T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz - 2018

KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA tarafından hazırlanan "FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA" adlı tez çalışması 02/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Necati TAŞKARA	....
Danışman Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	....
Üye Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU	....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARALI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA
02/07/2018

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK DENKLEM SİSTEMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2018, 36 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{x_n+y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_{n-1}}{y_n+z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_{n-1}}{z_n+x_{n-1}},\ n\in\mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan sistemin genel çözümü kapalı formda elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde; $a\in[0,\infty)$ ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_n+a}{x_n+y_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_n+a}{y_n+z_n},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_n+a}{z_n+x_n},\ n\in\mathbb{N}_0$$

fark denklem sistemi tanımlanmış, tanımlanan sistemin genel çözümü açık bir şekilde elde edilmiş, çözümlerin global davranışı incelenmiş ve elde edilen teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde ise; çalışmaya dair sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Denge noktası, Fark denklem sistemi, Global asimptotik kararlılık, Sınırlılık

ABSTRACT

MS THESIS

A STUDY ON THE SYSTEMS OF DIFFERENCE EQUATIONS

Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

2018, 36 Pages

Jury
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of five sections.

In the first section, general definitions and theorems related to difference equations were given.

In the second section, informations about some of the studies regarding the system of difference equations studied before were given.

In the third section, we show that the following systems of nonlinear difference equations

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{x_n + y_{n-1}}, \; y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{y_n + z_{n-1}}, \; z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{z_n + x_{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

where the initial values are real numbers, can be solved in explict form.

In the fourth section, we show that the following systems of nonlinear difference equations

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n}, \; y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n}, \; z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}, \; n \in \mathbb{N}_0$$

where $a \in [0,\infty)$ and initial values are real numbers, can be solved in explict form. Also we investigate the asymptotic behavior of the solutions by using these formulae and give some numerical examples which verify our theoretical results.

In the fifth section, some conclusions and suggestions were given.

Keywords: Equilibrium point, System of difference equation, Global asymptotic stability, Boundedness

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmam esnasında yardım ve yönlendirmelerine ihtiyaç duyduğum danışman hocam Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya, desteğini esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya ve bu süre zarfında yanımda duran kıymetli eşime teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

A. Furkan ŞAHİNKAYA
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin ayrık benzerleri ve nümerik çözümleri olarak ortaya çıkarlar. Fark denklemleri konu kapsam yönünden matematiğin zengin dallarından birisidir, matematiğin diğer dallarına ve bilimin diğer disiplinlerine birçok uygulaması vardır. Bunlardan bir kısmı olasılık teorisi, ekonomi, biyoloji, sinyal işleme, bilgisayar mühendisliği, kontrol mühendisliği, genetik, popülasyon dinamiği, sağlık bilimleri, ekoloji, fizik ve normlu uzaylardır. Bu nedenle, matematikçilerin yanı sıra uygulamalı alanlarda çalışanların da fark denklemlerini bilmeye ihtiyaçları olmaktadır (Soykan ve arkadaşları, 2017). Fark denklemleri ve fark denklem sistemleri konularında yapılan çalışmalar öncelikle uygulamalı matematiğin ve dolaylı olarak bilim ve teknolojinin gelişimine katkı sağlar.

Çalışmamızın birinci bölümünde; fark denklemleri ile ilgili temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. İkinci bölümünde; fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında literatür taraması verilmiştir. Üçüncü bölümde; literatürdeki denklem sistemleri göz önünde bulundurularak bir fark denklem sistemi tanımlanmış ve bu sistemin genel çözümü özel bir durum için elde edilmiştir. Dördüncü bölümde; yine literatürdeki sistemler göz önünde bulundurularak bir fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan sistemin genel çözümü ile sınırlılığı incelenmiştir. Ayrıca, çalışılan fark denklem sistemi için nümerik örneklere yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise yapılan çalışmaların sonuçları ve konuya dair bazı öneriler verilmiştir.

1.1. Fark Denklemleri ile İlgili Genel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda, fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1.1. Bir $x:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü (ileri fark) veya x in birinci mertebeden (basamaktan) farkı

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlanır; burada $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ doğal sayılar kümesi ve $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesidir.

Buna göre x in ikinci mertebeden farkı $(\Delta^2 x)$

$$\Delta^2 x(n) = \Delta(\Delta x(n)) = x(n+2) - 2x(n+1) + x(n) \tag{1.1.2}$$

ve böyle devam ederek x in k. mertebeden farkı $(\Delta^k x)$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} x(n+k-j) \tag{1.1.3}$$

şeklinde hesaplanır; burada $k \geq j$ olmak üzere

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)...(k-j+1)}{j!} \tag{1.1.4}$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 1.1.1. Δ fark operatörü lineerdir; yani

$$\Delta(ax(n) + by(n)) = a\Delta x(n) + b\Delta y(n) \tag{1.1.5}$$

dir; burada a ve b sabitlerdir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Örnek 1.1.1. $\Delta(7n^3 - 5n^2 + n^2 + 4n - 9) = 7\Delta n^3 - 5\Delta n^2 + \Delta n^2 + 4\Delta n - \Delta 9 = 21n^2 + 13n + 7$ (Soykan ve arkadaşları, 2017)

Tanım 1.1.2. E öteleme (kaydırma) operatörü

$$Ex(n) = x(n+1) \tag{1.1.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre

$$E^k x(n) = x(n+k) \tag{1.1.7}$$

dır. Ayrıca, a ve b sabitleri için

$$E(ax(n) + by(n)) = aEx(n) + bEy(n) \tag{1.1.8}$$

dir; yani E operatörü lineerlik özelliğine sahiptir.

Δ ve E operatörleri arasında

$$\Delta = E - I \tag{1.1.9}$$

ilişkisi vardır; burada I özdeşlik operatörüdür; yani $Ix(n) = x(n)$.

Buradan

$$\Delta E = E\Delta \tag{1.1.10}$$

değişme özelliği ortaya çıkar. Binom formülünden, k. mertebeden fark ve öteleme operatörleri sırasıyla,

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j E^{k-j} \tag{1.1.11}$$

ve

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \Delta^{k-j} \tag{1.1.12}$$

dir (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

Teorem 1.1.2.

