T.C.
NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ARDIŞIK TÜMLER AÇILIM METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan
Sümeyye KAYA

Tezi Yöneten
Doç. Dr. Sezer SORGUN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

HAZİRAN 2019
NEVŞEHİR

Doç. Dr. **Sezer SORGUN** danışmanlığında **Sümeyye KAYA** tarafından hazırlanan **''Bazı Lineer ve Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlerin Ardışık Tümler Açılım Metodu ile Nümerik Çözümleri''** adlı bu çalışma jürimiz tarafından Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

28/06/2019

JÜRİ	İMZA
Başkan: DOÇ.DR HALİS BİLGİL	
Üye: DOÇ.DR.SEZER SORGUN	
Üye: DOÇ.DR.SEYDİ BATTAL GAZİ KARAKOÇ	

ONAY:

Bu tezin kabulü,Enstitü Yönetim Kurulunun 24/07/2019 tarih ve 44-446 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

24/07/2019

TEZ BİLDİRİM SAYFASI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada yer alan bütün bilgilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu ve bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Sümeyye KAYA

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve tez çalışmalarım süresince büyük desteğini gördüğüm tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Sezer SORGUN'a, hiçbir konuda yardımlarını fedakarlıklarını esirgemeyen YÜRÜM ailesine en derin duygularla teşekkür ederim.

BAZI LİNEER VE LİNEER OLMAYAN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ARDIŞIK TÜMLER AÇILIM METODU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Sümeyye KAYA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Matematik problemleri, fiziksel olayların matematiksel modellemesidir. Bu problemlerin tam çözümlerinin bulunabilmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Çözümler için bilgisayar kullanımının yanı sıra asimptotik açılımlar yardımıyla yaklaşım sağlanabilir. Ancak asimptotik açılımlar geçtiğimiz yüzyıldan bu yana uygulamalı matematik, mühendislik bilimleri ve özellikle akışkanlar mekaniğinde önemli yer tutmaktadır. Yaklaşım metotları arasında başta gelen metot, pertürbasyon (asimptotik) metodudur. Bu tekniğe göre çözüm bir asimptotik açılımın ilk birkaç terimi tarafından sunulur.

Bu tezde genelleştirilmiş asimptotik genişlemelere dayanan ardışık tümler açılım metodu (SCEM) adı verilen etkili bir yöntem kullanıldı. İyi bilinen yöntem eşleştirilmiş asimptotik açılımlar metodu (MMAE) nin aksine, SCEM ile daha geçerli yaklaşımlar elde edildi. MMAE yöntemine göre SCEM ile tam çözüme daha yakın çözümler elde edildi. Bu tez çalışmasının asıl amacı diferansiyel denklemlerin çözümlerine asimptotik yaklaşımlar oluşturmaktır. Ardışık tümler açılım metodu ile verilen adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine yakın sonuçlar ile birlikte yöntemin etkinliği bazı sayısal denemeler, tam çözümler ve MMAE gibi diğer mevcut yöntemlerle karşılaştırmalar yoluyla gösterilmiştir.

Yöntemin işleyişi, örnekler üzerinde ayrıntılı olarak derlendi. Bunun için öncelikle eşleştirilmiş açılımlar metodunun (MMAE) üzerinde duruldu, daha sonra ardışık tümler açılım metodu (SCEM) ayrıntılı olarak incelendi. Sonuç olarak, SCEM yönteminin

MMAE yöntemine göre daha avantajlı ve tam çözüme daha yakın sonuçlar elde edildiği görüldü.

Anahtar kelimeler: Asimptotik Açılım, Singüler Pertürbasyon, Lineer ve Lineer olmayan Diferansiyel Denklemler, Ardışık Tümler Açılım Metodu, ,Sınır Değer problemleri

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sezer SORGUN
Sayfa Adeti : 71

NUMERICAL SOLUTIONS OF SOME LINEAR AND NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY SUCCESSIVE COMPLEMENTARY EXPANSION METHOD

(M.Sc. Thesis)

Sümeyye KAYA

NEVŞEHİR HACI BEKTAŞ VELİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2019

ABSTRACT

Mathematical problems are mathematical modeling of physical phenomena. It is not always possible to find exact solutions of these problems. Solutions can be accessed by using asymptotic expansions as well as computer usage. However, asymptotic expansions have played an important role in applied mathematics, engineering sciences, and fluid mechanics since the past century. The main method of approach is the perturbation (asymptotic) method. According to this method the solution is presented by the first few terms of an asymptotic expansion.

In this thesis, an effective method called Successive Complementary Expansion Method (SCEM) based on generalized asymptotic expansions was used. Unlike the well-known Method of Matched Asymptotic Expansions (MMAE), more valid approaches were obtained with SCEM. According to the MMAE method, exact solutions were obtained with SCEM. The main purpose of this thesis is to develop asymptotic approaches to the solution of differential equations. The efficiency of the method, along with the results close to the solutions of the ordinary differential equations given by the consecutive solutions method, has been demonstrated by comparison with some existing numerical experiments, exact solutions and other existing methods such as MMAE.

The function of the method has been compiled in detail on the samples. For this, the MMAE was firstly emphasized, then the successive method of opening all the scales

SCEM was examined in detail. As a result, it is observed that the SCEM method was more advantageous than the MMAE method and more exact solution was obtained.

Key words: Asymptotic expansion, Singular perturbation, Linear and nonlinear differential equations, Successive Complementary Expansion Method, Boundary - value problems

Thesis Supervisor : Associate Prof. Sezer SORGUN
Page Number : 71

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\in$	: Elemanıdır sembolü
N	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel (gerçel) sayılar kümesi
ε	: Küçük epsilon parametresi
$\delta(\varepsilon)$	: Mertebe (gauge) fonksiyonu
$\frac{d}{dx}$	: Adi türev operatörü
$\frac{\partial}{\partial u}$	: Kısmi türev operatörü
$\sim$	: (Asimptotik olarak) denklik sembolü
o	: Asimptotik kıyaslayıcı (küçük “o”)
O	: Asimptotik kıyaslayıcı (büyük “O”)
$f^{(n+1)}$	: f fonksiyonunun (n + 1). mertebeden türevi
$\varepsilon \to \varepsilon_0$	: ε parametresi ε_0 sabitine yaklaşıyor (limit)
$J_0(z)$	: Bessel fonksiyonu
x_η	: Ara değişken
α	: Sabit bir reel sayı
β	: Sabit bir reel sayı
λ	: Sabit bir reel sayı
y'	: y nin türevi
$\int$	: İntegral sembolü
$\sum$	: Toplam sembolü
lnx	: x’in doğal algoritması
df	: f fonksiyonunun diferansiyeli

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Fizik, biyoloji, sosyal bilimler ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan pek çok sayıda problemin çözümünde diferansiyel denklemler önemli yer tutar. Doğa kanunları bile doğrudan diferansiyel denklemle ifade edilir. Buradan da anlaşılacağı üzere diferansiyel denklemlerin ilgi alanı oldukça geniştir [1].

Diferansiyel denklemler uzun zamandır doğa bilimleri ve mühendislikte karşılaşılan çok farklı problemlere başarıyla uygulanmaktadır. Araştırmalara göre diferansiyel denklemlerin yeni uygulamalarını keşfetmeye sadece fiziksel bilimlerde değil aynı zamanda biyoloji istatistik, tıp, sosyoloji, psikoloji ve ekonomi gibi alanlarda da devam etmektedirler. Fiziksel kanun ve prensiplerin, göz önüne alınan değişkenlerde ki sonsuz küçük değişimleri dikkate almak suretiyle bir probleme uygulanmasıyla diferansiyel denklemler elde edilmektedir [2].

Matematik problemlerin tam çözümlerinin bulunabilmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Bu durumda karşımıza iki seçenek çıkar. Bunlardan birincisi bilgisayar kullanımıdır. Hem vakit kaybetmeden hem de zahmet çekmeden ilgili problemin sonucuna ulaşabilmektedir. Diğer seçenek ise ilgili problemlerin çözümüne asimptotik açılımlar yardımıyla yaklaşmaktır. Bu yöntem bilgisayar kullanımına göre zahmetli bir yöntemdir. Ancak asimptotik açılımlar geçtiğimiz yüzyıldan buyana uygulamalı matematik, mühendislik bilimleri ve özellikle akışkanlar mekaniğinde önemli yer tutmaktadır [3 – 4].

Asimptotik yaklaşımları polinom köklerini bulurken de kullanırız. Örneğin $x^2-5.99x+9.02=0$ kuadratik denklemini ele aldığımızda bu denklemin katsayılarının aslında $x^2-5.99x+9.02=0$ denkleminin katsayıları için $-5.99=-6.00+0.01$ ve $9.02=9+2.(0.01)$ eşitliklerini alırız. $\varepsilon=0.01$ alınması durumunda denklem

$x^2+(\varepsilon-6)x+(2\varepsilon+9)=0$ formuna dönüşür. Kuadratik denklemin çözüm formülleri ile $x^2+(\varepsilon-6)x+(2\varepsilon+9)=0$ denkleminin çözümleri

$$x_{1,2}=\frac{-(\varepsilon-6)\mp\sqrt{(\varepsilon-6)^2-4.(2\varepsilon+9)}}{2}$$

şeklinde bulunur.

Burada $\varepsilon=0$ için $x^2+(\varepsilon-6)x+(2\varepsilon+9)=0$ denklemi $x^2-6x+9=0$ denklemine dönüşmüştür ve dolayısıyla $x_{1,2}$ çözümünde $x_1=3$ ve $x_2=3$ bulunur. Yani küçük bir ε parametresi ile oynanarak denklem istenilen şekle dönüştürülmektedir. Burada $x^2-5.99x+9.02=0$ denkleminde $\varepsilon=0,01$ için çözümler bulunur. $x^2+(\varepsilon-6)x+(2\varepsilon+9)=0$ denkleminin kuadratik yapıda olması nedeniyle kök formülleri kullanılarak çözümler elde edilebildi.

Yaklaşım metotları arasında başta gelen metot pertürbasyon (asimptotik) metottur. Bu tekniğe göre çözüm bir asimptotik açılımın ilk birkaç terimi tarafından sunulur. Bu açılımlar denklemlerde doğal bir şekilde ya küçük ya da büyük parametrenin terimlerinde uygulanır. 18. yy.'da asimptotik metotların temeli atılmıştır. Asimptotik yaklaşım denklemi ile verilen Bessel fonksiyonu bu dönemde yoğun ilgi görmüştür [5]. Çalışmaların ilerletilmesi ile diferansiyel denklemlerin asimptotik çözümleri bulundu ve bunun üzerine gök mekaniği ile önemli gelişmeler kaydedildi [6, 7, 8].

Bu metodun temeli akışkan mekaniği ile ilgilidir. 1950'li yıllarda Friedrichs ve öğrencileri tarafından günümüzdeki haliyle kullanılmaya başlandı. Başlangıçta "iç ve dış açılımlar metodu" ve "çift asimptotik açılım metodu" şeklinde anılan metod daha sonraları Francis Patton Bretherton'un deyimi ile günümüzdeki adıyla anılmaya başlanmıştır [9, 10, 11].

Biyoloji, Fizik, Kimya ve Mühendislik gibi daha birçok alanda farklı diferansiyel denklemleri ile ilgili sınır değer problemleri formüle edilebilir. Dolayısıyla, küçük parametrelerde formüle edilebilen modele pertürbed model, bu şekilde formüle edilmeyen modele ise unperturbed (pertürbe edilmemiş) model denir. 1900'lü yıllarda L. Prandtl ve J. H. Poincare pertürbasyon problemleri adına ilk çalışmaları yapmıştır [3]. Singüler pertürbasyon problemi fikri ise L. Prandtl'nin 1904'teki sınır tabaka çalışmalarında ortaya çıkmıştır. Küçük parametreler akışkan mekaniğinin klasik Navier – Stokes denklemine ve ters Reynold sayısına dayanmaktadır [7].

1900 yılından itibaren bu durumlarla ilgili birçok kişi tarafından çeşitli yöntemler bulunmuş ve geliştirilmiştir. Bunların başında ise Kodalbajoo ve Reddy gelmektedir. Kadalbojoo ve Reddy singüler pertürbasyon problemlerinin yaklaşık çözümlerini belirlemek için 1908–1986 yılları arasında gelişen çeşitli sayısal ve asimptotik yöntemleri araştırdılar. Bunun üzerine çalışmalar yaptılar.

Daha sonra Kadalbajoo ve Patidar, Kadalbajoo ve Reddy tarafından yapılan çalışmaları 1984–2000 yılları arasında singüler pertürbasyon problemleri alanında çeşitli araştırmacılar tarafından yapılan çalışmaları yalnızca tek boyutlu problemleri (Doğrusal, doğrusalolmayan, yarı lineer ve quasilineer) gözönüne alarak incelediler [32]. Kadalbajoo ve Gupta farklı araştırmacılar tarafından çözülmüş singüler pertürbasyon problemleri için hesaplama yöntemi hakkında 2000 – 2009 yılları arasında büyük bir araştırma yaptılar [14].

Singüler pertürbasyon problemlerinin tarihi hakkında bilgi verdikten sonra, tezimizin asıl amacı olan diferansiyel denklemlerin çözümlerine asimptotik yaklaşımlarda bulunmak olduğundan bu konuyla ilgili ayrıntılara geçelim.

Matematik problemlerinin tam çözümünü elde etmenin zor hatta imkansız olduğu durumlar olabilir. Dolayısıyla bilim adamları problemlerin çözümlerine yaklaşık çözümler bulmuşlardır. Bu yöntemlerden biride Eşleştirilmiş Açılımlar Metodu (MMAE) dir. Bazen verilen problemin çözümü için çeşitli yöntemlerin karışımı da kullanılabilir. Bu tezde, singüler pertürbasyon problemlerinin çözümü için Eşleştirilmiş Açılımlar Metodundan (MMAE) bahsedildi. Bunun üzerine Jean Cousteix ve Jacques Mauss tarafından MMAE'ye alternatif yöntem olarak tanıtılan verimli ve daha yaklaşık bir asimptotik yöntem olan Ardışık Tümler Açılım Metodu (SCEM) uygulandı. SCEM ile bulunan yaklaşık çözüm MMAE'ye göre daha verimli ve daha alternatiftir. Bu tezde iki nokta sınır değer problemlerine yaklaşmak için genelleştirilmiş asimptotik genişlemelere dayanan ardışık tümler açılım metodu uygulandı.Ardışık Tümler Açılım Metodu'nun (SCEM) ana prensibi eşleştirilmiş yaklaşım olmadan singüler problemlerinin yaklaşık çözümünü bulmak için oluşturulmuştur. Bu durumda, SCEM'dan önce MMAE'de elde edilen bulguları SCEM ile karşılaştırabiliriz. SCEM'in ilk adımı dış bölge için yaklaşık değer arar. Bu yaklaşım genellikle dış bölge çözümü içindir.

SCEM'in temel fikri, sınır koşullarını kullanarak yaklaşımı tamamlayan bir terim eklemektir. Bundan dolayı eklenen bu terimler verilen ifadeyi yaklaşık çözüme daha yakınlaştırır. Dolayısıyla problemin çözümüne daha yakın çözümler elde ederiz. Çünkü SCEM ile bulduğumuz sonuç problemin çözümüne daha yakın sonuç vermektedir. Bu yüzden asimptotik yaklaşım çözümü bulmak için SCEM yöntemini kullanmak daha uygun olacaktır. Yöntemin en önemli avantajı, herhangi eşleşen prosedür olmadan, geçerli bir yaklaşım vermesidir. Sınır koşulları yöntemi uygulamak için yeterlidir. Bu yöntemde sınır şartları kabul edilmiş yaklaşım değildir. MMAE ve SCEM ile elde edilen sonuçların karşılaştırılması için bu tezde tam çözümü olan problemleri tercih edildi [10]. Dolayısıyla tezde yöntemin etkinliği bazı sayısal denemeler, tam çözümler ve MMAE gibi diğer mevcut yöntemlerle karşılaştırmalar yoluyla gösterilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümünde diferansiyel denklemlerin tarihçesi, tam çözüm ve yaklaşık çözüm hakkında bilgi verildi. MMAE ve SCEM yönteminden genel olarak bahsedildi.

Çalışmanın ikinci bölümünde, diferansiyel denklemlerden, analitik fonksiyonlardan, singüler ve regüler noktalardan, regüler ve singüler pertürbasyon problemlerinden bahsedildi, genel tanımları ve örnekler verildi.

Üçüncü bölümde, tezimizin asıl amacı olan asimptotik yaklaşımlardan, asimptotik açılımlardan ve uygulanan yöntemlerden bahsedildi. Diferansiyel denklemlerde asimptotik çözüm konusu anlatıldı. Son bölümde ise öncelikle Eşleştirilmiş Asimptotik Açılımlar Metodu (MMAE) anlatıldı ve örnek verildi. Daha sonra Ardışık Tümler Açılım Metodu (SCEM) anlatıldı, örneklerle sorular çözüldü ve SCEM yöntemi tam çözüm ve MMAE ile karşılaştırıldı. Ayrıca bu bölümde tam çözüm, SCEM ve MMAE yönteminden elde edilen sonuçlar grafik ile gösterildi. Metodun diferansiyel denklemlere uygulanmasında matematik yazılımlarından yararlanılmıştır.

2. BÖLÜM

ÖNBİLGİLER

2.1. Diferansiyel Denklemler

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözümleyebilmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartlarını, başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonları bulup ortaya koymak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler bazen aranan fonksiyonun en azından birinci mertebeden veya daha yüksek mertebelerden türevlerini içermektedir. İşte bu çeşit bir matematiksel ifadeye diferansiyel denklem denir.

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

veya daha genel olarak

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerin birincisi birinci mertebeden, ikincisi ise n. mertebeden birer diferansiyel denklemdir. Bir diferansiyel denklemin en yüksek dereceden türevi o denklemin mertebesini belirler.

Diferansiyel denklemler değişik şekillerde sınıflandırılır. Örneğin bir diferansiyel denklemde bir veya daha fazla sayıda bağımlı değişken olmasına karşın eğer yalnız bir bağımsız değişken varsa bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Bağımlı değişkenin tek olması halinde genellikle bağımsız değişken x ile ve bağımlı değişken y ile gösterilir. Eğer diferansiyel denklem, bir tek bağımlı değişkenin iki veya daha fazla sayıda bağımsız değişken cinsinden türevlerini içeriyorsa bu denkleme de kısmi diferansiyel denklem denir.

