T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Ali YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2020
KONYA

TEZ KABUL VE ONAYI

Ali YILDIRIM tarafından hazırlanan "İKİNCİ MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE" adlı tez çalışması 04/02/2020 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Necati TAŞKARA	....
Danışman Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU	....
Üye Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	....

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…/2020 gün ve …….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Süleyman Savaş DURDURAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ali YILDIRIM
04/02/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBEDEN PERİYODİK KATSAYILI BİR FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE

Ali YILDIRIM

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

2020, 62 Sayfa

Jüri

Doç. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, fark denklemlerinin önemi hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, çeşitli tipteki fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin çözümlerinin periyodik karakteri, sınırlılığı ve denge noktalarının global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bir literatür araştırması verildi.

Dördüncü bölümde, α parametresinin tüm pozitif değerleri için ikinci mertebeden $x_{n+1} = \alpha / \left(1+x_n x_{n-1}\right)$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global davranışı incelendi. Yine bu bölümde, ikinci mertebeden periyodik katsayılı $x_{n+1} = \alpha_n / \left(1+x_n x_{n-1}\right)$ fark denkleminin kapalı formda çözülebilirliği, pozitif çözümlerinin sınırlılığı, periyodik karakteri ve global davranışı incelendi.

Beşinci bölümde, elde edilen teorik sonuçları doğrulamak için sayısal örnekler verildi.

Altıncı bölümde, dördüncü bölümde incelenen fark denklemiyle ilgili sonuç ve öneriler verildi.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, Global davranış, Kapalı form çözüm, Periyodik çözüm, Periyodik katsayı.

ABSTRACT

MS THESIS

ON SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER DIFFERENCE EQUATION WITH PERIODIC COEFFICIENT

Ali YILDIRIM

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

2020, 62 Pages

Jury

Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA
Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Asst. Prof. Dr. Durhasan Turgut TOLLU

This study consists of six sections.

In the first section, general information about the importance of difference equations is given.

In the second section, general definitions and theorems related to difference equations are given.

In the third section, a literature research about the studies on the periodic character, boundedness of solutions and global asymptotic stability of equilibrium points of various types of difference equations and systems of difference quation are given.

In the fourth section, the global behavior of positive solutions of the second order difference equation $x_{n+1} = \alpha / (1 + x_n x_{n-1})$ for all positive values of parameter α is examined. Again in this section, the solvability in closed form, periodic character, boundedness and global behavior of positive solutions of the second order, periodic coefficient difference equation $x_{n+1} = \alpha_n / (1 + x_n x_{n-1})$ are examined.

In the fifth section, numerical examples are given to confirm the theoretical results.

In the sixth section, the conclusions and suggestions about the difference equation examined in the fourth chapter were given.

Keywords: Difference equation, Global behavior, Closed form solution, Periodic solution, Periodic coefficient.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU yönetiminde hazırlanarak Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde yardımını esirgemeyen, bilgilerini benimle paylaşan, fikirleriyle bakış açımı geliştirip zenginleştiren, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Durhasan Turgut TOLLU'ya, hayatımın her aşamasında bana yardımcı olan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Naciye YILDIRIM'a, babam Murat Alpaslan YILDIRIM'a, değerli eşim Nevin YILDIRIM'a, kızlarım Zeynep Erva YILDIRIM ve Zülal Verda YILDIRIM'a, en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Ali YILDIRIM
KONYA-2020

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar
$\forall$	:	Her
$\exists$	:	Bazı
$<$	:	Küçük
$>$	:	Büyük
$\leq$	:	Küçük eşit
$\geq$	:	Büyük eşit
$=$	:	Eşittir
$\neq$	:	Eşit değildir
$\in$	:	Elemanıdır
$\notin$	:	Elemanı değildir
$\Rightarrow$	:	Gerek şart
$\Leftarrow$	:	Yeter şart
$\Leftrightarrow$	:	Gerek ve yeter şart
Δ	:	İleri fark operatörü
Δ^{-1}	:	Ters fark operatörü
∇	:	Geri fark operatörü
E	:	Kaydırma operatörü
δ	:	Merkezi fark operatörü
$\overline{x}$	:	x denge noktası
J_F	:	F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi
$\sum$	:	Belirsiz toplam
$\sum\limits_a^b$	:	a dan b ye toplam
$\prod\limits_a^b$	:	a dan b ye çarpım

GRAFİK LİSTESİ

1. GİRİŞ

İnsanda doğuştan var olan merak duygusu, bilim ve teknolojinin gelişmesi için bir başlangıç noktası olmuştur. Yeniliklerin keşfedilmesinde her zaman bir lokomotif görevi üstlenen bu merak dürtüsü sayesinde insanoğlu; elindeki bilgileri, bulguları ve imkânları yeterli olarak görmemiş, tutku ve heyecanla yeni ufuklara yelken açarak farklı serüvenlerin peşine düşmüştür. Zihinlerdeki belirsizliklere, çelişkilere ve sorulara çözüm bulabilmek için sürekli çaba göstermiş, yoğun çalışmalar ve araştırmalar sonucunda baş döndürücü buluşlara imza atmıştır. İnsanlık tarihi boyunca yapılan bütün keşifler ve buluşlar, işte bu merak duygusu sayesinde gerçekleşmiştir. Ünlü bilim adamı Einstein[1] merak duygusu ile ilgili olarak, "Hiçbir özel yeteneğim yok. Yalnızca tutkulu bir meraklıyım." diyerek bu duygunun vazgeçilmez önemine dikkat çekmiştir. Merak dürtülerini sürekli diri tutan Einstein gibi bilim insanları, duyu organlarıyla algılayabildikleri gerçeklerin ve hâlihazırdaki bilgilerin daha da ötesini merak ederek sürekli sorgulamışlardır. Bunun neticesinde; güneş sistemini, izafiyet teorisini, atom ve yapısını, suyun kaldırma kuvvetini, internet ve iletişim araçlarını, navigasyon ve uydu teknolojisini, insanlı ve insansız hava araçlarını, yapay zeka ve robot teknolojisini ve buna benzer daha nicelerini keşfederek insanlığın hizmetine sunmuşlardır. İmza attıkları bu keşif ve buluşlar sayesinde bilimin, teknolojinin, kavram ve teorilerin gelişmesine çok önemli katkıları olmuştur.

Teknoloji ve bilimin gelişimine katkı sağlayan en önemli faktörlerden birisi de şüphesiz ki matematik bilimi olmuştur. İnsanın kendisini ve yaşadığı çevreyi tanıyıp anlayabilmesi için, evrende matematik diliyle yazılmış gerçekleri okuyabilmesi gerekir. Nitekim, Fibonacci'nin[2] "Bir gülün güzelliğindeki sır, onu Yaratan'ın içine sakladığı matematik sanatında gizlidir." sözüne katılmamak mümkün değildir. Bu bağlamda, yeniliklerin gün yüzüne çıkmasında matematiğin etkisi yadsınamaz bir gerçektir.

Matematiğin günlük hayattaki uygulamaları sayesinde, zor veya imkânsız gibi görünen olguların rahatlıkla üstesinden gelinebilmiştir. Antik Yunan uygarlığı öncesindeki Mısır ve Mezopotamya uygarlıklarında matematiğe olan ihtiyaç ilk olarak deneme-yanılma ve sayma düzeyinde olmuştur. Zamanla modern uygarlıklardaki

[1] Albert Einstein (1879 – 1955), Alman fizikçi.
[2] Leonardo Pisano Fibonacci (1170-1250), İtalyan matematikçi.

ihtiyaçların çoğalması ve çeşitlenmesi nedeniyle yeni teoriler geliştirilmiş, bu teoriler üzerine yapılan kapsamlı çalışmalar sonucunda matematik bilimi günümüzdeki modern çehresine kavuşmuştur. Modern matematik uygulamaları sayesinde; mühendislikten mimariye, biyolojiden tıp bilimine, ekonomiden sanayiye, meteorolojiden astronomiye kadar yüzlerce buluşa imza atılmış, bunlarla da yetinilmeyip insan yaşamını kolaylaştıran daha nice baş döndürücü yenilikler keşfedilmiştir.

Uygulamalı matematiğin önemli çalışma alanlarından biri olan fark denklemleri, son yılların popüler konuları arasında yerini almıştır. Fark denklemleri, âdi ve kısmî diferansiyel denklemlerde olduğu gibi gerçek yaşam problemlerinin modelleri olarak ortaya çıkabilmektedir. Bu modellemelerdeki fark denklemlerinin kolaylıkla algoritmalaştırılabilmesi sayesinde, çözümleri de bilgisayar aracılığıyla kolayca yapılabilmektedir. Diferansiyel denklemlerden farklı olarak fark denklemlerinde bağımsız değişken, tam sayılar üzerinde tanımlanmıştır. Fark denklemleri, bilinmeyen fonksiyonun farklarını ihtiva ettiğinden, genellikle sürekli olmayan problemleri modellemektedir. Bunun yanı sıra fark denklemleri, diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinde de kullanılmaktadır. Bu denklemler; matematiğin kendi içinde olduğu kadar, farklı disiplinlerde de uygulama alanı bulmuştur. Bu yönüyle sadece matematikçilerin değil, diğer bilim dallarında çalışan birçok bilim insanının da çalışma alanı haline gelmiştir. Literatürdeki açık problemler sayesinde fark denklemleri her zaman cazibesini koruyacak ve bilim insanları için gizemli bir dünya olamaya devam edecektir.

Bu güne kadar bu alanda yapılmış birçok çalışma, şüphesiz ki fark denklem teorisine katkı sağlamıştır. Bu bağlamda, yapmış olduğumuz bu tez çalışmasının da fark denklemleri teorisine katkı sağlayacağını ümit ediyoruz.

2. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1. k pozitif bir tam sayı, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,...\}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$F\left(n, x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}\right) = 0 \tag{2.1}$$

eşitliğine bir *"fark denklemi"* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 2.2. $\mathbb{N}_0$ üzerinde tanımlı bir x_n fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}_0$ için (2.1) denklemini sağlıyorsa, bu durumda x_n fonksiyonuna $\mathbb{N}_0$ üzerinde (2.1) denkleminin bir *"çözümü"* denir. k yıncı mertebeden bir fark denkleminin, ϕ ve ψ birer fonksiyon olmak üzere,

$$\phi\left(n, x_n, c_1, c_2, ..., c_k\right) = 0 \tag{2.2}$$

veya

$$x_n = \psi\left(n, c_1, c_2, ..., c_k\right) \tag{2.3}$$

şeklinde k tane $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ keyfi sabit içeren çözümüne (2.1) denkleminin *"genel çözümü"* adı verilir. Genel çözümden elde edilen çözümlere de *"özel çözüm"* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 2.3. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o denklemin *"mertebesi"* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Tanım 2.4. $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ve $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}$ reel sabitler olmak üzere, k yıncı mertebeden bir fark denkleminin bir özel çözümünü bulmak için o çözüm ile ilişkili

$$x_{n_0+i} = \alpha_i, \quad 0 \le i \le k-1 \tag{2.4}$$

veya

$$\Delta^i x_{n_0} = \alpha_i, \quad 0 \le i \le k-1 \tag{2.5}$$

formunda ilk k tane ardışık değerin belirtilmesi gereklidir. (2.4) ya da (2.5) koşullarına *“başlangıç koşulları”* adı verilir. k yıncı mertebeden bir fark denklemi ve (2.4) ya da (2.5) başlangıç koşullarından oluşan probleme ise bir *“başlangıç değer problemi”* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

2.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 2.1.1. $n \ge n_0$ için tanımlı reel değerli $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_k(n)$ katsayı fonksiyonları ve reel değerli $g(n)$ fonksiyonu verilsin. $n \ge n_0$ için $a_k(n) \ne 0$ olsun.

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = g(n) \tag{2.6}$$

formundaki denkleme *“k yıncı mertebeden bir lineer fark denklemi”* denir. Eğer, $g(n) \equiv 0$ ise

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \ldots + a_k(n)x(n) = 0 \tag{2.7}$$

denklemine *“homojen denklem”* denir. $g(n) \ne 0$ ise (2.6) denklemine *“homojen olmayan denklem”* denir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabit ise (2.6) denklemine *“sabit katsayılı”*, aksi durumda *“değişken katsayılı fark denklemi”* denir (Soykan ve arkadaşları, 2017).

Örnek 2.1.1. Aşağıda verilen denklemleri mertebe, homojenlik ve lineerlik bakımından inceleyiniz.

a. $x_{n+3} + 4\cos\alpha x_{n+2} - x_n = 0$ (2.8)

b. $x_{n+2} + 5x_n - n = 0$ (2.9)

c. $x_{n+4} x_{n+1}^2 = e^{2n} x_n^3$ (2.10)

d. $x_{n+3} = \cot n$ (2.11)

Çözüm.

a. (2.8) denklemi; 3. mertebeden, homojen lineer bir fark denklemidir.

b. (2.9) denklemi; 2. mertebeden, homojen olmayan lineer bir fark denklemidir.

c. (2.10) denklemi; 4. mertebeden lineer olmayan bir fark denklemidir.

d. (2.11) denklemi; bir fark denklemi değil, bir fonksiyondur.

2.1.1. Sabit katsayılı lineer fark denklemlerinin çözülebilirliği

(2.7) de verilen denklemde $a_i(n)$ katsayıları, $a_i(n) \equiv a_i$, $(a_k \neq 0)$ olacak şekilde sabit alınırsa

$$x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + \ldots + a_k x(n) = 0 \tag{2.12}$$

sabit katsayılı lineer fark denklemi elde edilir. Bu denklem genel olarak çözülebilirdir. Bu kısımda bu denklemin çözülebilirliği incelenecektir. (2.12) denkleminin $x(n) = \lambda^n$ formunda bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bu çözüm (2.12) denkleminde yerine yazılarak

$$\lambda^{n+k} + a_1 \lambda^{n+k-1} + \ldots + a_k \lambda^n = 0$$

veya

$$\lambda^n \left(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k \right) = 0$$

eşitşiği elde edilir. $a_k \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$ ve dolayısıyla $\lambda^n \neq 0$ olacağından

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0 \qquad (2.13)$$

olur. (2.13) denklemine, (2.12) denkleminin *"karakteristik denklemi"* ya da *"yardımcı denklemi"* denir. Bu denklem, k tane reel veya kompleks köke sahiptir. Bu kökler $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ile gösterilsin. Bu durumda çözümün şekli, bu köklerin durumuna bağlıdır ve aşağıdaki üç durumda incelenir.

Durum 1: (Köklerin reel ve ayrık olması)

Bu durumda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ köklerinin hepsi birbirinden farklı reel sayılardır. O halde

$$x_1(n) = \lambda_1^n, \quad x_2(n) = \lambda_2^n, \quad \ldots, \quad x_k(n) = \lambda_k^n$$

ifadeleri de denklemin birer çözümüdür. Bu çözümlerin herhangi lineer kombinasyonu da bir çözümdür. Elde edilen bu çözüm aslında (2.12) denkleminin genel çözümü olup

$$x(n) = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n$$

şeklinde verilir. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_k$ keyfi reel sabitlerdir.

Durum 2: (Köklerin kompleks olması)

Bazı hallerde (2.13) karakteristik denkleminin bazı kökleri kompleks eşlenik olabilir. Eğer $\alpha + i\beta$ kompleks sayısı, karakteristik denklemin bir kökü ise $\alpha - i\beta$ kompleks sayısı da bu denklemin diğer bir köküdür. Bu durumda, $x_1(n) = (\alpha + i\beta)^n$ ve $x_2(n) = (\alpha - i\beta)^n$ ifadeleri de (2.12) denkleminin birer çözümüdür. Ayrıca bu ifadelerin lineer kombinasyonu da bir çözüm olacağından

$$x_3(n) = k_1(\alpha + i\beta)^n + k_2(\alpha + i\beta)^n$$

olarak yazılabilir. Burada k_1, k_2 keyfi reel sabitlerdir. De Moivre teoreminden

$$(\alpha + i\beta)^n = r^n \left(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\right)$$

ve

$$(\alpha - i\beta)^n = r^n \left(\cos(n\theta) - \sin(n\theta)\right)$$

olur. Bu durumda (2.12) denkleminin çözümü

$$x_3(n) = r^n \left(k_3 \cos(n\theta) + k_4 \sin(n\theta)\right)$$

formundadır. Burada k_3, k_4 keyfi reel sabitlerdir.

Durum 3: (Köklerin eşit olması)

Eğer (2.12) denkleminin p tane kökü $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$ şeklinde birbirine eşit ise bu durumda (2.12) denkleminin çözümünün bu köklere karşılık gelen kısmı

$$\left(c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + \cdots + c_p n^{p-1}\right)\lambda_1^n$$

şeklinde olur (Spiegel, 1971).

Örnek 2.1.1.1. Her $n \geq 0$ için

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \tag{2.14}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemi olup karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

dır. Bu karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ olup, (2.14) fark denkleminin genel çözümü, her $n \geq 0$ için

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2 keyfi reel sabitlerdir.

Örnek 2.1.1.2. a pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+3} - a x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{2.15}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem üçüncü mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemidir. Bu denklemin karakteristik denklemi $\lambda^3 - a = 0$ cebirsel denklemidir. Bu cebirsel denklemin bir reel ve iki kompleks eşlenik kökleri vardır. Bu kökler

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{a} \quad \text{ve} \quad \lambda_{2,3} = \frac{\sqrt[3]{a}\left(-1 \pm \sqrt{3}i\right)}{2}$$

olup (2.15) denkleminin genel çözümü, her $n \geq 0$ için

$$x_n = c_1\left(\sqrt[3]{a}\right)^n + \left(\sqrt[3]{a}\right)^n \left(c_2 \cos(n\theta) + c_3 \sin(n\theta)\right)$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, c_3 keyfi reel sabitler, $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt[3]{a}$ ve $\theta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$ tür.

Örnek 2.1.1.3. Her $n \geq 0$ için

$$x_{n+3} - 9x_{n+2} + 24x_{n+1} - 20x_n = 0 \tag{2.16}$$

fark denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem üçüncü mertebeden sabit katsayılı lineer homojen bir fark denklemidir. Bu denklemin karakteristik denklemi $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 24\lambda - 20 = 0$ cebirsel denklemidir. Bu cebirsel denklemin bir ayrık ve iki çakışık reel kökleri vardır. Bu kökler

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ ve } \lambda_3 = 5$$

olup (2.16) denkleminin genel çözümü, her $n \geq 0$ için

$$x_n = (c_1 + c_2 n) 2^n + c_3 5^n$$

şeklindedir. Burada c_1, c_2, c_3 keyfi reel sabitlerdir.

2.2. Fark Denklemleri İçin Genel Tanım ve Teoremler

Teorem 2.2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç koşulları için,

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.17}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 2.2.1. Eğer $\bar{x}$ noktası $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ denkleminin bir çözümü ise $\bar{x}$ e, f nin *"denge noktası"* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ e, f nin *"sabit noktası"* denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Örnek 2.2.1. a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_{n-2}}{x_n} \tag{2.18}$$

fark denkleminin denge noktalarını bulunuz.

Çözüm. Denge noktası tanımına göre, $f\left(\overline{x}, \overline{x}\right) = \overline{x}$ olmalıdır. Buradan hareketle $\overline{x} = \dfrac{a + b\overline{x}}{\overline{x}}$ denklemi, $\overline{x}^2 - b\overline{x} - a = 0$ şeklinde yazılabilir. Bu denklemin kökleri istenen denge noktaları olup,

$$\overline{x}_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.2.2. $\overline{x}$, (2.17) denkleminin denge noktası olmak üzere,

- **a.** Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için, $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için, $\left|x_n - \overline{x}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktası *"lokal kararlıdır"* denir.
- **b.** Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$ olacak şekilde, $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktası *"lokal asimptotik kararlıdır"* denir.
- **c.** Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \overline{x}$ ise, $\overline{x}$ denge noktası *"global çekimlidir (Çekim Noktası)"* denir.
- **d.** Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise, $\overline{x}$ denge noktası *"global asimptotik kararlıdır"* denir.
- **e.** Eğer $\overline{x}$ denge noktası kararlı değil ise, $\overline{x}$ denge noktası *"kararsızdır"* denir.
- **f.** Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $\left|x_N - \overline{x}\right| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\overline{x}$ denge noktasına *"repeller"* denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 2.2.3. (2.17) denkleminin çözümü $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ olsun. Eğer her $n \geq -1$ için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisi *“ p periyotludur”* denir ve p bu şartı sağlayan en küçük tam sayıdır (Kulenović ve Ladas, 2002).

