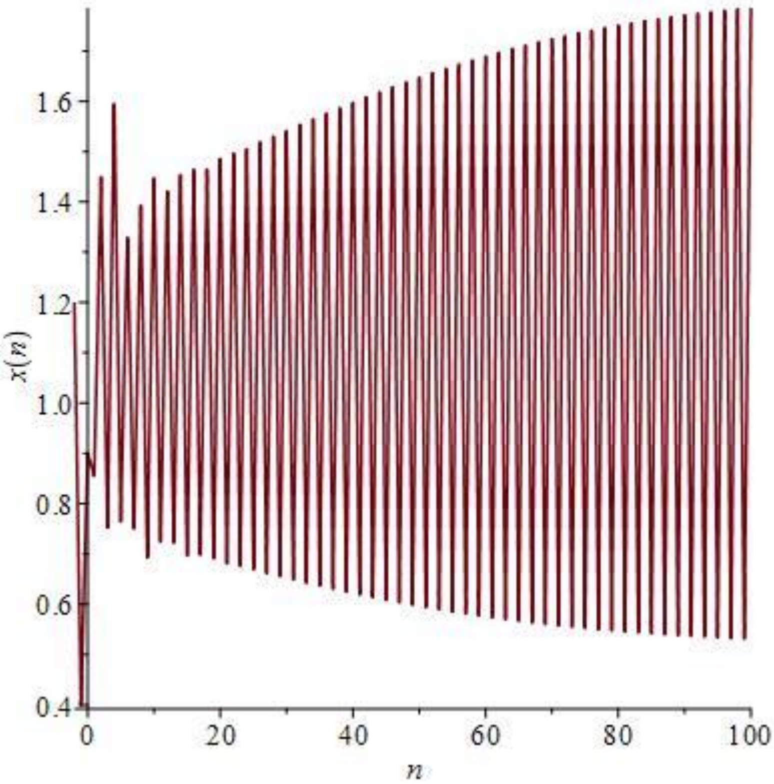
denkleminin çözümü denge noktasına yakınsar.



Örnek 3.1.6. $x_{-4}=2.02$, $x_{-3}=0.45$, $x_{-2}=1.2$, $x_{-1}=0.4$, $x_{0}=0.9$ olmak üzere $\alpha=5$, $\beta=2$ ve $\gamma=3$ değerleri için (3.1.1) denkleminin çözümü denge noktasına yakınsar.



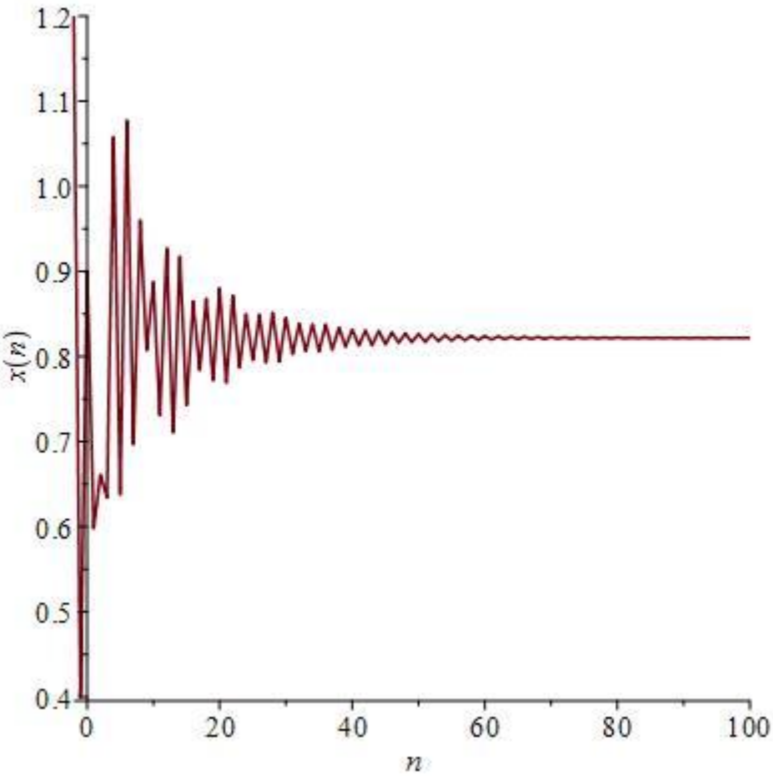
Örnek 3.1.7. $x_{-4} = 2.02$, $x_{-3} = 0.45$, $x_{-2} = 1.2$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 0.9$ olmak üzere $\alpha = 1$, $\beta = 6$ ve $\gamma = 2$ değerleri için (3.1.1) denkleminin çözümü bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.



