T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI CEBİRSEL GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Ayşe ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Temmuz-2018
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Ayşe ÇELİK tarafından hazırlanan “Bazı Cebirsel Grafların Zagreb İndeksleri” adlı tez çalışması 12/07/2018 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN	…………………..
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ	…………………..
Üye Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet KARALI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ayşe ÇELİK

Tarih:

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI CEBİRSEL GRAFLARIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Ayşe ÇELİK

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ

2018, 44 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Graf teori, uygulamalı matematiğin çok kullanışlı bir alanıdır. Günlük hayata dair birçok probleme çözüm sunabilmiş olması, graf teoriye ve uygulamalarına olan ilgiyi son yıllarda arttırmıştır.

Graf teorinin önemli uygulamalarından olan Zagreb indeksler ve bu indekslerin uygulamalarına yer verilmiştir.Birçok çeşit Zagreb indeks tanımlanmış olup, bu indeksler üzerine yapılan çalışmalar günümüzde hala popülaritesini devam ettirmektedir.

Tez toplamda 4 ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde graf teori ile ilgili temel kavramlara ve bazı özel grafların tanımlarına yer verilmiştir. Aynı zamanda tezde kullanılmış olan kaynaklar hakkında araştırma yapılıp, içerik bilgileri sunulmuştur.

İkinci bölümde sıfır bölen graflar, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ özel halkaları üzerinde sıfır bölen graflar ve Zagreb indekslerin tanımları verilmiştir. Ayrıca bu grafların Zagreb indeksleri incelenerek elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde graflar üzerinde tensor çarpım tanımı verilerek, ikinci bölümde tanımlanan sıfır bölen graflarının tensor çarpım grafları üzerinde Zagreb indeksler uygulanmış ve sonuçlar elde edilmiştir.

Son ve dördüncü bölümde tezde elde edilmiş olan sonuçlar ve öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Graflar, Sıfır bölen graflar, Tensor çarpım, Zagreb indeks

ABSTRACT

MS THESIS

ZAGREB INDICES OF SOME ALGEBRAIC GRAPHS

Ayşe ÇELİK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE
OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst.Prof.Dr. Nihat AKGÜNEŞ

2018, 44 Pages

Jury
Asst.Prof.Dr. Nihat AKGÜNEŞ
Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER
Prof. Dr. Ayşe Dilek MADEN

Graph theory is a very useful field of applied mathematics. The fact that it has been able to offer many solutions for everyday life has increased a quite amount of interest to graph theory and its applications in the recent years.

Zagreb indices are one of the most important applications of Graph theory and applications of these indices are included. Many types of Zagreb indices have been defined and studies on these indices are still popular today.

The thesis consists of four main sections.

In the first section, basic concepts related to graph theory and definitions of some special graphs are given. At the same time, content information as made some researches about the resources used in the thesis.

In the second section, the definitions of zero-divisor graphs, zero-divisor graphs on special rings $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ and Zagreb indices are given.

Furthermore, these graphs are obtained by studying the Zagreb indices.

In the third section, the definition of tensor multiplication on graphs is given and Zagreb indices are applied on tensor multiplication graphs of zero-divisor graphs that are defined in the second section and the results are obtained.

In the last and fourth section, the results obtained in the thesis and suggestions are presented.

Keywords: Graphs, Tensor product, Zagreb indices, Zero-divisor graphs

ÖNSÖZ

Bazı Cebirsel Grafların Zagreb İndeksleri isimli bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü Öğretim Üyesi, Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ yönetiminde hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren, kılavuzluk eden, bilgilerini ve yardımlarını benden hiçbir zaman esirgemeyen, kendime örnek aldığım ve örmek almaya devam edeceğim değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Nihat AKGÜNEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bugünlere gelmemi sağlayan, maddi ve manevi emeklerini her zaman üzerimde hissettiğim, karşılaştığım her zorlukta sığındığım bir liman olan annem Hayriye ÇELİK ve babam Zeki ÇELİK başta olmak üzere; tüm aileme desteklerinden ötürü teşekkür ederim. Ayrıca yabancı kaynak çevirilerimde kendisinden yardım aldığım değerli arkadaşım ve meslektaşım Ali UĞRA'ya teşekkür ederim.

Ayşe ÇELİK
KONYA-2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

G	: Graf
$V(G)$	: G grafının köşe kümesi
$E(G)$	: G grafının kenar kümesi
$d_G(u)$	: u köşesinin derecesi
K_n	: n köşeli tam graf
C_n	: n köşeli devir graf
P_n	: n köşeli yol graf
W_n	: n köşeli tekerlek graf
$M_1(G)$	: G grafının birinci Zagreb indeksi
$M_2(G)$	: G grafının ikinci Zagreb indeksi
$\prod_1(G)$	: G grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\prod_2(G)$	: G grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi
$\overline{M_1}(G)$	: G grafının birinci Zagreb eşindeksi
$\overline{M_2}(G)$	: G grafının ikinci Zagreb eşindeksi
$\overline{\prod}_1(G)$	: G grafının birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\overline{\prod}_2(G)$	: G grafının ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksi
$\prod_1^*(G)$	: G grafının çarpımsal toplam Zagreb indeksi
$\prod_1^T(G)$	: G grafının total çarpımsal toplam Zagreb indeksi
$G_1 \otimes G_2$	: G_1 ve G_2 grafların tensor çarpımı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Graf teori 1736 yılında Leonhard Euler'in, Königsberg'in Yedi Köprüsü isimli probleminden ortaya çıkmıştır. Bu problemi şu şekilde açıklayabiliriz. Almanya'da bulunan Königsberg şehrinde Eski ve Yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler aralarında iki küçük adacık oluşturmakta ve nehir üzerinde bu adacıklarla şehri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır. Euler'in çözüm bulmaya çalıştığı durum ise bütün köprülerden bir ve yalnız bir kez geçilerek bir yürüyüş yapılmasının mümkün olup olmadığıdır.

Şekil 1.1. Pregel Nehri ve Königsberg Köprüsü

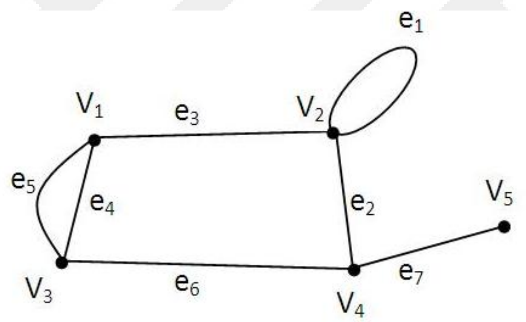
Bu problemden yola çıkılarak temelleri atılan graf teori ile günümüzde şehirlerde bulunan trafo yapıları, bilgisayar ağları vb. yapılar planlanmaktadır. Aslında bu problemde amaç yürüyüş gibi görünse de o günden günümüze gelişen teknolojinin ekonomikliği hakkında bir temel oluşturmuştur. Bunun sonucunda graf teori oluşmuş ve günümüzde hala devam eden çalışmalar yapılmaya başlanmıştır.

1.1.Graflar ve Özellikleri

Bu kısımda tüm tez boyunca kullanacağımız grafların temel tanımları ve örnekleri ile ilgili bilgiler verilecektir. Kullandığımız tüm temel tanımlar ve gösterimler Gross ve Yellen'in Handbook of Graph Theory (Gross ve Yellen, 2004) kitabından alınmıştır. Ayrıca bu kitaba alternatif olarak Bollobás'ın Modern Graph Theory (Bollobás, 2013) kitabı da incelenebilir.

Tanım.1.1. V, elemanları köşe (vertex) olarak adlandırılan boştan farklı bir küme, E de elemanları kenar (edge) olarak adlandırılan ve V kümesinin bir ya da iki elemanlı alt kümelerinden oluşan herhangi bir küme olsun. Bu şekilde tanımlanan $G=(V,E)$ ikilisine graf (graph) denir.

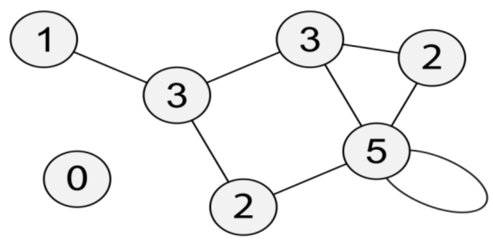
Örnek.1.1. $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$ ve $E=\{e_1, e_2, e_3,e_4, e_5, e_6, e_7\}$olacak şekilde aşağıdaki yapı bir graf örneğidir.



Şekil.1.2.Graf Örneği

Tanım.1.2. V köşe kümesinden alınan bir v_i köşesine komşu olan köşelerin sayısına, v_i köşesinin derecesi denir ve $d_G(v_i)$ ile gösterilir. Bir graf yapısında derecesi 1 olan köşeye uç (pendant) köşe, derecesi 0 olan köşeye ise izole köşe denir.