Örnek 2.2.2. Lyness denklemi olarak bilinen

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}}, \quad n = 0,1,2,... \tag{2.19}$$

fark denkleminin her çözümünün 5 periyotlu olduğunu gösteriniz.

Çözüm. x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları olmak üzere, $n = 0,1,2,...$ için

$$x_1 = \frac{1+x_0}{x_{-1}}$$

$$x_2 = \frac{1+x_1}{x_0} = \frac{1+\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}}{x_0} = \frac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}$$

$$x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+\dfrac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}}{\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}} = \frac{1+x_{-1}}{x_0}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+\dfrac{1+x_{-1}}{x_0}}{\dfrac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}} = x_{-1}$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+x_{-1}}{\dfrac{1+x_{-1}}{x_0}} = x_0$$

$$x_6 = \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+x_0}{x_{-1}} = x_1$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \frac{1+\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}}{x_0} = \frac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0} = x_2$$

$$x_8 = \frac{1+x_7}{x_6} = \frac{1+\dfrac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}}{\dfrac{1+x_0}{x_{-1}}} = \frac{1+x_{-1}}{x_0} = x_3$$

$$x_9 = \frac{1+x_8}{x_7} = \frac{1+\dfrac{1+x_{-1}}{x_0}}{\dfrac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}} = x_{-1} = x_4$$

$$x_{10} = \frac{1+x_9}{x_8} = \frac{1+x_{-1}}{\dfrac{1+x_{-1}}{x_0}} = x_0 = x_5$$

$$\vdots$$

olup bu şekilde devam edilirse

$$x_n = \left\{ x_{-1}, x_0, \frac{1+x_0}{x_{-1}}, \frac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}, \frac{1+x_{-1}}{x_0}, x_{-1}, x_0, \frac{1+x_0}{x_{-1}}, \frac{1+x_{-1}+x_0}{x_{-1}x_0}, \frac{1+x_{-1}}{x_0}, \ldots \right\}$$

şeklinde çözümler elde edilir. Sonuç olarak, verilen denklemin her çözümünün 5 periyotlu olduğu görülür.

(2.17) de verilen f fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyonun kısmi türevlerinin $\bar{x}$ denge noktasındaki değerleri

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{x}) \quad \text{ve} \quad q = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{x}) \tag{2.20}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = p y_n + q y_{n-1} \tag{2.21}$$

denklemine (2.17) fark denkleminin *“$\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineerleştirilmiş denklemi”* denir. (2.21) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \tag{2.22}$$

şeklindedir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Teorem 2.2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

a. Eğer (2.22) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1 den küçük ise, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *"lokal asimptotik kararlıdır."*

b. Eğer (2.22) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1 den büyük ise, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *"kararsızdır."*

c. (2.22) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1 den küçük olması için gerek ve yeter şart $|p| < 1 - q < 2$ olmasıdır. Bu durumda, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *"lokal asimptotik kararlıdır."*

d. (2.22) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1 den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|q| > 1$ ve $|p| < |1-q|$ olmasıdır. Bu durumda, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *"repellerdir."*

e. (2.22) denkleminin bir kökünün mutlak değerce 1 den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1 den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $p^2 + 4q > 0$ ve $|p| > |1-q|$ olmasıdır. Bu durumda, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası *"kararsızdır"* ve $\bar{x}$ e *"eyer noktası"* denir.

f. (2.22) denkleminin iki kökünün mutlak değerce birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart $|p| = |1-q|$ veya $q = -1$ ve $|p| \le 2$ olmasıdır. Bu durumda, (2.17) denkleminin $\bar{x}$ denge noktasına *"hiperbolik olmayan nokta"* denir (Kulenović ve Ladas, 2002).

Tanım 2.2.4. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \le x_n \le Q$ olacak şekilde P ve Q sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *"sınırlıdır"* denir (Camouzis ve Ladas, 2007).

Teorem 2.2.3. (Clark Teoremi) $p, q \in \mathbb{R}$ ve $k, n \in \{1, 2, ...\}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0 \tag{2.23}$$

fark denkleminin denge noktasının lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p|+|q|<1$ olmasıdır (Elaydi, 2005).

Örnek 2.2.3.

$$x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{3}x_{n-2}=0,\ \ x_{-2},x_{-1},x_0\in\mathbb{R} \tag{2.24}$$

üçüncü mertebeden lineer fark denkleminin $\bar{x}=0$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm. Verilen denklemin tek denge noktasının $\bar{x}=0$ olduğu kolayca görülebilir. Clark Teoremine göre,

$$\left|\frac{1}{2}\right|+\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{5}{6}<1$$

olup $\bar{x}=0$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Lemma 2.2.1. $F=(f,g)$ fonksiyonu, açık bir $D\in\mathbb{R}^2$ kümesinde tanımlı, sürekli ve diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun.

i. $J_F\left((\bar{u},\bar{v})\right)$ Jakobiyen matrisinin özdeğerlerini veren

$$\lambda^2-TrJ_F\left((\bar{u},\bar{v})\right)\lambda+DetJ_F\left((\bar{u},\bar{v})\right)=0 \tag{2.25}$$

karakteristik denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1 den küçük ise

$$\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n,v_n), \\ v_{n+1}=g(u_n,v_n), \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}_0 \tag{2.26}$$

denkleminin $(\bar{u},\bar{v})$ denge noktası, lokal asimptotik kararlıdır.

ii. (2.25) karakteristik denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce birden küçük olması için gerek ve yeter şart

$$\left|TrJ_F\left(\left(\overline{u},\overline{v}\right)\right)\right| < 1 + DetJ_F\left(\left(\overline{u},\overline{v}\right)\right) < 2 \tag{2.27}$$

olmasıdır (Hu ve Xia, 2014).

Teorem 2.2.4.

$$P(z) = z^3 - \alpha z^2 - \beta z - \gamma = 0 \tag{2.28}$$

kübik denkleminin diskriminantı

$$\Delta = -\alpha^2\beta^2 - 4\beta^3 + 4\alpha^3\gamma + 27\gamma^2 + 18\alpha\beta\gamma \tag{2.29}$$

şeklinde verilir. Bu durumda, aşağıdakiler doğrudur.

a. $\Delta < 0$ ise P polinomunun ρ_1, ρ_2, ρ_3 gibi üç farklı reel kökü vardır.

b. $\Delta = 0$ ise iki durum vardır.

i. $\beta = \frac{-\alpha^2}{3}$ ve $\gamma = \frac{\alpha^3}{27}$ ise P polinomunun üç katlı bir $\rho = \frac{\alpha}{3}$ kökü vardır.

ii. $\beta \neq \frac{-\alpha^2}{3}$ veya $\gamma \neq \frac{\alpha^3}{27}$ ise P polinomunun çift katlı bir ρ kökü ve basit bir r kökü vardır.

c. $\Delta > 0$ ise P polinomunun bir tane reel ρ kökü ve iki tane kompleks ve eşlenik olan $re^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0,\pi)$ kökü vardır (Raouf, 2012).

3. KAYNAK ARAŞTIRMASI

3.1. Fark Denklemleri Üzerine Yapılmış Çalışmalar

Bu kısımda, çeşitli tipteki lineer olmayan fark denklemlerinin çözümleri, çözümlerin periyodikliği, sınırlılığı ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili son yıllarda yapılmış bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Camouzis ve arkadaşları (1994), yaptıkları çalışmada; $\beta \in (0,\infty)$ ve başlangıç koşulları x_{-1}, x_0 keyfi pozitif sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\beta x_n^2}{1+x_{n-1}^2}$ fark denkleminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Philos ve arkadaşları (1994), yaptıkları çalışmada; a ve b_k $(k=1,2,\ldots,m)$ negatif olmayan reel sayılar ve $B \equiv \sum_{k=1}^{m} b_k > 0$ olmak üzere, $x_{n+1} = a + \sum_{k=1}^{m} \dfrac{b_k}{x_{n-k}}$ denkleminin tüm pozitif çözümlerinin denge noktasına çekilip çekilmediğini araştırmışlardır.

DeVault ve arkadaşları (1997), yaptıkları çalışmada; A, B, p, q pozitif parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{A}{x_n^p} + \dfrac{B}{x_{n-1}^q}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlı olabilmesi için gerek ve yeter koşulları incelemişlerdir.

Feuer ve arkadaşları (1997), yaptıkları çalışmada; başlangıç koşulları sıfırdan farklı reel sayılar ve B parametresi reel bir sayı olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + B}{x_{n-1}}$ Lyness tipi fark denkleminin davranışını incelemişlerdir.

Zheng (1997), yaptığı çalışmada; $\alpha \in (0,1) \cup (1,\infty)$ iken $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + x_n}{x_{n-1}}$ denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik olmadığını göstermiştir.

DeVault ve arkadaşları (1998), yaptıkları çalışmada; $A>0$ ve x_{-2},x_{-1},x_0 başlangıç koşulları için $x_{n+1}=\dfrac{A}{x_n}+\dfrac{1}{x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin 2 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Kosmala ve arkadaşları (2000), yaptıkları çalışmada; pozitif parametreler ve başlangıç koşulları ile $y_{n+1}=\dfrac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini ve pozitif denge noktasının global kararlılığını incelemişlerdir.