(a) $$\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n) \tag{1.1.13}$$

(b) $$\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)} \tag{1.1.14}$$

dir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 1.1.3. $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \tag{1.1.15}$$

eşitliğine bir fark denklemi denir.

f bir fonksiyon olmak üzere (1.1.15) denklemi

$$x(n+k) = f(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)) \tag{1.1.16}$$

formunda ise normal fark denklemi adını alır. Normal fark denklemi, g ve h fonksiyon olmak üzere

$$\Delta^k x(n) = g(n, x(n), \Delta x(n), ..., \Delta^{k-1} x(n)) \tag{1.1.17}$$

ya da

$$\Delta^k x(n) = h(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k-1)) \tag{1.1.18}$$

formlarında da yazılabilir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Örnek 1.1.2. Bir S cümlesi üzerinde tanımlı olan

$$\Delta x(n) + 4x(n) = -3n + 5, \tag{1.1.19}$$

$$\left(\Delta x(n)\right)^2 + x^4(n) - x(n) = -6, \tag{1.1.20}$$

$$\Delta^3 x(n) + \left(2n+3\right)\Delta x(n) = -\sin\left(4n-1\right) + 5n^2 + 7n, \tag{1.1.21}$$

$$x(n)\Delta^3 x(n) = 0 \tag{1.1.22}$$

fark denklemlerini göz önüne alalım; burada *S*, bir $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sayısından başlayan ardışık doğal sayıların sonlu ya da sonsuz bir kümesidir. Bu denklemlerin hepsinde bağımsız değişken n ve bilinmeyen fonksiyon x tir. (1.1.20) hariç diğerleri normal formda yazılabilen denklemlerdir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 1.1.4. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin mertebesi denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 1.1.5. $\mathbb{N}_0$ üzerinde tanımlı bir $x(n)$ fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (1.1.15) denklemini sağlıyorsa, bu durumda $x(n)$ fonksiyonuna $\mathbb{N}_0$ üzerinde (1.1.15) denkleminin bir çözümü denir. k ıncı mertebeden bir fark denkleminin, φ ve ψ fonksiyonlar olmak üzere

$$\varphi(n, x(n), c_1, c_2, ..., c_k) = 0 \tag{1.1.23}$$

veya

$$x(n) = \psi(n, c_1, c_2, ..., c_k) \tag{1.1.24}$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne genel çözüm adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de özel çözüm denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Teorem 1.1.3. Sabit reel katsayılı, birinci mertebeden homojen

$$x(n+1) - ax(n) = 0,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.25}$$

fark denkleminin genel çözümü, c_1 keyfi sabit olmak üzere

$$x(n) = c_1 \lambda^n \tag{1.1.26}$$

ile verilir. Burada λ, (1.1.25) in $\lambda - a = 0$ karakteristik denkleminden elde edilir yani $\lambda = a$ dır (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Teorem 1.1.4. I reel sayıların bir aralığı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $f\ :\ I^{k+1} \to I$ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon ise $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}),\ \ n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.27}$$

fark denkleminin bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü vardır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.6. Eğer $\bar{x}$ için (1.1.27) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$ ise $\bar{x}$ noktasına (1.1.27) denkleminin denge noktası denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.7. Eğer her $n > 0$ için $x_{-k}, x_{-k+1}, ..., x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu J aralığına (1.1.27) denkleminin değişmez aralığı denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.8. $\bar{x}$, (1.1.27) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(i) Eğer $x_0, ..., x_{-k} \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq -k$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(ii) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_0,...,x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer her $x_0,...,x_{-k} \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(iv) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(v) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(vi) Eğer $x_0,...,x_{-k} \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + ... + |x_{-k} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -k$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.9. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$, (1.1.27) fark denkleminin bir çözümü olsun. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü $n \geq -k$ için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü *p* periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif *p* tam sayısına da asal periyod denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.10. Eğer $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ şartını sağlıyorsa, $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü er geç *p* periyotludur denir ve *p* bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.11. I reel sayıların bir aralığı, $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $i = 0,1,\ldots,k$ olmak üzere

$$q_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}) \tag{1.1.28}$$

ifadesi $f : I^{k+1} \to I$ fonksiyonunun x_i lere göre kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri olsun. Bu durumda,

$$z_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} q_i z_{n-i}, \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{1.1.29}$$

denklemine (1.1.27) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi denir.

$$\lambda^{k+1}-\sum_{i=0}^{k}q_i\lambda^{k-i}=0 \tag{1.1.30}$$

polinom denklemine ise (1.1.27) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki karakteristik denklemi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Teorem 1.1.5. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(i) Eğer (1.1.30) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1’den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) Eğer (1.1.30) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1’den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.12. $\bar{x}$, (1.1.27) denkleminin denge noktası olsun. $l\geq -k$, $m\leq\infty$ olmak üzere, $\{x_l,x_{l+1},...,x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $x_{l-1}<\bar{x}$ ve $x_{m+1}<\bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l,x_{l+1},...,x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l\geq -k$, $m\leq\infty$ olmak üzere, $\{x_l,x_{l+1},...,x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $x_{l-1}\geq\bar{x}$ ve $x_{m+1}\geq\bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l,x_{l+1},...,x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.13. Eğer her N pozitif tam sayısı için $x_n x_{n+1}\leq 0$ olacak şekilde $n\geq N$ tam sayıları mevcut ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümü sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir denir. (Elaydi, 1995).

Tanım 1.1.14. $\{x_n-\bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

Tanım 1.1.15. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P\leq x_n\leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir (Camouzis ve Ladas, 2008).

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde; fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bazıları hakkında bilgi verilmiştir.

Yalçınkaya (2010); başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_n+x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1} \tag{2.1}$$

fark denklem sisteminin denge noktasının global asimptotik kararlılığı için bir yeter şart elde etmiştir.

Kurbanlı (2011); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1} \tag{2.2}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışını incelemiştir.

Stević (2011); bütün parametreler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a x_{n-1}}{b y_n x_{n-1}+c},\ y_{n+1}=\frac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1}+\gamma} \tag{2.3}$$

fark denklem sisteminin çözülebilir olduğunu ve daha sonra da katsayılar iki periyotlu reel terimli diziler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a_n x_{n-1}}{b_n y_n x_{n-1}+c_n},\ y_{n+1}=\frac{\alpha_n x_{n-1}}{\beta_n y_n x_{n-1}+\gamma_n} \tag{2.4}$$

fark denklem sisteminin çözülebileceğini göstermiştir.

Stević (2012); reel başlangıç şartları için u_n, v_n, w_n ve s_n dizilerinin her biri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{u_n}{1+v_n},\ y_{n+1}=\frac{w_n}{1+s_n} \tag{2.5}$$

fark denklem sisteminin on altı muhtemel durumundan on dört tanesinde çözülebilir olduğunu göstermiştir.

El-Metwally (2013); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_n = \frac{x_{n-1}y_n}{\pm x_{n-1} \pm y_{n-2}},\ y_n = \frac{x_n y_{n-1}}{\pm y_{n-1} \pm x_{n-2}} \tag{2.6}$$

fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını bularak bu çözümlerin bazı özelliklerini incelemiştir.