Adi diferansiyel denklemlere birkaç örnek verelim.

$$\frac{dy}{dx}=\sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\omega^2 y=0$$

$$\frac{dy}{dx}+y=x^2e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=\frac{1}{2}-e^{2x}$$

Bunlardan birinci ve üçüncü denklem birinci mertebeden, ikincisi ikinci mertebeden ve sonuncusu ise üçüncü mertebeden birer lineer diferansiyel denklemdir.

Kısmi diferansiyel denklemlere de önek olarak aşağıdaki denklemler gösterilebilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$$

Yukarıdaki kısmi diferansiyel denklemlerin üçü de mertebeden lineer denklemlerdir [1].

x değişkeninin y fonksiyonuna göre $a_0(x)\neq 0$ olmak üzere

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=g(x) \qquad (2.3)$$

şeklindeki denkleme n. mertebeden doğrusal (lineer) adi diferansiyel denklem denir. Yani bağımlı değişken ve türevleri 1. dereceden ve denklemi bağımlı değişken ve onların türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar yalnızca bağımsız değişkenlere bağlıysa bu denklemlere lineer diferansiyel denklem denir.

Örneğin;

$$\frac{dy}{dx} = x\cos x$$

diferansiyel denkleminde y bağımlı, x bağımsız değişken, adi diferansiyel denklem, 1. mertebe, 1. dereceden bir lineer diferansiyel denklemdir.

Lineer olmayan diferansiyel denklemde öncelikle verilen çözüm bölgesinde bir çözüm olup olmadığı dahi kesin değildir. Bunun öncelikle belirlenmesi gerekir. Eğer çözüm varsa bu çözümün tek bir genel çözüm olup olmadığı da ortaya çıkarılmalıdır. Çoğu pratik uygulamanın doğasından gelen bir lineer olmamışlık vardır ve bu tür uygulamalar lineer olmayan diferansiyel denklemleri ortaya çıkarır. Bu tür problemleri çözebilmek için genel bir metot olmadığı gibi, genel karakteristikleri konusunda çok az bilgi vardır.

$y''' + 3y'' + 2y' = 0$, $y''' + x^2 y'' + xy' = xe^x$ şeklindeki denklemler birer doğrusal (lineer) diferansiyel denklemler olup $y''' + 3e^x y'' + yy' = x^5$, $y'' + x^2 (y')^2 + 5y = 0$ biçimindeki denklemlerde doğrusal (lineer) olmayan diferansiyel denklemlerdir. İlk denklemde yy' terimi, ikinci denklemde $(y')^2$ terimi doğrusallığı bozuyor.

Tanım 2.1.1.

$f(z)$ kompleks değişkenli ve kompleks değerli fonksiyonu noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer sonlu

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa bu fonksiyona z_0 noktasında türevlenebilirdir (veya diferansiyellenebilirdir) denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir [12].

Örneğin $f_1(z)=e^z$, $f_2(z)=\sin z$ ve $f_3(z)=\cos z$ fonksiyonları her biri kompleks düzlemdeki her noktada analitiktir.

Tanım 2.1.2.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P_1(x)\frac{dy}{dx}+P_2(x)y=0 \tag{2.4}$$

2. mertebeden lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklemdeki $P_1(x)$ ve $P_2(x)$ fonksiyonlarının her ikisi de $x=x_0$ noktasında analitik ise $x=x_0$ noktasına regüler nokta denir.

Eğer bu fonksiyonların her ikisi de $x=x_0$ noktasında analitik değilse o zaman $x=x_0$ noktasına (2. 4) denkleminin bir singüler noktasıdır denir [10].

Örneğin $(1-x^2)y''+xy'+2y=0$ diferansiyel denkleminde $x=1$ ve $x=-1$ noktaları singüler nokta, bu iki nokta dışındaki her noktada regüler noktalardır.

2.2. Singüler – Regüler Pertürbasyon Problemleri

Fizikte kullanılan matematiksel modellerin çoğu zaman çözümleri olmayabilir. Küçük parametreler mevcut olduğunda ya da hesaplama alanları geniş olduğunda sayısal çözümleri daha zor hale gelir. Bu gibi durumlarda daha basit modeller bir parametreyi sıfıra götürerek veya çalışmayı daha küçük bir alana kısıtlayarak geliştirilebilir. ε ile gösterilen küçük bir parametre sıfıra giderken, başlangıç sorununun çözümünün $\varepsilon \to 0$ gibi indirgenmiş problemin çözümüne tek yönlü eğilim göstermemesi mümkündür. Böylece singüler pertürbasyon problemi ortaya çıkar.

Bunu daha iyi açıklamak için, L_ε düşünelim ve eşitlikler $L_\varepsilon\left[\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)\right]=0$ ın bir $\phi_\varepsilon(x,\varepsilon)$ çözümünü arayalım. Burada x, bir 0 alanındaki bir değişkendir ve burada $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$, ε_0 istenen küçük sabit bir pozitif sayıdır. ε parametresi çok küçük ve boyutsuz olup, tüm problemin boyutsuz değişkenlerle ifade edildiğini gösterir. $L_0\left[\phi_0(x)\right]=0$, indirgenmiş problem daha basit bir problem olsun ve izin verilen 0 alanında $\|\phi_\varepsilon-\phi_0\|$ normunun küçük olduğunu varsayalım. Supremum normunu kullanarak $\mathrm{Max}_0\left|\phi_\varepsilon-\phi_0\right|<K\delta(\varepsilon)$ elde ederiz, K, ε ve $\delta(\varepsilon)$ dan bağımsız olarak pozitif bir sayıyı, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$ gibi pozitif bir ifade belirtmektedir. Eğer bu özellik sağlanıyorsa regüler pertürbasyon problemi olarak adlandırılır. Bazı problemlerde bu özellik sıfır alanın tamamında sağlanmaz. Genelde sıfırdan küçük bir alanda sağlanır. Böyle durumlarda bu problemlere singüler pertürbasyon problemi denir [13].

Yaklaşık çözümler üretebilmek için asimptotik metotlar yaygın olarak kullanılmaktadır. Tezimizin amacı adi diferansiyel denklemlerin çözümlerine asimptotik yaklaşımlarda bulunmak olduğundan buna bir ön hazırlık olarak verilen örnekleri inceleyelim.

Örnek 2.2.1. $x^2+0.04x-4=0$ kuadratik denklemini alalım. x'in katsayısı olan 0.04 değeri diğer katsayılardan oldukça küçüktür. Bu yüzden yaklaşım çözüm elde edilmeye çalışılacaktır. Öncelikle Matlab programı ile tam çözümünü bulalım daha sonrada yaklaşık çözüm ile kıyaslayalım.

Matlab tam çözümü

```
>> format long
>> roots ([4.04-4])
ans =
```

x_1 = 1.9800999975…

x_2 = –2.020009998… (2.5)

şeklinde bulunur. Şimdide asimptotik yaklaşımlarda bulunalım. Bu yüzden $\varepsilon = 0.01$ alalım ve denklem $x^2 + 4\varepsilon x - 4 = 0$ haline dönüşür. Bu problem için

$$x \sim x_0 + \varepsilon x_1 + ... \tag{2.6}$$

şeklinde bir yaklaşım benimsenir. Burada $\alpha > 0$ dır. (2.6) yaklaşımı çözüm kabul edip $x^2 + 4\varepsilon x - 4 = 0$ denklemine uygularsak

$$x_0^2 + 4\varepsilon^\alpha x_0 x_1 + ... + 4\varepsilon\left(x_0 + \varepsilon^\alpha x_1 + ...\right) - 4 = 0 \tag{2.7}$$

eşitliğine ulaşılır. Polinom eşitliğinden $\alpha = 1$ ve

$0(1)$ $\quad x_0^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_0 = \mp 2$

$0(\varepsilon)$ $\quad 4x_0 x_1 + 4x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

elde edilir. Böylece (2.6) yaklaşımı

$$x \sim \mp 2 - \varepsilon \tag{2.8}$$

iki terimli asimptotik yaklaşıma dönüşür.

ε parametresi sıfıra yaklaştıkça asimptotik yaklaşımda gerçek çözüme o kadar iyi yaklaşır.

Örnek 2.5. problemi “regüler pertürbasyon problemi” olarak adlandırılır. “Regüler” kelimesi ε’nun farklı değerleri için denklemin mertebesinin, derecesinin değişmediği anlamına gelmektedir.

Diğer bir örnek olarak $\varepsilon x^2 + 4x - 4 = 0$ şeklindeki kuadratik denklemini ele alalım. ε parametresi en yüksek dereceli terimin önünde katsayı olarak bulunmaktadır. $\varepsilon = 0$ için denklem lineer hale gelir. Dolayısıyla denklemin derecesi düşer. Bu tür problemlere de “singüler pertürbasyon problemi” denir [6].

3. BÖLÜM

ASİMPTOTİK YAKLAŞIMA GİRİŞ

D de tanımlanan iki fonksiyon $\varphi = Os(\delta_1)\overline{\varphi}_1 = Os(\delta_1)\varphi - \overline{\varphi}_1 = Os(\delta_2)$ ile $\delta_2 < \delta_1$ $\overline{\varphi}_1$ fonksiyonu φ fonksiyonunun bir asimptotik yaklaşımıdır. Örneğin; $\overline{\varphi}_1 = \varphi$ seçebiliriz ve $\overline{\varphi}_1$ sadece φ nin asimptotik yaklaşımı değil, fakat yaklaşım olarak $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_2 = 0$ olarak δ_2 seçebiliriz. Burada sonucun bir değeri yoktur. "Daha basit fonksiyon (simple function)" kavramı ν fonksiyonunu $\overline{\varphi}_1$ ile değiştirmenin neden ilginç olduğunu anlamamızı sağlar. Bununla birlikte bu basitlik asimptotik açılımları oluşturmak için kullanılan farklı yöntemlerden kaynaklanmaktadır. Bu durumda φ'nın δ_1 dizisine ait $\overline{\varphi}_1$ yaklaşımı elde edilir. Daha sonra bu gösterim önemlidir ve başlangıç olarak

$$\varphi - \delta_1\varphi_1 = 0(\delta_1)$$

ve dizi

$$\overline{\varphi}_1 = \delta_1\varphi_1$$

ile

$$\varphi_1 = O_s(1)$$

biçimindedir. Daha iyi bir yaklaşım istenirse, yukarıdaki işlemler tekrarlanabilir. Aşağıdaki durumu gösterirsek

$$\varphi - \delta_1\varphi_1 = O_s(\delta_2)$$

Eğer burada $\varphi_2 = O_s(1)$ varsa $\varphi - \delta_1\varphi_1 = \delta_2\varphi_2 + O_s(\varphi_3)$ ile $\delta_3 < \delta_2$, olduğundan

$$\varphi = \delta_1\varphi_1 + \delta_2\varphi_2 + O_s(\varphi_3)$$

yazabiliriz. Bu durumda önem sırasına dokunmadan ihmal edilebilir.

Dolayısıyla aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\varphi = \delta_1\varphi_1 + \delta_2\varphi_2 + c(\delta_2)$$

Bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varphi(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{m} \delta_n(\varepsilon)\varphi_n(x,\varepsilon) + 0\left[\delta_m(\varepsilon)\right].$$

Sonuç olarak *D* alanında $\varphi(x,\varepsilon)$ nun m. terim asimptotik açılımı elde edildi. Asimptotik açılımı dikkate alarak, terimlerin sayısı çok karakteristik değildir. δ_m mertebesine asimptotik bir açılımın elde edildiğini söylemek daha doğru olur. Bu açılım daha ayrıntılı olarak şöyle yazılabilir.

$$\varphi(x,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{m} \delta_n(\varepsilon)\varphi_n(x,\varepsilon) + O_s\left[\delta_{m+1}(\varepsilon)\right]$$

Bu genişleme öyle ki;

$\forall n : \varphi_n(x,\varepsilon)O_s(1)$ ve $\delta_{n+1} < \delta_n$ supremum normu kullanılırken, mertebe tanımı kastedilerek v_n fonksiyonunun tanım aralığında sınırlandırıldığını ima eder. Du Boirs – Reymond'un teorisine göre; eğer $\varphi - \varphi = O(\delta)$ ise herhangi bir fonksiyon $\varphi(x,\varepsilon)$, kabul edilen alanda $\varphi(x,\varepsilon)$ ile aynı asimptotik açılıma sahiptir,

Burada δ^* kabul edilen asimptotik dizi, δ_n göre asimptotik olarak sıfırdır. Asimptotik açılımların tek olmamasının nedenlerinden biri budur [10].

Yaklaşık çözümler üretebilmek adına asimptotik metotların kullanım alanları oldukça fazladır. Tezimizin asıl amacının daha iyi anlaşılması adına bir ön hazırlık olarak Taylor seri açılımı ve L hospital kuralını ele alalım.

n. mertebeye kadar türevleri mevcut olan $f(\varepsilon)$ fonksiyonunun $(n+1)$. mertebeden türevi olan $f^{(n+1)}$ belirli bir $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_b$ aralığında sürekli olsun. Bu durumda ε ve ε_0, $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ aralığına ait noktalar olmak üzere

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0) + (\varepsilon - \varepsilon_0) f'(\varepsilon_0) + \ldots + \frac{1}{n!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^n f^{(n)}(\varepsilon_0) + R_{n+1} \qquad (3.1)$$

ve

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta) \qquad (3.2)$$

biçiminde tanımlı olur.

Burada ζ noktası ε_0 ve ε arasındaki herhangi noktadır. Burada $f(\varepsilon)$ fonksiyonuna $(n+1)$ terimli Taylor serisi yardımıyla yaklaşıldığında R_{n+1} hata formülü yardımıyla bu yaklaşımdaki hata belirlenmektedir.

Bazı fonksiyonların $x = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımlarını gösterelim. [4-15]

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!},$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \ldots,$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \ldots, \quad \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots,$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \ldots, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots,$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$$

$$\tanh(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

Teorem 3.1. $f(\varepsilon)$ ve $0(\varepsilon)$ fonksiyonlarını ele alalım. Eğer $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ iken $f = \phi + 0(\phi)$ oluyorsa $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ iken $\phi(\varepsilon)$, $f(\varepsilon)$'a bir asimptotik yaklaşımdır denir. Bu durumda $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ iken $f \sim \phi$ deriz. Yani hatanın yaklaşım fonksiyonundan daha yüksek mertebeden olması durumunda ε_0'a yakın ε için $\phi(\varepsilon)$'nun $f(\varepsilon)$'a bir yaklaşım olarak sunulmasıdır. Bu durumda $\phi(\varepsilon)$'nun sıfırdan farklı ve ε_0'a yakın olduğu yerde $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)}$ kullanılabilir.

$\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 1$ ise $\varepsilon \to \varepsilon o^+$ iken $f \sim \phi$ dir. Dolayısıyla f ve ϕ fonksiyonları asimptotik olarak özdeştir [15].

Örnek 3.2 $f = \sin(\varepsilon)$ ve $\varepsilon_0 = 0$ olsun. $f(\varepsilon)$'nun $\varepsilon = 0$ dolaylarında Taylor serisi açılımını kullanalım ve f fonksiyonunu elde edelim.

$$f = \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 \cos(\zeta)$$

Bu durumda 3 tane asimptotik yaklaşım elde edilir.

1) $f \sim \varepsilon$

2) $f \sim \varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^3$

3) $f \sim \varepsilon + 2\varepsilon^2$

Örnek 3. 3.

$$\frac{1}{15+2x^3} \sim \frac{1}{2x^3} |x| \to \infty \text{ dur.}$$

Teorem 3.1.1. kullanılarak bunu göstermek zor değildir.

Örnek 3.4. $\sin(5x)$, $x \to 0$ olduğu da Teorem 3.1 kullanılarak kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.5. $f(\varepsilon)$ ve $\varphi(\varepsilon)$ fonksiyonları $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$ aralığı üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve bu aralıkta $\varphi'(\varepsilon) \neq 0$ olsun. Ayrıca $-\infty \leq A \leq \infty$ olmak üzere $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)} = A$ olsun. Böylece; $f \to 0$ ve $\varphi \to 0$ ya da $\varphi \to \infty$ özellikleri sağlanıyorsa $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = A$ olur [16].

Not 3.6. Sadece ε'a bağlı $f(\varepsilon)$ fonksiyonunu ele alalım. $\varepsilon \to 0$ iken $f(\varepsilon)$ limitini araştıralım. $f(\varepsilon)$ limiti mevcutsa bu durumda üç ihtimal vardır. $\varepsilon \to 0$ ve $0 < |A| < \infty$ için

$f(\varepsilon) \to 0$

$f(\varepsilon) \to A$

$f(\varepsilon) \to \infty$

olur. $f(\varepsilon) \to 0$ ve $f(\varepsilon) \to \infty$ limitlerindeki oran, test fonksiyonu denilen belirli bir fonksiyonla karşılaştırılarak ifade edilir. Bu test fonksiyonlarının bazıları

$\ldots\ \varepsilon^{-n}, \ldots\ \varepsilon^{-2}, \ \varepsilon^{-1}, \ 1, \ \varepsilon, \ \varepsilon^2, \ \ldots\ \varepsilon^n, \ \ldots$

fonksiyonlarıdır. Bazı durumlarda

$\log \varepsilon^{-1}, \ \log\left(\log \varepsilon^{-1}\right), \ e^{\varepsilon^{-1}}, \ e^{-\varepsilon^{-1}}$

ile desteklenmelidir. Buna benzer olarak $\sin\varepsilon$, $\cos\varepsilon$, $\tan\varepsilon$, $\sinh\varepsilon$, $\cosh\varepsilon$, $\tanh\varepsilon$ test (gauge) fonksiyonları olarak düşünülebilir. $f(\varepsilon)$ fonksiyonunun davranışı $\varepsilon \to 0$ iken $g(\varepsilon)$ test fonksiyonu ile karşılaştırılır. Bu karşılaştırmalar Landau sembolleriyle gösterilir. Bunlar o ve O sembolleridir.