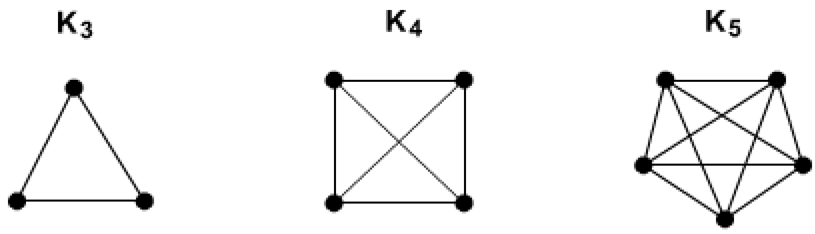
Örnek.1.2. Aşağıdaki grafta her köşe dereceleri ile isimlendirilmiştir.



Şekil.1.3.Köşe dereceleri gösterilen graf örneği

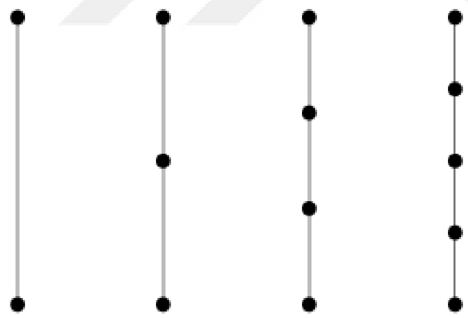
Tanım.1.3. Bir G grafının köşe kümesi olan V'den iki köşe seçilsin. Seçilen bu köşeler arasında bir kenar oluşuyorsa bu köşelere komşu köşeler denir.

Tanım.1.4. Bir grafta her bir köşe çifti komşu ise bu graf tam graf olarak adlandırılır. n köşeli bir tam graf K_n ile gösterilir.



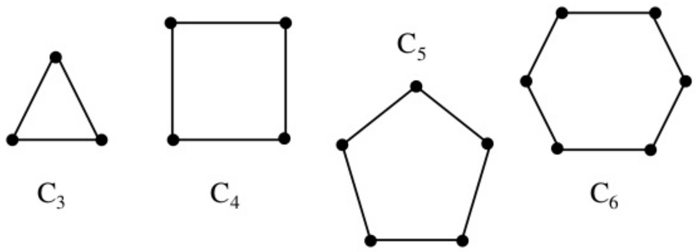
Şekil.1.4.Tam graf çeşitleri

Tanım.1.5. Başlangıç ve bitiş köşelerinin derecesi 1, tüm diğer köşelerinin derecesi 2 olan grafa yol graf denir. n köşeli bir tam graf P_n ile gösterilir.



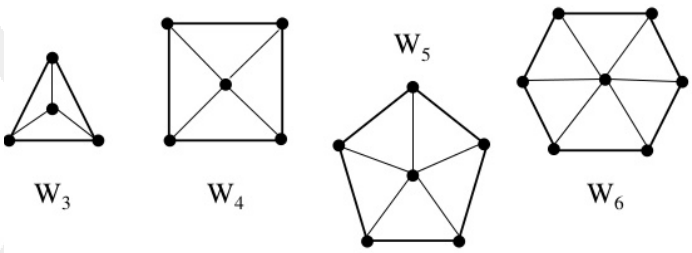
Şekil.1.5.Yol graf çeşitleri

Tanım.1.6. Başlangıç ve bitiş noktası aynı köşe üzerinde olan ve tüm köşelerinin derecesi 2 olan graflar çevre graf olarak adlandırılır. n köşeli bir çevre graf C_n ile gösterilir.



Şekil.1.6.Çevre graf çeşitleri

Tanım.1.7. *n* köşeli bir C_n çevre grafının tüm köşelerine tek bir kenar ile komşu olan yeni bir köşe eklenmesi ile elde elde edilen grafa tekerlek (wheel) graf denir. W_n ile gösterilir.



Şekil.1.7. Tekerlek graf çeşitleri

1.2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu kısımda çalışmamıza ışık tutan literatürde önemli yere sahip olan graf parametreleri, Zagreb indeksler ve sıfır bölen graflarla ilgili çalışmalar ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

1.2.1.Sıfır Bölen Grafları ile İlgili Kaynak Araştırması

(Beck, 1988) *"Coloring of Commutating Rings"* isimli çalışması sıfır-bölen grafların başlangıcı olmuştur. Bu araştırmada, halkaların sıfır-bölen graflarını ortaya koyulmuş ve tanımlamıştır. Ayrıca bu grafın renklendirilmesi üzerine çalışılmıştır.

(Anderson ve Livingston, 1999) *"The Zero-divisor Graph of Commutative Ring"* isimli çalışmalarında değişmeli halkaların sıfır-bölen grafları ile ilgili birçok temel sonuç elde ederek ortaya koymuşlardır.

(Gross ve Yellen, 2004) *"Handbook of Graph Theory"* isimli kitaplarında graflar hakkındaki temel tanım ve örnekleri açıklamış, graflar ile ilgili genel özellikleri göstermişlerdir.

(Anderson ve Badawi, 2008) *"On the Zero-Divisor Graph of a Ring"* adlı çalışmalarında bir R halkasının idealleri ve esas idealleri arasındaki karşılaştırılabilme koşulları ya da R'nin bileşenleri arasındaki kesin bölünebilme koşullarını sağlayan sıfır olmayan bölenlere sahip R halkaları için $\Gamma(R)$ grafını incelediler.

(Sharma ve ark., 2011) *"Analysis of Adjacency Matrix and Neighborhood Associated with Zero Divisor Graph of Finite Commutative Rings"* adlı araştırmalarında sonlu ve değişmeli halkalar üzerindeki sıfır bölen bir grafın komşuluk matrisi üzerine araştırmış, bu çalışmalarında p'nin bir asal olduğu, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ halkasından elde edilen sıfır bölen grafının komşuluk matrisi için ayrıntılı açıklamalar bulmaya çalışmışlardır.

(Akgunes ve Togan 2012) *"Analyzing special parameters over zero-divisor graphs"* isimli çalışmasında p ve q farklı asal sayılar için $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır-bölen graflarının çeşitli parametrelerini p ve q ya bağlı olarak incelemiş ve bulmuştur.

(Bollobás, 2013) *"Modern graph theory"* adlı kitabında güncellenen graf teori konularında bilgiler vermiştir.

(Anderson ve Weber, 2018) *"The Zero divisor graph of a commutative ring without identity"* adlı çalışmalarında birimsiz değişmeli halkaların sıfır bölen graflarıyla ilgili teoremler ispat etmiştir.

1.2.2. Zagreb İndeksler Üzerine Kaynak Araştırması

(Gutman ve Trinajstic, 1972) *"Graph Theory and moleküler orbitals: Total π-elektron energy of alternant hydrocarbons"* isimli araştırmasında birinci Zagreb indeksini ortaya koymuştur. Bu tanım graf teoride ve kimyasal matematik alanında önemli bir yer tutmaktadır.

(Gutman, 1975) *"Graph theorey and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes"* isimli araştırmasında İkinci Zagreb indeksi tanımlamıştır ve birçok özelliğini açıklamıştır.

(Balaban, 1983) *"Topological indices for structure-activity correlations"* isimli çalışmasında Zagreb indekslerini adlandırmıştır.

(Imrich ve Klavzar, 2000) *"Product graphs: Structure and Recognition"* adlı çalışmalarında çeşitli graf çarpımları üzerine çalışmış ve konumuzda geçen tensor çarpım tanımını yapmışlardır.

(Das ve Gutman, 2004) *"Some properties of the second Zagreb index"* isimli çalışmasında ikinci Zagreb indekslere ait birçok özellik ortaya koymuştur.

(Todeschini ve Consanni, 2010) *"New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees"* adındaki araştırmasında çarpımsal Zagreb indeksini tanımlamıştır.

(Ashrafi ve ark., 2010) *"The Zagreb coindices of graph operation"* isimli çalışmalarında Zagreb eşindekleri üzerine araştırmalar yapmışlardır.

(Ranjini ve ark., 2011) *"On the Zagreb indices of the line graphs of the subdivision graphs"* isimli çalışmalarında altbölüm grafları ve çizgi graflarının Zagreb indekslerini incelemişlerdir.

(Xu ve Das, 2012) *"Unicyclic and bicyclic graphs"* isimli çalışmalarında çarpımsal toplam ve total çarpımsal toplam Zagreb indekslerini tanımlayarak özelliklerini belirtmişlerdir.

(Xu ve ark., 2013) *"On the multiplicative Zagreb coindex of Graphs"* adlı çalışmalarında birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri üzerine araştırma yapmış ve indeksleri tanımlamışlardır.

(Eliasi, 2012) *"Multiplicative versions of first Zagreb index"* isimli araştırmasında çarpımsal toplam Zagreb indeksini tanımlamış ve ortaya koymuştur.

(Cevik ve ark., 2013) *"The multiplicative Zagreb indices of graph operations"* isimli çalışmalarında çarpımsal Zagreb indekslerini incelemişlerdir.

(Das ve ark., 2016) *"On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs"* isimli araştırmalarında birinci Zagreb indeksi ve çarpımsal Zagreb eşindeksleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

(Cangul ve ark., 2017) *"New formulae for Zagreb indices"* isimli çalışmasında Zagreb indekslerine ait yeni ispatlarda bulunmuştur.

(Maden ve Nacaroglu, 2017) *"The Upper Bounds for Multiplicative Sum Zagreb Index of Some Graph Operations"* isimli araştırmalarında çarpımsal toplam Zagreb indeksi ile ilgili bazı üst sınırlar ortaya koymuşlardır.