Yazlık ve arkadaşları (2013); çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}} \tag{2.7}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini Padovan sayıları ile ilişkilendirerek formülüze edip, bu formülleri kullanarak her bir sistem için bütün çözümlerin asimptotik olarak tek bir noktaya yakınsadığını göstermişler ve sistemler için tanımlanamaz çözümleri veren başlangıç şartlarının kümelerini belirlemişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2014); reel başlangıç şartları için p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin her biri x_n ve y_n dizilerinden biri olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n},\ y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \tag{2.8}$$

sisteminin on altı muhtemel durumundan on dört tanesinde çözülebilir olduğunu göstermişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2014); başlangıç şartları çözümleri iyi tanımlı yapan keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\pm 1 + y_{n-1}x_{n-3}y_{n-5}},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\pm 1 + x_{n-1}y_{n-3}x_{n-5}} \tag{2.9}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini kapalı formda elde edip, bu çözümlerin davranışlarını incelemişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2015); $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ ve başlangıç şartları kompleks sayılar olmak üzere

$$z_{n+1} = \frac{w_n^a}{z_{n-1}^b},\ w_{n+1} = \frac{z_n^c}{w_{n-1}^d} \tag{2.10}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini kapalı formda elde edecek bir metot geliştirmişlerdir.

El-Dessoky (2016a); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm t_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm x_n t_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{\pm 1 \pm y_n x_{n-1} t_{n-2} z_{n-3}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_{n-3}}{\pm 1 \pm z_n y_{n-1} x_{n-2} t_{n-3}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

dört boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerinin varlığını incelemiştir.

El-Dessoky (2016b); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1 + y_{n-2} x_{n-1} y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\pm 1 \pm x_{n-2} y_{n-1} x_n} \tag{2.12}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini incelemiştir.

El-Dessoky (2016c); başlangıç şartları reel sayılar ve katsayılar tam sayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{z_{n-3}}{a_1 + b_1 z_n y_{n-1} x_{n-2} z_{n-3}}, \\ y_{n+1} &= \frac{x_{n-3}}{a_2 + b_2 x_n z_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}, \\ z_{n+1} &= \frac{y_{n-3}}{a_3 + b_3 y_n x_{n-1} z_{n-2} y_{n-3}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

dördüncü mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemiştir.

El-Dessoky (2016d); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}y_{n-2}}{x_n(\pm 1\pm y_{n-1}y_{n-2})},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-1}x_{n-2}}{y_n(\pm 1\pm x_{n-1}x_{n-2})} \tag{2.14}$$

üçüncü mertebeden rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemiştir.

Elsayed ve Ahmed (2016); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{y_n x_{n-2}}{x_{n-2}\pm z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{z_n y_{n-2}}{y_{n-2}\pm x_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{x_n z_{n-2}}{z_{n-2}\pm y_{n-1}} \tag{2.15}$$

üç boyutlu rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemişlerdir.

Elsayed ve Alghamdi (2016); başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-7}}{1+x_{n-7}y_{n-3}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-7}}{\pm 1\pm x_{n-3}y_{n-7}} \tag{2.16}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Gümüş ve Soykan (2016); pozitif parametreler ve başlangıç şartları için

$$u_{n+1}=\frac{\alpha u_{n-1}}{\beta+\gamma v_{n-2}^{p}},\ v_{n+1}=\frac{\alpha_1 v_{n-1}}{\beta_1+\gamma_1 u_{n-2}^{p}} \tag{2.17}$$

fark denklem sistemini tanımlamışlar ve bu sistemin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2016); parametreler ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{a_0 x_n+b_0 y_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_{n-1}}{a_1 y_n+b_1 z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_{n-1}}{a_2 z_n+b_2 x_{n-2}} \tag{2.18}$$

üç boyutlu fark denklem sisteminin çözümlerini elde etmişler sistemin iyi tanımlı çözümlerinin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Elyased ve arkadaşları (2017); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{y_n x_{n-2}}{y_n + y_{n-3}},\ y_{n+1} = \frac{x_n y_{n-2}}{\pm x_n \pm x_{n-3}} \tag{2.19}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini incelemişlerdir.

Elyased (2017); başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-3} y_{n-2}}{y_n \left(\pm 1 \pm x_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}\right)},\ x_{n+1} = \frac{x_{n-2} y_{n-3}}{x_n \left(\pm 1 \pm y_{n-1} x_{n-2} y_{n-3}\right)} \tag{2.20}$$

lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin periyodikliğini incelemiştir.

Haddad ve arkadaşları (2017); parametreler ve başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-k}^p y_n}{a y_{n-k}^p + b y_n},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-k+1}^p x_n}{\alpha x_{n-k}^p + \beta x_n} \tag{2.21}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümünü elde etmişlerdir. Ayrıca, (2.21) sistemin çözümlerinin davranışını özel bir durum için incelemişlerdir.

Haddad ve Rabago (2017); parametreler ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$y_{n+1}^{(1)} = \frac{a_1 y_n^{(1)}}{b_1 + c_1 \left(y_n^{(2)}\right) p_1}, y_{n+1}^{(2)} = \frac{a_2 y_n^{(2)}}{b_2 + c_2 \left(y_n^{(3)}\right) p_2}, \ldots, y_{n+1}^{(k)} = \frac{a_k y_n^{(k)}}{b_k + c_k \left(y_n^{(1)}\right) p_k} \tag{2.22}$$

fark denklem sisteminin negatif olmayan çözümlerinin sınırlılığını ve global kararlılığını incelemişlerdir.

Stević (2017); $i=1,2,3$ için $a_i, b_i, c_i, x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ $(veya\ \mathbb{C})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{a_1}{x_n y_n} + \frac{b_1}{y_n z_n} + \frac{c_1}{z_n x_n} \\ y_{n+1} &= \frac{a_2}{x_n y_n} + \frac{b_2}{y_n z_n} + \frac{c_2}{z_n x_n} \\ z_{n+1} &= \frac{a_3}{x_n y_n} + \frac{b_3}{y_n z_n} + \frac{c_3}{z_n x_n} \end{aligned} \tag{2.23}$$

sistemini tanımlamış ve tanımlanan sistemin çözülebilir olduğunu göstermiştir.

Tollu ve arkadaşları (2017); $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n y_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b}{1 + y_n x_{n-1}} \tag{2.24}$$

fark denklem sistemini tanımlamışlar ve bu sistemin çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir. Ayrıca, elde ettikleri sonuçlar için nümerik örnekler vermişlerdir.

Haddad ve arkadaşları (2018); başlangıç şartları ve parametreler sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a x_n y_{n-1}}{y_n - \alpha} + \beta, \quad y_{n+1} = \frac{b x_{n-1} y_n}{x_n - \beta} + \alpha \tag{2.25}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir. Ayrıca, elde ettikleri sonuçlar için nümerik örnekler vermişlerdir.