Kulenović ve arkadaşları (2001), yaptıkları çalışmada; $\alpha,\ \beta$ ve A pozitif parametreler, x_{-1} ve x_0 negatif olmayan başlangıç koşulları olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{\alpha x_n+\beta x_{n-1}}{A+x_{n-1}}$ lineer olmayan rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık karakterini, periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Camouzis ve DeVault (2003), yaptıkları çalışmada; sıfırdan farklı başlangıç koşulları ve p parametresi için, $x_{n+1}=p+\dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin yasaklı kümesini araştırmışlar ve sıfıra yakınsayan çözümlerinin varlığını göstermişlerdir.

Chatterjee ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada; x_{-2},x_{-1},x_0 başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar ve α,γ,A,B parametreler olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{\alpha+\gamma x_{n-1}}{A+Bx_n+x_{n-2}}$ fark denkleminin çözümlerinin global kararlılığını, sınırlılığını ve periyodik karakterini incelemişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada; α,β pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{-\alpha x_{n-1}}{\beta\pm x_n}$ fark denklemlerinin sıfır denge noktalarının global çekimli olduğunu göstermişlerdir.

Yan ve Li (2003), yaptıkları çalışmada; $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişler ve tek pozitif denge noktasının global çekici olabilmesi için gerekli olan şartları belirlemişlerdir.

Çinar (2004a), yaptığı çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini incelemiş ve

$$x_n = \begin{cases} x_{-1} \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} \left(2x_{-1}x_0 i + 1\right)}{\prod\limits_{i=0}^{[(n+1)/2]-1} \left(\left(2i+1\right)x_{-1}x_0 + 1\right)}, & n \text{ tek ise} \\ x_0 \dfrac{\prod\limits_{i=0}^{n/2} \left(\left(2i-1\right)x_{-1}x_0 + 1\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n/2} \left(2ix_{-1}x_0 + 1\right)}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

genel çözümünü elde etmiştir.

Çinar (2004b, 2004c), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları altında $a, b > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-1}}{1 + bx_n x_{n-1}}$ fark denkleminin, ikincisinde ise $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{1 + ax_n x_{n-1}}$ fark denkleminin genel çözümlerini elde etmiştir.

El Afifi (2004), yaptığı çalışmada; negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca, bu denklemin yarı döngü ve değişmez aralık analizini yapmıştır.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004), yaptıkları çalışmada; $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ve $\gamma > \beta$ için $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$ fark denkleminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Kulenović ve arkadaşları (2004), yaptıkları çalışmada; başlangıç koşulları pozitif ve p_n parametresi pozitif değerli iki periyotlu bir dizi olmak üzere, $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini, sınırlılık karakterini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Berenhaut ve Stević (2005), yaptıkları çalışmada; $x_{-4}, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0 > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_{n-3} x_{n-4}}$ fark denkleminin çözümlerinin 3 periyotlu çözümlere yakınsadığını göstermişlerdir.

Gibbons ve Overdeep (2005), yaptıkları çalışmada; iki periyotlu negatif olmayan parametreler ve pozitif başlangıç koşulları ile $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n + \gamma_n x_{n-1}}{A_n + B_n x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2005), yaptıkları çalışmada; k bir tek tam sayı ve p_n, $k+1$ periyotlu pozitif bir dizi olmak üzere, $x_{n+1} = p_n + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, periyodikliğini ve çekimliliğini araştırmışlardır. Ayrıca, $k = 3$ için bu denklemin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Saleh ve Aloqeili (2005), yaptıkları çalışmada; $y_{-k}, y_{-k+1}, ..., y_0, A \in (0, \infty)$ ve $k \in \{2, 3, 4, ...\}$ olmak üzere, $y_{n+1} = A + \dfrac{y_{n-k}}{y_n}$ fark denkleminin tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını, çözümlerinin periyodikliğini ve yarı döngülerini incelemişlerdir.

Zeng ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $g(x)$; $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$ fark denkleminin global davranışını incelemişlerdir.

Sun ve Xi (2007), yaptıkları çalışmada; başlangıç koşulları $x_{-1}, x_0 \in (0, \infty)$ olmak üzere, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ pozitif çözümlerinin $\bar{x} = 2$ pozitif denge noktasına yakınsadığını göstermişlerdir.

Amleh ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; negatif olmayan parametreler ve negatif olmayan başlangıç koşulları altında $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n x_{n-1} + \gamma x_{n-1}}{A + B x_n x_{n-1} + C x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin ve bu denklemin bir çok özel durumlarının çözümlerinin global davranışını, periyodikliğini ve çözümlerinin sınırlılığını araştırmışlardır. Ayrıca, bu denklem için bazı açık problemler bırakmışlardır.

Elsayed (2008), yaptığı çalışmada; x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve a, b, c, d pozitif sabitler olmak üzere, $x_{n+1} = a x_n + \dfrac{b x_n x_{n-1}}{c x_n + d x_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemiştir. Ayrıca bu denklemin bazı özel durumlarının genel çözüm formlarını elde etmiştir.

Hu ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; $x_{-1}, x_0 \in [0, \infty)$ başlangıç koşulları, $\beta, \gamma, A, B, C \in (0, \infty)$ parametreler ve $x_{-1} + x_0 > 0$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + B x_n + C x_{n-1}}$ ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin asal iki periyotlu çözümlerinin olmaması durumunda, denklemin tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Elabbasy ve Elsayed (2009), yaptıkları çalışmada; $x_{-r}, x_{-r+1}, \ldots, x_0$ pozitif reel sayılar, $r = \max(l, k, p, q)$ negatif olmayan bir tam sayı ve a, b, c pozitif sabitler olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-l}x_{n-k}}{bx_{n-p}+cx_{n-q}}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemişlerdir. Ayrıca bu denklemin bazı özel durumlarının genel çözüm formlarını elde etmişlerdir.

Hamza ve Morsy (2009), yaptıkları çalışmada; $\alpha\in(0,\infty)$ ve $k\in(0,\infty)$ şartları altında $x_{n+1}=\alpha+\dfrac{x_{n-1}}{x_n^k}$ fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, global kararlılığını, salınımlılığını, periyodik doğasını incelemişlerdir.

Sedaghat (2009), yaptığı çalışmada; $a,b>0$ olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-1}}{x_nx_{n-1}+b}$ ve $x_{n+1}=\dfrac{ax_nx_{n-1}}{x_n+bx_{n-2}}$ rasyonel fark denklemlerinin tüm çözümlerinin global davranışını incelemiştir. Bu denklemlerin yarı-eşlenik bağıntılar vasıtasıyla birbiriyle bağlantılı olduğunu ve birinci mertebeden denklemlere indirgenebildiğini göstermiş ve bu özellikleri kullanarak, her bir denklemin tanımlanamayan çözümlerini veren başlangıç değerlerinin kümelerini belirlemiştir. Ayrıca, bu denklemlerin 2 periyotlu veya sınırsız çözümlere sahip olduklarını göstermiştir. Bazı durumlarda, başlangıç koşullarına bağlı olarak farklı türden çözümlerin olduğunu da söylemiştir.

Papaschinopoulos ve Stefanidou (2010), yaptıkları çalışmada; a pozitif bir reel sayı , $m,k\in\{1,2,...\}$ ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-m(k+1)+1}}{\prod_{s=0}^{k}x_{n-m(s+1)+1}+1}$$

$$x_{n+1}=\frac{ax_{n-2k-1}\prod_{s=0}^{k}x_{n-2s}}{\prod_{s=0}^{2k+1}x_{n-s}+\prod_{s=0}^{k}x_{n-2s}+\prod_{s=0}^{k}x_{n-2s-1}}$$

ve

$$x_{n+1} = \frac{ax_n x_{n-m(k+1)+1}}{x_n + x_{n-m(k+1)}}$$

rasyonel fark denklemlerinin periyodik çözümlerinin varlığını ve pozitif çözümlerin asimptotik davranışlarını incelemişlerdir. Ayrıca, söz konusu denklemlerin ortak özellikleri olarak homojen olmayan lineer bir denkleme indirgendiklerine dikkat çekmişlerdir.

Bajo ve Liz (2011), yaptıkları çalışmada; a, b reel parametrelerinin bütün değerleri için $(x_{-1}, x_0) \in \mathbb{R}^2$ herhangi başlangıç koşulları ve $n \geq 0$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{a + bx_n x_{n-1}}$ ikinci mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denkleminin çözümlerinin kararlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Dehghan ve arkadaşları (2011), yaptıkları çalışmada; x_0, x_{-1} başlangıç koşulları birer reel sayı olmak üzere, $x_{n+1} = a + \dfrac{b}{x_n} + \dfrac{c}{x_n x_{n-1}}$ ikinci mertebeden rasyonel fark denkleminin üçüncü mertebeden lineer bir fark denklemiyle ilişkili olduğunu göstermişlerdir. Bu ilişkiyi ve lineer denklemlerin özelliklerini kullanarak çözümlerin global davranışını incelemişlerdir. $a, b \geq 0$ ve $a + b, c > 0$ iken söz konusu denklemin tek pozitif denge noktasının kararlı ve global çekimli olduğunu göstermişlerdir.

Taşkara ve arkadaşları (2011), yaptıkları çalışmada; $k \in \mathbb{N}$ ve başlangıç koşulları $x_{-k-1}, x_{-k}, ..., x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{p_n x_{n-k} + x_{n-(k+1)}}{q_n + x_{n-(k+1)}}$ fark denkleminin $(k+1)$ periyotlu çözümlerin varlığı için gerek ve yeter şartları ve periyodik çözümlerin k parametresine bağlı formüllerini elde etmişlerdir.

Anisimova (2012), yaptığı çalışmada; β parametresi ve başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \beta + \dfrac{1}{x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılığını, lokal ve global kararlılığını ve periyodiklik karakterini araştırmıştır.

Drymonis ve arkadaşları (2012), yaptıkları çalışmada; $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, A_n, B_n, C_n$ parametreleri negatif olmayan periyodik diziler ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n + \beta_n x_n x_{n-1} + \gamma_n x_{n-1}}{A_n + B_n x_n x_{n-1} + C_n x_{n-1}}$ fark denkleminin bazı özel durumlarının çözümlerinin global kararlılığını, periyodik karakterini ve sınırlılık özelliğini araştırmışlardır.