(Akgunes, 2018) *"A Further Note on the Graph of Monogenic Semigroups"* isimli çalışmasında monojenik yarıgruplar için bazı graf parametreleri, birinci ve ikinci Zagreb indeksi, Laplasyen karakteristik polinomunu ortaya koymuştur.

2. $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI VE BU GRAFLARIN BAZI ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde sıfır bölen grafların, cebirin önemli alt dallarından biri olan halkalardan $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ özel halkaları üzerinde sıfır bölen grafların ve Zagreb indekslerin tanımları verilerek, bu grafların Zagreb indeksleri elde edilmiştir.

2.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARI

Bu kısımda çalışmamızın temelini teşkil eden halkalardan elde ettiğimiz bir tür sıfır bölen graflarının kısa tarihi gelişimi, tanımı ve örneklerini vereceğiz.

(Beck, 1988)'de, değişmeli R halkasının, sıfır bölen grafı olan $\Gamma(R)$ kavramını literatüre sundu. Daha sonra, değişmeli ve değişmeli olmayan halkalar üzerindeki sıfır bölen graflar, spektral ve spektral olmayan graf nitelikleri açısından geniş bir şekilde incelendi. Örneğin, (Anderson ve ark. 1999)'da $\Gamma(R)$ grafının her zaman, R halkasının değişmeli olmasıyla ilişkili olduğunu kanıtladı. (Anderson ve Badawi, 2008)' de R halkasının idealleri ve esas idealleri arasındaki karşılaştırılabilme koşulları ya da R'nin bileşenleri arasındaki kesin bölünebilme koşullarını sağlayan sıfır olmayan bölenlere sahip R halkaları için $\Gamma(R)$'yi inceledi. Daha sonra, (Sharma ve ark. 2011) 'de sonlu ve değişmeli halkalar üzerinde sıfır bölen bir grafın komşuluk matrisi üzerinde çalışmıştır. Bu çalışmalarında p'nin bir asal olduğu, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ halkasından elde edilen sıfır bölen grafının komşuluk matrisi için ayrıntılı açıklamalar bulunmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmadaki sonuçların bir genellemesi olarak, Akgüneş 2012'de, p ve q 'nun farklı asallar olduğu $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkasından elde edilen sıfır bölen graflar için bazı teorik özellikleri sunmuştur.

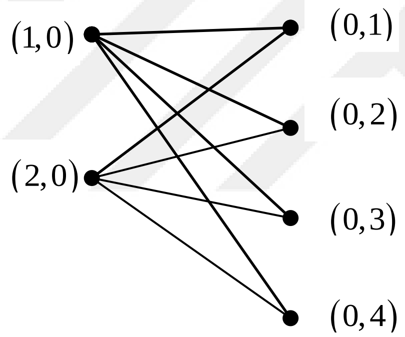
Şimdi değişmeli halkalardaki sıfır bölen graflarını tanımlayalım.

Tanım.2.1.1. R, değişmeli bir halka ve $\mathbb{Z}(R)$, R'nin sıfır bölenlerinin kümesi olsun. Sıfır bölen graf $\Gamma(R)$, köşe kümesi $xy = 0$ koşulunu sağlayan $x, y \in \mathbb{Z}(R)^* = \mathbb{Z}(R) \setminus \{0\}$ köşeleri ile oluşturulan (yönlendirilmemiş) bir graftır (Beck,1988).

R, integral bölgesi ise sıfır bölen eleman içermediğinden grafın boş graf olacağı açıktır. Ayrıca bu konudaki çalışmalara ek olarak (Anderson ve Weber, 2018) çalışması da incelenebilir.
Bu tanımı $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkasının sıfır bölen grafına aktaralım.

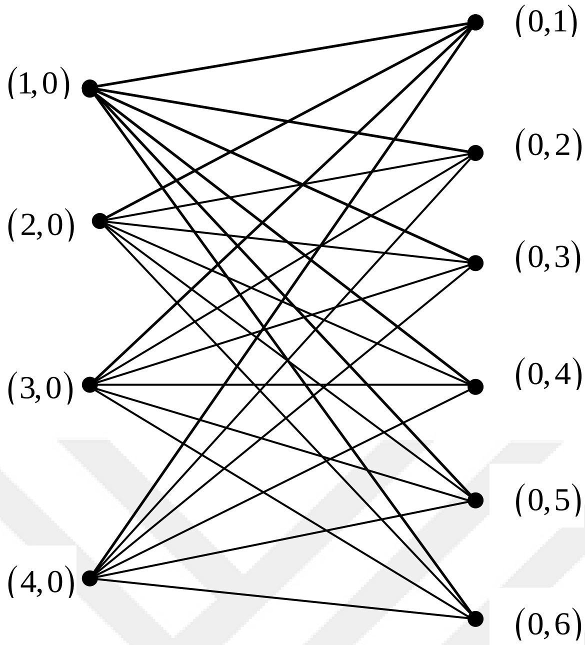
Tanım.2.1.2. p ve q asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ' nun sıfır bölenlerinin kümesi $\{(1,0),(2,0),\ldots,(p-1,0),(0,1),(0,2),\ldots,(0,q-1)\}$ ' dir. Köşe kümesi bu elemanların her biri, kenar kümesi ise köşe kümesindeki elemanların çarpımlarından $(0,0)$ olanlarıdır (Akgüneş, Togan, 2012).

Örnek.2.1.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır bölen grafının köşe ve kenarlarını gösterelim.



Şekil.2.2.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ **Sıfır bölen grafı**

Örnek.2.1.2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7\right)$ sıfır bölen grafının elemanlarını gösterelim.



Şekil.2.2.2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7\right)$ **Sıfır bölen grafı**

2.2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ SIFIR BÖLEN GRAFLARININ ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu bölümde, sıfır bölenler, sıfır bölen grafları, Zagreb indeksleri kavramlarını göz önüne alarak, p ve q asalları için, $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafları üzerine alınan sonuçları ifade edip kanıtlayacağız. Bu çalışma boyunca p ve q eşit olabilen asal sayılar olarak varsayılacaktır. Bu çalışma için aşağıda sunulan kaynaklara ek olarak (Ranjini ve ark., 2011) çalışması da incelenbilir.

Tanım.2.2.1. *G*, *E(G)* kenarların kümesine ve *V(G)* köşelerin kümesine sahip bir graf olsun.

Birinci Zagreb indeksi graf köşelerinin derecelerinin karelerinin toplamıdır. $M_1(G)$ ile ifade edilir. İkinci Zagreb indeksi her bir kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır. $M_2(G)$ ile ifade edilir. Dolayısıyla, birinci ve ikinci Zagreb indeks sırasıyla,

$$M_1(G) = \sum_{u,v\, \in V(G)} \left[d_G(u)\right]^2 \text{ ve } M_2(G) = \sum_{u,v\, \in E(G)} \left[d_G(u).\, d_G(v)\right]$$

şeklinde ifade edilir (Gutman,Trinajstic, 1972). Ayrıca bu konu ile ilgili (Balaban, 1983) ve (Akgüneş, 2018) çalımaları da vardır.

Aşağıdaki ilk iki teorem $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının sırasıyla birinci ve ikinci Zagreb indekslerini karakterize eder.

Teorem.2.2.1. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının birinci Zagreb indeksi

$$M_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = (q-1)(p-1)(p+q-2)$$

İspat: $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ graf yapısında $(q-1)$ tane köşenin derecesinin karesi $(p-1)^2$ 'dir. $(p-1)$ tane köşenin derecesinin karesi de $(q-1)^2$'dir. Tüm bu köşe derecelerinin karelerinin toplamı yani, birinci Zagreb indeksi ;

$$\begin{aligned} M_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] &= (q-1)(p-1)^2 + (p-1)(q-1)^2 \\ &= (q-1)(p-1)\left[(p-1)+(q-1)\right] \\ &= (q-1)(p-1)(p+q-2) \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem.2.2.2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının ikinci Zagreb indeksi

$$M_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = (p-1)^2 (q-1)^2$$

İspat: : $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ graf yapısında toplamda $(p-1).(q-1)$ tane kenar oluşur. Bu kenarları oluşturan $(p-1)$ tane köşenin derecesi $(q-1)$ ve $(q-1)$ tane köşenin derecesi ise $(p-1)$'dir. İkinci Zagreb indeksi bu köşe derecelerinin çarpım sonuçlarının toplamını hesapladığından, $(p-1).(q-1)$ tane $(p-1).(q-1)$ ‘in toplamı;

$$\begin{aligned} M_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] &= \underbrace{(p-1)(q-1)+(p-1)(q-1)+\cdots+(p-1)(q-1)}_{(p-1)(q-1)\text{ tane}} \\ &= (p-1)^2 (q-1)^2 \end{aligned}$$

olur ve istenendir.

Şimdi de $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının çarpımsal Zagreb indekslerini inceleyelim.

Tanım.2.2.2. *G*, *E(G)* kenarların kümesine ve *V(G)* köşelerin kümesine sahip bir graf olsun.