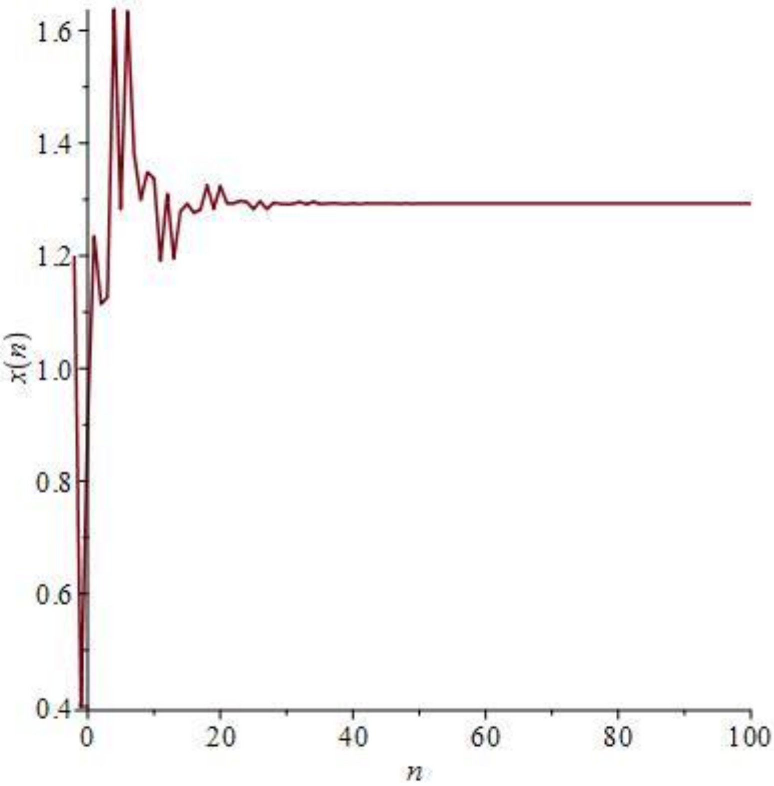
Örnek 3.1.8. $x_{-6}=1.71$, $x_{-5}=2.01$, $x_{-4}=2.02$, $x_{-3}=0.45$, $x_{-2}=1.2$, $x_{-1}=0.4$, $x_0=0.9$ olmak üzere $\alpha=1$, $\beta=3$ ve $\gamma=2$ değerleri için

$$x_{n+1}=\frac{\alpha+\beta e^{-x_n}}{\gamma+x_{n-6}},\ n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.1.2}$$

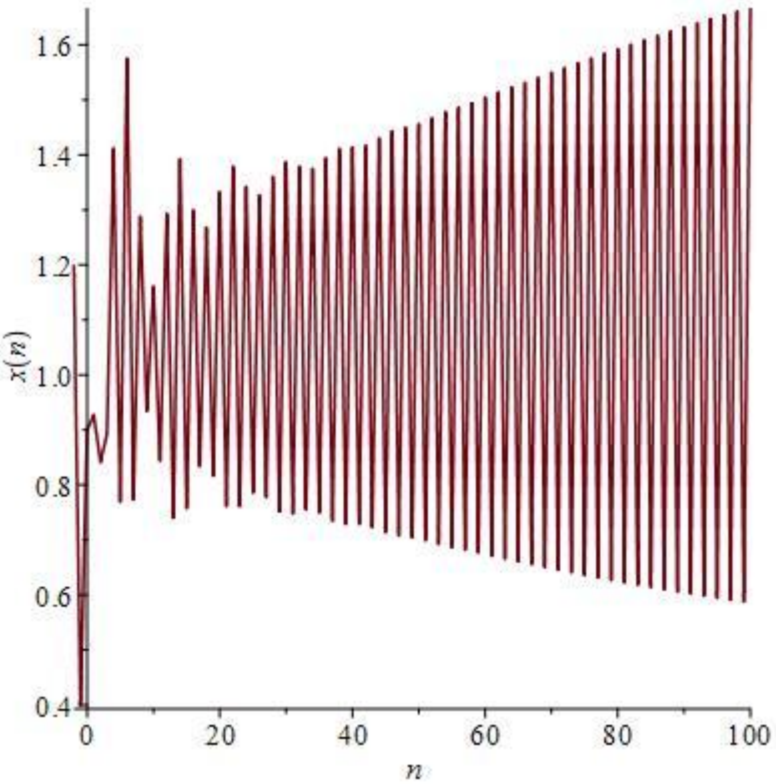
denkleminin çözümü denge noktasına yakınsar.