Türk ve arkadaşları (2018); $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ p,\ q \in \mathbb{R}^+$ ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$u_{n+1} = \frac{a u_{n-1}}{b + c v_{n-3}^p}, \mathrm{v}_{n+1} = \frac{d v_{n-1}}{e + f u_{n-3}^q} \tag{2.26}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Yılmazyıldırım ve Tollu (2018); başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{1+x_ny_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n+z_n}{1+y_nz_n},\ z_{n+1}=\frac{z_n+x_n}{1+z_nx_n} \tag{2.27}$$

fark denklem sisteminin genel çözümünü kapalı formda elde etmişler ve çözümlerin asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Tollu ve Yalçınkaya (2019); (2.17) sistemini üç boyutlu bir sisteme genelleştirerek pozitif parametreler ve negatif olmayan başlangıç şartları için

$$u_{n+1}=\frac{\alpha_1u_{n-1}}{\beta_1+\gamma_1v_{n-2}^p},\ v_{n+1}=\frac{\alpha_2v_{n-1}}{\beta_2+\gamma_2w_{n-2}^q},\ w_{n+1}=\frac{\alpha_3w_{n-1}}{\beta_3+\gamma_3u_{n-2}^r} \tag{2.28}$$

fark denklem sistemini tanımlamışlar ve bu sistemin çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir. Ayrıca, bu çalışmada sistemin denge noktaları, lokal asimptotik kararlılığı, global asimptotik kararlılığı, iki periyotlu çözümlerin varlığı ve çözümlerin bu periyodik çözümlere yakınsaması parametrelerin durumuna göre incelenmiştir.

Bu çalışmada; fark denklem sistemleri ile ilgili olarak yapılan literatür taramasının ışığında iki yeni fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan sistemlerin genel çözümleri kapalı formda elde edilmiştir. Ayrıca, tanımlanan sistemlerden birinin çözümlerinin global davranışı incelenmiş ve elde edilen teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

3. $x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{x_n+y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{y_n z_{n-1}}{y_n+z_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{z_n x_{n-1}}{z_n+x_{n-1}}$ DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde; başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_{n-1}}{x_n+y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_{n-1}}{y_n+z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_{n-1}}{z_n+x_{n-1}} \tag{3.1}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan sistemin genel çözümü kapalı formda elde edilmiştir.

Bu sistemde, $n\in\mathbb{N}_0$ için $x_n y_n z_n \neq 0$ olmak üzere

$$x_n=\frac{1}{u_n},\ y_n=\frac{1}{v_n},\ z_n=\frac{1}{w_n} \tag{3.2}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$u_{n+1}=u_n+v_{n-1},\ v_{n+1}=v_n+w_{n-1},\ w_{n+1}=w_n+u_{n-1} \tag{3.3}$$

lineer fark denklem sistemi elde edilir. (3.1) sisteminin genel çözümüne ulaşmak için (3.3) sisteminin genel çözümünü elde etmek yeterli olacaktır. (3.3) sistemindeki denklemlerde indis değişimi yapılarak, sistemdeki birinci denklemden

$$\begin{aligned}
u_{n+2}&=u_{n+1}+v_n,\\
u_{n+3}&=u_{n+2}+v_{n+1},\\
u_{n+4}&=u_{n+3}+v_{n+2},\\
u_{n+5}&=u_{n+4}+v_{n+3},\\
u_{n+6}&=u_{n+5}+v_{n+4}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde, ikinci denklemden

$$\begin{aligned}
v_{n+2}&=v_{n+1}+w_n,\\
v_{n+3}&=v_{n+2}+w_{n+1},\\
v_{n+4}&=v_{n+3}+w_{n+2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

denklemleri ve üçüncü denklemden de

$$w_{n+2}=w_{n+1}+u_n \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir. (3.4) ve (3.5) teki değerler (3.6) da kullanılırsa,

$$u_{n+6}-3u_{n+5}+3u_{n+4}-u_{n+3}-u_n=0 \tag{3.7}$$

denklemi elde edilir. (3.7) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^6 - 3\lambda^5 + 3\lambda^4 - \lambda^3 - 1 = 0 \tag{3.8}$$

şeklinde olup bu denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \tag{3.9}$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{3.10}$$

$$\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{-1-2i\sqrt{3}}}{2}, \tag{3.11}$$

$$\lambda_4 = \frac{1+\sqrt{-1-2i\sqrt{3}}}{2}, \tag{3.12}$$

$$\lambda_5 = \frac{1-\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2} \tag{3.13}$$

ve

$$\lambda_6 = \frac{1+\sqrt{-1+2i\sqrt{3}}}{2} \tag{3.14}$$

olarak bulunur. Buna göre, (3.7) denkleminin genel çözümü c_i parametreleri keyfi sabitler olmak üzere

$$u_n = \sum_{i=1}^{6} c_i \lambda_i^n \tag{3.15}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, d_i ve e_i parametreleri keyfi sabitler olmak üzere

$$v_n = \sum_{i=1}^{6} d_i \lambda_i^n \tag{3.16}$$

ve

$$w_n = \sum_{i=1}^{6} e_i \lambda_i^n \tag{3.17}$$

genel çözümleri de elde edilir. (3.2) deki değişken değiştirmeler göz önüne alınırsa, (3.1) sisteminin genel çözümü

$$x_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} c_i \lambda_i^n}, \; y_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} d_i \lambda_i^n}, \; z_n = \frac{1}{\sum_{i=1}^{6} e_i \lambda_i^n} \tag{3.18}$$

şeklindedir.

4. $x_{n+1}=\frac{x_n y_n+a}{x_n+y_n}$, $y_{n+1}=\frac{y_n z_n+a}{y_n+z_n}$, $z_{n+1}=\frac{z_n x_n+a}{z_n+x_n}$ DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde; $a\in[0,\infty)$ ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_n+a}{x_n+y_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_n+a}{y_n+z_n},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_n+a}{z_n+x_n} \tag{4.1}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış, tanımlanan sistemin genel çözümü kapalı formda elde edilmiş, çözümlerin global davranışı incelenmiş ve elde edilen teorik sonuçlar için bazı nümerik örnekler verilmiştir.