Birinci çarpımsal Zagreb indeksi bir *G* grafındaki tüm köşelerin derecelerinin karelerinin çarpımını verir. $\prod_1(G)$ ile ifade edilir. İkinci çarpımsal Zagreb indeksi de *G* grafındaki kenar oluşturan her bir köşe çiftinin derece çarpımlarının çarpımıdır. $\prod_2(G)$ ile gösterilir. Birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri sırasıyla,

$$\prod_1(G) = \prod_{v \in V} d_G(v)^2 \text{ ve } \prod_2(G) = \prod_{u,v \in E(G)} d_G(u).\, d_G(v)$$

şeklinde ifade edilir (Todeschini, Consonni, 2010). Bu konu ile ilgili ayrıntılı çalışmalar (Çevik ve ark., 2013) araştırmasından da edinilebilir.

Sıradaki iki teorem sırasıyla birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indeksleri ile ilgilidir.

Teorem.2.2.3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının birinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\prod_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right] = [(p-1)^2]^{(q-1)}[(q-1)^2]^{(p-1)}$$

İspat: $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ grafında toplamda $(p-1)+(q-1)$ tane köşe vardır. $(p-1)$ tane olan köşelerin her birinin derecesi $(q-1)$'dir. Aynı şekilde $(q-1)$ tane olan köşelerin her birinin derecesi de $(p-1)$ 'dir. Bu iki farklı derece sayısına sahip köşe gruplarının birinci çarpımsal Zagreb indekslerini iki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: Derecesi $(p-1)$ olan $(q-1)$ tane köşenin derecelerinin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{(p-1)^2(p-1)^2 \ \dots \ (p-1)^2}_{q-1 \text{ tane}}$$

$$=[(p-1)^2]^{(q-1)} \text{ olur.} \tag{2.1}$$

2.Durum: Derecesi $(q-1)$ olan $(p-1)$ tane köşenin derecelerinin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{(q-1)^2(q-1)^2 \;\ldots\; (q-1)^2}_{p-1 \text{ tane}}$$

$$=[(q-1)^2]^{(p-1)} \text{ olur.} \qquad (2.2)$$

(2.1) ve (2.2)'den tüm köşe derecelerinin karelerinin çarpımı yani, birinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$\prod_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\right]=[(p-1)^2]^{(q-1)}[(q-1)^2]^{(p-1)}$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Teorem.2.2.4. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\prod_2\left[\Gamma(Z_p\times Z_q)\right]=[(p-1)(q-1)]^{(p-1)(q-1)}$$

İspat: $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$grafında, $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q$' nun sıfır bölenlerinin oluşturduğu köşeler arasındaki toplam kenar sayısı; $(p-1)$ tane köşe ile $(q-1)$ tane köşeden toplamda $(p-1).(q-1)$ tanedir. Yine $(p-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(q-1)$, $(q-1)$ tane köşenin her birinin derecesi de $(p-1)$ olduğundan; bir tane kenarı oluşturan bu köşe çiftlerinden birer tanelerinin derece çarpımları $(p-1).(q-1)$ olur. O halde bu sıfır bölen grafında her bir kenarı oluşturan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı, yani ikinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$\prod_2\left[\Gamma(Z_p\times Z_q)\right]=\underbrace{\left[(p-1)(q-1)\right]\left[(p-1)(q-1)\right] \;\ldots\; \left[(p-1)(q-1)\right]}_{(p-1)(q-1) \text{ tane kenar için}}$$

$$=[(p-1)(q-1)]^{(p-1)(q-1)}$$

olur ki istenendir.

Sıradaki tanım ve teorem $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının sırasıyla birinci ve ikinci Zagreb eşindeksini karakterize eder.

Tanım.2.2.3. *G, E(G)* kenar kümesine ve *V(G)* köşe kümesine sahip bir graf olsun.

G grafının kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin toplamı şeklinde ifade edilen indeks birinci Zagreb eşindeksidir. $\overline{M_1}(G)$ ile ifade edilir. İkinci Zagreb eşindeksi ise, G grafının kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır. $\overline{M_2}(G)$ ile ifade edilir. Birinci ve ikinci Zagreb eşindeksleri sırasıyla,

$$\overline{M}_1(G) = \sum_{u,v \notin E(G)} \left[d_G(u) + d_G(v) \right] \text{ ve } \overline{M}_2(G) = \sum_{u,v \notin E(G)} \left[(d_G(u) . d_G(v)) \right]$$

biçiminde ifade edilir (Das ve Gutman, 2004). Ayrıca tüm Zagreb eşindeksleri konusunda (Ashrafi ve ark., 2010) çalışması da incelenebilir.

Teorem.2.2.5. $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafının birinci Zagreb eşindeksi

$$\overline{M_1}\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right] = 2\left[\binom{p-1}{2}(q-1) + \binom{q-1}{2}(p-1)\right]$$

İspat: $(a,0)$, $0 < a < p-1$ sıfır bölenlerinden oluşan köşeler kendi aralarında kenar oluşturamazlar. Çünkü $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafında iki sıfır bölenin çarpımı $(0,0)$ olmalıdır. O halde kenar oluşturamayacak köşe çiftlerinin sayısı $\binom{p-1}{2}$ tanedir. Bu köşelerin derecesi $(q-1)$'dir. Aynı şekilde $(0,b)$, $0 < b < q-1$ sıfır bölenlerinden oluşan kenar oluşturamayan köşe çiftlerinin sayısı $\binom{q-1}{2}$ tanedir. Bu köşelerin derecesi de $(p-1)$'dir. Buradan hareketle, kenar oluşturamayan köşe çiftlerinin birinci Zagreb eşindeksini dereceleri farklı olanları ayırmak adına iki durumda incelememiz gerekir.

1.Durum: $(p-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(q-1)$ olduğundan; kenar oluşturmayan herhangi iki köşenin dereceleri toplamı $(q-1)+(q-1)$ olur. $\binom{p-1}{2}$ tane kenar oluşturamayan köşe çiftinin derecelerinin toplamı;

$$\underbrace{\left[(q-1)+(q-1)\right]+\left[(q-1)+(q-1)\right]+\ldots+\left[(q-1)+(q-1)\right]}_{\binom{p-1}{2} \text{ tane}}$$

$$=\underbrace{2(q-1)+2(q-1)+\ldots+2(q-1)}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=2\binom{p-1}{2}(q-1) \tag{2.3}$$

2.Durum: $(q-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(p-1)$ olduğundan; kenar oluşturmayan herhangi iki köşenin dereceleri toplamı $(p-1)+(p-1)$ olur. $\binom{q-1}{2}$ tane kenar oluşturamayan köşe çiftinin derecelerinin toplamı;

$$\underbrace{\left[(p-1)+(p-1)\right]+\left[(p-1)+(p-1)\right]+\ldots+\left[(p-1)+(p-1)\right]}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\underbrace{2(p-1)+2(p-1)+\ldots+2(p-1)}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=2\binom{q-1}{2}(p-1) \tag{2.4}$$

(2.3) ve (2.4)'ten tüm kenar oluşturamayan köşe derecelerinin toplamı yani, birinci Zagreb eşindeksi;

$$\overline{M_1}\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\right]=2\binom{p-1}{2}(q-1)+2\binom{q-1}{2}(p-1)$$

$$=2\left[\binom{p-1}{2}(q-1)+\binom{q-1}{2}(p-1)\right]$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem.2.2.6. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının ikinci Zagreb eşindeksi

$$\overline{M_2}\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\right]=\binom{p-1}{2}(q-1)^2+\binom{q-1}{2}(p-1)^2$$

İspat: Bir üstteki teoremde verdiğimiz çıkarımlar üzerinden bu kez aynı kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin, derecelerinin çarpımlarının toplamını göstereceğiz.

1.Durum: Dereceleri $(q-1)$ olan $(p-1)$ tane köşenin kendi aralarında kenar oluşturmadığını biliyoruz. Dolayısıyla kenar oluşturmayan $\binom{p-1}{2}$ tane köşe çifti vardır. O halde bu köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı;

$$\underbrace{(q-1)(q-1)+(q-1)(q-1)+\ldots+(q-1)(q-1)}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\underbrace{(q-1)^2+(q-1)^2+\ldots+(q-1)^2}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\binom{p-1}{2}(q-1)^2 \tag{2.5}$$

2.Durum: Dereceleri $(p-1)$ olan $(q-1)$ tane köşenin kendi aralarında kenar oluşturmadığını biliyoruz. Dolayısıyla kenar oluşturmayan $\binom{q-1}{2}$ tane köşe çifti vardır. O halde bu köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı;

$$\underbrace{(p-1)(p-1)+(p-1)(p-1)+\ldots+(p-1)(p-1)}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\underbrace{(p-1)^2+(p-1)^2+\ldots+(p-1)^2}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\binom{q-1}{2}(p-1)^2 \tag{2.6}$$

(2.5) ve (2.6)'dan tüm kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı, yani ikinci Zagreb eşindeksi;

$$\overline{M_2}\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\right]=\binom{p-1}{2}(q-1)^2+\binom{q-1}{2}(p-1)^2$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Şimdi de $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bçlen grafının birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindekslerini inceleyeceğiz.