Tanım 3.7. $-\infty < A < \infty$ olmak üzere $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \dfrac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = A$ oluyorsa bu durum $\varepsilon \to \varepsilon_0$ için $f = 0(\varphi)$ şeklinde ifade edilir. Buradaki "f fonksiyonuna φ fonksiyonunun büyük O'sudur" denir.

Tanım 3.8. $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \dfrac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)} = 0$ ise $\varepsilon \to \varepsilon_0$ için $f = o(\varphi)$ şeklinde ifade edilir. Burada $\varepsilon \to \varepsilon_0$ için f fonksiyonuna φ fonksiyonunun küçük o'sudur denir.

Örnek 3.9.

$x \to \infty$ için $(2x+3) = (4x^2 - 6)$ eşitliğini ele alalım.

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = 4x^2 - 6$$

şeklinde alınır. Tanım 3.8 kullanılırsa

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{4x^2 - 6} = 0$$

elde edilir.

Örnek 3.10. $x \to 0$ için $(1 - \cos 2x)^2 = O\left(x^2 \cdot \sin^2(3x)\right)$ eşitliği ele alınsın.

$$f(x) = (1 - \cos 2x)^2$$

ve

$$g(x) = x^2 \cdot \sin^2(3x)$$

alınıp Tanım 3.7 göz önüne alınırsa

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)^2}{x^2 \cdot \sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left[1-\left(1-2\sin^2 x\right)\right]^2}{x^2 \cdot \sin^2(3x)}$$

ve

$$\lim_{x\to 0} \frac{4\sin^4 x}{x^2 \cdot \sin^2(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x^4}{9x^4} = \frac{4}{9} = A$$

olup $-\infty < A < \infty$ özelliği sağlanmış olur.

*Örnek 3.11***.**

1) $f = \varepsilon^2$ olduğunu varsayalım. Aynı zamanda $\phi_1 = \varepsilon$ ve $\phi_2 = -3\varepsilon^2 + 5\varepsilon^6$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bu durumda;

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0{}^+} \frac{f}{\phi_1} = 0 \Rightarrow f = o\left(\phi_2\right)$$

$$\lim_{\varepsilon\to\varepsilon_0{}^+} \frac{f}{\phi_2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow f = O\left(\phi_2\right)$$

2) $f = \varepsilon \sin\left[1+\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ ve $\phi = \varepsilon$ ise $\varepsilon > 0$ için $|f/\phi| \le 1$ dir. Bu yüzden $f = 0(\phi)$ dir.

3) $f(\varepsilon) = \sin(\varepsilon)$ fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda Taylor serisine açarsak $f = \varepsilon - \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin(\zeta)$ ifadesini elde ederiz. Buradan $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0^+} (f/\varepsilon) = 1$ elde edilir. Buda bize $f = O(\varepsilon)$ olduğunu gösterir.

4) $f(\varepsilon)=e^{-1/\varepsilon}$ L' hospital kuralını uygulayarak α'nın bütün değerleri için $f=o(\varepsilon^{a})$ dır [29].

Tanım 3.12. $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ bir dizi düşünelim. Limit gösteriminin $\lim_{n\to\infty} f(n)$ olduğunu biliyoruz. Eğer sınır mevcutsa $\lim_{n\to\infty} f(n)=f\in R$ olarak gösterilir ve aşağıdaki tanımı veririz. $\varepsilon>0$ verildiğinde herhangi bir $n\geq n_0(\varepsilon)$ için $|f(n)-f|<\varepsilon$ gibi bir $n_0(\varepsilon)$ vardır. Buradaki tanım $f(n)$ nin $n\to\infty$ için bilgi verir ancak $f(n)$ nin f ye yaklaşım biçimi ile ilgili değildir.

Dizi yöntemini daha kesin bir şekilde ifade etmek için başka tanıma ihtiyacımız vardır. Buda Bachmann – Landau gösterimidir.

$\varepsilon\to 0$ için $f(\varepsilon)=o(g(\varepsilon))$ ε parametresine bağlı olan reel sayıların iki fonksiyonunu düşünelim. Eğer pozitif c ve ε_0 sabiti varsa $(0,\varepsilon_0]$ aralığında $\varepsilon>0$ için $|f(\varepsilon)|\leq C|g(\varepsilon)|$ dir. $f(\varepsilon)=0(g(\varepsilon))$ ve $\varepsilon>0$ için $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}=0$ olur. $f(\varepsilon)=0(g(\varepsilon))$ ise $f(\varepsilon)=O_s(g(\varepsilon))$ olur. $f(\varepsilon)\neq O(g(\varepsilon))\varepsilon\to 0$ olduğundan E, ε bağlı fonksiyondur. Kesinlikle $(0,\varepsilon_0]$ da pozitif ve sürekli ve $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)$ varlığı ve eğer her δ_1, $\delta_2\in E$ için δ_1, $\delta_2\in E$ olursa bu kuralı sağlayan fonksiyona "dizi fonksiyonu" denir.

Bu alanda tanımlanan $\phi(x,\varepsilon)$ ve $\phi_\alpha(x,\varepsilon)$ verilen Ω, farkları asimptotik olarak $\delta(\varepsilon)$ dan daha küçükse $\delta(\varepsilon)$ sırasıyla asimptotik olarak özdeştir. Burada $\delta(\varepsilon)$ bir dizi fonksiyonudur. Yani,

$$\phi(x,\varepsilon)-\phi_\alpha(x,\varepsilon)=o(\delta(\varepsilon))$$

dir. Burada ε, küçük bir parametredir.

Tanım 3.13. Dizi fonksiyonu δ_n dizisi için $\forall n$, $\delta_{n+1} < \delta_n$ ise asimptotik dizidir. Bu tanımda n ve ε^{a_n} bir asimptotik dizide olması durumunda ε^{a_n} ifadesi eğer $\forall n$, $a_{n+1} > a_n$ dışındaki bir asimptotik dizi olamayacak şekilde bir pozitif veya sıfır tamsayısıdır. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} \frac{\delta_n + 1}{\delta_n} = 0$ özelliğinin sağlanması gerekir.

Tanım 3.14. Mertebe fonksiyonlarının $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine, $\in \to 0$ iken $\delta_{n+1}(\varepsilon) = O(\delta_n(\varepsilon))$ şartı sağlanıyorsa asimptotik dizi denir.

Not 3.15 E kümesinde $\delta_1 \approx \delta_2$ yaklaşımı r ye denk olsun. Bu durumda aşağıdaki üç özellik sağlanır.

a) Yansıma $\delta \approx \delta$

b) Simetri, $\delta_1 \approx \delta_2$ gerektirir $\delta_2 \approx \delta_1$

c) Geçişlilik, $\delta_1 \approx \delta_2$ ve $\delta_2 \approx \delta_3$ ise $\delta_1 \approx \delta_3$

Daha sonra denklik sınıfları $\overline{E} = E / r$ için belirlenmiş $\overline{E}$ tanımlamak mümkündür. Bir fonksiyonun dizisini değerlendirmek gerektiğinde, denklik sınıfının bir temsilcisinin seçimi, mantık meselesidir aynı zamanda sezgiselliktir. Pratikte temel fonksiyonlar tarafından üretilen E alt kümeleri dikkate alınır. Açıkçası, fonksiyonların alt kümesini belirlemek için böyle bir yol seçilmiştir.

Örnek 3.16.

- E_0, ε^n tarafından üretilen alt küme, burada n bir tamsayıdır.
- E_1, ε^a tarafından üretilen alt küme, burada a rasyonel
- E_2, $\varepsilon^a \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\beta}$ tarafından üretilen alt küme $\beta \neq 0$ dır.

Tanım 3.17. Bir Gauge fonksiyonu, denklik sınıfının temsilcisi olarak seçilen bir dizi fonksiyonudur.

Eğer δ_n ve Δ_n, $\forall_n f_n \approx \Delta_n$ olmak üzere iki asimptotik dizi ise, bu iki dizi asimptotik olarak denktir. Denklik sınıfının temsili kavramı bu tanımda mevcuttur. Örneğin,

$$\varepsilon^n, \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n, (\sin\varepsilon)^n$$

dizilerinin üçü de asimptotik olarak denk dizidir. Sınıfının temsilcisi olarak E_0 seçersek, E_0 da asimptotik açılımın etkileri vardır.

Bu benzerlik, asimptotik eşleme ilkesinin uygulanmasında önemlidir. Hardy tarafından aktarılan Du Bois – Reymond'un teoremini yazalım.

Teorem 3.18. Herhangi bir asimptotik dizi göz önüne alındığında $\forall_n$, $\delta_n < \delta_n$ olmak üzere sonsuz dereceden $\delta*$ fonksiyonları vardır. Bu durumda $\delta*(\varepsilon)$ dizisinin herhangi bir fonksiyonu, δ_n dizisine göre sıfıra asimptotik olarak denktir [18].

Not 3.19. $\delta_n = \varepsilon^n$ dizisi ile $\delta*(\varepsilon) = e^{-\alpha/\varepsilon}$ $\alpha > 0$ herhangi bir dizi fonksiyonu, asimptotik olarak sıfıra denktir. Aynı şekilde, $\delta_n(\varepsilon) = [\ln(1/\varepsilon)]^{-n}$ dizisi ile $\delta*(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha}$ $\alpha > 0$ dizisi de asimptotik olarak sıfıra denktir.

Tanım 3.20. Asimptotik bir açılımda, sıfıra denk olan dizi fonksiyonlarına genellikle transandantal küçük terimler (TST) denir.

Çoğu zaman TST gösterimi ε^n tarafından üretilen alt küme E_0'a göre sıfıra denk gelen dizi fonksiyonları ile sınırlandırılmıştır. Burada n bir tamsayıdır. EST gösterimi üstel olarak küçük terimler, E_0, E_1 ve E_2 alt gruplarına ayrılmıştır [19].

Örnek 3.21. $\phi_m(\varepsilon) = \exp\left(\frac{-m}{\varepsilon}\right)$, m = 1, 2, 3, .. fonksiyon dizisi $\varepsilon \to 0$ için bir asimptotik dizidir. Buradan

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\phi_{m+1}}{\phi_m}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\exp\left[\frac{-(m+1)}{\varepsilon}\right]}{\exp\left(\frac{-m}{\varepsilon}\right)}=\lim_{\varepsilon\to0}\exp\left(\frac{-1}{\varepsilon}\right)=0$$

elde edilir. Bu ise dizinin asimptotik olduğunu gösterir.

Örnek 3.22. Kullanılabilir ölçek ya da Gauge fonksiyonlarını şu şekilde verebiliriz.

1) $\alpha<\beta<\gamma\cdots$ ve $\varepsilon\to\varepsilon o^{+}$ için

$$\phi_1=(\varepsilon-\varepsilon o)^{\alpha}$$

$$\phi_2=(\varepsilon-\varepsilon o)^{\beta}$$

$$\phi_3=(\varepsilon-\varepsilon o)^{\gamma}$$

$$\vdots$$

elde edilir.

2) $\varepsilon\to0^{+}$ için

$$\phi_1=1$$

$$\phi_2=e^{-1/\varepsilon}$$

$$\phi_3=e^{-2/\varepsilon}$$

$$\vdots$$

dir.

Tanım 3.23. Eğer $\varphi(x,\varepsilon)$ ve $\varphi_1(x,\varepsilon)$ kapalı ve sınırlanmış bir olan *D*’de ve $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ aralığında iki sürekli fonksiyon ise

$\varphi=Os(\delta_1)$ ve $\varphi_1=Os(1)$

$\varphi=\delta_1\varphi_1+o(\delta_1)$ ve *D*’de

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\frac{\varphi(x,\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}-\varphi_1(x,\varepsilon)\right|=0$$

elde edilir. Tam olarak bu şekilde φ ve $\delta_1\varphi_1$ fonksiyonlarının asimptotik olarak denk (eşit) olduğu kabul edilir. Bunun sonucunda *D* alanında [20].

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(x,\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}=\varphi_1(x)$$

elde edilir. Bunun sonucunda φ nin asimptotik yaklaşımı olarak

$$\varphi(x,\varepsilon)=\delta_1(\varepsilon)\varphi_1(x)+o(\delta_1)$$

yazılabilir. Bu özelliğe sahip φ fonksiyonu regülerdir.

Not 3.24. Burada $\varphi=Os(\delta_1)$ ve $\varphi_1=Os(1)$ Buradaki φ ve φ_1 fonksiyonları tanımlı olduğu alanda sınırlıdır [10].

4. BÖLÜM

ASİMPTOTİK AÇILIM

4.1. Asimptotik Açılıma Giriş

$f(x,\varepsilon)$, $D_x(O,\varepsilon_0]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $\varepsilon \to 0$ iken $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$ bir asimptotik dizi olsun. $g_N(x)$ fonksiyonu ve $x_o \in D \subset R^n$ de sonlu $\{a_n(\varepsilon)\}_{n=0}^{N}$ fonksiyonları $\varepsilon \to 0$ iken

$$f(x_o,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x_a)\delta_n(\varepsilon) + g_N(x_o)o(\delta_N(\varepsilon)) \tag{4.1}$$

olacak şekilde mevcut ise bu durumda sağ tarafta "$\varepsilon \to 0$ iken $x_a \in D$'de $\delta_n(\varepsilon)$ mertebesinde $f(x,\varepsilon)$ nun asimptotik açılımı" denir [21].

Tanım 4.1.1. ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... fonksiyonları verilsin. $m < n$ için $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ iken $\phi_n = o(\phi_m)$ oluyorsa bu fonksiyonlara iyi sıralanmış dizi ya da asimptotik dizi denir.

Tanım 4.1.2. Eğer ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ... asimptotik dizi sadece ve sadece $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ iken

$$f = \sum_{k=1}^{m} a_k\phi_k(\varepsilon) + o(\phi_m) \qquad (m = 1, 2, ..., n)$$

şeklinde asimptotik açılıma sahiptir. $\varepsilon \to \varepsilon_0^+$ için

$$f \sim a_1\phi_1(\varepsilon) + a_2\phi_2(\varepsilon) + ... + a_n\phi_n(\varepsilon)$$

olur. ϕ_k'lara ölçek ya da Gauge fonksiyonları denir.

Şimdi ise $f(\varepsilon)$ fonksiyonuna ait asimptotik açılımı üç şekilde bulabiliriz.

1) Taylor teoremi

2) L' hospital kuramı

3) Tahmin

Tahmin yöntemi sezgisel olarak anlaşılır ve şansa da bağlıdır ancak Taylor teoremi ve L' hospital kuramı daha rutin ve örneklerle gösterilebilir [15].

Örnek 4.1.3.

1) e^{ε} nun ilk üç adımı Taylor serisi yardımıyla bulalım.

$$e^{\varepsilon} = 1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\varepsilon^3+\ldots$$

$$e^{\varepsilon} \sim 1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

2) $f(\varepsilon)=\dfrac{\cos(\varepsilon)}{\varepsilon}$ fonksiyonu için 2 terimli asimptotik açılım aransın. $\varepsilon=0$ için fonksiyon tanımsız olduğundan Taylor teoremini kullanamayız. Bu nedenle tanımsızlık yapan kısmı yok sayıp $\varepsilon=0$ için Taylor serisini ararız. Böylece;

$$f(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2+\ldots\right) \sim \frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2}\varepsilon$$

elde edilir.

3) $f(\varepsilon)=\cos\varepsilon$ fonksiyonu için 3 terimli asimptotik açılım alalım.

$$\cos\varepsilon = 1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}-\frac{\varepsilon^6}{6!}+\ldots$$

$$\cos\varepsilon \sim 1-\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^4}{4!}$$

elde edilir.

4) $f(\varepsilon)=\sin\varepsilon$ fonksiyonu için 3 terimli asimptotik açılım alalım.

$$\sin\varepsilon=\varepsilon-\frac{1}{3!}\varepsilon^3+\frac{1}{5!}\varepsilon^5-\frac{1}{7!}\varepsilon^7+\ldots$$

$$\sin\varepsilon\sim\varepsilon-\frac{\varepsilon^3}{3!}+\frac{\varepsilon^5}{5!}$$

elde edilir.

5) $\sin\left(e^{\varepsilon}\right)$ nun ilk üç terim açılımını bulalım. Öncelikle $\alpha=0$ için $\sin(1+\alpha)$ ifadesini Taylor serisine açalım.

$$\sin(1+\alpha)=\sin(1)+\alpha\cos(1)-\frac{1}{2}\alpha^2\sin(1)+\ldots$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\sin\left(e^{\varepsilon}\right)&=\sin\left(1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\varepsilon^3+\ldots\right)\\&=\sin(1)+\left(\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\ldots\right)\cos(1)-\frac{1}{2}(\varepsilon+\ldots)^2\sin(1)+\ldots\\&\sim\sin(1)+\varepsilon\cos(1)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\cos(1)-\sin(1)\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Regüler ve Genelleştirilmiş Asimptotik Açılım

Regüler fonksiyonun asimptotik yaklaşımı, φ_1 sadece x' e bağlı olduğundan φ fonksiyonundan daha kolaydır. Daha kesin olarak, bir asimptotik açılımın her adımı, regüler bir asimptotik yaklaşımının belirlenmesinden oluşur, karşılık gelen asimptotik açılım regüler olarak adlandırılır. Regüler olmayan bir asimptotik açılım non-regüler olarak adlandırılır. Bununla birlikte, diğer kavramlarla karşılığı önlemek için genelleştirilmiş açılım terimleri tercih edilir. Kesinlikle niteleyici olarak genelleştirmek gerekli değildir ancak sıklıkla bir asimptotik açılımın mutlaka regüler olduğu düşünülmektedir.

Genelleştirilmiş asimptotik açılımların bir örneği

$$\varphi(x,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{m}\delta_n(\varepsilon)\varphi_n(x,\varepsilon)+O_s\left[\delta_{m+1}(\varepsilon)\right]$$

dir.