Kulenović ve Mehuljić (2012), yaptıkları çalışmada; negatif olmayan parametreler ve $A + B + C > 0$ şartını sağlayan başlangıç koşulları ile, birkaç denge noktasına sahip olan $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n x_{n-1} + \gamma x_{n-1}}{A + B x_n x_{n-1} + C x_{n-1}}$ formundaki fark denkleminin global davranışını beş özel durumda araştırmışlardır. Özel durumlardan elde edilen beş denklemin dördünde, tek denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu ve beşinci denklem için, tek denge noktasının kararlı olduğunu, ancak asimptotik kararlı olmadığını ispatlamışlardır. Elde ettikleri sonuçlardan bazılarını ise genelleştirmişlerdir.

Anisimova ve Bula (2014), yaptıkları çalışmada; negatif olmayan parametreler ve keyfi, negatif olmayan başlangıç koşulları altında, payda her zaman pozitif olacak biçimde daha önce Amleh ve arkadaşlarının (2008) yaptığı çalışmadaki $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta x_n x_{n-1} + \gamma x_{n-1}}{A + B x_n x_{n-1} + C x_{n-1}}$ ikinci mertebeden kuadratik terimli rasyonel fark denklemini incelemişlerdir. Söz konusu fark denkleminin bazı özel durumlarını göz önünde bulundurmuşlar, Amleh ve arkadaşlarının ileri sürdükleri bazı varsayımları doğrulamışlar, onların verdikleri bazı açık problemleri çözmüşlerdir.

Taşdemir ve Soykan (2016), yaptıkları çalışmada; x_{-1} ve x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + \alpha$ lineer olmayan fark denkleminin periyodikliğini ve çözümlerinin davranışını incelenmişlerdir.

Stević ve arkadaşları (2018), yaptıkları çalışmada; a, b, c birer parametre, $c \neq 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları kompleks sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n} + \frac{c}{x_n x_{n-1}}$ lineer olmayan ikinci mertebeden fark denkleminin çözülebilirliğini araştırmışlardır.

Abo-Zeid (2019), yaptığı çalışmada; $\alpha > 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{\alpha}{x_n x_{n-1} - 1}$ fark denklemini çözmüştür. Bu denklemin çözümlerinin değişmez aralığını bulmuş ve global asimptotik kararlılığını incelemiştir. $\alpha > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken belirli koşullar altında, her bir çözümün periyodik olduğunu veya periyodik çözümlere yakınsadığını ya da çözümlerin yoğun olduğunu göstermiştir. Ayrıca, $\alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken negatif denge noktalarından birinin Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında kalan başlangıç noktaları ile başlayan tüm çözümlerinin çekim noktası olduğunu göstermiştir.

Gümüş ve Abo-Zeid (2019), yaptıkları çalışmada; $\alpha > 0$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 - x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin değişmez aralığını bulmuşlar, bu denklemin çözümlerinin global davranışını incelemişler, $\alpha < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken pozitif denge noktalarından birinin Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında kalan başlangıç noktaları ile başlayan tüm çözümlerinin çekim noktası olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca, $\alpha = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ iken denklemin tek pozitif denge noktası Lebesgue ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında kalan başlangıç noktaları ile başlayan tüm çözümlerinin çekim noktası olduğunu göstermişlerdir. Son olarak, $\alpha > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ olduğunda belirli koşullar altında, periyodik veya periyodik çözümlere yakınsayan çözümlerin varlığını göstermişler ve bazı örnekler vermişlerdir.

3.2. Fark Denklem Sistemleri Üzerine Yapılmış Çalışmalar

Bu kısımda, çeşitli tipteki fark denklem sistemlerinin çözümleri, çözümlerin periyotları, sınırlılığı ve global asimptotik kararlılığı ile ilgili son yıllarda yapılmış bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Schinas (1997), yaptığı çalışmada; $x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin üç genelleştirmesi olan

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}}$$

rasyonel formdaki fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin invaryantlarını vermiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), yaptıkları çalışmada; p ve q pozitif tam sayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan,

$$x_{n+1}=A+\frac{y_n}{x_{n-p}},\quad y_{n+1}=A+\frac{x_n}{y_{n-q}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlılığını ve sınırlılığını incelemişlerdir. Ayrıca, bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı üzerinde çalışmışlardır. Söz konusu fark denklem sisteminin denge noktasının $(c,c)=(1+A,\,1+A)$ şeklinde olduğunu elde etmişler ve $A\in(0,\infty)$ için denklem sisteminin çözümlerinin, bu denge noktasında salınımlı olduğunu göstermişlerdir. Aynı şartlar altında denklem sisteminin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde etmişler, $A>1$ olması durumunda ise denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Clark ve Kulenović (2002), yaptıkları çalışmada; a,b,c,d keyfi pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç koşulları negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a+cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b+dx_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını ve asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Kulenović ve Nurkanovic (2003), yaptıkları çalışmada; A ve B katsayıları $(0,\infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç koşulları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = Ax_n \frac{y_n}{1+y_n}, \quad y_{n+1} = By_n \frac{x_n}{1+x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılığını araştırmışlardır.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004), yaptıkları çalışmada; $i=-m,-m+1,...,0$ için x_i, y_i başlangıç koşulları pozitif reel sayılar ve m pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$x_{n+1} = 1+\frac{x_n}{y_{n-m}}, \quad y_{n+1} = 1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılığını, dirençliliğini ve global asimptotik davranışını incelemişlerdir.

Özban (2006), yaptığı çalışmada; k negatif olmayan bir tam sayı, m pozitif bir tam sayı ve $x_{-m}, x_{-m+1}, ..., x_0, y_{-m-k}, y_{-m-k+1}, ..., y_0$ başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodik doğasını araştırmıştır.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; $a \in (0, \infty)$ bir parametre ve $k = -1, 0$ için $z_k, t_k \in (0, \infty)$ başlangıç koşulları olmak üzere,

$$z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}, \quad t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin global asimptotik kararlı olması için bir yeter koşul elde etmişlerdir.

Kurbanlı (2011), yaptığı çalışmada; $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1}$ başlangıç koşulları $y_0 x_{-1} \neq 1$, $x_0 y_{-1} \neq 1$, $y_0 z_0 \neq 0$ şartlarını sağlayan reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{1}{y_n z_n}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini araştırmıştır.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011), yaptıkları çalışmada; başlangıç koşulları $y_0, y_{-1}, x_0, x_{-1} \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini araştırmışlardır.

Tollu ve arkadaşları (2013), yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \ , \qquad y_{n+1} = \frac{1}{-1+y_n}$$

biçiminde verilen iki özel tip fark denkleminin çözümlerinin Fibonacci sayılarıyla ilişkili olduğunu göstermişler ve bu denklemlerinin çözüm formlarını vermişlerdir.

Yazlık ve arkadaşları (2013), yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \pm 1}{y_n x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} \pm 1}{x_n y_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözüm formlarını incelemişler ve elde ettikleri bu çözüm formlarını Padovan sayıları ile ilişkilendirmişlerdir.

Tollu ve arkadaşları (2014), yaptıkları çalışmada; x_0 ve y_0 reel başlangıç koşulları ve p_n, q_n, r_n, s_n dizilerinin her biri ya x_n dizisini ya da y_n dizisini göstermek üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n}$$

fark denklemlerini incelemişleridir. Bu durumda, on altı muhtemel durumda ortaya çıkan sistemlerin on dördünü çözmüşlerdir. Bu on dört sistemin on iki tanesinin çözümlerinin Fibonacci sayıları ile ilişkili olduğunu bulmuşlardır.

Tollu ve Yalçınkaya (2018), yaptıkları çalışmada; $n \in \mathbb{N}_0$ için u_{-i}, v_{-i}, w_{-i} $(i = 0,1,2)$ başlangıç koşulları negatif olmayan reel sayılar, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ $(j = 1,2,3)$ parametreler ve p, q, r pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$u_{n+1} = \frac{\alpha_1 u_{n-1}}{\beta_1 + \gamma_1 v_{n-2}^{p}}, \quad v_{n+1} = \frac{\alpha_2 v_{n-1}}{\beta_2 + \gamma_2 w_{n-2}^{q}}, \quad w_{n+1} = \frac{\alpha_3 w_{n-1}}{\beta_3 + \gamma_3 u_{n-2}^{r}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global davranışını incelemişlerdir.

4. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1 + x_n x_{n-1}}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.1}$$

fark denkleminin pozitif çözümleri, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin durumuna göre iki kısımda ele alınmıştır. Birinci kısımda, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin sabit bir dizi olması durumunda (4.1) denkleminin pozitif çözümleri, ikinci kısımda ise $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin iki periyotlu bir dizi olması durumunda (4.1) denkleminin pozitif çözümleri incelenmiştir.

4.1. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha}{1 + x_n x_{n-1}}$ Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda (4.1) denkleminin çözümleri, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin sabit dizi olması durumunda incelenmiştir. Daha kesin olarak, her $n \geq 0$ için $\alpha_n = \alpha$ olduğu kabul edilmiştir.

Her $n \geq 0$ için, $\alpha_n = \alpha$ kabulünden dolayı (4.1) denklemi

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{1 + x_n x_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

denklemine indirgenir. (4.2) denklemi, Amleh ve arkadaşları (2008) tarafından çalışılmış olup yapılan çalışmada bu denklemin her çözümünün sonlu bir limite sahip olduğu varsayımında bulunmuşlardır. Elde ettikleri sonuçlar aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 4.1.1. $0 < \alpha \leq 2$ olsun. Bu durumda (4.2) denkleminin pozitif denge noktası, global asimptotik kararlıdır (Amleh ve arkadaşları, 2008).

Varsayım 4.1.1. (4.2) denkleminin her pozitif denge noktası, sonlu bir limit değerine yakınsar (Amleh ve arkadaşları, 2008).

Amleh ve arkadaşları (2008), (4.2) denkleminin pozitif denge noktasının sadece $0<\alpha\leq 2$ için global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Bu kısımda onların varsayımı, α parametresinin tüm pozitif değerleri için doğrulanacaktır.