Tanım.2.2.4. *G, E(G)* kenar kümesine ve *V(G)* köşe kümesine sahip bir graf olsun. *G* grafının kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımı birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi olarak adlandırılır. $\overline{\prod}_1(G)$ ile gösterilir. İkinci çarpımsal Zagreb eşindeksi ise *G* grafının kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımıdır. $\overline{\prod}_2(G)$ ile ifade edilir. Birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksleri sırasıyla,

$$\overline{\prod}_1(G) = \prod_{u,v \notin E(G)} \left[(d_G(u) + (d_G(v)\right] \text{ ve } \overline{\prod}_2 = \prod_{u,v \notin E(G)} d_G(u).\, d_G(v)$$

Biçiminde gösterilir (Xu ve ark., 2013). Ayrıca bu konu hakkındaki alternatif araştırmalar için (Das ve ark., 2016) çalışmasından yararlanılabilir.

Sıradaki iki teorem birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindekslerini ortaya koyacaktır.

Teorem.2.2.7. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi

$$\overline{\prod}_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = [2(p-1)]^{\binom{q-1}{2}}[2(q-1)]^{\binom{p-1}{2}}$$

İspat: Köşelerin derecelerine göre birinci çarpımsal Zagreb eşindeksini de iki durumda incelememiz gerekir.

1.Durum: Dereceleri $(p-1)$ olan ve kenar oluşturmayan $\binom{q-1}{2}$ tane köşe çiftinin derece toplamlarının çarpımı;

$$\underbrace{(p-1+p-1)(p-1+p-1)\;\ldots\;(p-1+p-1)}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$= \underbrace{2(p-1)\;2(p-1)\;\ldots\;2(p-1)}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$= [2(p-1)]^{\binom{q-1}{2}} \tag{2.7}$$

2.Durum: Dereceleri $(q-1)$ olan ve kenar oluşturmayan $\binom{p-1}{2}$ tane köşe çiftinin derece toplamlarının çarpımı;

$$\underbrace{(q-1+q-1)(q-1+q-1)\ \dots\ (q-1+q-1)}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\underbrace{2(q-1)\ 2(q-1)\ \dots\ 2(q-1)}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=[2(q-1)]^{\binom{p-1}{2}} \tag{2.8}$$

(2.7) ve (2.8)'de bulunan eşitliklerin çarpımı, tüm kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımıdır. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafının birinci çarpımsal Zagreb eşindeksi;

$$\overline{\Pi}_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\right]=[2(p-1)]^{\binom{q-1}{2}}[2(q-1)]^{\binom{p-1}{2}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem.2.2.8. $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafının ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksi

$$\overline{\Pi}_2\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\right]=(p-1)^{2\binom{q-1}{2}}(q-1)^{2\binom{p-1}{2}}$$

İspat: Köşelerin derecelerine göre ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksini de iki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: Dereceleri$(p-1)$ olan ve kenar oluşturmayan $\binom{q-1}{2}$ tane köşe çiftinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı;

$$\underbrace{[(p-1)(p-1)][(p-1)(p-1)]\ \dots\ [(p-1)(p-1)]}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=\underbrace{(p-1)^2(p-1)^2\ \dots\ (p-1)^2}_{\binom{q-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=(p-1)^{2\binom{q-1}{2}} \tag{2.9}$$

2.Durum: Dereceleri $(q-1)$ olan ve kenar oluşturmayan $\binom{p-1}{2}$ tane köşe çiftinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(q-1)\right]\left[(q-1)(q-1)\right]\ \dots\ \left[(q-1)(q-1)\right]}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$\underbrace{(q-1)^2(q-1)^2\ \dots\ (q-1)^2}_{\binom{p-1}{2}\text{ tane}}$$

$$=(q-1)^{2.\binom{p-1}{2}} \tag{2.10}$$

(2.9) ve (2.10)'da bulunan eşitliklerin çarpımı, tüm kenar oluşturmayan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımıdır. Yani $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının ikinci çarpımsal Zagreb eşindeksi;

$$\overline{\prod}_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\right]=(p-1)^{2\binom{q-1}{2}}(q-1)^{2\binom{p-1}{2}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sıradaki tanım ve teorem yeni Zagreb indeks çeşitlerinden olan çarpımsal toplam Zagreb indeksini belirtir.

Tanım.2.2.5. *G, E(G)* kenar kümesine ve *V(G)* köşe kümesine sahip bir graf olsun. *G* grafının kenar oluşturan köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımı, çarpımsal toplam Zagreb indeksi olarak adlandırılır. $\prod_1^*(G)$ şeklinde gösterilir. Çarpımsal toplam Zagreb indeksi,

$$\prod_1^*(G)=\prod_{u,v\in E(G)}\left[(d_G(u)+d_G(v)\right]$$

şeklinde ifade edilir (Xu ve Das, 2012). Bu konu hakkında (Maden ve Nacaroğlu, 2017) çalışması da incelenebilir.

Teorem.2.2.9. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının çarpımsal toplam Zagreb indeksi

$$\prod\nolimits_1^* \left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = (p+q-2)^{(p-1)(q-1)}$$

İspat: $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ graf yapısında toplamda $(p-1).(q-1)$ tane kenar olduğu, $(p-1)$ tane olan köşelerin her birinin derecesinin $(q-1)$ ve $(q-1)$ tane olan köşelerin her birinin derecesinin de $(p-1)$ olduğu yukarıdaki teoremlerin ispatlarında belirtilmişti. Kenar oluşturan köşeler bu farklı derece değerlerine sahip olan köşelerdir. Buradan hareketle, kenar oluşturan her bir köşe çiftinin dereceleri toplamının $(p-1)+(q-1)$ olduğu açıktır. O halde kenar oluşturan her bir köşe çiftinin derecelerinin toplamlarının çarpımı, yani çarpımsal toplam Zagreb indeksi;

$$\prod\nolimits_1^* \left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = \underbrace{\left[(p-1)+(q-1)\right]\left[(p-1)+(q-1)\right] \ \dots \ \left[(p-1)+(q-1)\right]}_{(p-1)(q-1) \text{ tane kenar için}}$$

$$\underbrace{=(p+q-2)(p+q-2) \ \dots \ (p+q-2)}_{(p-1)(q-1) \text{ tane kenar için}}$$

$$=(p+q-2)^{(p-1)(q-1)}$$

bulunur ki istenendir.

Aşağıdaki tanım ve teorem total çarpımsal toplam Zagreb indeksini karakterize eder.

Tanım.2.2.6. *G*, *E(G)* kenar kümesine ve *V(G)* köşe kümesine sahip bir graf olsun. *G* grafına ait tüm köşelerinden, herhangi iki köşesinin derecelerinin toplamlarının çarpımı total çarpımsal toplam Zagreb indeksi olarak adlandırılır ve $\prod_1^T (G)$ ile ifade edilir. Total çarpımsal toplam Zagreb indeksi,

$$\prod\nolimits_1^{\mathrm{T}}(G) = \prod_{u,v \in V(G)} \left[(d_G(u) + d_G(v)\right]$$

biçiminde ifade edilir (Xu ve Das, 2012).

Teorem.2.2.10. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen grafının total çarpımsal toplam Zagreb indeksi

$$\Pi_1^T\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)\right] = 4(p-1)^2(q-1)^2(p+q-2)\binom{p-1}{2}\binom{q-1}{2}$$

İspat: Dereceleri farklı olan bu köşelerin total çarpımsal toplam Zagreb indekslerini göstermek için bu köşe çiftlerini üç durumda incelememiz gerekir.

1.Durum: Dereceleri $(q-1)$ olan, $(p-1)$ tane köşenin içinden seçilen $\binom{p-1}{2}$ tane ikili köşe vardır. Bu her bir ikili köşelerin derecelerinin toplamı $(q-1)+(q-1)=2q-2$'dir. $\binom{p-1}{2}$ tane olan ikili köşelerin tümünün derecelerinin toplamı;

$$\binom{p-1}{2}(2q-2)$$

$$=2\binom{p-1}{2}(q-1) \tag{2.11}$$

2.Durum: Dereceleri $(p-1)$ olan, $(q-1)$ tane köşenin içinden seçilen $\binom{q-1}{2}$ tane ikili köşe vardır. Bu her bir ikili köşelerin derecelerinin toplamı $(p-1)+(p-1)=2p-2$'dir. $\binom{q-1}{2}$ tane olan ikili köşelerin her birinin derecelerinin toplamı;

$$\binom{q-1}{2}(2p-2)$$

$$=2\binom{q-1}{2}(p-1) \tag{2.12}$$

3.Durum: Dereceleri $(q-1)$ ve $(p-1)$ olan köşelerin içinden birer tane olmak üzere seçilen sırasıyla $\binom{p-1}{1}$ ve $\binom{q-1}{1}$ tane köşe vardır. Bu her bir ikili köşelerin derecelerinin toplamı $(p-1)+(q-1)=(p+q-2)$'dir. O halde, $\binom{p-1}{1}\binom{q-1}{1}$ tane ikili köşelerin her birinin derecelerinin toplamı;

$$\binom{p-1}{1}\binom{q-1}{1}(p+q-2) \tag{2.13}$$

(2.11) , (2.12) ve (2.13)'te bulunmuş olan sonuçların çarpımı, bütün ikili köşelerin derecelerinin toplamlarının çarpımıdır. Yani $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen grafının total çarpımsal toplam Zagreb indeksi;

$$\Pi_1^T\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)\right] = \left[2\binom{p-1}{2}(q-1)\right]\left[2\binom{q-1}{2}(p-1)\right]\left[\binom{p-1}{1}\binom{q-1}{1}(p+q-2)\right]$$
$$= 4(p-1)^2(q-1)^2(p+q-2)\binom{p-1}{2}\binom{q-1}{2}$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

Zagreb indekslerine ait farklı ispatlara yer veren (Cangul ve ark., 2017) çalışması da vardır.
Göstermiş olduğumuz bu Zagreb indekslerini aşağıdaki örnekle pekiştirelim.