4.1. $a=0$ Durumu

Bu kısımda; (4.1) sistemi $a=0$ için ele alınmıştır. (4.1) sisteminde $a=0$ olarak alınırsa,

$$x_{n+1}=\frac{x_n y_n}{x_n+y_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n z_n}{y_n+z_n},\ z_{n+1}=\frac{z_n x_n}{z_n+x_n} \tag{4.1.1}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemde, $n\in\mathbb{N}_0$ için $x_n y_n z_n\neq 0$ olmak üzere

$$x_n=\frac{1}{u_n},\ y_n=\frac{1}{v_n},\ z_n=\frac{1}{w_n} \tag{4.1.2}$$

değişken değiştirmeleri yapılırsa,

$$u_{n+1}=u_n+v_n,\ v_{n+1}=v_n+w_n,\ w_{n+1}=w_n+u_n \tag{4.1.3}$$

lineer fark denklem sistemi elde edilir. (4.1.1) sisteminin genel çözümüne ulaşmak için (4.1.3) sisteminin genel çözümünü elde etmek yeterli olacaktır. (4.1.3) sistemindeki denklemlerin toplanması ile

$$u_{n+1}+v_{n+1}+w_{n+1}=2\left(u_n+v_n+w_n\right) \tag{4.1.4}$$

denklemi ve bu denklemden de $n\in\mathbb{N}_0$ ve $K_0=u_0+v_0+w_0$ için

$$u_n+v_n+w_n=2^n K_0 \tag{4.1.5}$$

denklemi elde edilir. (4.1.3) ile (4.1.5) ten

$$v_n+w_{n+1}=2^n K_0 \tag{4.1.6}$$

denklemi ve (4.1.3) ile (4.1.6) dan

$$v_{n+2} - v_{n+1} + v_n = 2^n K_0 \tag{4.1.7}$$

ve

$$v_{n+1} = v_n - v_{n-1} + 2^{n-1} K_0 \tag{4.1.8}$$

denklemleri elde edilir. (4.1.8) denkleminin bir özel çözümünün

$$\frac{2^n K_0}{3} \tag{4.1.9}$$

şeklinde olduğu açıktır. (4.1.8) ve (4.1.9) dan

$$v_{n+1} - \frac{2^{n+1} K_0}{3} = v_n - \frac{2^n K_0}{3} - \left(v_{n-1} - \frac{2^{n-1} K_0}{3} \right) \tag{4.1.10}$$

elde edilir ve bu denklemde $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$r_n = v_n - \frac{2^n K_0}{3} \tag{4.1.11}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, $n \in \mathbb{N}_1$ için

$$r_{n+1} = r_n - r_{n-1} \tag{4.1.12}$$

denklemi elde edilir. (4.1.12) denkleminin çözümü $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$ olmak üzere

$$r_{6n+i} = r_i \tag{4.1.13}$$

şeklinde olup 6 periyotludur. (4.1.11) ve (4.1.13) ten

$$r_0 = v_0 - \frac{K_0}{3} = -\frac{u_0 - 2v_0 + w_0}{3}, \tag{4.1.14}$$

$$r_1 = v_1 - \frac{2K_0}{3} = v_0 + w_0 - \frac{2K_0}{3} = -\frac{2u_0 - v_0 - w_0}{3}, \tag{4.1.15}$$

$$r_2 = r_1 - r_0 = -\frac{u_0 + v_0 - 2w_0}{3}, \tag{4.1.16}$$

$$r_3 = r_2 - r_1 = -r_0 = \frac{u_0 - 2v_0 + w_0}{3}, \tag{4.1.17}$$

$$r_4 = r_3 - r_2 = -r_1 = \frac{2u_0 - v_0 - w_0}{3} \tag{4.1.18}$$

ve

$$r_5 = r_4 - r_3 = -(r_1 - r_0) = \frac{u_0 + v_0 - 2w_0}{3} \tag{4.1.19}$$

eşitlikleri ve bu eşitlikler sayesinde

$$v_{6n} = 2^{6n}\frac{K_0}{3} + r_0 = u_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n}+2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right), \tag{4.1.20}$$

$$v_{6n+1} = 2^{6n+1}\frac{K_0}{3} + r_1 = u_0\left(\frac{2^{6n+1}-2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right), \tag{4.1.21}$$

$$v_{6n+2} = 2^{6n+2}\frac{K_0}{3} + r_2 = u_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+2}+2}{3}\right), \tag{4.1.22}$$

$$v_{6n+3} = 2^{6n+3}\frac{K_0}{3} + r_3 = u_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+3}-2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right), \tag{4.1.23}$$

$$v_{6n+4} = 2^{6n+4}\frac{K_0}{3} + r_4 = u_0\left(\frac{2^{6n+4}+2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) \tag{4.1.24}$$

ve

$$v_{6n+5} = 2^{6n+5}\frac{K_0}{3} + r_5 = u_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+5}-2}{3}\right) \tag{4.1.25}$$

denklemleri elde edilir. (4.1.20) - (4.1.25) arasındaki değerler (4.1.3) sistemindeki ikinci denklemde kullanılırsa,

$$w_{6n} = u_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n}+2}{3}\right), \tag{4.1.26}$$

$$w_{6n+1} = u_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+1}-2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right), \tag{4.1.27}$$

$$w_{6n+2} = u_0\left(\frac{2^{6n+2}+2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right), \tag{4.1.28}$$

$$w_{6n+3} = u_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+3}-2}{3}\right), \tag{4.1.29}$$

$$w_{6n+4} = u_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+4}+2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) \tag{4.1.30}$$

ve

$$w_{6n+5} = u_0\left(\frac{2^{6n+5}-2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) \tag{4.1.31}$$

denklemleri elde edilir. Benzer şekilde, (4.1.26) - (4.1.31) arasındaki değerler (4.1.3) sistemindeki üçüncü denklemde kullanılırsa,

$$u_{6n} = u_0\left(\frac{2^{6n}+2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n}-1}{3}\right), \tag{4.1.32}$$

$$u_{6n+1} = u_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+1}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+1}-2}{3}\right), \tag{4.1.33}$$

$$u_{6n+2} = u_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+2}+2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+2}-1}{3}\right), \tag{4.1.34}$$

$$u_{6n+3} = u_0\left(\frac{2^{6n+3}-2}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+3}+1}{3}\right), \tag{4.1.35}$$

$$u_{6n+4} = u_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+4}-1}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+4}+2}{3}\right) \tag{4.1.36}$$

ve

$$u_{6n+5} = u_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) + v_0\left(\frac{2^{6n+5}-2}{3}\right) + w_0\left(\frac{2^{6n+5}+1}{3}\right) \tag{4.1.37}$$

denklemleri elde edilir. Bu durumda, (4.1.20) ile (4.1.37) arasındaki değerler (4.1.2) de kullanılırsa, (4.1.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{6n} = \frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n}+2\right) + x_0z_0\left(2^{6n}-1\right) + x_0y_0\left(2^{6n}-1\right)}, \tag{4.1.38}$$

$$x_{6n+1} = \frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+1}+1\right) + x_0z_0\left(2^{6n+1}+1\right) + x_0y_0\left(2^{6n+1}-2\right)}, \tag{4.1.39}$$

$$x_{6n+2} = \frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+2}-1\right) + x_0z_0\left(2^{6n+2}+2\right) + x_0y_0\left(2^{6n+2}-1\right)}, \tag{4.1.40}$$

$$x_{6n+3}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+3}-2\right)+x_0z_0\left(2^{6n+3}+1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+3}+1\right)},\qquad (4.1.41)$$

$$x_{6n+4}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+4}-1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+4}-1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+4}+2\right)},\qquad (4.1.42)$$