(4.2) denkleminin tek pozitif denge noktasının α parametresinin tüm pozitif değerleri için lokal asimptotik kararlı olduğu Amleh ve arkadaşları (2008) tarafından gösterildi. Bu nedenle, burada sadece denge noktasının global çekimli olduğu gösterilerek global asimptotik kararlılık sonucu elde edilecektir.

Lemma 4.1.1. c pozitif bir reel sayı olmak üzere,

$$S(\lambda)=\lambda^3-c\lambda^2-c$$

kübik polinomunun pozitif reel kökü p ile kompleks köklerinin mutlak değeri olan r arasında

$$r=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

bağıntısı vardır.

İspat. Teorem 2.2.4.(c) ye göre, $S(\lambda)=0$ denkleminde $\Delta>0$ olduğundan bu denklemin bir reel p kökü ve iki kompleks eşlenik $z=re^{i\theta}$, $\overline{z}=re^{-i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$ kökleri vardır. Bu durumda $|z|=|\overline{z}|=r$ olup $z\overline{z}=r^2$ olduğu açıktır. Öte yandan p, $S(\lambda)$ polinomunun kökü olduğundan

$$p^3-cp^2-c=0$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, bu denklemde kökler çarpımı $c = pz\bar{z} = pr^2$ olup

$$p^3 - pr^2p^2 - pr^2 = 0$$

veya

$$r^2 = \frac{p^2}{1+p^2}$$

eşitliği yazılabilir. Buradan

$$r = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Sonuç 4.1.1. Lemma 4.1.1. den $r = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}} < p$ sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.2. (4.2) denkleminin her pozitif çözümü sonlu bir limit değerine yakınsar.

İspat. (4.2) denkleminde

$$x_n = \frac{z_{n-1}}{z_n} \tag{4.3}$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{\alpha}{1+\dfrac{z_{n-1}}{z_n}\dfrac{z_{n-2}}{z_{n-1}}} = \frac{\alpha z_n}{z_n + z_{n-2}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$z_{n+1}-\frac{1}{\alpha}z_n-\frac{1}{\alpha}z_{n-2}=0 \tag{4.4}$$

üçüncü mertebeden lineer homojen fark denklemi elde edilir. (4.4) denkleminin karakteristik denklemi

$$P(\lambda)=\lambda^3-\frac{1}{\alpha}\lambda^2-\frac{1}{\alpha}=0 \tag{4.5}$$

olup Teorem 2.2.4.(c) ye göre $\Delta>0$ olduğundan bir reel p kökü ve iki kompleks eşlenik $re^{\pm i\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$ kökleri vardır. Bu durumda (4.4) denkleminin genel çözümü;

$$z_n=c_1p^n+r^n\left(c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta\right),\quad n\geq -2 \tag{4.6}$$

şeklinde olur. Burada c_1,c_2,c_3 keyfi birer sabit sayıdır. (4.3) ve (4.6) dan (4.2) denkleminin genel çözümü

$$x_n=\frac{c_1p^{n-1}+r^{n-1}\left(c_2\cos(n-1)\theta+c_3\sin(n-1)\theta\right)}{c_1p^n+r^n\left(c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta\right)},\quad n\geq -1 \tag{4.7}$$

olarak bulunur.

(4.2) denkleminin bir denge noktası

$$P_1(\bar{x})=\bar{x}^3+\bar{x}-\alpha=0 \tag{4.8}$$

denkleminin bir köküdür. P_1 polinomunun tek reel kökü olan $\bar{x}$ ile (4.5) te verilen P polinomunun tek reel kökü olan p arasında

$$\bar{x}=\frac{1}{p} \tag{4.9}$$

bağıntısı vardır. Gerçekten, $P_1(\bar{x})$ polinomunda $\bar{x}=\dfrac{1}{p}$ yazılırsa

$$P_1(\bar{x})=\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p}-\alpha=-\frac{\alpha}{p^3}\left(p^3-\frac{1}{\alpha}p^2-\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{\alpha}{p^3}P(p)=0$$

elde edilir. Böylece $\bar{x}=\dfrac{1}{p}$ eşitliğinin doğru olduğu görülür.

Son olarak, (4.7) de verilen ifadenin $n\to\infty$ için limiti alınırsa (4.9) ve Sonuç 4.1.1. den

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{p^{n-1}}{p^n}\frac{c_1+\left(\dfrac{r}{p}\right)^{n-1}\left(c_2\cos(n-1)\theta+c_3\sin(n-1)\theta\right)}{c_1+\left(\dfrac{r}{p}\right)^{n}\left(c_2\cos n\theta+c_3\sin n\theta\right)}=\frac{1}{p}=\bar{x}$$

olduğu görülür. ■

Teorem 4.1.3. (4.2) denkleminin tek pozitif denge noktası, α parametresinin her pozitif değeri için global asimptotik kararlıdır.

4.2. $x_{n+1}=\dfrac{\alpha_n}{1+x_nx_{n-1}}$ Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda (4.1) denkleminin çözümleri, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin

$$\alpha_n=\begin{cases} a\ ,\ n\ \text{çift} \\ b\ ,\ n\ \text{tek}\end{cases}\quad \text{ve}\quad a>0,\ b>0,\ a\neq b$$

olacak şekilde tanımlı ve iki periyotlu bir dizi olması durumunda incelenmiştir. Daha kesin olarak bu kısımda, (4.1) denkleminin çözümlerinin sınırlılığı, lokal asimptotik kararlılığı, kapalı form çözümü, global asimptotik kararlılığı ve periyodik çözümleri ele alınmıştır. Burada x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılardır.

(4.1) denklemi

$$x_{2n+1} = \frac{\alpha_{2n}}{1+x_{2n}x_{2n-1}}, \quad x_{2n+2} = \frac{\alpha_{2n+1}}{1+x_{2n+1}x_{2n}} \tag{4.10}$$

biçiminde yazılabilir. (4.10) ifadesinde $n \geq 0$ için $\alpha_{2n} = a$ ve $\alpha_{2n+1} = b$ yazılırsa

$$x_{2n+1} = \frac{a}{1+x_{2n}x_{2n-1}}, \quad x_{2n+2} = \frac{b}{1+x_{2n+1}x_{2n}} \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.11) eşitliklerinde x_{2n+1} ifadesi ikinci denklemde yerine yazılıp düzenlenirse

$$x_{2n+2} = \frac{b}{1+x_{2n+1}x_{2n}} = \frac{b}{1+\dfrac{a}{1+x_{2n}x_{2n-1}}x_{2n}} = \frac{b\left(1+x_{2n}x_{2n-1}\right)}{1+x_{2n}x_{2n-1}+ax_{2n}} \tag{4.12}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$x_{2n+1} = \frac{a}{1+x_{2n}x_{2n-1}}, \quad x_{2n+2} = \frac{b\left(1+x_{2n}x_{2n-1}\right)}{1+x_{2n}x_{2n-1}+ax_{2n}} \tag{4.13}$$

eşitliklerinde

$$x_{2n-1} = u_n, \quad x_{2n} = v_n, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.14}$$

dönüşümleri uygulanırsa,

$$u_{n+1} = \frac{a}{1+u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{b\left(1+u_n v_n\right)}{1+u_n v_n + a v_n} \tag{4.15}$$

denklem sistemi elde edilir. Bundan sonraki kısımlarda yerine göre (4.1) denklemi, yerine göre de (4.15) denklem sistemi ele alınacaktır.

4.2.1. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1+x_n x_{n-1}}$ denkleminin sınırlılığı

Bu kısımda, (4.1) de verilen denklemin sınırlılığı incelenmiştir.

Lemma 4.2.1.1. (4.1) denkleminin her çözümü sınırlıdır.

İspat. (4.1) de verilen $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1+x_n x_{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}_0$ denkleminde her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{1+x_n x_{n-1}} \leq \alpha_n \tag{4.16}$$

olduğu açıktır. Buradan hareketle $x_{2n+1} \leq a$ ve $x_{2n+2} \leq b$ olduğu rahatlıkla görülebilir. Ayrıca (4.1) ve (4.16) dan her $n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = \frac{\alpha_n}{1+x_n x_{n-1}} \geq \frac{\alpha_n}{1+ab}$$

dir. Buradan hareketle, her $n \geq 1$ için

$$x_{2n+1} = \frac{\alpha_{2n}}{1+x_{2n} x_{2n-1}} = \frac{a}{1+x_{2n} x_{2n-1}} \geq \frac{a}{1+ab}$$

ve

$$x_{2n+2} = \frac{\alpha_{2n+1}}{1+x_{2n+1} x_{2n}} = \frac{b}{1+x_{2n+1} x_{2n}} \geq \frac{b}{1+ab}$$

elde edilir. Sonuç olarak her $n \geq 0$ için

$$\frac{a}{1+ab} \le x_{2n+1} \le a \tag{4.17}$$

ve

$$\frac{b}{1+ab} \le x_{2n+2} \le b \tag{4.18}$$

olarak bulunur. O halde (4.1) denkleminin her çözümü sınırlıdır. ■

4.2.2. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1+x_n x_{n-1}}$ denkleminin lokal asimptotik kararlılığı

Bu kısımda, (4.15) denklem sisteminin $(\bar{u},\bar{v})$ pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Lemma 4.2.2.1. (4.15) denklem sistemi, $\left(\dfrac{a}{1+ab}, a\right) \times \left(\dfrac{b}{1+ab}, b\right)$ aralığında bir tek pozitif denge noktasına sahiptir.