Örnek.2.2.1. $p=3$ ve $q=5$ olmak üzere, $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)$ sıfır bölen grafının Zagreb indekslerini hesaplayalım:

$M_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 48$ (Teorem 2.2.1)

$M_2\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 64$ (Teorem 2.2.2)

$\Pi_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 4^8$ (Teorem 2.2.3)

$\Pi_2\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 8^8$ (Teorem 2.2.4)

$\overline{M}_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 32$ (Teorem 2.2.5)

$\overline{M}_2\left[\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5)\right] = 40$ (Teorem 2.2.6)

$\overline{\prod}_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\right)\right]=2^{15}$ (Teorem 2.2.7)

$\overline{\prod}_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\right)\right]=2^{16}$ (Teorem 2.2.8)

$\prod_1^*\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\right)\right]=6^8$ (Teorem 2.2.9)

$\prod_1^T\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5\right)\right]=2^{10}.3^2$ (Teorem 2.2.10)

3. TENSOR ÇARPIM GRAFLARI VE $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$'NIN ZAGREB İNDEKSLERİ

Bu kısımda $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)$ sıfır bölen graflarının tensor çarpımlarının bazı Zagreb indekslerini inceleyeceğiz. Öncelikle graflarda tensor çarpım tanımını verip, $\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ sıfır bölen graflarına aktaralım.

Tanım.3.1. G_1 ve G_2 iki graf, $G_1=\left(V_1,E_1\right)$, $G_2=\left(V_2,E_2\right)$ olsun. $G_1\otimes G_2$ tensor çarpımının, köşe kümesi $V_1\times V_2$, komşulukları $u=\left(u_1,u_2\right)$ ve $v=\left(v_1,v_2\right)$ olmak üzere; $u\sim v$ olması için,

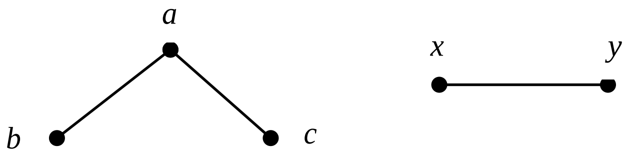
1) G_1 grafında $u_1\sim v_1$,

2) G_2 grafında $u_2\sim v_2$

şartlarının her ikisini birden sağlamalıdır (Imrich ve Klavzar, 2000).

Grafların tensor çarpımını örnekle gösterebiliriz.

Örnek.3.1. G_1 ve G_2 iki graf olmak üzere; $V_1=\{a,b,c\}$, $V_2=\{x,y\}$ olsun. $\Gamma\left(G_1\otimes G_2\right)$ tensor çarpım grafını bulalım.



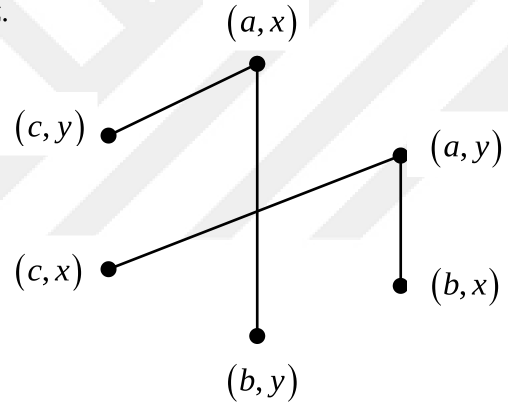
Şekil.3.1. G_1 ve G_2 **grafları**

Öncelikle $G_1 \otimes G_2$ tensor çarpımının $V_1 \times V_2$ köşe kümesini gösterelim.

$V_1 \times V_2 = \{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$

Burada tensor çarpım için, ilk şart olan G_1 grafının herhangi iki köşesi olan u_1 ve v_1 ‘nin $u_1 \sim v_1$ olması gerekir. Yukarıda gösterdiğimiz ilk grafta $a \sim b$ ve $a \sim c$ ’dir.

İkinci şart olarak da G_2 grafının herhangi iki köşesi olan u_2 ve v_2 ‘nin $u_2 \sim v_2$ olması gerekir. Yukarıdaki ikinci grafta $x \sim y$ ‘dir. Artık $G_1 \otimes G_2$ tensor çarpım grafını oluşturabiliriz.



Şekil.3.2. $\Gamma(G_1 \otimes G_2)$ **tensor çarpım grafı**

Şimdi de Tensor çarpım tanımını $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ sıfır bölen graflarına aktaralım. O halde, $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \otimes \Gamma(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımındaki oluşacak komşulukları daha iyi görebilmek adına 4 grupta inceleyelim.

i. $[(p_1,0),(r_1,0)]$ köşelerinin $[(0,q_2),(0,s_2)]$ şeklinde komşulukları oluşur. Burada; $(p-1)(r-1)$ tane köşe için $(q-1)(s-1)$ tane komşuluk oluşur denilebilir. Benzer şekilde;

ii. $[(p_1,0),(0,s_1)]$ köşelerinin $[(0,q_2),(r_2,0)]$ ‘lı komşulukları oluşur. Yani; $(p-1)(s-1)$ tane köşe için, $(q-1)(r-1)$ tane komşuluk oluşur.

iii . $\left[(0,q_1),(r_1,0)\right]$ ‘lı köşelerin $\left[(p_2,0),(0,s_2)\right]$’lı komşulukları oluşur. $(q-1)(r-1)$ tane köşe için $(p-1)(s-1)$ tane komşuluk oluşur.

iv . $\left[(0,q_1),(0,s_1)\right]$köşeleri içinse $\left[(p_2,0),(r_2,0)\right]$ şeklinde komşuluklar oluşur. $(q-1)(s-1)$ tane köşe için; $(p-1)(r-1)$tane komşuluk oluşur.

Aşağıda vereceğimiz teoremlerde bu komşuluklar özellikle dikkate alınacaktır.

İlk teorem $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının birinci Zagreb indeksini ortaya koyar.

Teorem.3.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ grafının birinci Zagreb indeksi

$$M_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)\right]=(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)(s+r-2)(p+q-2)$$

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ grafının birinci Zagreb indeksini komşulukların oluşumuna göre dört durumda incelememiz gerekir.

1.Durum: $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşelerine ait dereceler, $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ komşuluklarıdır. Buradan, $(p-1)(r-1)$ tane köşenin her birinin derecesinin $(q-1)(s-1)$ olduğu görülür. Bu köşelerin derecelerinin karelerinin toplamı,

$$=\underbrace{\left[(q-1)(s-1)\right]^2+\left[(q-1)(s-1)\right]^2+\ldots+\left[(q-1)(s-1)\right]^2}_{(p-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=(p-1)(r-1)\left[(q-1)(s-1)\right]^2 \tag{3.1}$$

2.Durum: $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşelerine ait dereceler, $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ komşuluklarıdır. Buradan aynı şekilde, $(p-1)(s-1)$tane köşenin her birinin derecesi , $(q-1)(r-1)$ ’dir. Bu köşelerin derecelerinin karelerinin toplamı;

$$=\underbrace{\left[(q-1)(r-1)\right]^2+\left[(q-1)(r-1)\right]^2+\ldots+\left[(q-1)(r-1)\right]^2}_{(p-1)(s-1)\text{ tane}}$$

$$=(p-1).(s-1).\left[(q-1).(r-1)\right]^2 \tag{3.2}$$

3.Durum: $\left[\left(0,q_1\right),\left(r_1,0\right)\right]$ köşelerinin dereceleri $\left[\left(p_2,0\right),\left(0,s_2\right)\right]$ komşuluklarıdır. Yani, $\left(q-1\right)\left(r-1\right)$ tane köşenin her birinin derecesi $\left(p-1\right).\left(s-1\right)$'dır. Bu köşelerin derecelerinin karelerinin toplamı;

$$=\underbrace{\left[\left(p-1\right)\left(s-1\right)\right]^2+\left[\left(p-1\right)\left(s-1\right)\right]^2+\ldots+\left[\left(p-1\right)\left(s-1\right)\right]^2}_{\left(q-1\right)\left(r-1\right)\text{ tane}}$$

$$=\left(q-1\right)\left(r-1\right)\left[\left(p-1\right)\left(s-1\right)\right]^2 \qquad (3.3)$$