Örnek 4.2.1. $\varphi=\dfrac{1}{1-\varepsilon x}$ fonksiyonu genelleştirilmiş asimptotik açılıma sahiptir.

$$\varphi=1+\sum_{n=0}^{m}\varepsilon^{2n+1}x^{2n+1}(1+\varepsilon x)+O\left(\varepsilon^{2m+3}\right)$$

m. terim için regüler asimptotik açılım, aşağıdaki ifade geçerlidir.

$$\forall h<m,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi(x,\varepsilon)-\sum_{i=1}^{h}\delta_i(\varepsilon)\varphi(x)}{\delta_{h+1}(\varepsilon)}=\varphi_{h+1}(x)$$

m. terim regüler asimptotik açılım, ayrıca Poincare açılımı olarakta adlandırılan form aşağıdaki gibidir.

$$\varphi(x,\varepsilon)=\sum_{n=1}^{m}\delta_n(\varepsilon)\varphi_n(x)+o\left[\delta_m(\varepsilon)\right]$$

Örnek 4.2.2. $\varphi=\dfrac{1}{1-\varepsilon x}$ fonksiyonu regüler asimptotik açılama sahiptir. Regüler açılımda aynı fonksiyon içi açılım için

$$\varphi(x,\varepsilon)=\delta_1(\varepsilon)\varphi_1(x)+o\left(\delta_1\right)$$

ve

$$\varphi(x,\varepsilon)=\bar{\delta}_1(\varepsilon)\bar{\delta}_1(x)+o\left(\bar{\delta}_1\right)$$

olup

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{\delta}_1(\varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)}=c \text{ ve } \varphi_1(x)=c\,\bar{\delta}_1(x)$$

elde edilir.

Burada c sonlu, sıfır olmayan bir sabittir. Asimptotik açılımların tek olmaması bununla ilgilidir. Açıkçası asimptotik dizi, bir dizi fonksiyonunda seçilirse, bir dizi mertebe fonksiyonda değil, bir seçim gerektirir.

Örnek 4.2.3. [16] $\varphi(x,\varepsilon)=\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}x\right)^{-1}$ fonksiyonun ele alalım. İki regüler asimptotik açılım vardır.

$$\varphi(x,\varepsilon)=1+\sum_{n=1}^{m}\delta_n(\varepsilon)x^n+o\left[\delta_m(\varepsilon)\right]$$

ile

$$\delta_n(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^n$$

ve

$$\varphi(x,\varepsilon)=1+\sum_{n=1}^{m}\sum\nolimits^{n}x(x-1)^{n-1}+o\left[\varepsilon^m\right]$$

elde edilir.[11]

Tanım 4.2.4.

$f(x_0,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N} a_n(x_o)\delta_n(\varepsilon)+g_N(x_o)o(\delta_n(\varepsilon))$ ifadesi her $x\in D$ ve herhangi pozitif *N* tamsayısı için geçerli ise bu durumda

$$f(x,\varepsilon)\approx\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon),\ x\in D,\ \varepsilon\to 0$$

yazılır ve sağ taraftaki sonsuz saniye "$\varepsilon\to 0$ iken *D*'de $\delta_n(\varepsilon)$ asimptotik dizisine göre $f(x,\varepsilon)$'nun asimptotik serisi" denir. Bu seriler asimptotik yakınsaktır denir [15].

Tanım 4.2.5. $f(x_0,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N} a_n(x_o)\delta_n(\varepsilon)+g_N(x_o)o(\delta_N(\varepsilon))$ (4.2)

ifadesi her $x\in D$ için geçerli ve $g_N(x)$ belirli K_N sayısıyla D'de düzgün sınırlı ise, (4.2.) ifadesi her $x\in D$ için $\varepsilon\to 0$ iken

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\delta(\varepsilon)+o(\delta(\varepsilon))$$

olarak yazılabilir ve $f(x,\varepsilon)$'nun asimptotik açılımı, $\delta_n(\varepsilon)$ mertebesinde D'de düzgün geçerlidir. (4.2) in her $x\in D$ ve her N doğal sayısı için geçerli $g_N(x)$'in D'de belirli bir K sayısıyla düzgün sınırlı olması durumunda, $f(x,\varepsilon)\approx\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon)$, $x\in D$, $\varepsilon\to 0$ asimptotik eşitliği düzgün geçerlidir ve sonsuz serisine $\varepsilon\to 0$ iken D'de $\delta_N(\varepsilon)$ asimptotik dizisine göre $f(x,\varepsilon)$ asimptotik serisi denir. $\{\delta_n(\varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}=\{\varepsilon^n\}_{n=0}^{\infty}$ özel durumunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\varepsilon^n$ asimptotik serisine $x\in D$ noktasında $f(x,\varepsilon)$ fonksiyonun Poincere açılımı denir. $x\in D$ ye göre düzgün,

$$f(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\delta_n(\varepsilon),\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_0$$

serisinin mutlak düzgün yakınsaklığının, bu serininde $f(x,\varepsilon)$ için düzgün asimptotik seri olmasını temin ettiği görülmektedir (De Jager ve Furu ,1996)

4.3. Yakınsama ve Tamlık

$\varphi(\varepsilon)$ fonksiyonunun asimptotik açılımının iyi bilinen bir örneği, ε küçük olduğunda Taylar serisi açılımından elde edilebilir. $\varepsilon=0$ için m kere sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonun $(m+1)$. teriminin asimptotik açılımı

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi(O)+\varepsilon\varphi'(O)+\ldots+\varepsilon^m\frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}+O_s\left(\varepsilon^{m+1}\right)$$

Eğer m sonsuza giderse, yakınsak veya ıraksak olabilen bir dizi elde edilir. Eğer seri yakınsak ise, açılımı verilmiş fonksiyona yakınsamayabilir. Aslında asimptotik açılımlar bir diziden farklıdır. Bir dizinin sonsuz sayıda terimi bulunurken, bir asimptotik açılımın sonlu sayıda terimi vardır. Bir asimptotik açılım sonsuz sayıda terime olabilir. (bu durumda asimptotik bir serimiz var), ancak bu durumun serinin yakınsaklığının $\varepsilon=0$ olması durumunda bir ilgisi yoktur.

Örnek 4.3.1. Üstel fonksiyonun Taylor seri açılımı

$$e^{\varepsilon}=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon^m}{m!}+\ldots$$

Bu asimptotik seri ε'nun herhangi bir değeri için yakınsar.

$$f=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\ldots+\frac{\varepsilon^m}{m!}+O_s\left(\varepsilon^{m+1}\right)$$

asimptotik açılımı $\varepsilon=0$ için geçerlidir, ancak başka bir yerde geçerli değildir.

Örnek 4.3.2.

$f(x,\varepsilon)$ fonksiyonunu

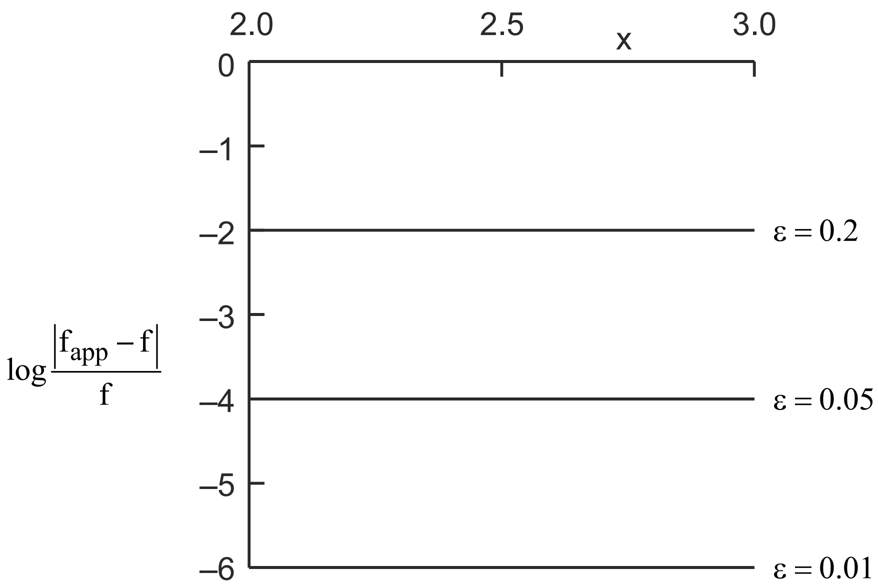
$$f(x,\varepsilon)=e^{-x/\varepsilon}+e^{-\varepsilon x} \quad 2\le x\le 3 \tag{4.3}$$

olarak düşünelim. Bu fonksiyonun asimptotik açılımı, serinin ilk üç teriminin alınmasıyla elde edilir.

$$f_{app}=1-\varepsilon x+\varepsilon^2\frac{x^2}{2} \tag{4.4}$$

$$g(x,\varepsilon)=1-\varepsilon x+\varepsilon^2\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^m\varepsilon^m\frac{x^m}{m!}+\ldots$$

Şekil 4.1. farklı ε değerleri için $\log\frac{|f_{app}-f|}{f}$ fonksiyonunu göstermektedir. f_{app} yaklaşımına bağlı hata, $\varepsilon\to 0$ olarak sıfıra gider.



Şekil 4.1. Asimptotik bir yaklaşım örneği

Asimptotik bir yaklaşım örneği, Eğriler ε'nun farklı değerleri için $\log\frac{|f_{app}-f|}{f}$ fonksiyonunu verir. f ve f_{app} fonksiyonları (4.3) ve (4.4) ile verilir.

$g(x,\varepsilon)$ serisinin x ve ε'nun tüm değerleri için yakınsak olduğu, ancak $f(x,\varepsilon)$ yakınsamadığı belirtilmiştir.

$$g = e^{-\varepsilon x}$$

vardır. g serisi f'nin $\varepsilon \to 0$ olarak alınan asimptotik bir yaklaşımıdır. Bunun nedeni f fonksiyonunun $e^{-x/\varepsilon}$ terimi, $\varepsilon \to 0$ için bir EST dir ve x sabittir aynı zamanda pozitiftir. Daha genel olarak, bir asimptotik seride $\varepsilon \to 0$ ve $m \to \infty$ sınırlarının gidip gelmeyeceği mümkündür. Bu asimptotik bakış açısından yakınsak olarak düşünülebilen, farklı serilerin önemli bir özelliğidir. ε yeterince küçük olmak yeterlidir. Bir dizi ıraksaksa, tutulan terimlerin sayısı daha büyük olduğunda ε küçük olarak düşünülmelidir.

Bu anlamda çelişkiye neden olur, dizinin farklı olması durumunda açılımın ilk şartlarında yer alan bilgiler daha eksiksizdir. Paradoksu abartarak, farklı dizilerin yakınsak serilere göre daha hızlı birleştiği söylenebilir [22].

Örnek 4.3.3. Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım.

$$f = \frac{1}{x} - \frac{df}{dx} \tag{4.5}$$

Bunun çözümü, $x_0 > 0$ ile,

$$f = e^{-1/\varepsilon}\int_{x_0}^{1/\varepsilon}\frac{e^t}{t}dt \tag{4.6}$$

dir. Asimptotik açılımı, $\varepsilon \to 0$ iken

$$f_{app} = \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + \ldots + (m-1)!\varepsilon^m \tag{4.7}$$

x_0 'ın herhangi bir değeri için geçerli olan ve dizinin ilk m terimine karşılık gelen ifade

$$g = \varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 + ... + (m-1)!\varepsilon^m + ...$$

Aslında bu dizi ε'nun tüm değerleri için farklıdır. Sabit bir ε değeri için $g \to \infty$, $m \to \infty$ dur.

Şekil 4.1. deki grafik $x_0 = 1$ ve $\varepsilon = 0.1$ ile tam çözüm arasındaki bir karşılaştırmayı ve farklı m değerleri için asimptotik genişlemeyi göstermektedir. Terimlerin sayısı küçükse yaklaşıklık mükemmel olur. Açıkçası, dizi çok farklı olduğunda dizi sayısı büyükse yaklaşım yaklaşık olarak kötüdür. Terimlerin limit sayısı ε değerine bağlıdır. ε azaldıkça bu sayı artar. Sabit bir sayı teriminde, ε küçük olduğunda, yaklaşımı daha iyi olduğu söylenebilir. Ayrıca dizi ayrıktır, çünkü g'nin limiti $m \to \infty$ için sabit bir ε değeri için alınırken, asimptotik açılım m'nin sabit bir değeri $\varepsilon \to 0$ olarak geçerlidir.

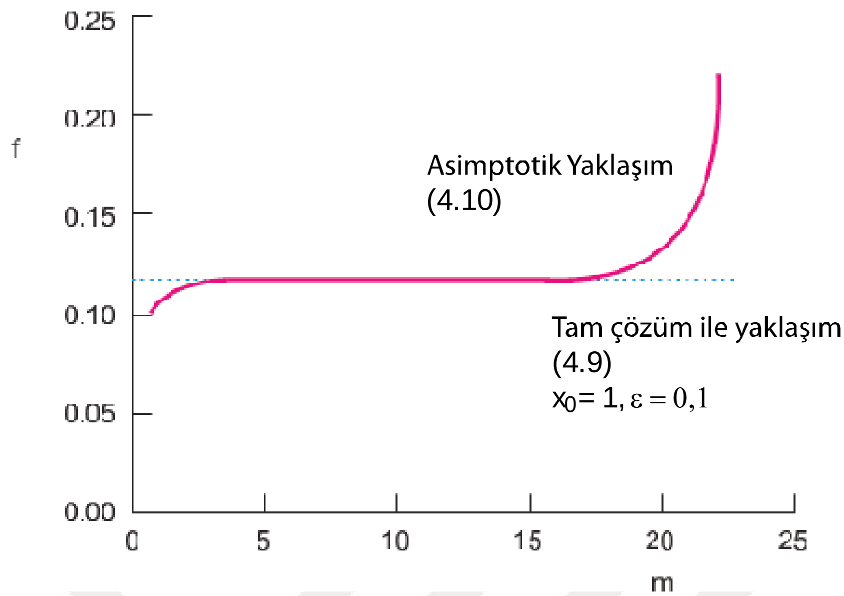
Fiziksel problemler için, asimptotik açılımın özelliği önlenebilir değildir. Bazen iyi bir tahmin, sonucu iyileştirebilir.

$$\sin\varepsilon = \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{6} + O(\varepsilon^5)$$

ve

$$\sin\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2/6} + O(\varepsilon^5)$$

dir. İkinci durumda tek terimle ve ilk durumla iki terimle olduğu gibi aynı doğruluk elde edilir. Bu yakınsaklık iyileştirmeleri uygulamada faydalıdır.



Şekil 4.2. Farklı bir seri ile ilişkili asimptotik yayılım örneği

4.4. Asimptotik Açılımlarda İşlemler

Kısmi türevli denklemlerin yaklaşık bir çözümü arandığında, bilinmeyen fonksiyonların açılımı denklemlerle değiştirilir ve temel işlemlerin geçerli olduğunu varsayıyoruz. [23, 24, 25].

Dizi fonksiyonlarının E özelliğine ve E üzerinde toplam bir düzenin varlığına bağlı olarak, sonuç asimptotik açılımların bölünmesinden ek, çıkarma, çarpma ya da bölünme, daha doğrusu sonuç muhtemelen büyütülmüş bir asimptotik dizilimdir. Bununla birlikte farklılaşma bazı sorunlara neden olabilir. Örneğin;

$$f(x,\varepsilon) = \sqrt{x,\varepsilon}$$

fonksiyonu düşünelim. Burada ε istenen küçük bir parametredir. Bu fonksiyonunun bir asimptotik açılımı

$$f(x,\varepsilon) = \sqrt{x} + o(1)$$

olsun. Bu açılım, $0 \le x \le 1$ alanındaki geçerli bir yaklaşımdır. x'in f'ye göre türevi

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+\varepsilon}}$$

verirken, $\sqrt{x}$ ’in türevi

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

verir. $0\leq x\leq 1$ alanında $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{df}{dx}$ nın asimptotik bir genişlemesidir. Çünkü $\frac{1}{2\sqrt{x}}\to\infty,\ x\to 0$ dır. Buna karşılık, terim entegrasyon terimi, örneğin $x=0$ için

$$\frac{2}{3}(x+\varepsilon)^{3/2}-\frac{2}{3}e^{3/2}=\frac{2}{3}x^{3/2}+0(1)$$

elde edilir. Farklılaşma ile karşılaşılan zorluk, fonksiyonun f’sinin daha iyi bir yaklaşımıyla ortaya çıkan $x=0$ yakınındaki tekillikten kaynaklanmaktadır.

Not 4.4.1. Asimptotik bir açılımın oluşturulması, dizi fonksiyonlarının bir asimptotik sırasının belirlenmesiyle ilişkilidir. Dizi fonksiyonlarını ε olarak alalım. Çoğu kez, bir sorun çıkarsa, dizi fonksiyonlarının seçimi, toplam dizinin tanımlandığı haliyle E’nin bir alt kümesiyle sınırlandırılabilir. Dahası, dizi fonksiyonlarının denklik sınıflarının belli temsilcileri olan Gauge fonksiyonlarının kullanılması uygun olabilir.

Bir asimptotik dizi elde etmek her zaman kolay değildir. Bazı durumlarda dizilim doğal bir şekilde görünür, ancak farklı durumlarda dizilim, asimptotik açılımın oluşturulmasına paralel olarak terimle terim tarafından yapılır. Singüler pertürbasyon problemlerinin analizi için araştırılan SCEM yöntemi asimptotik genişleme kavramına dayanır. Ortak bir kullanım ile elde edilen asimptotik açılım regüler değildir. Aslında SCEM’in önemli bir özelliği, genelleştirilmiş asimptotik açılımları kullanmaktır.

4.5. Diferansiyel Denklemlerde Asimptotik Çözümün Bir Uygulaması

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\varepsilon\frac{dy}{dx}+1=0\,,\ y(0)=0\,,\ y'(0)=1 \tag{4.8}$$

problemini ele alalım. Hava sürtünmesini ele alan atış hareketini ifade eden problemdeki $\varepsilon=\frac{k}{mg}$ ile tanımlıdır. Çözüm için öncelikli olarak

$$y(x)=y_o(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots \tag{4.9}$$

yaklaşımını çözüm kabul edelim ve ifadeyi diferansiyel denkleme uygulayalım. 3 terimli asimptotik yaklaşımı arayalım.