$$x_{6n+5}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+5}+1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+5}-2\right)+x_0y_0\left(2^{6n+5}+1\right)},\qquad (4.1.43)$$

$$y_{6n}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n}-1\right)+x_0z_0\left(2^{6n}+2\right)+x_0y_0\left(2^{6n}-1\right)},\qquad (4.1.44)$$

$$y_{6n+1}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+1}-2\right)+x_0z_0\left(2^{6n+1}+1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+1}+1\right)},\qquad (4.1.45)$$

$$y_{6n+2}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+2}-1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+2}-1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+2}+2\right)},\qquad (4.1.46)$$

$$y_{6n+3}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+3}+1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+3}-2\right)+x_0y_0\left(2^{6n+3}+1\right)},\qquad (4.1.47)$$

$$y_{6n+4}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+4}+2\right)+x_0z_0\left(2^{6n+4}-1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+4}-1\right)},\qquad (4.1.48)$$

$$y_{6n+5}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+5}+1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+5}+1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+5}-2\right)},\qquad (4.1.49)$$

$$z_{6n}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n}-1\right)+x_0z_0\left(2^{6n}-1\right)+x_0y_0\left(2^{6n}+2\right)},\qquad (4.1.50)$$

$$z_{6n+1}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+1}+1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+1}-2\right)+x_0y_0\left(2^{6n+1}+1\right)},\qquad (4.1.51)$$

$$z_{6n+2}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+2}+2\right)+x_0z_0\left(2^{6n+2}-1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+2}-1\right)},\qquad (4.1.52)$$

$$z_{6n+3}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+3}+1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+3}+1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+3}-2\right)},\qquad (4.1.53)$$

$$z_{6n+4}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+4}-1\right)+x_0z_0\left(2^{6n+4}+2\right)+x_0y_0\left(2^{6n+4}-1\right)},\qquad (4.1.54)$$

$$z_{6n+5}=\frac{3x_0y_0z_0}{y_0z_0\left(2^{6n+5}-2\right)+x_0z_0\left(2^{6n+5}+1\right)+x_0y_0\left(2^{6n+5}+1\right)} \tag{4.1.55}$$

şeklinde elde edilir.

4.2. $a>0$ Durumu

Bu kısımda; (4.1) sistemi $a>0$ için ele alınmıştır. (4.1) sisteminden

$$x_{n+1}+\sqrt{a}=\frac{x_ny_n+a+\sqrt{a}x_n+\sqrt{a}y_n}{x_n+y_n}, \tag{4.2.1}$$

$$y_{n+1}+\sqrt{a}=\frac{y_nz_n+a+\sqrt{a}y_n+\sqrt{a}z_n}{y_n+z_n}, \tag{4.2.2}$$

$$z_{n+1}+\sqrt{a}=\frac{z_nx_n+a+\sqrt{a}z_n+\sqrt{a}x_n}{z_n+x_n} \tag{4.2.3}$$

ve

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{x_ny_n+a-\sqrt{a}x_n-\sqrt{a}y_n}{x_n+y_n}, \tag{4.2.4}$$

$$y_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{y_nz_n+a-\sqrt{a}y_n-\sqrt{a}z_n}{y_n+z_n}, \tag{4.2.5}$$

$$z_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{z_nx_n+a-\sqrt{a}z_n-\sqrt{a}x_n}{z_n+x_n} \tag{4.2.6}$$

eşitlikleri elde edilebilir. (4.2.1) - (4.2.3) ve (4.2.4) - (4.2.6) sistemlerinden $n\in\mathbb{N}_0$ için $\left(x_n+y_n\right)\left(y_n+z_n\right)\left(z_n+x_n\right)\neq 0$, $\left(x_n\pm\sqrt{a}\right)\left(y_n\pm\sqrt{a}\right)\left(z_n\pm\sqrt{a}\right)\neq 0$,

$$x_n+\sqrt{a}=X_n^+,\ y_n+\sqrt{a}=Y_n^+,\ z_n+\sqrt{a}=Z_n^+$$
(4.2.7)

ve

$$x_n-\sqrt{a}=X_n^-,\ y_n-\sqrt{a}=Y_n^-,\ z_n-\sqrt{a}=Z_n^- \tag{4.2.8}$$

olmak üzere

$$\frac{X_{n+1}^+}{X_{n+1}^-}=\frac{X_n^+}{X_n^-}\frac{Y_n^+}{Y_n^-},\ \frac{Y_{n+1}^+}{Y_{n+1}^-}=\frac{Y_n^+}{Y_n^-}\frac{Z_n^+}{Z_n^-},\ \frac{Z_{n+1}^+}{Z_{n+1}^-}=\frac{Z_n^+}{Z_n^-}\frac{X_n^+}{X_n^-} \tag{4.2.9}$$

sistemi elde edilir. (4.2.9) sisteminden $n \geq 0$ için iterasyon ile

$$\frac{X_1^+}{X_1^-} = \frac{X_0^+}{X_0^-}\frac{Y_0^+}{Y_0^-},\ \frac{Y_1^+}{Y_1^-} = \frac{Y_0^+}{Y_0^-}\frac{Z_0^+}{Z_0^-},\ \frac{Z_1^+}{Z_1^-} = \frac{Z_0^+}{Z_0^-}\frac{X_0^+}{X_0^-},$$

$$\frac{X_2^+}{X_2^-} = \frac{X_0^+}{X_0^-}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^2\frac{Z_0^+}{Z_0^-},\ \frac{Y_2^+}{Y_2^-} = \frac{Y_0^+}{Y_0^-}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^2\frac{X_0^+}{X_0^-},\ \frac{Z_2^+}{Z_2^-} = \frac{Z_0^+}{Z_0^-}\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^2\frac{Y_0^+}{Y_0^-}, \tag{4.2.10}$$

$$\frac{X_3^+}{X_3^-} = \left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^2\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^3\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^3,\ \frac{Y_3^+}{Y_3^-} = \left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^2\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^3\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^3,\ \frac{Z_3^+}{Z_3^-} = \left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^2\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^3\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^3,$$

$$\vdots$$

elde edilir ve bu eşitlikler

$$\frac{X_n^+}{X_n^-} = \left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{a_n}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{b_n}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{c_n}, \tag{4.2.11}$$

$$\frac{Y_n^+}{Y_n^-} = \left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{a_n}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{b_n}\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{c_n}, \tag{4.2.12}$$

$$\frac{Z_n^+}{Z_n^-} = \left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{a_n}\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{b_n}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{c_n} \tag{4.2.13}$$