4.Durum: $\left[\left(0,q_1\right),\left(0,s_1\right)\right]$ köşelerinin dereceleri ise, $\left[\left(p_2,0\right),\left(r_2,0\right)\right]$ komşuluklarıdır. $\left(q-1\right)\left(s-1\right)$ tane köşenin her birinin derecesi $\left(p-1\right)\left(r-1\right)$'dir. Bu köşelerin derecelerinin karelerinin toplamı,

$$=\underbrace{\left[\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]^2+\left[\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]^2+\ldots+\left[\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]^2}_{\left(q-1\right)\left(s-1\right)\text{ tane}}$$

$$=\left(q-1\right)\left(s-1\right)\left[\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]^2 \qquad (3.4)$$

O halde (3.1), (3.2), (3.3) ve (3.4)'den $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının tüm köşe derecelerinin karelerinin toplamı, yani birinci Zagreb indeksi;

$$\begin{aligned}M_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)\right]&=\left(p-1\right)\left(r-1\right)\left[\left(q-1\right)\left(s-1\right)\right]^2+\left(p-1\right)\left(s-1\right)\left[\left(q-1\right)\left(r-1\right)\right]^2\\&\quad+\left(q-1\right)\left(r-1\right)\left[\left(p-1\right)\left(s-1\right)\right]^2+\left(q-1\right)\left(s-1\right)\left[\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]^2\end{aligned}$$

$$=\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left(r-1\right)\left(s-1\right)\left[\left(q-1\right)\left(s-1\right)+\left(q-1\right)\left(r-1\right)+\left(p-1\right)\left(s-1\right)+\left(p-1\right)\left(r-1\right)\right]$$

$$=\left(p-1\right)\left(q-1\right)\left(r-1\right)\left(s-1\right)\left(s+r-2\right)\left(p+q-2\right)$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sıradaki teorem $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının ikinci Zagreb indeksini gösterir.

Teorem.3.2. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının ikinci Zagreb indeksi

$$M_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)\right]=2\left[\left(q-1\right)\left(p-1\right)\left(s-1\right)\left(r-1\right)\right]^2$$

İspat: Köşelerin komşuluk oluşturma çeşitlerine göre $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right) \otimes \Gamma\left(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının ikinci Zagreb indeksini iki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşeleri ile komşuluk oluşturan $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ köşelerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı için;

i. $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşelerine ait dereceler, $(p-1)(r-1)$ tane köşenin her biri için $(q-1)(s-1)$ ‘dir.

ii. $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ köşelerine ait dereceler, $(q-1)(s-1)$ tane köşenin her biri için $(p-1)(r-1)$’dir. Bu derecelerin çarpımlarının toplamı;

$$\underbrace{(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)+(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)+\ldots+(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)}_{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)\text{ tane}}$$

$$=\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]$$

$$=\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]^2 \qquad (3.5)$$

2.Durum: $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşeleri ile komşuluk oluşturan $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ köşelerinin derecelerinin çarpımlarının toplamı için;

i. $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşelerine ait dereceler, $(p-1)(s-1)$ tane köşenin her biri için $(q-1)(r-1)$ ‘dir.

ii. $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ köşelerine ait dereceler, $(q-1)(r-1)$ tane köşenin her biri için $(p-1)(s-1)$’dir. Bu derecelerin çarpımlarının toplamı;

$$\underbrace{(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)+(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)+\ldots+(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)}_{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]$$

$$=\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^2 \qquad (3.6)$$

(3.5) ve (3.6)’daki eşitliklerin toplamı, tüm kenar (komşuluk) oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır. Yani $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right) \otimes \Gamma\left(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının ikinci Zagreb indeksi,

$$M_2\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)\right]=\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]^2+\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^2$$
$$=2\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^2$$

olur ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının birinci çarpımsal Zagreb indeksini gösterir.

Teorem.3.3. $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının birinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\Pi_1\left[\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)\right]=\left[(q-1)(s-1)\right]^{2(p-1)(r-1)}\left[(q-1)(r-1)\right]^{2(p-1)(s-1)}$$
$$\left[(p-1)(s-1)\right]^{2(q-1)(r-1)}\left[(p-1)(r-1)\right]^{2(q-1)(s-1)}$$

İspat: $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\right)\otimes\Gamma\left(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının birinci çarpımsal Zagreb indeksini komşulukların oluşumuna göre dört durumda incelememiz gerekir.

1.Durum: $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşelerine ait dereceler, $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ komşuluklarıdır. Yani, $(p-1)(r-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(q-1)(s-1)$ 'dir. Bu derecelerin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(s-1)\right]^2\left[(q-1)(s-1)\right]^2\ \dots\ \left[(q-1)(s-1)\right]^2}_{(p-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=\left(\left[(q-1)(s-1)\right]^2\right)^{(p-1)(r-1)} \tag{3.7}$$

2.Durum: $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ 'li köşelere ait dereceler $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ komşuluklarıdır. Yani, $(p-1)(s-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(q-1)(r-1)$ 'dir. Bu derecelerin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(r-1)\right]^2\left[(q-1)(r-1)\right]^2\ \dots\ \left[(q-1)(r-1)\right]^2}_{(p-1)(s-1)\text{ tane}}$$

$$=\left(\left[(q-1)(r-1)\right]^2\right)^{(p-1)(s-1)} \tag{3.8}$$

3.Durum: $\left[(0,q_1),(r_1,0)\right]$ köşelerine ait dereceler $\left[(p_2,0),(0,s_2)\right]$ komşuluklarıdır. Yani;

$(q-1)(r-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(p-1)(s-1)$'dir. Bu derecelerin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{\left[(p-1)(s-1)\right]^2\left[(p-1)(s-1)\right]^2\ \ldots\ \left[(p-1)(s-1)\right]^2}_{(q-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=\left(\left[(p-1)(s-1)\right]^2\right)^{(q-1)(r-1)} \tag{3.9}$$

4.Durum: $\left[(0,q_1),(0,s_1)\right]$'li köşelere ait dereceler $\left[(p_2,0),(r_2,0)\right]$ komşuluklarıdır. Yani; $(q-1)(s-1)$ tane köşenin her birinin derecesi $(p-1)(r-1)$'dir. Bu derecelerin karelerinin çarpımı;

$$\underbrace{\left[(p-1)(r-1)\right]^2\left[(p-1)(r-1)\right]^2\ \ldots\ \left[(p-1)(r-1)\right]^2}_{(q-1)(s-1)\text{ tane}}$$

$$=\left(\left[(p-1)(r-1)\right]^2\right)^{(q-1)(s-1)} \tag{3.10}$$

(3.7), (3.8), (3.9) ve (3.10)'dan $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının tüm köşe derecelerinin karelerinin çarpımı, yani birinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$\begin{aligned}\Pi_1\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)\right]&=\left[(q-1)(s-1)\right]^{2(p-1)(r-1)}\left[(q-1)(r-1)\right]^{2(p-1)(s-1)}\\&\quad\left[(p-1)(s-1)\right]^{2(q-1)(r-1)}\left[(p-1)(r-1)\right]^{2(q-1)(s-1)}\end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sıradaki teorem $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının ikinci çarpımsal Zagreb indeksini karakterize eder.

Teorem.3.4. $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının ikinci çarpımsal Zagreb indeksi

$$\Pi_2\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)\right]=\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^{2(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)}$$

İspat: $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right) \otimes \Gamma\left(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının ikinci çarpımsal Zagreb indeksini komşulukların oluşumuna göre iki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşeleriyle kenar oluşturan köşeler $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ komşuluklarıdır.

i. $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşelerinin dereceleri $(p-1)(r-1)$ tane köşe için $(q-1)(s-1)$'dir.

ii. $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ köşelerinin dereceleri $(q-1)(s-1)$ tane köşe için $(p-1)(r-1)$'dir.

Bu köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]\,\ldots\,\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]}_{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)\text{ tane}}$$

$$=\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]^{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)} \qquad (3.11)$$

2.Durum: $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşeleriyle kenar oluşturan köşeler $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ komşuluklarıdır.

i. $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşelerinin dereceleri $(p-1)(s-1)$ tane köşe için $(q-1)(r-1)$'dir.

ii. $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ köşelerinin dereceleri $(q-1)(r-1)$ tane köşe için $(p-1)(s-1)$'dir.

Bu köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı,

$$\underbrace{\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]\,\ldots\,\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]}_{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)} \qquad (3.12)$$

(3.11) ve (3.12)'den $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right) \otimes \Gamma\left(\mathbb{Z}_r \times \mathbb{Z}_s\right)$ tensor çarpımının tüm kenar (komşuluk) oluşturan köşe çiftlerinin derecelerinin çarpımlarının çarpımı, yani ikinci çarpımsal Zagreb indeksi;

$$=\left[(q-1)(s-1)(p-1)(r-1)\right]^{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)}\ \left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)}$$

$$=\left[(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)\right]^{2(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)}$$

olur ki istenendir.

Sıradaki teorem $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının çarpımsal toplam Zagreb indeksini ortaya koyacaktır.

Teorem.3.5. $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının çarpımsal toplam Zagreb indeksi

$$\Pi_1^*\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)\right]$$
$$=\left[(r-1)(s-1)\left[(q-1)^2+(p-1)^2\right]+(p-1)(q-1)\left[(s-1)^2+(r-1)^2\right]\right]^{(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)}$$

İspat: $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının ikinci çarpımsal Zagreb indeksini de yine komşulukların oluşumuna göre iki durumda inceleyeceğiz.