Örnek 3.1.9. $x_{-6} = 1.71$, $x_{-5} = 2.01$, $x_{-4} = 2.02$, $x_{-3} = 0.45$, $x_{-2} = 1.2$, $x_{-1} = 0.4$, $x_0 = 0.9$ olmak üzere $\alpha = 5$, $\beta = 2$ ve $\gamma = 3$ değerleri için (3.1.2) denkleminin çözümü denge noktasına yakınsar.



Örnek 3.1.10. $x_{-6}=1.71$, $x_{-5}=2.01$, $x_{-4}=2.02$, $x_{-3}=0.45$, $x_{-2}=1.2$, $x_{-1}=0.4$, $x_0=0.9$ olmak üzere $\alpha=1$, $\beta=6$ ve $\gamma=2$ değerleri için (3.1.2) denkleminin çözümü bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

4.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, (2.3) denkleminin mertebesi arttırılarak (3.1) denklemi tanımlanmış ve pozitif katsayılar ile negatif olmayan başlangıç şartları için (3.1) denkleminin pozitif çözümlerinin yakınsaklığı, sınırlılığı ve periyodikliği incelenmiştir.

(3.1) denklemi için elde edilen sonuçlar, α, β, γ parametreleri pozitif reel sayılar, k bir çift doğal sayı ve $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_{-1}, x_0$ negatif olmayan başlangıç şartları olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta e^{-x_n}}{\gamma + x_{n-k}}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

fark denklemi için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir (Cömert ve ark., 2017)

Teorem 4.1. Eğer

$$\beta < \gamma e^{\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4(\alpha - \gamma)}}{2}} \tag{4.2}$$

ise (4.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.2. (4.1) denkleminin bütün pozitif çözümleri sınırlıdır.

Teorem 4.3. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ (4.1) denkleminin pozitif çözümü olmak üzere,

(i) $x_{-2k}, ..., x_{-2}, x_0 \geq \bar{x}$ ve $x_{-2k+1}, x_{-2k+3}, ..., x_{-1} < \bar{x}$

veya

(ii) $x_{-2k}, ..., x_{-2}, x_0 < \bar{x}$ ve $x_{-2k+1}, x_{-2k+3}, ..., x_{-1} \geq \bar{x}$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $\bar{x}$ denge noktası civarında bir uzunluğunda yarı dönmeler ile salınım hareketi yapar.

Teorem 4.4. Eğer (3.4) eşitsizliği sağlanırsa ve $\beta < \gamma$ ise (4.1) denkleminin $\bar{x}_1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

Teorem 4.5. (4.1) denklemi k periyotlu pozitif çözümlere sahip değildir.

4.2. Öneriler

Yapılacak yeni çalışmalarda (3.1) veya (4.1) denklemindeki pozitif katsayıların yerine farklı diziler alınarak yeni çalışmalar yapılabileceği gibi denklemdeki bilinmeyen sayısı veya denklemin mertebesi artırılarak daha genel çalışmalar yapılabilir. Ayrıca, bu denklemler kullanılarak fark denklem sistemleri tanımlanabilir ve tanımlanan sistemlerin özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aboutaleb, M. T., El-Sayed, M. A. and Hamza, A. E., 2001, Stability of the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n) \ / \ (\gamma + x_{n-1})$, *Journal Mathematical Analysis Applications*, 261, 126-133.

Bereketoğlu, H., ve Kutay, V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitapevi*, Ankara.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of Advances in Discrete Mathematics and Applications, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Cömert, T., Yalçınkaya, İ. and Tollu, D. T., 2017, A study on the positive solutions of an exponential type difference equations, (incelemede).

DeVault, R., Kosmala, W. and Schultz, S. W., 2001, Global behavior of $y_{n+1} = (p + y_{n-k})/(qy_n + y_{n-k})$, *Nonlinear Analysis*, 47, 4743-4751.

Din, Q. and Elsayed, E. M., 2014, Stability analysis of a discrete ecological model, *Computational Ecology and Software*, 4(2), 89-103.