şeklinde genelleştirilebilir. (4.2.11) - (4.2.13) arasındaki denklemlerden $n = 0$ için

$$\frac{X_0^+}{X_0^-} = \left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{a_0}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{b_0}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{c_0}, \tag{4.2.14}$$

$$\frac{Y_0^+}{Y_0^-} = \left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{a_0}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{b_0}\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{c_0}, \tag{4.2.15}$$

$$\frac{Z_0^+}{Z_0^-} = \left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{a_0}\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{b_0}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{c_0} \tag{4.2.16}$$

ve buradan $b_0 = c_0 = 0$ ve $a_0 = 1$ değerleri elde edilir. (4.2.11) - (4.2.13) arasındaki değerler (4.2.9) daki birinci denklemde kullanılırsa, $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{a_{n+1}}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{b_{n+1}}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{c_{n+1}} = \left(\frac{X_0^+}{X_0^-}\right)^{a_n+c_n}\left(\frac{Y_0^+}{Y_0^-}\right)^{a_n+b_n}\left(\frac{Z_0^+}{Z_0^-}\right)^{b_n+c_n} \tag{4.2.17}$$

ve

$$a_{n+1}=a_n+c_n\,,\ c_{n+1}=c_n+b_n\,,\ b_{n+1}=b_n+a_n \tag{4.2.18}$$

eşitlikleri elde edilir. $a_n=u_n$, $\mathrm{c}_n=v_n$ ve $\mathrm{b}_n=w_n$ için (4.2.18) sisteminin çözümü (4.1.3) sisteminin çözümüne benzer olduğundan $b_0=c_0=0$ ve $a_0=1$ başlangıç şartları ile

$$a_{6n}=\frac{2^{6n}+2}{3},\ a_{6n+1}=\frac{2^{6n+1}+1}{3},\ a_{6n+2}=\frac{2^{6n+2}-1}{3}, \tag{4.2.19}$$

$$a_{6n+3}=\frac{2^{6n+3}-2}{3},\ a_{6n+4}=\frac{2^{6n+4}-1}{3},\ a_{6n+5}=\frac{2^{6n+5}+1}{3} \tag{4.2.20}$$

$$b_{6n}=\frac{2^{6n}-1}{3},\ b_{6n+1}=\frac{2^{6n+1}+1}{3},\ b_{6n+2}=\frac{2^{6n+2}+2}{3}, \tag{4.2.21}$$

$$b_{6n+3}=\frac{2^{6n+3}+1}{3},\ b_{6n+4}=\frac{2^{6n+4}-1}{3},\ b_{6n+5}=\frac{2^{6n+5}-2}{3} \tag{4.2.22}$$

$$c_{6n}=\frac{2^{6n}-1}{3},\ c_{6n+1}=\frac{2^{6n+1}-2}{3},\ c_{6n+2}=\frac{2^{6n+2}-1}{3}, \tag{4.2.23}$$

$$c_{6n+3}=\frac{2^{6n+3}+1}{3},\ c_{6n+4}=\frac{2^{6n+4}+2}{3},\ c_{6n+5}=\frac{2^{6n+5}+1}{3} \tag{4.2.24}$$

formülleri elde edilir. Sonuç olarak, (4.2.11) - (4.2.13) ve (4.2.19) - (4.2.24) ten (4.1.1) sisteminin genel çözümü

$$x_{6n}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}}, \tag{4.2.25}$$

$$x_{6n+1}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}}, \tag{4.2.26}$$

$$x_{6n+2}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}, \tag{4.2.27}$$

$$x_{6n+3}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}}, \tag{4.2.28}$$

$$x_{6n+4}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}},\tag{4.2.29}$$

$$x_{6n+5}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}},\tag{4.2.30}$$

$$y_{6n}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}},\tag{4.2.31}$$

$$y_{6n+1}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}},\tag{4.2.32}$$

$$y_{6n+2}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}},\tag{4.2.33}$$

$$y_{6n+3}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}},\tag{4.2.34}$$

$$y_{6n+4}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}},\tag{4.2.35}$$

$$y_{6n+5}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}},\tag{4.2.36}$$

$$z_{6n}=\sqrt{a}\,\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}},\tag{4.2.37}$$

$$z_{6n+1}=\sqrt{a}\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}-2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+1}+1}{3}}}, \tag{4.2.38}$$

$$z_{6n+2}=\sqrt{a}\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}+2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+2}-1}{3}}}, \tag{4.2.39}$$

$$z_{6n+3}=\sqrt{a}\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+3}-2}{3}}}, \tag{4.2.40}$$

$$z_{6n+4}=\sqrt{a}\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}+2}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+4}-1}{3}}}, \tag{4.2.41}$$

$$z_{6n+5}=\sqrt{a}\frac{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}+\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}}{\left(X_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Y_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^+\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}-\left(X_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}-2}{3}}\left(Y_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}\left(Z_0^-\right)^{\frac{2^{6n+5}+1}{3}}} \tag{4.2.42}$$

şeklinde elde edilir.

4.3. Çözümlerin Asimptotik Davranışı

Bu kısımda; (4.1) sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışı incelenecektir. (4.1) sisteminin denge noktalarının $a=0$ için $(0,0,0)$ ve $a>0$ için $\left(\sqrt{a},\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$ ile $\left(-\sqrt{a},-\sqrt{a},-\sqrt{a}\right)$ olduğu açıktır.

Teorem 4.3.1. (4.1) sistemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $a=0$ ise $n\to\infty$ için $(x_n,y_n,z_n)\to(0,0,0)$ dır.

(ii) Eğer $a>0$ ise $n\to\infty$ için $\left(|x_n|,|y_n|,|z_n|\right)\to\left(\sqrt{a},\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$ dır

İspat.

(i) İstenen sonuç (4.1.38) - (4.1.55) arasındaki denklemlerden kolaylıkla elde edilir.

(ii) İspat x_n, y_n ve z_n çözümleri için benzerdir. Bu nedenle, ispatın sadece x_{6n} için yapılması yeterli olacaktır. (4.2.25) denklemi, $n\in\mathbb{N}_0$ için

$$x_{6n}=\sqrt{a}\left(1+\frac{2}{\left(\frac{x_0+\sqrt{a}}{x_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(\frac{y_0+\sqrt{a}}{y_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(\frac{z_0+\sqrt{a}}{z_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}-1}\right) \tag{4.3.1}$$

şeklinde yazılabilir.

$$f(x)=\frac{x+\sqrt{a}}{x-\sqrt{a}} \tag{4.3.2}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon,

$$\begin{cases} x<0 \text{ ise } \left|f(x)\right|<1 \\ x>0 \text{ ise } \left|f(x)\right|>1 \end{cases} \tag{4.3.3}$$

şartlarını sağlar ve (4.3.1) denklemi ile (4.3.3) özelliğinden iki durum ortaya çıkar:

(a) Eğer $x_0<0$, $y_0<0$, $z_0<0$ ise $n\to\infty$ için $(x_n,y_n,z_n)\to\left(-\sqrt{a},-\sqrt{a},-\sqrt{a}\right)$ dır.