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_o{}'(x)+\varepsilon y_1{}'(x)+\varepsilon^2 y_2{}'(x)+\ldots \\ &= y_o{}'(x)+\varepsilon y_1{}'(x)+\varepsilon^2 y_2{}'(x)+O\left(\varepsilon^3\right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y''(x) &= y_o{}''(x)+\varepsilon y_1{}''(x)+\varepsilon^2 y_2{}''(x)+\ldots \\ &= y_o{}''(x)+\varepsilon y_1{}''(x)+\varepsilon^2 y_2{}''(x)+O\left(\varepsilon^3\right) \end{aligned}$$

elde edilip (4.8) denkleminde yazılırsa;

$y_o{}''(x)+\varepsilon y_1{}''(x)+\varepsilon^2 y_2{}''(x)+\varepsilon y_o{}'(x)+\varepsilon^2 y_1{}'(x)+\varepsilon^3 y_1(x)+1+O\left(\varepsilon^3\right)=0$ olup

$\varepsilon^2\left(y_2{}''(x)+y_1{}'(x)\right)+\varepsilon^1\left(y_1{}''(x)+y_o{}'(x)\right)+\varepsilon^o\left(y_o{}''(x)+1\right)+O\left(\varepsilon^3\right)=0$ elde edilir.

Polinom eşitliği kullanılarak

$$y_2{}''(x)+y_1{}'(x)=0$$

$$y_1{}''(x)+y_o{}'(x)=0$$

$$y_o''(x)+1=0$$

ve başlangıç koşulları da kullanılarak

$$y(0)=0 \Rightarrow y_o(0)+\varepsilon y_1(O)+\varepsilon^2 y_2(O)+O(\varepsilon^3)=O$$

$$\Rightarrow y_o(O)=O,\ y_1(O)=O,\ y_2(O)=O$$

$$y'(0)=1 \Rightarrow y_o'(0)+\varepsilon y_1'(0)+\varepsilon^2 y_2'(0)+O(\varepsilon^3)=1$$

$$\Rightarrow y_o'(0)=1,\ y_1'(0)=0,\ y_2'(0)=O$$

elde edilir. Bulunan bütün değerler tekrardan düzenlenirse

$$\begin{aligned}
O(1) \quad &: \quad y_o''(x)=-1 \\
&\quad\ \ y_o(0)=0 \\
&\quad\ \ y_o'(0)=1 \\
O(\varepsilon) \quad &: \quad y_1''(x)+y_o'(x)=O \\
&\quad\ \ y_1'(0)=0 \\
O(\varepsilon^2) \quad &: \quad y_2''(x)+y_1''(x)=O \\
&\quad\ \ y_2(0)=0 \\
&\quad\ \ y_2'(O)=O
\end{aligned} \tag{4.10}$$

başlangıç değer problemleri elde edilir.

Şimdi bu denklemleri çözersek;

$$y_o = x-\frac{x^2}{2}$$

$$y_1 = \frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

$$y_2=\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24} \tag{4.11}$$

çözümleri elde edilir.

Bu ifadeleri (4.9) yerine yazarsak

$$y(x)\sim\left[x-\frac{x^2}{2}\right]+\varepsilon\left[\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right]+\varepsilon^2\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{24}\right] \tag{4.12}$$

3 terimli asimptotik açılım elde edilir. (4.8) denklemimizin tam çözümü ise;

$$y(x)=\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}\left(1-e^{-3x}\right)-\frac{x}{\varepsilon} \tag{4.13}$$

Tam çözüm ile asimptotik çözümü kıyaslayalım. Bunun için (4.13) denkleminde yer alan $\left(1-e^{-\varepsilon x}\right)$ terimini Taylor seri açılımı ile;

$$\left(1-e^{-\varepsilon x}\right)=\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}+\frac{\varepsilon^3x^3}{3!}-\ldots \tag{4.14}$$

elde edilir. Bunun tam çözümü (4.13) uygulanırsa

$$y(x)=\left[\varepsilon x-\frac{\varepsilon^2x^2}{2}+\frac{\varepsilon^3x^3}{3!}-\ldots\right]\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)-\frac{x}{\varepsilon}$$

$$=\varepsilon^2\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{x^2}{2}+\frac{\varepsilon x^3}{3!}-\ldots\right)\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon^2}\right)-\frac{x}{\varepsilon}$$

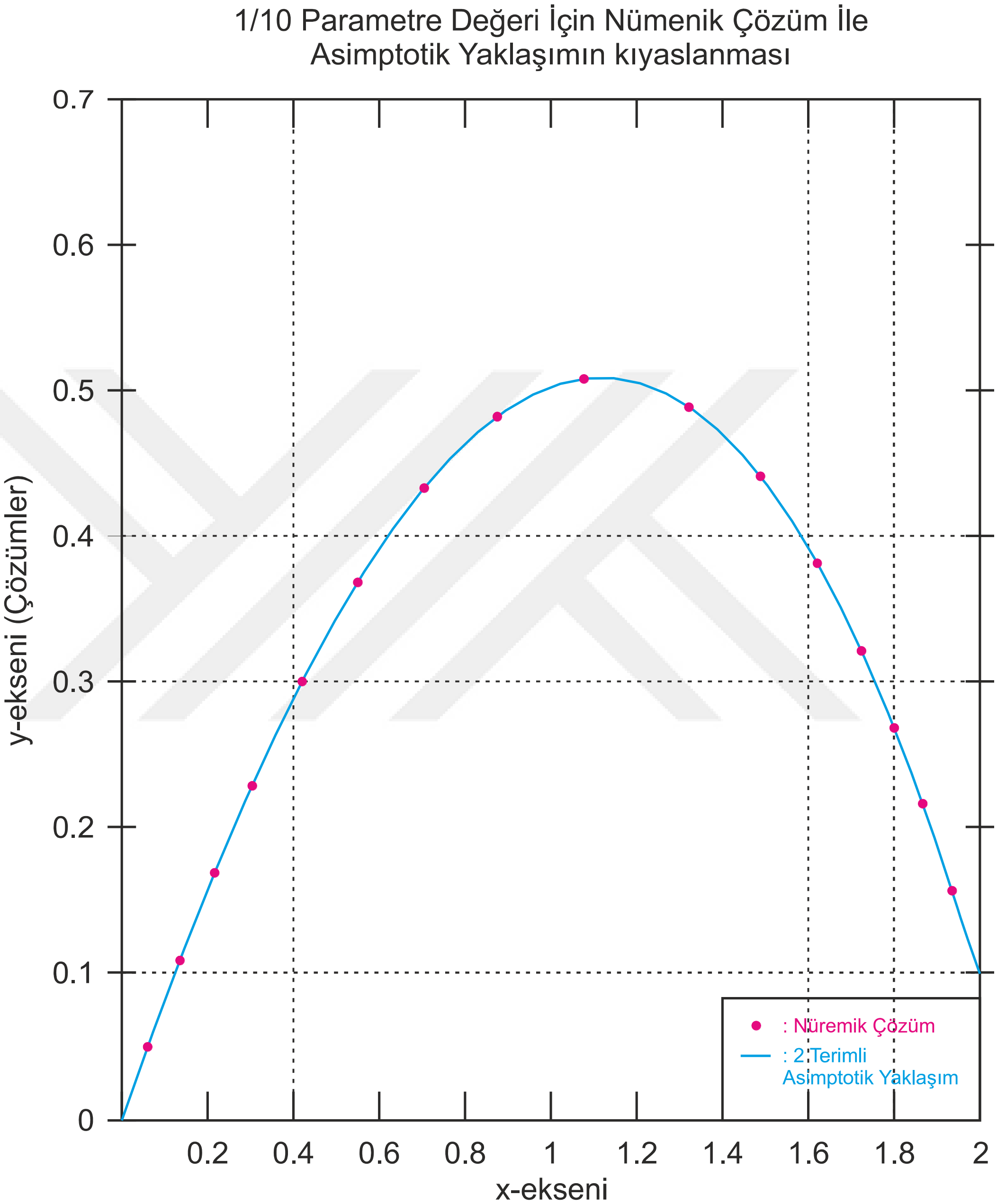
$$=(1+\varepsilon)\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{x^2}{2}+\frac{\varepsilon x^3}{3!}-\ldots\right)-\frac{x}{\varepsilon}$$

$$\frac{x}{\varepsilon}-\frac{x^2}{2}+\frac{\varepsilon x^3}{3!}+\ldots+x-\frac{\varepsilon x^2}{2}+\frac{\varepsilon^2x^3}{3!}+\ldots-\frac{x}{\varepsilon}$$

$$=\frac{-x^2}{2}+\frac{\varepsilon x^3}{3!}+\ldots+x-\frac{\varepsilon x^2}{2}+\frac{\varepsilon^2x^3}{3!}+\ldots$$

$$=\left(x-\frac{x^2}{2!}\right)+\varepsilon\left(\frac{-x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}\right)+O\left(\varepsilon^3\right) \tag{4.15}$$

elde edilir. Asimptotik yöntem kullanılarak tam çözüm elde edilmiş oldu [26].



Şekil 4.3**.** Örnek 4.9.' nin asimptotik ve nümerik çözümlerini kıyaslayan grafik

Ayrıca

$$\varepsilon y''(x)+2y'(x)+2y(x)=0,\ 0<x<1,\ y(0)=0,\ y(1)=1 \qquad (4.16)$$

singüler pertürbasyon problemini ele alınsın. Bu problem regüler açılım ile çözümü olmayan sınır değer problemidir.

$$y(x) \sim y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots \tag{4.17}$$

yaklaşımını ele alalım. Böylece (4.17) yaklaşımının (4.16) problemine uygulanması ile

$$y_1''(x) + 2y_2'(x) + 2y_2(x) = 0, \qquad y_1(0) = 0, \quad y_2(1) = 0$$

$$y_0''(x) + 2y_1'(x) + 2y_1(x) = 0, \qquad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 0$$

$$y_0(x) + y_0'(x) = 0, \qquad y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 1$$

denklemleri elde edilir. Buradaki

$$y_0(x) + y_0'(x) = 0, \qquad y_0(0) = 0, \quad y_0(1) = 1$$

problemi için $y_0(x) = ce^{-x}$ bulunur. Burada y_0 fonksiyonunun bu iki sınır şartı sağlamaz. Dolayısıyla singüler pertürbasyon problemlerini regüler açılım kullanarak çözmek mümkün değildir.

5. BÖLÜM

ARDIŞIK TÜMLER AÇILIM METODU (SCEM)

Bu bölümde MMAE yöntemin işleyişini örnekler üzerinde ayrıntılı olarak incelemek daha açıklayıcı olacaktır. Bunun için öncelikle örnekte Eşleştirilmiş Asimptotik Açılımlar Metodu (MMAE) nin işleyişi üzerinde duruldu ve daha sonra aynı örnek üzerinden devamı olarak Ardışık Tümler Açılım Metodunun (SCEM) işleyişi anlatıldı. Son olarak SCEM yöntemi, tam çözüm ve MMAE ile karşılaştırıldı. Şimdi,

$$\varepsilon y'' + y' = 1 + 2x, \quad 0 \le x < 1$$

$$y(0) = 0, \; y(1) = 1 \tag{5.1}$$

denklemini ele alalım [17].

MMAE YÖNTEMİ

Denklem 2. mertebeden lineer adi diferansiyel denklemdir ve tam çözümünü bulmak zor değildir. $\varepsilon = 0$ için (5.1) denklemi mertebe kaybedecektir. Önceden de bahsedildiği gibi bu tip problemler "singüler pertürbasyon problemi" olarak adlandırılmaktadır. Problemin MMAE ile çözümünde dört adım izlenecek ve tek terimli asimptotik yaklaşım elde edilecek.

Dış Çözüm

$$y(x) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \tag{5.2}$$

şeklindeki asimptotik çözüm benimsenir. Bu yaklaşım (5.1) denklemine uygulanarak

$$\varepsilon\left(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots\right)'' + \left(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots\right)' = 1 + 2x \tag{5.3}$$

denklemi elde edilir.

$$\varepsilon y_0''(x)+\varepsilon^2 y_1''(x)+\varepsilon^3 y_2''(x)+y_0'(x)+\varepsilon y_1'(x)+\varepsilon^2 y_2'(x)+0(\varepsilon^3)=1+2x$$

olup

$$\varepsilon^2\left[y_1''(x)+y_2'(x)\right]+\varepsilon\left[y_0''(x)+y_1'(x)\right]+y_0'(x)+0(\varepsilon^3)=1+2x \qquad (5.4)$$

denklemi elde edilir. Buradan ise; $\varepsilon=0$ için

$$y_0'(x)=1+2x$$

$$y_0'(x)=1+2x \Rightarrow \frac{dy_0}{dx}=1+2x$$

ve

$$dy_0=(1+2x)dx$$

$$y_0(x)=x^2+x+K,\ K\in\mathbb{R} \qquad (5.5)$$

denklemi elde edilir. 2 sınır şartı olmasına rağmen $y_0(x)=x^2+x+K$, $K\in\mathbb{R}$ genel çözümünde yalnız bir tane keyfi sabit bulunmaktadır. Yani verilen yaklaşım $0\le x<1$ aralığının tamamı üzerinde geçerli olacak bir çözüm üretemez. Bu yüzden $x=0$ ya da $x=1$ noktaların birinde farklı bir çözüm anlayışının benimsenmesi gerektiği bir bölgenin (sınır tabaka) varlığıdır. Şimdilik sınır tabaka $x=0$ noktasında olsun. Böylece;

$$y(1)=1\Rightarrow y_0(1)=1\Rightarrow y_0(1)=1^2+1+K=1\Rightarrow K=-1$$

Dolayısıyla;

$$y_0(x)=x^2+x-1 \qquad (5.6)$$

dış bölge çözümü elde edilir.

Sınır Tabaka Çözümü

$x=0$ noktasında sınır tabakayı almıştık. Bun bağlı olarak

$$\bar{x}=\frac{x}{\varepsilon} \quad ... \tag{5.7}$$

dönüşümü ile yani sınır tabaka koordinatları ele alınsın. Bu dönüşüm $x=0$ için $\varepsilon \to 0$ durumunda bölgeyi gerer. Bu yüzden (5.7) dönüşümü "germe dönüşümü" olarak adlandırılır. Dolayısıyla $\bar{x}$ dayanan ve $x=0$ noktasına geçerli olan çözümü $\varphi(\bar{x})$ ile gösteririz. Zincir kuralı yardımıyla;

$$\frac{d}{dx}=\frac{d\bar{x}}{dx}, \frac{d}{d\bar{x}}=\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{d\bar{x}} \quad ... \tag{5.8}$$

elde edilir. (5.8) denklemi (5.1.) denklemine uygulanırsa;

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2y}{d\bar{x}^2}+\varepsilon^{-1}\frac{dy}{d\bar{x}}=1+2\varepsilon\bar{x} \tag{5.9}$$

denklemine dönüşür. Denklem ε ile çarpılırsa

$$\gamma''(\bar{x})+\gamma'(\bar{x})=\varepsilon(1+2\varepsilon\bar{x}) \tag{5.10}$$

elde edilir. Sınır şartı içinse $x=0$ için

$y(0)=0 \Rightarrow \bar{x}=\dfrac{x}{\varepsilon}=0 \Rightarrow \gamma(0)=0$ elde edilir. Burada ise

$$\gamma(\bar{x}) \sim \gamma_0(\bar{x})+\varepsilon^{\lambda}\gamma_1(\bar{x})+...\lambda>0$$

sınır tabaka yaklaşımı benimsenebilir. Bu açılımında (5.9) denklemine uygulanması ile

$\gamma(\bar{x}) \sim \gamma_0(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1(\bar{x})+\varepsilon^2\gamma_2(\bar{x})+...$ denklemi için

$\gamma''(\bar{x})+\gamma'(\bar{x})=\varepsilon(1+2\varepsilon\bar{x})$ denkleminde yerine yazarsak

$$\left(\gamma_0(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1(\bar{x})+\varepsilon^2\gamma_2(\bar{x})+...\right)''+\left(\gamma_0(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1(\bar{x})+...\right)'=\varepsilon(1+2\varepsilon\bar{x})$$

$$\gamma_0''(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1''(\varepsilon)+\varepsilon^2\gamma_2'(x)+\gamma_0'(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1'(\bar{x})+...=\varepsilon(1+2\varepsilon\bar{x})$$

elde edilir ki tek terimli asimptotik açılım elde edilmek istendiğinden $\varepsilon=0$ için

$\gamma_0''(\bar{x})+\gamma_0'(\bar{x})=0$ elde edilir.

Artık problem

$$\gamma_0''(\bar{x})+\gamma_0'(x)=0,\ \gamma(0)=0$$

şeklini almıştır. Bu problemin çözümüyle de $C\in\mathbb{R}$ keyfi sabit olmak üzere

$$\gamma_0(\bar{x})=C\cdot\left(1-e^{-\bar{x}}\right)$$

denklemi elde edilir. Bu çözüm C sabiti içermektedir.

Sonraki adımda C sabiti belirlenmektedir.

Açılımların Eşleştirilmesi

Sınır tabaka çözümü (iç çözüm) $\gamma_0(\bar{x})=C\cdot\left(1-e^{-\bar{x}}\right)$ şeklinde bulunmuştur. $C\in\mathbb{R}$ sabitini belirlemek gerekmektedir. Önceki adımlardaki iç ve dış yaklaşımlar aslında aynı fonksiyona ait farklı bölgelerdeki açılımlardır. $x=0$ noktasında ki sınır tabaka ve $\varepsilon\to 0$ için x sabit tutulursa $\bar{x}=\dfrac{x}{\varepsilon}\to\infty$ olduğu gözönüne alınarak

$$\lim_{x\to 0} y_0(x)=\lim_{x\to\infty}\gamma(\bar{x})$$

eşleme prensibi elde edilir. Dolayısı ile

$$\lim_{x \to 0} x^2 + x - 1 = \lim_{\bar{x} \to \infty} C \cdot \left(1 - e^{-\bar{x}}\right) \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \gamma_0(\bar{x}) = e^{-\bar{x}} - 1$$

bulunur. İç ve dış bölge için geçerli olan 2 farklı çözüm elde edilmiş oldu. Ancak farklı bölgelerde geçerli olan farklı çözümler yerine, tekbir çözümle uğraşacağız.

Birleştirilmiş Çözüm

Bu kısımda amaç $0 \leq x < 1$ aralığında bir tek çözüm elde etmektir. Bunun için iç ve dış çözümü toplayıp, ortak bölgedeki (overlapping region) değerler çıkardık. Böylece bu değerler iki kez sayılmamış oldu.