Din, Q., 2015, Global behavior of a plant-herbivore model, *Advances in Difference Equations*, 119.

Ding, X. and Zhang, R., 2008, On the difference equation $x_{n+1} = (\alpha x_n + \beta x_{n-1})e^{-x_n}$, *Advances in Difference Equations*, Volume 2008, Article ID 876936, 7 pages.

El-Metwally, H., Grove, E. A., Ladas, G., Levins, R. and Radin, M., 2001, On the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1}e^{-x_n}$, *Nonlinear Analysis*, 47, 4623-4634.

Feng, H., Ma, H. and Ding, W., 2016, Global asymptotic behavior of positive solutions for exponential form difference equations with three parameters, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 6(3), 600-606.

Fotiades, N. and Papaschinopoulos, G., 2012, Asymptotic behavior of the positive solutions of a system of k difference equations of exponential form, *Mathematical Analysis*, 19, 585-597.

Fotiades, N. and Papaschinopoulos, G., 2012, Existence, uniqueness and attractivity of prime period two solution for a difference equation of exponential form, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11648-11653.

Khuong, V. V. and Phong, M. N., 2013, On a system of two difference equations of exponential form, *International Journal of Difference Equations*, ISSN 0973-6069, Volume 8, Number 2, 215-223.

Kocic, V. L. and Ladas, G., 1993, Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications. Volume 256, *Springer Science & Business Media*.

Papaschinopoulos, G., Stefanidou, G. and Papadopoulos, K. B., 2010, On a modification of a discrete epidemic model, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 3559-3569.

Papaschinopoulos, G., Radin, M. A. and Schinas, C. J., 2011, On the system of two difference equations of exponential form $x_{n+1} = a + bx_{n-1}e^{-y_n}$, $y_{n+1} = c + dy_{n-1}e^{-x_n}$, *Mathematical and Computer Modelling*, 54, 2969-2977.

Papaschinopoulos, G., Radin, M. and Schinas, C. J., 2012, Study of the asymptotic behavior of the solutions of three systems of difference equations of exponential form, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5310-5318.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 2012, On the dynamics of two exponential type systems of difference equations, *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 2326-2334.

Papaschinopoulos, G., Ellina, G. and Papadopoulos, K. B., 2014, Asymptotic behavior of the positive solutions of an exponential type system of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 181-190.

Papaschinopoulos, G., Schinas, C. J. and Ellina, G., 2014, On the dynamics of the solutions of biological model, *Journal of Difference Equations and Applications*, Vol. 20, No. 5-6, 694-705.

Papaschinopoulos, G., Psarros, N. and Papadopoulos, K. B., 2015, On a cyclic system of *m* difference equations having exponential terms, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 5, 1-13.

Ozturk, I., Bozkurt, F. and Ozen, S., 2006, On the difference equation $y_{n+1} = (\alpha + \beta e^{-y_n}) / (\gamma + y_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 181, 1387-1393.

Ozturk, I., Bozkurt, F. and Ozen, S., 2008, Global asymptotic behavior of the difference equation $y_{n+1} = \alpha e^{-(ny_n + (n-k)y_{n-k})} / (\beta + ny_n + (n-k)y_{n-k})$, *Applied Mathematics Letters*, 22, 595-599.

Wang, W. and Feng, H., 2016, On the dynamics of positive solutions for the difference equation in a new population model, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 1748-1754.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Tuğrul CÖMERT
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Afşin - 12.07.1986
Telefon	**: (**0538) 5478963
e-mail	**:** tugrulcomertt@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Özel Kahramankent Lisesi, Kahramanmaraş	2004
Üniversite	:	Gazi Üniversitesi, Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir	2009
Yüksek Lisans	:	Ahi Evran Üniversitesi, Tezsiz Yüksek Lisans, Kırşehir	2010
		Necmettin Erbakan Üniversitesi, Tezli Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı, Konya	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-2015	Özel İlk Kültür Dershanesi, Osmaniye	Öğretmen
2015-2016 Güz Dönemi	İ.M.K.B. Anadolu İmam Hatip Lisesi, Bismil, Diyarbakır	Öğretmen
2016-	Bismil Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Bismil, Diyarbakır	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

The positive solutions of the exponential type difference equations, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017)*, Harran Üniversitesi, 11-13 Mayıs 2017, 632-633 (Sözlü Sunum / Özet Metin).