(b) Eğer $x_0>0$, $y_0>0$, $z_0>0$ ise $n\to\infty$ için $(x_n,y_n,z_n)\to\left(\sqrt{a},\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$ dır.

Diğer durumlar için

$$(s_n)_{n\geq 0}=\left(\left(\frac{x_0+\sqrt{a}}{x_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}+2}{3}}\left(\frac{y_0+\sqrt{a}}{y_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\left(\frac{z_0+\sqrt{a}}{z_0-\sqrt{a}}\right)^{\frac{2^{6n}-1}{3}}\right)_{n\geq 0} \tag{4.3.4}$$

dizisini ele alalım. Eğer $n\to\infty$ için $(s_n)\to 0$ ise $(x_n,y_n,z_n)\to\left(-\sqrt{a},-\sqrt{a},-\sqrt{a}\right)$ ve $n\to\infty$ için $(s_n)\to\infty$ ise $(x_n,y_n,z_n)\to\left(\sqrt{a},\sqrt{a},\sqrt{a}\right)$ dır. Böylece, ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1. (4.1) sisteminin denge noktaları birer çekim noktasıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; literatürde var olan fark denklem sistemlerinin ışığında iki farklı fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan sistemler incelenmiştir. İlk olarak; başlangıç şartları reel sayı olan

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-1}}{x_n + y_{n-1}},\ y_{n+1} = \frac{y_n z_{n-1}}{y_n + z_{n-1}},\ z_{n+1} = \frac{z_n x_{n-1}}{z_n + x_{n-1}}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış ve tanımlanan bu sistemin genel çözümü kapalı formda elde edilmiştir. Son olarak; $a \in [0, \infty)$ olmak üzere, başlangıç şartları reel sayı olan

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_n + a}{x_n + y_n},\ y_{n+1} = \frac{y_n z_n + a}{y_n + z_n},\ z_{n+1} = \frac{z_n x_n + a}{z_n + x_n}$$

fark denklem sistemi tanımlanmış, bu sistemin genel çözümü kapalı formda elde edilmiş ve çözümlerinin davranışı incelenmiştir. Ayrıca, elde edilen sonuçlar nümerik örnekler ile desteklenmiştir.

Yapılacak yeni çalışmalarda, bu çalışmada incelenen sistemlerdeki bilinmeyen sayısı artırılarak daha genel çalışmalar yapılabilir. Ayrıca incelenen ikinci sistemdeki negatif olmayan a parametresinin yerine negatif bir parametre veya herhangi bir dizi alınarak yeni çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012, Fark Denklemleri, *Gazi Kitapevi*, Ankara.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, Volume 5 of *Advances in Discrete Mathematics and Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.

Elaydi, S. N., 1995, An Introduction to Difference Equations, *Springer – Verlag*, New York.

El-Dessoky, M. M., 2016a, On a solvable for some systems of rational difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 3744-3759.

El-Dessoky, M. M., 2016b, Solution for rational systems of difference equations of order three, *Mathematics*, 4, 53, 1-12.

El-Dessoky, M. M., 2016c, On the solutions and periodicity of some nonlinear systems of difference equations, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9, 2190-2207.

El-Dessoky, M. M., 2016d, The form of solutions and periodicity for some systems of third-order rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1076-1092.

El-Metwally, H., 2013, Solutions form for some rational systems of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 903593, 10 pages.

Elsayed, E. M. and Ahmed, A. M., 2016, Dynamics of a three-dimensional systems of rational difference equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39, 1026-1038.

Elsayed, E. M. and Alghamdi, A., 2016, The form of the solutions of nonlinear difference equations systems, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 9(5), 3179-3196.

Elsayed, E. M., Alotaibi, A. and Almaylabi, A. H., 2017, On a solutions of fourth order rational systems of difference equations, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 7(22), 1298-1308.

Elsayed, E. M., 2017, On a solutions and periodicity of some rational systems of difference equations, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 2(108), 159-171.

Gumus, M. and Soykan, Y., 2016, Global character of a six dimensional nonlinear system of difference equations, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Article ID 6842521, 7 pages.

Haddad, N., Tauafek, N. and Rabago, J. F. T., 2017, Solution form of a higher-order system of difference equations and dynamical behavior of its special case, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 3599-3607.

Haddad, N., Tauafek, N. and Rabago, J. F. T., 2018, Well-defined solutions of a system of difference equations, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 56, 439-458.

Kurbanli, A. S., 2011, On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} - 1), y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} - 1), z_{n+1} = 1 / \left(y_n z_n \right),$ *Advances in Difference Equations*, 40.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer Fark Denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık*, Ankara.

Stević, S., 2011, On a system of difference equations with period two coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 4317-4324.

Stević, S., 2012, On some solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 5010-5018.

Stević, S., Alghamdi, M. A., Alotaibi, A. and Elyased, E. M., 2015, Solvable product-type system of difference equations of second order, *Electronic Journal of Differential Equations*, 169, 1-20.

Stević, S., 2017, New class of solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics Letters*, 63, 137-144.

Tollu, D. T., Yazlik Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.

Tollu, D. T., Yazlik Y. and Taskara, N., 2017, On global behavior of a system of nonlinear difference equations of order two, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, 3, 373-383.

Tollu, D. T. and Yalcinkaya, I., 2019, Global behavior of a three – dimensional system of difference equations of order three, *Communications Faculty of Scences University of Ankara Series A1*, 68(1), 1-16 (online press).

Turk, G., Yalcinkaya, I. and Tollu, D. T., 2018, On solutions of a system of two fourth-order difference equations, *Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*, 25, 85-96.

Yalcinkaya, I. 2010, On the global asymptotic behavior of a system of two nonlinear difference equations, *Ars Combinatoria*, 95, 151-159.

Yılmazyıldırım, B. and Tollu D. T., 2018, Explicit solutions of a three-dimensional system of nonlinear difference equations, *Hittite Journal of Science and Engineering*, 3 DOI: 10.17350/HJSE19030000082.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4, 15-20.

Yazlik, Y., Elsayed, E. M. and Taskara, N., 2014, On the behaviour of the solutions of difference equation systems, *Journal of Computational Analysis and Applications,* 16(5), 932-941.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2016, On the solutions of a three-dimensional system of difference equations, *Kuwait Journal of Science & Engineering*, 43(1), 95-111.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:** Abdullah Furkan ŞAHİNKAYA
Uyruğu	**:** T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Altındağ – 06.10.1993
Telefon	**: (**0554) 1304565
e-mail	**:** shnky.abdullah@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Tire Öğretmen Melahat Aksoy Anadolu Öğretmen Lisesi, İzmir	2011
Üniversite	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği ABD, Konya	2016
Yüksek Lisans	:	Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Konya	

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Şahinkaya, A. F., Yalçınkaya, İ. and Tollu, D. T., 2018, A solvable system of nonlinear difference equations, *KMU Electronic Journal of Mathematical Studies*, in press.