Yani;

$$y \sim y_0(x) + \gamma_0(\bar{x}) - y_0(0)$$

ya da

$$y \sim y_0(x) + \gamma_0(\bar{x}) - \gamma_0(\infty)$$

durumları birleşik çözümü verecektir. Böylece

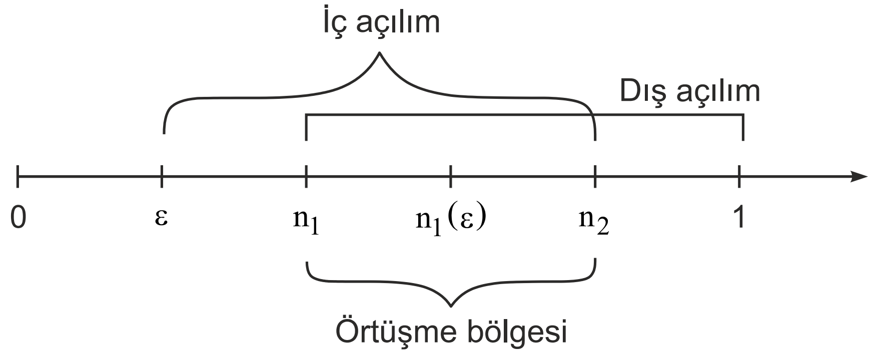
$$y \sim \left(x^2 + x - 1\right) + e^{-\bar{x}} - 1 - (-1)$$

ve buradan da

$$y \sim x^2 + x - 1 + e^{-\bar{x}} \tag{5.11}$$

iç ve dış bölge çözümlerinin ilk terimleri alındı ve tek terimli asimptotik yaklaşım elde edildi. Birleştirilmiş çözüm, iç ve dış çözümün toplanıp, ortak bölgedeki değerlerin çıkarılması ile elde edildi.

(5.1) denkleminin tek terimli birleşik çözümü bile, problemin tam çözümüne denkleminin oldukça yakın bir yaklaşım verilmiştir. Daha hassas çözüm için açılımlarda daha fazla terim kullanmaya ihtiyaç duyulur. Birleşik çözümün nasıl oluşturulduğunu görsel olarak açıklayalım.



Şekil 5.1. Örtüşme bölgesini ifade eden şekil [6]

Şimdi SCEM yöntemi ile (5.1) denkleminin çözümlerini inceleyelim. Öncelikle yöntemi aşama aşama açıklayalım:

Yöntem için ön bilgiler

İkinci mertebeden iki sınır değeri verilen singüler pertürbasyon problemini aşağıdaki biçimde ele alalım.

$$\varepsilon y''(x)+p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=r(x) \quad a\le x\le b$$

Denklemin sınır koşulları $y(a)=\alpha$ ve $y(b)=\beta$. Burada $0<\varepsilon\le 1$, $p(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonlarıdır. Şimdi, $\varepsilon\to 0$ verilen denkleme uygulanırsa,

$$p(x)\cdot y'(x)+q(x)\cdot y(x)=r(x) \quad a\le x\le b$$

denklemi elde edilir. İki tane sınır koşulu olmasına rağmen sadece bir tanesini denkleme uygularız. Ayrıca $\varepsilon\to 0$ olduğundan çözümde hızlı değişiklikler meydana gelir. Değişimlerin meydana geldiği bölge iç çözüm ve dış çözüm denilen tabaka olarak isimlendirilmektedir. $[a,b]$ aralığında tüm x için $p(x)>0$ ise solda ve aralıkta bir sınır tabakası oluşur. Eğer bütün x için $p(x)<0$ ise o zaman aralığın sağ ucunda bir sınır tabakası oluşur.

SCEM yöntemi MMAE nin daha alternatif yöntemi olduğundan bu yöntemlerle elde edilen verileri karşılaştıracağız. Bunun için asimptotik yaklaşımlarla ilgili bazı temel tanımlara göz gezdirdikten sonra, MMAE yöntemini inceleyeceğiz. Sonrasında ayrıntılı olarak Ardışık Tümler Açılım Metodu (SCEM) anlatacağız [27].

SCEM için MMAE

Fonksiyon Ω'da düzenli olmadığından farklı durumlar meydana gelir. Bu yüzden $\phi_a(x,\varepsilon) = E_a\phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(\varepsilon)\gamma_i(x,\varepsilon)$ yaklaşımlarından biri sadece kısıtlanmış bir bölge $\Omega_0 \in \Omega$ dir ve buna "dış bölge" denir. Singüler pertürbasyon problemini ele aldık ve sınır katman alanlarını (sınır değerlerini) tanıttık.

Burada en basit haliyle $\Omega_1 = \Omega - \Omega_0$ olarak belirtilen ve orijin yakınında bulunan bir iç alan adı getirdik. Genel olarak sınır tabakası değişkeni $\bar{x} = \dfrac{x - x_0}{\zeta(\varepsilon)}$ olarak ifade edilir.

Burada x_0, değişimlerin meydana geldiği noktadır ve $\zeta(\varepsilon)$ sınır tabaka kalınlığı ifadesidir. Ω_1'de düzenli bir açılım oluşturur ve aşağıdaki ifade yazılır.

$$\phi_a(x,\varepsilon) = Ei\phi = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{(1)}(\varepsilon)\varphi_i^{(1)}(\bar{x}) \tag{5.12}$$

İç açılım operatörü E_1 ve Ω_1'de dış açılım (genişleme) operatörü E_0 ile aynı sıra $\delta(\varepsilon)$'da tanımlanır.

E_0; böylece $\phi - E_1\phi = o(\delta(\varepsilon))$ ve bu yüzden

$$\phi_a = E_0\phi + E_1\phi - E_1E_0\phi \tag{5.13}$$

Açıkça tek düzen (eşit) geçerli yaklaşımdır [17, 29, 10].

Bu yöntemle MMAE'de iki ayrı bölge için, iki ayrı çözüm bulundu. Daha sonra tüm alan üzerinde UVA elde edildi. Çözümler limit işlemi kullanılarak eşleştirildi. Fakat MMAE'ye ayrılmış tüm çalışmalara rağmen, yöntemin genel bir matematik teorisini formüle etmek mümkün değil. Bu sebeple onu açıklayıcı bir örnek üzerinden inceledik. Bu yüzden, 2. dereceden singüler pertürbasyon problemini ele aldık.

Önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi, ardışık tümler açılım metodunu kullanarak eşleşmeden kurtulabileceğiz. SCEM, MMAE'de kullanılan yöntemin ters çevrilmesi gerektiği fikrine dayanır. İlk olarak, eşit geçerli yaklaşım (Uniformly Valid Approximation – UVA) yapısı kabul edildi ve daha sonra yöntemlerle UVA oluşturuldu[28]. Eşit geçerli SCEM yaklaşımının regüler formu;

$$y_n^{SCEM}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{n}\delta_i(\varepsilon)\left[yi(x)+\varphi_i\left(\bar{x}\right)\right]$$

olup, burada δ_i asimptotik dizidir ve $\varphi_i\left(\bar{x}\right)$, $\bar{x}$ bağlı tamamlayıcı çözüm fonksiyonudur. $y_i(x)$ fonksiyonları MMAE tarafından bulunan dış çözüm yaklaşım fonksiyonudur ve yalnızca x'e değil ε bağlıdır. $y_i(x)$ ve $\varphi_i(x)$ fonksiyonları ε bağlıdır ve genelleştirilmiş SCEM yaklaşımı olarak adlandırılan, düzgün geçerli SCEM yaklaşımı aşağıdaki gibidir [29].

$$y_{ng}SCEM\left(x,\ \bar{x},\ \varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{n}\delta(\varepsilon)\left[y_i(x,\varepsilon)+\varphi_i\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right] \tag{5.14}$$

$n=0$ için yaklaşık bir çözüm aranır. Yani, aşağıdaki gibi bir yaklaşıklık aranır.

$$y_0^{scem}\left(x,\ \bar{x},\ \varepsilon\right)=y_0(x,\varepsilon)+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right) \tag{5.15}$$

Şimdi (5.1) denkleminin çözümü için yeterli bilgiler verilmiş olup SCEM metodu uygulanabilir hale geldi[33].

(5.1)' in tam çözümü;

$$y(x)=x^2+(1-2\varepsilon)x+\frac{2\varepsilon-1}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\left(1-e^{\frac{-x}{\varepsilon}}\right)$$

olarak elde edilir. Kesin çözüm MMAE ve SCEM' göre sırasıyla yaklaşık çözümleri bulmasına izin verildiğini bildiğimizden, onları karşılaştırırız.

$\varepsilon=0$ için dış çözüm olarak $y_0(x)$ bulalım. Bu yüzden;

$$y_0{}'(x)=1+2x \Rightarrow \frac{dy_0}{dx}=1+2x$$

$$\Rightarrow dy_0=(1+2x)dx$$

$$\Rightarrow y_0(x)=x^2+x+K \ , \ K\in\mathbb{R}$$

$x=0$ noktasından uzakta, bu çözüm sınır koşulunu sağlamalıdır.

Yani;

$$y(1)=1 \Rightarrow y_0(1)=1 \Rightarrow K=-1$$

$$\Rightarrow y_0(x)=x^2+x-1 \tag{5.16}$$

elde edildi.

İç çözüm yaklaşımını elde etmek için sınır tabaka çözümünü uygulayalım.

$$\bar{x}=\frac{x}{\varepsilon} \tag{5.17}$$

Bu yüzden;

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi''(x)+\frac{1}{\varepsilon}\varphi'(x)=1+\varepsilon\bar{x} \tag{5.18}$$

bulunur ve (5.18) denkleminin her iki tarafı ε ile çarpılırsa;

$$\varphi''(x)+\varphi'(x)=\varepsilon\left(1+\varepsilon\bar{x}\right) \tag{5.19}$$

elde edilir. İç çözümü elde etmek için $\varepsilon=0$ alınır ve

$$\varphi_0''(x)+\varphi_0'(x)=0$$

elde edilir. Genel çözümün ise

$$\varphi_0(\bar{x})=C\cdot\left(1-e^{-\bar{x}}\right),\ C\in\mathbb{R}$$

bu şekilde olduğunu biliyoruz. İşlem yapılırsa $C=-1$ bulunur. Dolayısıyla iç çözümü (sınır tabaka çözümü)

$$\varphi_0(\bar{x})=e^{-\bar{x}}-1$$

Dolayısıyla, birleşik çözüm;

$$\begin{aligned}y(x)&\approx y_0(x)+\varphi_0(\bar{x})-y_{ortak}\\&\approx x^2+x-1+e^{-\bar{x}}-1-(-1)\\&\approx x^2+x-1+e^{-\bar{x}}\end{aligned}$$

birleştirilmiş çözüm elde edilir.

Şimdi MMAE'den sonra SCEM çözümü için devam edelim. (5.1) denklemine göre, $y_0(x)=x^2+x-1$ dir. Böylece,

$$y_0^{scem}\left(x,\ \bar{x},\ \varepsilon\right)=x^2+x-1+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right) \tag{5.20}$$

olur. (5.20) denklemini aşağıdaki denkleminde yazarsak

$$\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}y_0^{scem}\left(x,\ \bar{x},\ \varepsilon\right)+\frac{d}{dx}y_0^{scem}\left(x,\ \bar{x},\ \varepsilon\right)=1+2\cdot\bar{x}\cdot\varepsilon$$

$$\Rightarrow\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2+x-1+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right)+\frac{d}{dx}\left(x^2+x-1+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right)=1+2\cdot\bar{x}\cdot\varepsilon$$

$$\Rightarrow 2\varepsilon\bar{x}+1+\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon+\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=1+2\bar{x}\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=0$$

Denklem düzenlenirse

$$\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon^2+\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=0$$

ve

$$\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-2\varepsilon^2 \tag{5.21}$$

olup, 2. dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem elde edilir. Dolayısıyla genel çözümü iki adımda buluruz. (5.21) denkleminin homojen çözümü,

$$\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)=0$$

$$\Rightarrow m^2+m=0$$

denkleminin çözümü yapılırsa

$$m(m+1)=0\Rightarrow m=0\ \text{ ve }\ m=1$$

bulunur.

$$y_0g\left(\bar{x},\varepsilon\right)=H+J\cdot e^{-\bar{x}},\ \ H,J\in\mathbb{R}$$

bulunur. Homojen olmayan denklem çözümü için ise, öncelikle özel çözümü bulacağız.

$$\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-2\varepsilon^2$$

olduğundan

$$\varphi_{0p}\left(\bar{x},\varepsilon\right) = -2\bar{x}\varepsilon^2$$

bulunur. Sonuç olarak denklemimizin çözümü

$$\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right) = H + J\cdot e^{-\bar{x}} - 2\bar{x}\varepsilon^2$$

bulunur. (5.21) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right) &= y_0\left(\bar{x},\varepsilon\right) + \varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right) \\ &= x^2 + x - 1 + H + J\cdot e^{-\bar{x}} - 2\bar{x}\cdot\varepsilon^2 \end{aligned} \tag{5.22}$$

elde edilir.

Şimdi sınır tabakalarını belirleyelim.

$$x = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow y_0^{scem}(0,0,\varepsilon) = 0 \tag{5.23}$$

$$x = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow y_0^{scem}\left(1,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right) = 1 \tag{5.24}$$

(5.23) ve (5.24) kullanılarak

$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right) = x^2 + x - 1 + H + J\cdot\varepsilon^{-\bar{x}} - 2\cdot\bar{x}\cdot\varepsilon^2$$

$$y_0^{scem}\left(0,0,\varepsilon\right) = -1 + H + J = 0 \Rightarrow H + J = 1 \Rightarrow J = 1 - H$$

$$\begin{aligned} y_0^{scem}\left(1,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right) &= 1 + 1 - 1 + H + (1-H)e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2\varepsilon = 1 \\ &\Rightarrow 1 + H + e^{\frac{-1}{\varepsilon}} - H\cdot\varepsilon^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2\varepsilon = 1 \\ &\Rightarrow H - H\cdot e^{\frac{-1}{\varepsilon}} = 2\varepsilon - e^{\frac{-1}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H=\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}$$

bulunur.

$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=x^2+x-1+\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}+\left(1-\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\right)\cdot e^{-\bar{x}}-2\bar{x}\cdot\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow x^2+x-1+\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}+\left(\frac{1-2\varepsilon}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\right)\cdot e^{-\bar{x}}-2\bar{x}\cdot\varepsilon^2 \tag{5.25}$$

ve $\bar{x}$ yerine $\frac{x}{\varepsilon}$ yazarsak

$$y_0^{scem}(x)=x^2+x-1+\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}+\left(\frac{1-2\varepsilon}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\right)\cdot e^{\frac{-x}{\varepsilon}}-2\cdot\frac{x}{\varepsilon}\cdot\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow x^2+x-1+\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}+\left(\frac{1-2\varepsilon}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\right)\cdot e^{\frac{-x}{\varepsilon}}-2\cdot\varepsilon\cdot x \tag{5.26}$$

SCEM yaklaşımı elde edilir.

Şu an için (5.1) denkleminin üç farklı çözümünü bulduk. Bunlar Eşleştirilmiş Açılımlar metodu (MMAE), Ardışık Tümler Açılım Metodu (SCEM) ve tam çözümdür.

$$y_{\text{tam çözüm}}(x)=x^2+(1-2\varepsilon)x+\frac{2\varepsilon-1}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\left(1-e^{\frac{-x}{\varepsilon}}\right)$$

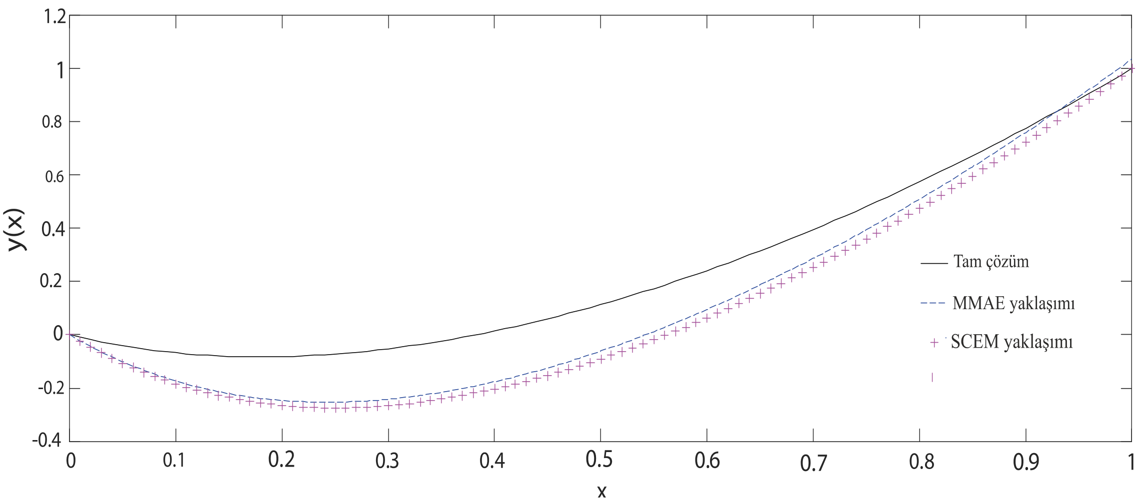
$$y_{\text{birleşik çözüm}}(x,\varepsilon)=x^2+x-1+e^{\frac{-x}{\varepsilon}} \quad (\text{MMAE})$$

$$y_{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=x^2+x-1+\frac{2\varepsilon-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}+\left(\frac{1-2\varepsilon}{1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\right)\cdot e^{\frac{-x}{\varepsilon}}-2\varepsilon x$$