1.Durum: $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşeleriyle kenar oluşturan köşeler $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ komşuluklarıdır.

i. $\left[(p_1,0),(r_1,0)\right]$ köşelerinin dereceleri $(p-1)(r-1)$ tane köşe için $(q-1)(s-1)$’dir.

ii. $\left[(0,q_2),(0,s_2)\right]$ köşelerinin dereceleri $(q-1)(s-1)$ tane köşe için $(p-1)(r-1)$’dir.

Bu köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(s-1)+(p-1)(r-1)\right]\left[(q-1)(s-1)+(p-1)(r-1)\right]\ \dots\ \left[(q-1)(s-1)+(p-1)(r-1)\right]}_{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)\text{ tane}}$$
$$=\left[(q-1)(s-1)+(p-1)(r-1)\right]^{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)} \tag{3.13}$$

2.Durum: $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşeleriyle kenar oluşturan köşeler $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ komşuluklarıdır.

i. $\left[(p_1,0),(0,s_1)\right]$ köşelerinin dereceleri $(p-1).(s-1)$ tane köşe için $(q-1).(r-1)$'dir.

ii. $\left[(0,q_2),(r_2,0)\right]$ köşelerinin dereceleri $(q-1).(r-1)$ tane köşe için $(p-1).(s-1)$ 'dir.

Bu köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımı;

$$\underbrace{\left[(q-1)(r-1)+(p-1)(s-1)\right]\left[(q-1)(r-1)+(p-1)(s-1)\right]\ \ldots\ \left[(q-1)(r-1)+(p-1)(s-1)\right]}_{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)\text{ tane}}$$

$$=\left[(q-1)(r-1)+(p-1)(s-1)\right]^{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)} \tag{3.14}$$

(3.13) ve (3.14)'deki eşitliklerin çarpımı tüm kenar (komşuluk) oluşturan köşe çiftlerinin derecelerinin toplamlarının çarpımıdır. Yani, $\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)$ tensor çarpımının çarpımsal toplam Zagreb indeksi;

$$\Pi_1^*\left[\Gamma(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q)\otimes\Gamma(\mathbb{Z}_r\times\mathbb{Z}_s)\right]=\left[(q-1)(s-1)+(p-1)(r-1)\right]^{(p-1)(r-1)(q-1)(s-1)}$$
$$\left[(q-1)(r-1)+(p-1)(s-1)\right]^{(p-1)(s-1)(q-1)(r-1)}$$

ifadesidir. Burada gerekli işlemler yapıldığında,

$$\left[(r-1)(s-1)\left[(q-1)^2+(p-1)^2\right]+(p-1)(q-1)\left[(s-1)^2+(r-1)^2\right]\right]^{(q-1)(r-1)(p-1)(s-1)}$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

4.1 Sonuçlar

Bu çalışmada öncelikle uygulamalı matematik ve cebirin önemli bir alt dalı olan graf teori ele alınmıştır. Detaylandıracak olursak,

- cebirsel graflar ailesine ait sıfır bölen graflar tanıltılmış,
- özel bir cebirsel graf olan $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ halkalarında sıfır bölen grafların Zagreb indeksleri incelenmiştir.

Zagreb indeksleri çok çeşitlidir. Biz de burada $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ graflarının

- birinci ve ikinci Zagreb indekslerini,
- birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indekslerini,
- birinci ve ikinci Zagreb eşindekslerini,
- birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb eşindekslerini,
- çarpımsal toplam Zagreb indeksini ve
- total çarpımsal toplam Zagreb indeksini ortaya koyduk.

Ayrıca graf teorisinde geniş bir uygulamaya sahip, graf çarpımları kısmının önemli bir temsilcisi olan tensor çarpımları ve $\Gamma\left(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\right)$ graflarının tensor çarpımlarının,

- birinci ve ikinci Zagreb indekslerini,
- birinci ve ikinci çarpımsal Zagreb indekslerini ve
- çarpımsal toplam Zagreb indeksini inceledik.

4.2 Öneriler

Bu tezde yapılan çalışmalar göz önüne alınarak değişik cebirsel yapı grafları tanımlanabilir, bu grafların Zagreb indeksleri ortaya konulabilir. Ayrıca burada sadece tensor çarpım üzerinde durulmuştur, dolayısıyla tanımladığımız grafların diğer çarpımlarının da Zagreb indeksleri hesaplanabilir.

5. KAYNAKLAR

Akgüneş, N., 2018, Some graph parameters on the strong product of monogenic semigroup graphs, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*.

Akgüneş, N., Togan, M., 2012, Some graph theoretical properties over zero-divisor graphs of special finite commutative rings, *Adv. Stud. Contemp. Math*, 22 (2), 305-315.

Anderson, D. F., Badawi, A., 2008, The total graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 320 (7), 2706-2719.

Anderson, D. F., Livingston, P. S., 1999, The zero-divisor graph of a commutative ring, *Journal of Algebra*, 217 (2), 434-447.

Anderson, D. F., Weber, D., 2018, The zero-divisor graph of a commutative ring without identity. *International Electronic Journal of Algebra*, 23 (23), 176-202.

Ashrafi, A. R., Došlić, T., Hamzeh, A. 2010, The Zagreb coindices of graph operation,. *Discrete applied mathematics*, 158 (15), 1571-1578.

Balaban, A. T., Motoc, I., Bonchev, D., Mekenyan, O., 1983, Topological indices for structure-activity correlations, *Steric effects in drug design*, Springer, Berlin, Heidelberg, 21-55.

Beck, I., 1988, Coloring of commutative rings, *Journal of Algebra*, 116 (1), 208-226.

Bollobás, B., 2013, *Modern graph theory*, Springer Science & Business Media, Vol. 184.

Cangul, I. N., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A. S., 2017, New formulae for Zagreb indices, *AIP Conference Proceedings*, AIP Publishing, Vol. 1863, No;1, 300013.

Das, K. C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A. S., Cangul, I. N., 2013, The multiplicative Zagreb indices of graph operations, *Journal of Inequalities and Applications*, 2013 (1), 90.

Das, K. C., Akgunes, N., Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., Cevik, A. S., 2016, On the first Zagreb index and multiplicative Zagreb coindices of graphs, *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 24 (1), 153-176.

Das, K. C., Gutman, I., 2004, Some properties of the second Zagreb index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 52 (1), 3-1.

Eliasi, M., Iranmanesh, A., & Gutman, I., 2012, Multiplicative versions of first Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68 (1), 217.

Gutman, I. 2011, Multiplicative Zagreb indices of trees, *Bull. Soc. Math. Banja Luka*, 18, 17-23.

Gutman, I., Trinajstić, N., Wilcox Jr, C. F., 1975, Graph theory and molecular orbitals. XII. Acyclic polyenes, *The Journal of Chemical Physics*, 62 (9), 3399-3405.

Gutman, I., Trinajstić, N. 1972, Graph theory and molecular orbitals, Total φ-electron energy of alternant hydrocarbons, *Chemical Physics Letters*, 17 (4), 535-538.

Gross, J. L., Yellen, J., & Zhang, P., 2013, *Handbook of graph theory*, Chapman and Hall/CRC.

Imrich, W., & Klavzar, S., 2000, *Product graphs: structure and recognition*, Wiley.

Nacaroglu, Y., Maden, A. D., 2017, The upper bounds for multiplicative sum Zagreb index of some graph operations. *Journal of Mathematical Inequalities*, 11 (3), 749-761.

Ranjini, P. S., Lokesha, V., Cangül, I. N., 2011, On the Zagreb indices of the line graphs of the subdivision graphs, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (3), 699-702.

Sharma, P., Sharma, A., Vats, R. K., 2011, Analysis of adjacency matrix and neighborhood associated with zero divisor graph of finite commutative rings, *Analysis*, 14 (3).

Todeschini, R., Consonni, V., 2010, New local vertex invariants and molecular descriptors based on functions of the vertex degrees, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 64 (2), 359-372.

Togan, M., Yurttas, A., Cangul, I. N., 2015, Some formulae and inequalities on several Zagreb indices of r-subdivision graphs, *Enlightments of Pure and Applied Mathematics*, 1 (1), 29-45.

Xu, K., Das, K. C., 2012, Trees, unicyclic, and bicyclic graphs extremal with respect to multiplicative sum Zagreb index, *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, 68 (1), 257.

Xu, K., Das, K. C., Tang, K., 2013, On the multiplicative Zagreb coindex of graphs, *Opuscula Mathematica*, 33, 191-204.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Ayşe ÇELİK
Uyruğu	**:**	Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Konya-26/28/1990
Telefon	**:**	+90 (507) 737 90 15
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	aysecelik4226@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Meram Anadolu Lisesi**	**2009**
Üniversite	:	**Necmettin Erbakan Üniversitesi**	**2014**
Yüksek Lisans	:	**Necmettin Erbakan Üniversitesi**	
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2014-	**Milli Eğitim Bakanlığı**	**Matematik Öğretmeni**

UZMANLIK ALANI – CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

YABANCI DİLLER - İNGİLİZCE