İspat. (4.15) de verilen denklem sisteminin denge noktaları

$$\bar{u} = \frac{a}{1+\overline{uv}}, \quad \bar{v} = \frac{b\left(1+\overline{uv}\right)}{1+\overline{uv}+a\bar{v}} \tag{4.19}$$

cebirsel sisteminin çözümleridir. (4.19) sisteminin birinci denkleminden

$$1+\overline{uv} = \frac{a}{\bar{u}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, (4.19) sistemin ikinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\bar{v} = \frac{b}{a}\bar{u} \tag{4.20}$$

eşitliği elde edilir. (4.20) eşitliği, $\bar{u} = \dfrac{a}{1+\bar{u}\bar{v}}$ ifadesinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u} - \frac{a^2}{b} = 0 \tag{4.21}$$

denklemi elde edilir. Şimdi,

$$P(\bar{u}) = \bar{u}^3 + \frac{a}{b}\bar{u} - \frac{a^2}{b} \tag{4.22}$$

olsun. (4.22) polinomunda

$$P(a) = a^3 + \frac{a^2}{b} - \frac{a^2}{b} = a^3 > 0 \tag{4.23}$$

ve

$$P\left(\frac{a}{1+ab}\right) = \frac{a^3}{(1+ab)^3} + \frac{a}{b}\frac{a}{1+ab} - \frac{a^2}{b} = -\frac{a^2}{b}\frac{ab\left((1+ab)^2 - 1\right)}{(1+ab)^3} < 0 \tag{4.24}$$

olur. Ayrıca,

$$P'(\bar{u}) = 3\bar{u}^2 + \frac{a}{b} > 0 \tag{4.25}$$

dır. Bu durumda $P(\bar{u})$ polinomu monoton artandır. O halde $P(\bar{u})$ polinomu, $\left(\dfrac{a}{1+ab}, a\right)$ aralığında bir tek köke sahiptir. Diğer taraftan (4.20) den

$$\frac{b}{a}\bar{u} = \bar{v} \in \left(\frac{b}{a}\frac{a}{1+ab}, \frac{b}{a}a\right) = \left(\frac{b}{1+ab}, b\right)$$

olarak bulunur. Bu nedenle, (4.15) sistemi $\left(\frac{a}{1+ab},a\right)\times\left(\frac{b}{1+ab},b\right)$ aralığında $(\bar{u},\bar{v})=\left(\bar{u},\frac{b}{a}\bar{u}\right)$ şeklinde bir tek pozitif denge noktasına sahiptir. ■

Teorem 4.2.2.1. (4.15) denklem sisteminin tek pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.15) denklem sistemine karşılık gelen

$$F:\left(\frac{a}{1+ab},a\right)\times\left(\frac{b}{1+ab},b\right)\to\left(\frac{a}{1+ab},a\right)\times\left(\frac{b}{1+ab},b\right)$$

$$F\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{1+xy}\\ \dfrac{b(1+xy)}{1+xy+ay}\end{pmatrix}$$

fonksiyonu tanımlansın. F fonksiyonunun Jakobiyen matrisi

$$J_F(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{-ay}{(1+xy)^2} & \dfrac{-ax}{(1+xy)^2}\\ \dfrac{aby^2}{(1+xy+ay)^2} & \dfrac{-ab}{(1+xy+ay)^2}\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Dolayısıyla, F fonksiyonunun $\left(\bar{u},\frac{b}{a}\bar{u}\right)$ denge noktası üzerindeki Jakobiyen matrisi ise

$$J_F(\bar{u},\bar{v})=\begin{bmatrix}\dfrac{-b\bar{u}^3}{a^2} & \dfrac{-\bar{u}^3}{a}\\ \dfrac{b^3\bar{u}^6}{a^5} & \dfrac{-b\bar{u}^4}{a^3}\end{bmatrix}$$

olur. Bu Jakobiyen matrisin karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=\lambda^2+\frac{a^4b\overline{u}^3+a^3b\overline{u}^4}{a^6}\lambda+\frac{ab^2\overline{u}^7+b^3\overline{u}^9}{a^6}$$

biçiminde bulunur.

$$\lambda^2+\frac{a^4b\overline{u}^3+a^3b\overline{u}^4}{a^6}\lambda+\frac{ab^2\overline{u}^7+b^3\overline{u}^9}{a^6}=0$$

karakteristik denkleminde Lemma 2.2.1.(ii) ye göre

$$\left|\frac{a^4b\overline{u}^3+a^3b\overline{u}^4}{a^6}\right|<1+\frac{ab^2\overline{u}^7+b^3\overline{u}^9}{a^6}<2 \tag{4.26}$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanmış olur. Şimdi bu eşitsizliğin sağlandığını gösterelim:

(4.21) ifadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$b\overline{u}^3+a\overline{u}-a^2=0$$

$$b\overline{u}^3=a^2-a\overline{u}=a(a-\overline{u}) \tag{4.27}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, (4.26) ifadesinin ilk kısmı

$$\frac{a^4b\overline{u}^3+a^3b\overline{u}^4}{a^6}<1+\frac{ab^2\overline{u}^7+b^3\overline{u}^9}{a^6}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu eşitsizliği çözelim.

$$a^4b\overline{u}^3+a^3b\overline{u}^4<a^6+ab^2\overline{u}^7+b^3\overline{u}^9$$
$$a^3b\overline{u}^3(a+\overline{u})<a^6+\left(b\overline{u}^3\right)^2\left(a\overline{u}+b\overline{u}^3\right)$$

elde edilir. Burada (4.27) ifadesi kullanılırsa

$$a^4\left(a^2-\bar{u}^2\right)<a^6+a^4\left(a-\bar{u}\right)^2$$

$$a^2-\bar{u}^2<a^2+\left(a-\bar{u}\right)^2$$

$$-\bar{u}^2<\left(a-\bar{u}\right)^2$$

$$0<\left(a-\bar{u}\right)^2+\bar{u}^2$$

ifadesi elde edilir ki bu durumun daima sağlandığı aşikardır. Yine, (4.26) ifadesinin ikinci kısmı

$$1+\frac{ab^2\bar{u}^7+b^3\bar{u}^9}{a^6}<2$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu eşitsizliği çözelim.

$$ab^2\bar{u}^7+b^3\bar{u}^9<a^6$$

$$\left(b\bar{u}^3\right)^2\left(a\bar{u}+b\bar{u}^3\right)<a^6$$

elde edilir. Burada (4.27) ifadesi kullanılırsa

$$a^4\left(a-\bar{u}\right)^2<a^6$$

$$\left(a-\bar{u}\right)^2<a^2$$

$$\left|a-\bar{u}\right|<a$$

$$0<\bar{u}<2a \qquad (4.28)$$

elde edilir. (4.28) deki $\bar{u}<2a$ ifadesi (4.21) de kullanılırsa

$$8a^3+\frac{a}{b}2a-\frac{a^2}{b}>0$$

$8a^3b + a^2 > 0$

$a^2\left(8ab+1\right) > 0$

$8ab+1 > 0$

elde edilir ki bu durumun da daima sağlandığı aşikardır. O halde, (4.15) denklem sisteminin tek pozitif denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. ■

4.2.3. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1 + x_n x_{n-1}}$ denkleminin kapalı form çözümü

Bu kısımda, (4.1) de verilen denklemin kapalı form çözümleri elde edilmiştir.

(4.1) denklemine

$$x_n = \frac{z_{n-1}}{z_n} \tag{4.29}$$

değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$z_{n+1} - \frac{1}{\alpha_n} z_n - \frac{1}{\alpha_n} z_{n-2} = 0, \;\; n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.30}$$

üçüncü mertebeden lineer bir fark denklemi elde edilir. Burada $z_0 = 1$, $z_{-1} = x_0$ ve $z_{-2} = x_0 x_{-1}$ dir. (4.30) denklemi

$$z_{2n+1} - \frac{1}{a} z_{2n} - \frac{1}{a} z_{2n-2} = 0 \tag{4.31}$$

ve

$$z_{2n+2} - \frac{1}{b} z_{2n+1} - \frac{1}{b} z_{2n-1} = 0 \tag{4.32}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda, (4.31) eşitliği (4.32) de kullanılırsa, her $n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$z_{2n+4} - \frac{1}{ab} z_{2n+2} - \frac{2}{ab} z_{2n} - \frac{1}{ab} z_{2n-2} = 0 \tag{4.33}$$

denklemi elde edilir. (4.33) denkleminin karakteristik denklemi

$$P_1(\lambda) = \lambda^6 - \frac{1}{ab}\lambda^4 - \frac{2}{ab}\lambda^2 - \frac{1}{ab} = 0 \tag{4.34}$$

şeklinde olur. Bu karakteristik denklem

$$\left(\lambda^3 - \frac{1}{\sqrt{ab}}\lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)\left(\lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{ab}}\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$Q(\lambda) = \lambda^3 - \frac{1}{\sqrt{ab}}\lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} \tag{4.35}$$

ve

$$R(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{\sqrt{ab}}\lambda^2 + \frac{1}{\sqrt{ab}} \tag{4.36}$$

olmak üzere,

$$P_1(\lambda) = Q(\lambda)R(\lambda)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıca, $Q(\lambda)$ ve $R(\lambda)$ polinomları için $Q(-\lambda) = -R(\lambda)$ ilişkisinin varlığı da açıkça görülebilir. Yani λ, R polinomunun bir kökü ise $-\lambda$ da Q polinomunun bir köküdür. Öte yandan,

$$w_{n+1}-\frac{1}{ab}w_n-\frac{2}{ab}w_{n-1}-\frac{1}{ab}w_{n-2}=0 \tag{4.37}$$

üçüncü mertebeden lineer fark denklemini ele alalım. (4.37) denkleminin karakteristik denklemi

$$P_1\left(\sqrt{\mu}\right)=\mu^3-\frac{1}{ab}\mu^2-\frac{2}{ab}\mu-\frac{1}{ab}=0$$

şeklindedir. Teorem 2.2.4.(c) den $P_1\left(\sqrt{\mu}\right)=0$ denkleminin biri reel, ikisi kompleks eşlenik olan üç kökü vardır. $\mu=\lambda^2$ olduğundan bu kökler sırasıyla p^2 ve $r^2e^{\pm i2\theta}$, $\theta\in(0,\pi)$ şeklindedir. Ayrıca a ve b reel sayıları için $ab>0$ ve $\mu^3=\frac{1}{ab}(\mu+1)^2$ olduğundan μ kökünün pozitif olduğu görülebilir. Bu durumda c_1,c_2,c_3 keyfi sabitler olmak üzere, (4.37) denkleminin genel çözümü

$$w_{n-1}=c_1p^{2n}+r^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta+c_3\sin 2n\theta\right),\ n\geq -1 \tag{4.38}$$