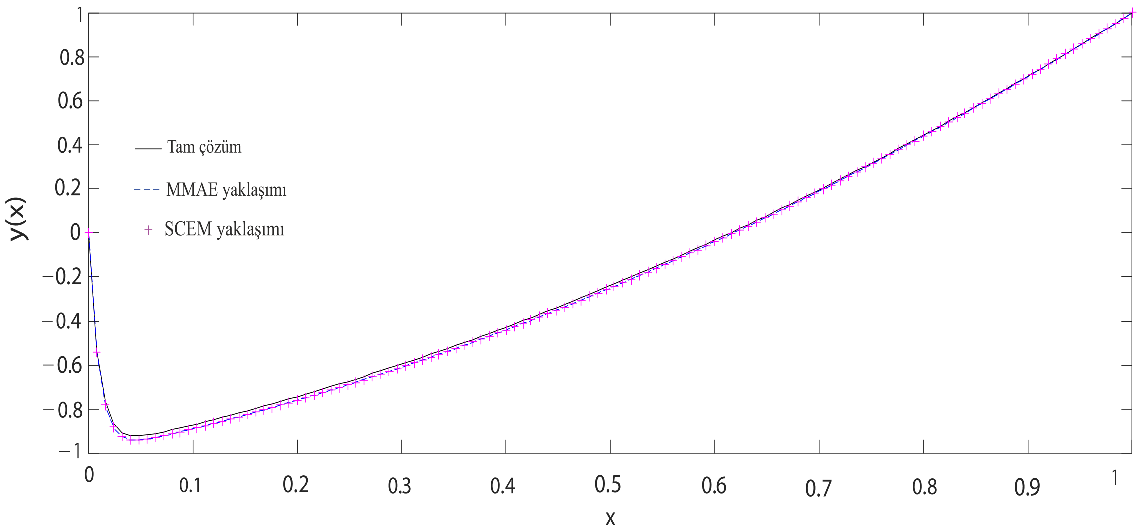
Aşağıda verilen şekil ve tablolarda çözümlerin kıyaslaması görülmektedir [6-30]

Tablo 5.1. Problem (5.1) için çeşitli ε değerlerinin MMAE ve SCEM yaklaşımları

ε	MMAE Yaklaşım	SCEM Yaklaşım
0.0001	0.001146036648629	0.001146036648629
0.0005	0.005730183242787	0.005730183242787
0.0010	0.011460350798498	0.011460350798498
0.0050	0.057047561195172	0.057047561195172
0.0100	0.112864481039688	0.112864481039688
0.0500	0.513159514418249	0.513159531588828
0.1000	0.901557814477664	0.901920266712351
0.3000	1.339243905573495	1.569217796713238
0.5000	1.057355422358385	1.719659382215715
0.6000	0.991379731889011	1.750119945541900
0.8000	1.119711839328917	1.782048657856496
1.0000	1.404221050193842	1.797421134420320



Şekil 5.2. $\varepsilon=0.3$ için (5.1) denkleminin SCEM, MMAE ve tam çözümlerini karşılaştıran grafik



Şekil 5.3. $\varepsilon = 0.01$ için (5.1) denkleminin SCEM, MMAE ve tam çözümlerini karşılaştıran grafik

Bir başka örnek ve karşılaştırmaları aşağıda verilmiştir:

$$\varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ 0 < x < 1 \tag{5.27}$$

problemini ele alalım [19]. Bu problem $x = 0$ noktasına yakın hızlı değişimler sergiler. Bu bölge sınır tabakası ya da iç tabaka olarak adlandırılır. Fakat dış bölge denilen diğer kısım üzerinden, çözüm farklı bir davranış sergilemez. Bu bölge, $x = 0$ noktasından uzak olan bölgedir. Şimdi dış çözüm için aşağıdaki yaklaşımı ele alalım.

$$y(x) \approx y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \ldots \tag{5.28}$$

(5.28) yaklaşımını (5.27) yerine yazarsak

$$\varepsilon\left(y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \ldots\right) + 2\left(y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \ldots\right)2\left(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots\right) = 0 \tag{5.29}$$

elde edilip, $\varepsilon = 0$ için, diferansiyel denklem

$$y_0' + y_0 = 0 \tag{5.30}$$

bulunur. (5.30) denkleminin çözümünü $y_0(x) = A \cdot e^{-x}$, $A \in \mathbb{R}$ olarak buluruz ve $x = 1$ dış sınır şartı uygulanırsa

$$y_0(x)=e^{1-x} \tag{5.31}$$

dış çözüm bulunur. İç çözüm elde etmek için, sınır tabakanın $x=0$ noktasında olduğu kabul edilip

$$\bar{x}=\frac{x}{\varepsilon} \tag{5.32}$$

yaklaşımı ile elde edilecek olan bu yeni koordinatlar sınır tabaka koordinatları adıyla anılır. Bu dönüşüm yardımıyla $x=0$ için $\varepsilon\to 0$ durumunda bölgeyi gerer. (5.33) denkleminin zincir kuralı yardımıyla uygulaması ile;

$$\frac{d}{dx}=\frac{d\bar{x}}{dx}\cdot\frac{d}{d\bar{\bar{x}}}=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{d\bar{\bar{x}}} \tag{5.34}$$

bulunur ve (5.34) denklemi (5.27) yerine yazılırsa;

$$\varepsilon^{-1}\frac{d^2\gamma}{d\bar{x}^2}+2\varepsilon^{-1}\frac{d\gamma}{d\bar{\bar{x}}}+2\gamma=0 \tag{5.35}$$

bulur. (5.35) denkleminin her iki tarafı ε ile çarpılırsa;

$$\frac{d^2\gamma}{d\bar{x}^2}+2\frac{d\gamma}{d\bar{\bar{x}}}+2\varepsilon\gamma=0 \tag{5.36}$$

(4.5.9.) lineer diferansiyel denklem elde edilir ve

$$\gamma(\bar{x})\approx\gamma_0(\bar{x})+\varepsilon\gamma_1(\bar{x})+\varepsilon^2\gamma_2(\bar{x})+\ldots \tag{5.37}$$

sınır tabaka yaklaşımı benimsenir. Sadece (5.37) yaklaşımının ilk terimiyle ilgileniyoruz, $\varepsilon=0$ için hesaplamalar yapabilir. Bu yüzden;

$$\frac{d^2\gamma_0}{d\bar{x}^2}+2\frac{d\gamma_0}{d\bar{x}}=0 \tag{5.38}$$

denklem elde edilir. $x=0$ $(x=0\Rightarrow \bar{x}=0)$ sınır şartı dikkate alındığında (5.38) genel çözümü

$$\gamma_0(\bar{x})=\beta\cdot\left(1-e^{-\bar{x}}\right),\ B\in\mathbb{R} \tag{5.39}$$

olarak bulunur. Burada B sabiti bilinmemektedir. B'yi saptayabilmek için eşleme prosedürünü kullanırız. Şimdiye kadar farklı bölgeler için geçerli olan iki çözüm bulduk. Ancak, bu yaklaşımın aynı işleve ait olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla eşleme prosedürü olarak, limit alırsak [4-20],

$$\lim_{x\to 0} y_0(x)=\lim_{\bar{x}\to\infty}\gamma(\bar{x}) \tag{5.40}$$

yazılır (5.40) denkleminden,

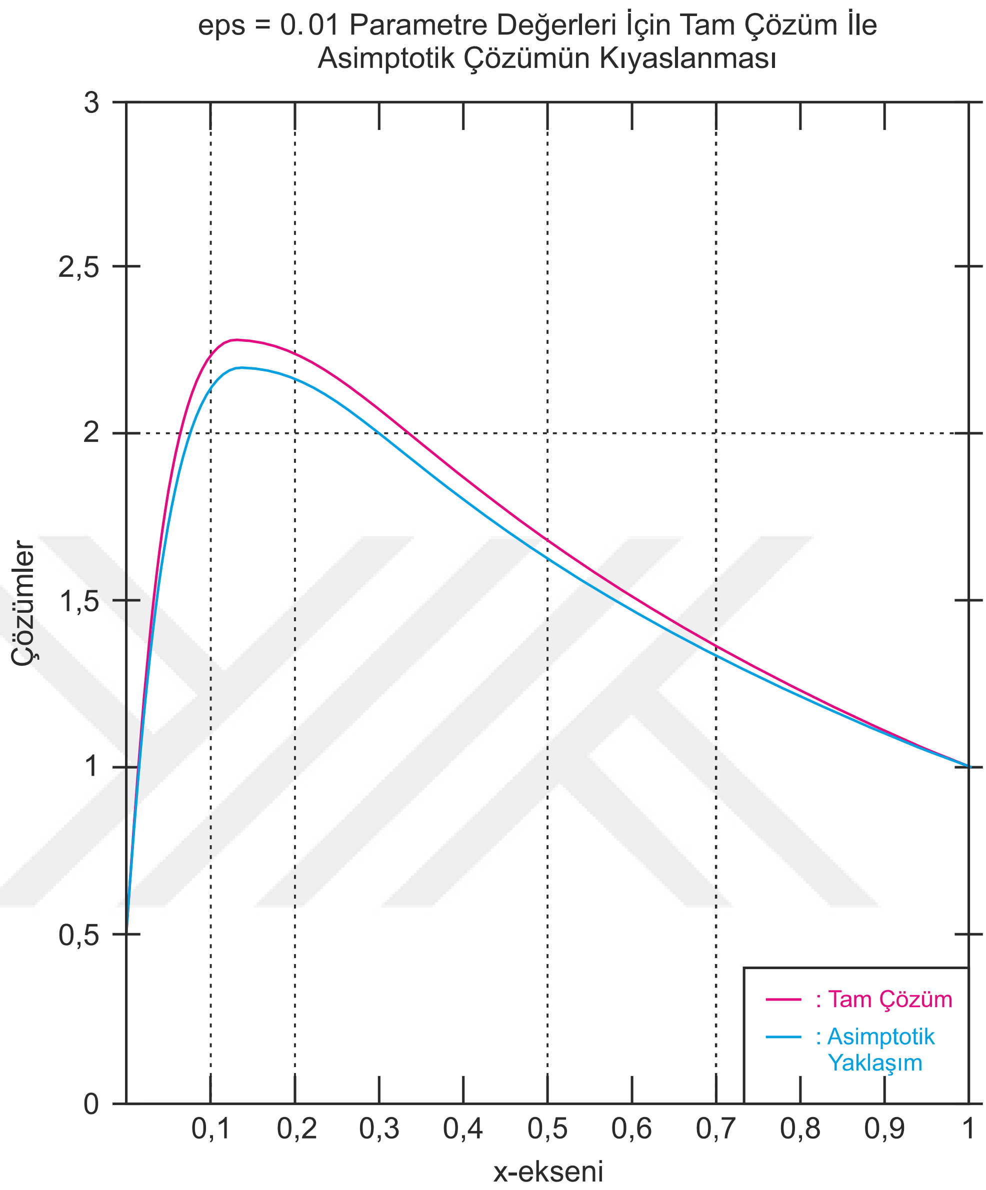
$$\gamma_0(\bar{x})=\left(e-e^{1-\bar{x}}\right)$$

ulaşırız. Bu kısımda, birleşik çözüm elde edeceğiz. Bunun için iç ve dış çözümleri ekleyip, ortak sınırı çıkartırız. Bu durumda,

$y\approx y_0(x)+\gamma_0(\bar{x})-\gamma_0(\infty)$ olur.

Tüm alan üzerinde geçerli olan birleşik çözüme ulaşıyoruz. Grafikleri aşağıdaki gibidir [31].

$$y_{\text{birleşik çözüm}}\approx e^{1-x}-e^{1-\frac{2x}{\varepsilon}}$$



Şekil 5.4. $\varepsilon = 0.01$ için (5.27) denkleminin tam ve asimptotik çözümlerini kıyaslayan grafik

SCEM çözümü içinse;

$$y_0^{scem}\left(x, \bar{x}\varepsilon\right) = y_0\left(x, \varepsilon\right) + \varphi_0\left(\bar{x}, \varepsilon\right)$$

denklemini uygularız. Dolayısıyla

$$y_0^{scem}\left(x, \bar{x}, \varepsilon\right) = e^{1-x} + \varphi_0\left(\bar{x}, \varepsilon\right) \tag{5.41}$$

elde edilir.

(5.41) denklemini

$$y_{ng}^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=\sum_{i=0}^{n}\delta_i(\varepsilon)\left[y_i(x,\varepsilon)+\varphi_i\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right]$$

eşitliğinde yerine yazdığımızda

$$\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)+2\frac{d}{dx}y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)+2y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=0 \tag{5.42}$$

$$\Rightarrow\varepsilon\frac{d^2}{dx^2}\left(e^{1-x}+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right)+2\frac{d}{dx}\left(e^{1-x}+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right)+2\left(e^{1-x}+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right)=0$$

$$\Rightarrow\varepsilon\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}+\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)-2e^{1-\varepsilon\bar{x}}-2e^{1-\varepsilon\bar{x}}+\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\frac{2}{\varepsilon}\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-\varepsilon e^{1-e\bar{x}}$$

$$\Rightarrow\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-\varepsilon^2\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}} \tag{5.43}$$

2. dereceden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem elde edilir. Genel çözümü iki adımda buluruz.

Homojen denklemin çözümü

$$\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=0$$

ve

$$m^2+2m+2\varepsilon=0$$

karakteristik denkleminin çözümü yapılırsa

$$\frac{-2\mp\sqrt{4-4\cdot2\varepsilon}}{2}\Rightarrow-1\mp\sqrt{1-2\varepsilon}$$

kökleri elde edilir.

$$\varphi_{og}\left(\bar{x},\varepsilon\right)=S\cdot e^{(\alpha+i\beta)}+R\cdot e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$\varphi_{og}\left(\bar{x},\varepsilon\right)=S\cdot e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}+T\cdot e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)},\ S,T\in R$$

bulunur.

Homojen olmayan denklem çözümü

Burada denklemin özel çözümünü bulduk.

$$\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varepsilon\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-\varepsilon^2\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}} \tag{5.44}$$

olup, burada çözüm için belirsiz katsayılar metodunu kullanırız. Çözüm için,

$$\varphi_{op}\left(\bar{x},\varepsilon\right)=G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}},\ G\in\mathbb{R} \tag{5.46}$$

ve (5.46) ifadesinin türevlerini alırsak

$$\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)=-\varepsilon\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}\ \text{ ve }\ \varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=\varepsilon^2\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}$$

ifadelerini (5.44) denkleminde yerine yazarsak

$$\varepsilon^2\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}+2\varepsilon\left(-\varepsilon\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}\right)+2\cdot\varepsilon\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}=-\varepsilon^2\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}$$

olup $\varepsilon^2\cdot G\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}}=-\varepsilon^2\cdot e^{1-\varepsilon\bar{x}},\ G\equiv-1$

bulunur. Sonuç olarak (5.41) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)=S\cdot e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}+T\cdot e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{1-\varepsilon\bar{x}} \tag{5.47}$$

olup

$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=y_0\left(x,\varepsilon\right)+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)$$

$$=e^{1-x}+S\cdot e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}+T\cdot e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{1-\varepsilon\bar{x}} \tag{5.48}$$

elde edilir.

$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)$ eşit geçerli bir yaklaşım olduğundan sınır koşullarını sağlar. Şimdi sınır koşullarını belirleyelim.

$$x=0\Rightarrow \bar{x}=\frac{x}{\varepsilon}=0 \tag{5.49}$$

$$x=1\Rightarrow \bar{x}=\frac{x}{\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon} \tag{5.50}$$

(5.49) ve (5.50) denklemleri kullanılarak

$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=e^{1-\bar{x}}+S\cdot e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-S\cdot e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{1-e\bar{x}}$$

$$=e^{1-\bar{x}}+S\cdot\left(e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}\right)-e^{1-e^{\bar{x}}} \tag{5.51}$$

(5.50) ifadesi (5.51) de yerine yazılırsa

$$y_0^{scem}\left(1,\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon\right)=e^{1-1}+S\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-S\cdot\varepsilon^{\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{1-\varepsilon\cdot\frac{1}{\varepsilon}}=1$$

$$\Rightarrow 1+S\cdot\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}\right)-1=0$$

$$\Rightarrow S\cdot\left(e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}\right)=1$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=e^{1-x}+\frac{e^{\bar{x}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\bar{x}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}-e^{1-e\bar{x}}$$

$x=\frac{\bar{x}}{\varepsilon}$ olduğundan dolayı $\bar{x}$ yerine $\frac{x}{\varepsilon}$ yazılırsa

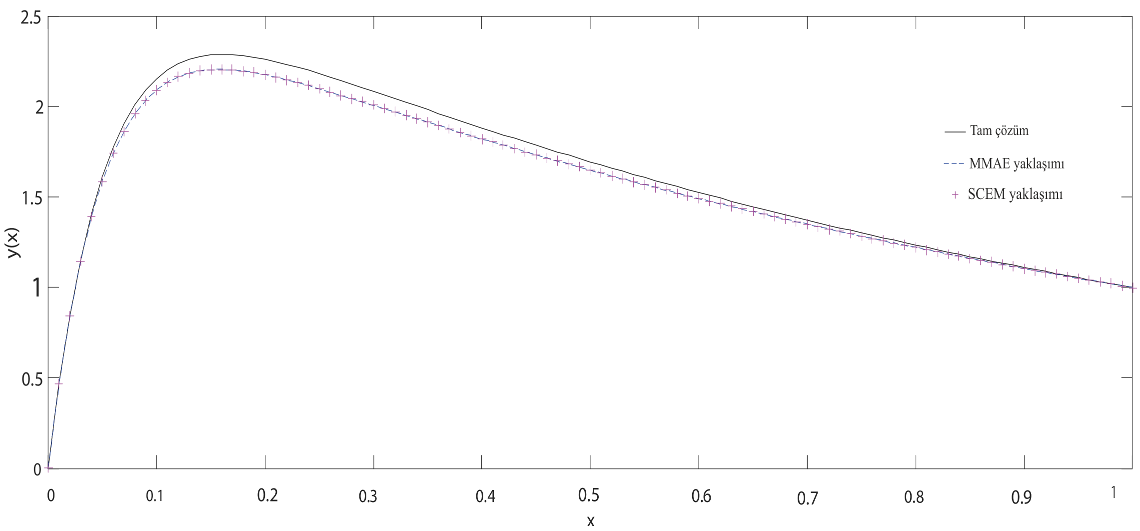
$$y_0^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=e^{1-x}+\frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{x}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\frac{1-2\varepsilon}{}\right)}}-e^{1-\bar{x}}$$

$$=\frac{e^{\frac{x}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}} \tag{5.52}$$

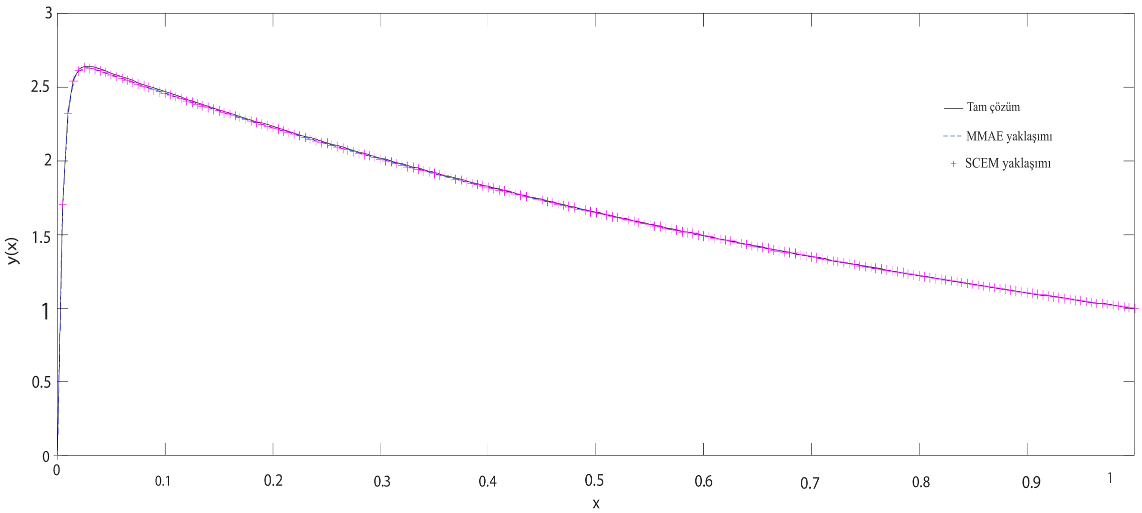
yaklaşık çözüm elde edilir. Denklemin tam çözümü ise,

$$y_{exact}\left(x\right)=\frac{e^{\frac{y}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}\;e^{\frac{x}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}}{e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1+\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}-e^{\frac{1}{\varepsilon}\left(-1-\sqrt{1-2\varepsilon}\right)}} \tag{5.53}$$

Dolayısıyla SCEM kullanarak tam çözüme ulaşmış olduk[6-30].



Şekil 5.5. $\varepsilon=0.1$ için (5.27) denkleminin SCEM,MMAE ve tam çözümlerini karşılaştıran grafik



Şekil 5.6. $\varepsilon = 0.01$ için (5.27) denkleminin SCEM,MMAE ve tam çözümlerini karşılaştıran grafik

5.1. Lineer Olmayan Adi Diferansiyel Denklemde SCEM Uygulaması

Örnek 5.1.1.

$$\varepsilon y''(x) + 2y'(x) + e^{y(x)} = 0,\ \ x \in (0,1),\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0 \tag{5.1}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemini ele alalım.

$$y_0^{scem}(x, \bar{x}, \varepsilon) = y_0(x, \varepsilon) + \varphi_0(\bar{x}, \varepsilon)$$

olduğundan öncelikle $y_0(x,\varepsilon)$ bulalım. MMAE yöntemine göre dönersek $y_0(x,\varepsilon)$ için $\varepsilon = 0$ olarak alınır. Dolayısıyla;

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow 2y'(x) + e^{y(x)} = 0$$

$$\Rightarrow y_0(x,\varepsilon) = \ln\left(\frac{2}{x+1}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$y_0^{scem}(x, \bar{x}, \varepsilon) = \ln\left(\frac{2}{x+1}\right) + \varphi_0(\bar{x}, \varepsilon) \tag{5.2}$$

elde edilir. Böylelikle;

$$y_{ng}^{scem}\left(x,\bar{x},\varepsilon\right)=\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)+\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^n\left[yi\left(x,\varepsilon\right)+\varphi i\left(\bar{x},\varepsilon\right)\right] \tag{5.3}$$

elde edilir.

$\bar{x}=\frac{x}{\varepsilon}$ olup(5.2) denklemi (5.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\varepsilon\left[\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]''+2\left[\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]'+e^{\left[\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\ln\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]}=1$$

denklemi elde edilir. Eşitleme işlemi yapılırsa;

$$\varepsilon\left[\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+\frac{1}{(x+1)^2}\right]+2\left[\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)-\frac{1}{x+1}\right]+e^{\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)}+\frac{2}{x+1}=0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi_0''+\varepsilon\cdot\frac{1}{(x+1)^2}+2\varphi_0'\left(\bar{x},\varepsilon\right)-\frac{2}{x+1}+e^{\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)}+\frac{2}{x+1}=0$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)+2\varphi_0''\left(\bar{x},\varepsilon\right)=\frac{-\varepsilon}{(x+1)^2}-e^{\varphi_0\left(\bar{x},\varepsilon\right)}$$

elde edilir. Öncelikle verilen denklemin homojen kısmının çözümü yapılırsa;

$$\varphi_0''+2\varphi_0'=0$$

ve

$$m^2+2m=0\Rightarrow m(m+2)=0\Rightarrow m=0 \text{ ve } m=-2$$

elde edilir. Dolayısıyla çözüm;

$$\varphi_{og}\left(\bar{x},\varepsilon\right)=H+J\cdot e^{-2\bar{x}},\ H,J\in R$$

olur. Şimdi sınır tabakalarını belirleyelim.

$$x = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{0}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow y_0^{scem}(0,0,\varepsilon) = 0 \tag{5.4}$$

$$x = 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow y_0^{scem}\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = 0 \tag{5.5}$$

(5.4) ve (5.5), (5.2) denkleminde yazılırsa;

$$y_0^{scem}(0,0,\varepsilon) = \ln(2) + H + J \cdot e^{-2\cdot 0} = 0$$
$$\Rightarrow \ln 2 + H + J = 0$$
$$\Rightarrow H + J = -\ln 2$$

elde edilir.

$$y_0^{scem}\left(1, \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon\right) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) + H + J \cdot e^{-2\cdot\frac{1}{\varepsilon}} = 0$$
$$\Rightarrow \ln(1) + H + J \cdot e^{\frac{-2}{\varepsilon}} = 0$$
$$\Rightarrow H + J \cdot e\frac{-2}{\varepsilon} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla;

$$H = \frac{\ln 2 \cdot e^{\frac{-2}{3}}}{1 - e^{\frac{-2}{\varepsilon}}} \text{ ve } J = \frac{-\ln 2}{1 - e^{-2/\varepsilon}}$$

elde edilir.

$$y_0^{scem}(x, \bar{x}, \varepsilon) = \ln\left(\frac{2}{x+1}\right) + \frac{\ln 2\left(e^{-2/\varepsilon} - e^{-2\bar{x}}\right)}{1 - e^{-2/\varepsilon}}$$

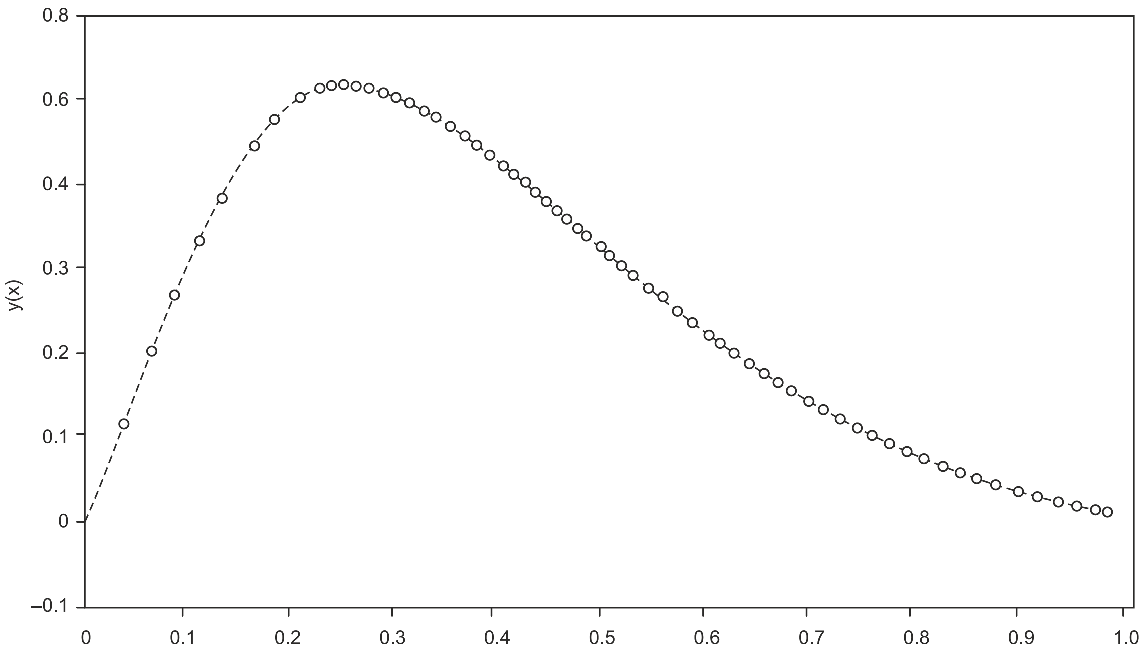
Asimptotik yaklaşım ise;

$$y(x) = \ln\left(\frac{2}{x+1}\right) - \ln 2 \cdot e^{\frac{-2x}{\varepsilon}}$$

elde edilir. Dolayısıyla SCEM çözümü asimptotik yaklaşım oldukça yakın ve doğru sonuç verir[28]

Tablo 5.2. ε = 0,1 için UVA Çözümü, SCEM yaklaşımı ve Mutlak Hata

x	UVA Çözüm	SCEM yaklaşımı	Mutlak Hata
0.000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000000000
0.001	0.012725733435	0.012725733463	2838981493e(–11)
0.005	0.60974133872	0.60974134008	1.359571344e(–10)
0.010	0.115695936573	0.115695936832	2.589762846e(–9)
0.100	0.504029730749	0.504029731985	1.2353316147e(–9)
0.200	0.498130190310	0.498130191712	1.4025156036e(–9)
0.300	0.429064776009	0.429064777435	1.4251414492e(–9)
0.400	0.356442418964	0.356442420392	1.4286180016e(–9)
0.500	0.287650603618	0.287650605047	1.4286180016e(–9)
0.600	0.223139292470	0.223139293899	1.4286740679e(–9)
0.700	0.162518353125	0.162518354554	1.428687672e(–9)
0.800	0.105360437654	0.105360439083	1.4286826582e(–9)
0.900	0.051293283830	0.051293285259	1.4286828040e(–9)
1.000	–0.00000001428	0.000000000000	1.4286828220e(–9)



Şekil 5.7. $\varepsilon = 0.1$ için (5.1.1) denkleminin SCEM ve UVA çözümlerini kıyaslayan grafik

6. BÖLÜM

TARTIŞMA, SONUÇ, ÖNERİLER

Şimdiye kadar bazı örnekler haricinde, ağırlıklı olarak akışkanlar mekaniğinde meydana gelen kısmi diferansiyel denklemlere SCEM uygulanmıştır. Doğrusal adi diferansiyel denklemler ve singüler pertürbasyon problemleri için bu verimli yöntemleri uyguluyoruz.

Literatüre göre, diğer mevcut yöntemlerle elde edilen sonuçlara göre, daha doğru sonuçlar elde edildi. Homojen problem (5.27) için direkt olarak SCEM kullanarak çözüm elde edildi. Homojen olmayan (5.1) problemi için oldukça doğru yaklaşımlara ulaşıldı. Daha ileri karşılaştırmalar için [31] incelenebilir.

"Lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerin ardışık tümler açılım metodu ile, çözümü" isimli bu çalışmada ayrıntılı bir literatür taraması yapılmıştır. SCEM çözümüne ulaşmak için öncelikle MMAE ve UVA yöntemlerinden bahsedilmiştir. Daha sonra bu yöntemlerin devamında SCEM metodu anlatılmış olup ilgili problemler tam çözüm ve MMAE ile karşılaştırılmıştır. Bunun sonucunda SCEM metodu MMAE'ye göre daha doğru ve yakın sonuçlar vermiştir. Genel olarak lineer ve analitik çözüme sahip olan problemler incelenmiş, arkasına lineer olmayan bir denklemin SCEM çözümü de verilmiştir. Böylelikle matematiksel kodlama programı yardımıyla bulunan sonuçlar grafiksel olarak kolaylıkla kıyaslanmıştır. Dolayısıyla bu yöntemden oldukça iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç olarak, SCEM sınır değer problemi için çok uygundur. Bu kolay olan uygulanabilir yöntemde eşleştirme prosedürüne gerek yoktur. Tüm hesaplamalar matematiksel kodlama programı kullanılarak yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Aydın, M., Kuryel, B., Gündüz, G., Oturanç G., ”Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları” *Fakülteler Kitapevi Barış* , İzmir,s.1-59,2013.
2. Engin, T., Çengel, Y.,”Mühendisler İçin Diferansiyel Denklemler” Eylül,Sakarya, 2008.
3. Johnson, R. S., “Singular perturbation theory Mathematical and analytical techniques with applications to engineering” *Springer Science & Business Media,* 2006.
4. Lagerstrom,P.A., ”Matched Asymptotıc Expansions, Ideas and Techniques”, in: Appl,. Math.Sci., Vol.76, *Springer-Verlag*, 1988.
5. Ponnusamy,S.,Silverman, H.,”Complex Variables with Applications”, Birkhöuser, Boston, 2006.
6. Cengizci, S.,”Singüler Perturbasyon Problemlerinin Asimptotik Analizi”,*Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi,* Nevşehir, 2014.
7. Sharma, K. K., Rai, P., Patidar, K. C., “A review on singularly perturbed differential equations with turning points and interior layers”, Appl. Math. Comput. 219, 10575-10609,2013.
8. M. Van, Dyke.,” Perturbation Methods in fluıd mechanichs”, Parabolic Press, Stanford,CA,1975.
9. Lagerstrom,P.A.,”Matched Asimptotic Expansions ,Ideas and Tecchniques”, in:Appl,.Math.Sci.,Vol.76,*Springer-Verlag*,1988
10. Mauss, J., “On matching principles, in Lectures Notes in Math.”, Vol. 711, *Springer-Verlag*, pp. 1-18. , 1979 .
11. Cousteix, J., Mauss J.,”Asymptotic Analysis and Boundary Layers” Scientific Computation Series, *Springer* ,2007.
12. Appel,W.,”Mathematiques pour la physique et les physiciens.”, H&K Editions, Paris,[53,312],2005.

13. E.M. de Jager and Jiang Furu., ”The Theory of singular perturbations”, volume 42 of North-Holland series in applied mathematichs and mechanichs. Elsevier, Amsterdam, 1996.

14. Kadalbajoo ,M. K., Gupta V., “A brief survey on numerical methods for solving singularly perturbed problems,” Appl. Math. Comput. 217 ,3641–3716,2010.

15. Eckhaus, W.., ”Asymptotic analysis of singular perturbations.Studies in mathematics and its applications “, 9.North-Holland,1979.

16. Lagerstrom, P. A..,” Matched Asymptotic Expansions: Ideas and Techniques”, in: Appl. Math.Sci., Vol. 76, *Springer-Verlag*, 1988.

17. Geng, F.,” A novel method for solving a class of singularly perturbed boundary value problems based on reproducing kernel method”, Appl. Math. Comput. 218 4211-4215,2011.

18. Cousteix, J., Mauss, J.,” Asymptotic Analysis and Boundary Layers Scientific Computation “, vol.XVIII, *Springer*, Berlin, Heidelberg, 2007.

19. Holmes, M. H., ”Introductıon to Perturbation Methods”, Second Ed.,Texts in Applied Mathematics, *Springer*, 2013.

20. Kumar, M., Mishra and P.Singh H. K.,”A boundary value approach for a class of lınear singularly perturbed boundary value problems“, Adv. Eng. Softw. 40,298-304,2009.

21. Murray, J. D.,” Asymptotic analysis”. Vol. 48. *Springer Science & Business Media*, 2012.

22. Wicox ,D. C.,”Perturbation methods in the computer age”. DCW Industries, Inc., La Canada ,CA ,1995.

23. Van Dyke, M.”Perturbation Methods ın Fluıd Mechanics”, Academıc Press, New York, 1964.

24. Malley Jr ,R. E. O.,”Introduction to Singular Perturbations, Applied Mathematichs and Mechanics“, vol.14,Academic Press, New York, London,1974.

25. Nayfeh, A. H., ”Perturbation Methods “,JohnWiley&Sons,New York,425,1973.

26. Sharma, K. K., Rai, P., Patidar, K. C., ”A review on singularly perturbed differantial equations, with turning points and interior layers“, Appl. Math. Comput. 219, 10575-10609,2013.

27. Mauss, J.,“On matching principles, in: Lectures Notes in Math.”, Vol.711, *Springer-Verlag*, (1979), 1-18.

28. Cengizci S., Atay M. T., Eryilmaz A., “A uniformly valid approximation algorithm for singularly perturbed two-point boundary value problems in nonlinear ordinary differential equations” *Springer Plus*, 5,(2016), 1-15.

29. Holmes, M. H. “Introduction to Perturbation Methods. Springer-Verlag”, *Springer*, New York, 1995.

30. Cengizci, S.,”A comparison between MMAE and SCEM for solving singularly perturbed linear boundary layer problems”, Filomat,(2018) (appear).

31. De Jager E.M.,Furu J.,”The Theory of Singular Perturbation “, Amsterdam-North, , Holland,1996.

32. Kadalbajoo, M. K., Reddy ,Y.N., “Asymptotic and numerical analysis of singular perturbation problems a survey”, Appl. Math. Comput. 30 (3),(1989), 223-259.

33. Cengizci, S., Natesan ,S., Atay ,M. T., “An asymptotic-numerical hybrid method for singularly perturbed system of two-point reaction-diffusion boundary-value problems”, *Turkish Journal of Mathematics*,43 (2018), 460-472.

ÖZGEÇMİŞ

Sümeyye KAYA, 1990 yılında Kayseri'nin Melikgazi ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Melikgazi Mahallesi'nde tamamladı. 2013 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2013-2019 yılları arasında Kayseri ve İstanbul da Matematik Öğretmeni olarak görev yaptı. 2014 yılında Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2013 yılından itibaren Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

e-posta: syurum38@hotmail.com