şeklindedir. Burada, (4.33) denkleminin genel çözümü (4.37) denkleminin genel çözümüne karşılık gelir. Bu durumda, $w_{n-1}=z_{2n}$ olduğundan (4.33) denkleminin genel çözümü

$$z_{2n}=c_1p^{2n}+r^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta+c_3\sin 2n\theta\right),\ n\geq -1 \tag{4.39}$$

şeklinde olur. (4.29) değişken değiştirmesine göre başlangıç koşulları olarak $z_0=1$, $z_{-1}=x_0$ ve $z_{-2}=x_0x_{-1}$ kabul edilmişti. (4.31) ve (4.32) ifadelerinden

$$z_2=\frac{1}{ab}\left(1+x_0x_{-1}\right)+\frac{1}{b}x_0$$

elde edilir. (4.39) denkleminden

$$z_{-2}=x_0x_{-1}=\frac{c_1}{p^2}+\frac{1}{r^2}\left(c_2\cos 2\theta-c_3\sin 2\theta\right)$$

$$z_0=1=c_1+c_2$$

$$z_2=\frac{1}{ab}\left(1+x_0x_{-1}\right)+\frac{1}{b}x_0=c_1p^2+r^2\left(c_2\cos 2\theta+c_3\sin 2\theta\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden c_1,c_2,c_3 keyfi sabitleri çözülürse,

$$c_1=\frac{p^2}{ab}\frac{\left(abr^4+1\right)x_0x_{-1}+ax_0-2abr^2\cos 2\theta+1}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos 2\theta}$$

$$c_2=\frac{\left(ab-p^2\right)}{ab}\frac{\left(abr^4+1\right)x_0x_{-1}+ax_0-2abr^2\cos 2\theta+1}{p^4+r^4-2p^2r^2\cos 2\theta}$$

$$c_3=\frac{\cos 2\theta\left(abp^4+p^2\left(abr^4x_0x_{-1}-ax_0-x_0x_{-1}-1\right)-abr^4\right)-r^2\left(abp^4x_0x_{-1}-ax_0-x_0x_{-1}-1\right)}{ab\sin 2\theta\left(p^4+r^4-2p^2r^2\cos 2\theta\right)}$$

olarak bulunur. Öte yandan (4.31) denkleminde z_{2n} ve z_{2n-2} ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$z_{2n+1}=\frac{1}{a}z_{2n}+\frac{1}{a}z_{2n-2}$$

$$\begin{aligned}z_{2n+1}&=\frac{1}{a}\left(c_1p^{2n}+r^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta+c_3\sin 2n\theta\right)\right)\\&+\frac{1}{a}\left(c_1p^{2n-2}+r^{2n-2}\left(c_2\cos\left(2n-2\right)\theta+c_3\sin\left(2n-2\right)\theta\right)\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$z_{2n+1}=c_1\frac{p^2+1}{a}p^{2n-2}+\frac{r^{2n}}{a}\left(c_2'\cos 2n\theta+c_3'\sin 2n\theta\right),\ n\geq -1 \tag{4.40}$$

ifadesi bulunur. Buradaki c_2' ve c_3' keyfi sabitleri

$$c_2' = \frac{c_2\left(r^2+\cos 2\theta\right)-c_3\sin 2\theta}{r^2} \quad \text{ve} \quad c_3' = \frac{c_3\left(r^2+\cos 2\theta\right)+c_2\sin 2\theta}{r^2}$$

biçimindedir. Ayrıca p, Q polinomunun bir kökü olduğundan $Q(p)=0$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$\frac{p^2+1}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}\,p^3 \tag{4.41}$$

eşitliği elde edilir. (4.41) eşitliği, (4.40) genel çözümünde yerine yazılırsa,

$$z_{2n+1} = c_1\sqrt{\frac{b}{a}}\,p^{2n+1} + \frac{r^{2n}}{a}\left(c_2'\cos 2n\theta + c_3'\sin 2n\theta\right),\ n \geq -1 \tag{4.42}$$

sonucu bulunur.

O halde, (4.29) değişken değiştirmesinden ve (4.39) ile (4.42) eşitliklerinden her $n \geq 0$ için (4.1) denkleminin kapalı formdaki çözümü;

$$x_{2n-1} = \frac{c_1 p^{2n-2} + r^{2n-2}\left(c_2\cos(2n-2)\theta + c_3\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}\,p^{2n-1} + \frac{r^{2n-2}}{a}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta + c_3'\sin(2n-2)\theta\right)} \tag{4.43}$$

ve

$$x_{2n} = \frac{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}\,p^{2n-1} + \frac{r^{2n-2}}{a}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta + c_3'\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1 p^{2n} + r^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta + c_3\sin 2n\theta\right)} \tag{4.44}$$

şeklinde yazılabilir.

4.2.4. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1 + x_n x_{n-1}}$ denkleminin global asimptotik kararlılığı

Bu kısımda, (4.15) denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Teorem 4.2.4.1. (4.15) denklem sisteminin tek pozitif denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. Teorem 4.2.2.1. den (4.15) denklem sisteminin pozitif denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğunu biliyoruz. Global asimptotik kararlı olduğunu göstermek için

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \bar{u} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} v_n = \bar{v}$$

olduğunu veya (4.14) dikkate alınarak,

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \bar{u} \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} x_{2n} = \bar{v}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Burada $\bar{u}$, (4.22) ile verilen $P(\bar{u}) = \bar{u}^3 + \dfrac{a}{b}\bar{u} - \dfrac{a^2}{b}$ polinomunun tek reel köküdür. Ayrıca, P polinomunun $\bar{u}$ kökü ile (4.35) de verilen Q polinomunun p kökü arasında,

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{a}{b}\frac{1}{p}} \tag{4.45}$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntının doğruluğunu göstermek için, $P\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}\dfrac{1}{p}}\right) = 0$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir. Gerçekten,

$$P\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{p}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{p^3}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{p}-\frac{a^2}{b}=-\frac{a^2}{b}\frac{1}{p^3}\left(p^3-\frac{1}{\sqrt{ab}}p^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)=-\frac{a^2}{b}\frac{1}{p^3}Q(p)=0$$

olduğu görülür. Buradan hareketle, (4.43) ve (4.44) de verilen ifadelerin $n\to\infty$ için limitleri alınırsa (4.45) ve Sonuç 4.1.1. kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_1p^{2n-2}+r^{2n-2}\left(c_2\cos(2n-2)\theta+c_3\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}p^{2n-1}+\frac{r^{2n-2}}{a}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta+c_3'\sin(2n-2)\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p^{2n-2}}{p^{2n-1}}\frac{c_1+\left(\frac{r}{p}\right)^{2n-2}\left(c_2\cos(2n-2)\theta+c_3\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}+\left(\frac{r}{p}\right)^{2n-1}\frac{1}{ar}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta+c_3'\sin(2n-2)\theta\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{a}{b}}\frac{1}{p}=\bar{u}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}p^{2n-1}+\frac{r^{2n-2}}{a}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta+c_3'\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1p^{2n}+r^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta+c_3\sin 2n\theta\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{p^{2n-1}}{p^{2n}}\frac{c_1\sqrt{\frac{b}{a}}+\left(\frac{r}{p}\right)^{2n-1}\frac{1}{ar}\left(c_2'\cos(2n-2)\theta+c_3'\sin(2n-2)\theta\right)}{c_1+\left(\frac{r}{p}\right)^{2n}\left(c_2\cos 2n\theta+c_3\sin 2n\theta\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{p}=\frac{b}{a}\bar{u}=\bar{v}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2.5. $x_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{1 + x_n x_{n-1}}$ denkleminin periyodik çözümleri

Bu kısımda, (4.1) de verilen denklemin periyodik çözümlerinin varlığı incelenmiştir.

Teorem 4.2.5.1. (4.1) denklemi

$$\left\{ \dots, \bar{u}, \frac{b}{a}\bar{u}, \bar{u}, \frac{b}{a}\bar{u}, \dots \right\} \tag{4.46}$$

şeklinde verilen pozitif iki periyotlu çözümlere sahiptir.

İspat. (4.1) denklemi

$$\{ \dots, \phi, \psi, \phi, \psi, \dots \}$$

şeklinde iki periyotlu çözümlere sahip olsun. (4.11) den

$$\phi = \frac{a}{1+\phi\psi}, \quad \psi = \frac{b}{1+\phi\psi} \tag{4.47}$$

olarak ifade edilebilir. (4.47) den

$$\psi = \frac{b}{a}\phi \tag{4.48}$$

olduğu kolayca görülebilir. (4.48) eşitliği, (4.47) ifadesinde yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$P(\phi) = \phi^3 + \frac{a}{b}\phi - \frac{a^2}{b} = 0 \tag{4.49}$$

bulunur. (4.22) den, $\bar{u}$ nun $P(\bar{u})$ polinomunun kökü olduğunu biliyoruz. Böylelikle, $\phi = \bar{u}$ olduğu görülür. O halde, (4.48) eşitliğinden (4.1) denklemi,

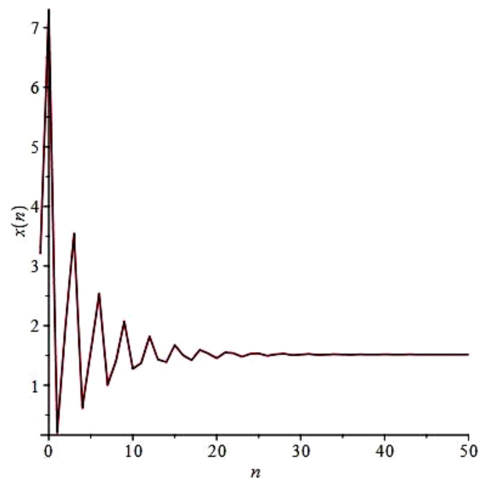
$$\left\{ \dots, \bar{u}, \frac{b}{a}\bar{u}, \bar{u}, \frac{b}{a}\bar{u}, \dots \right\}$$

şeklinde pozitif iki periyotlu çözümlere sahiptir. ■

5. NÜMERİK UYGULAMALAR

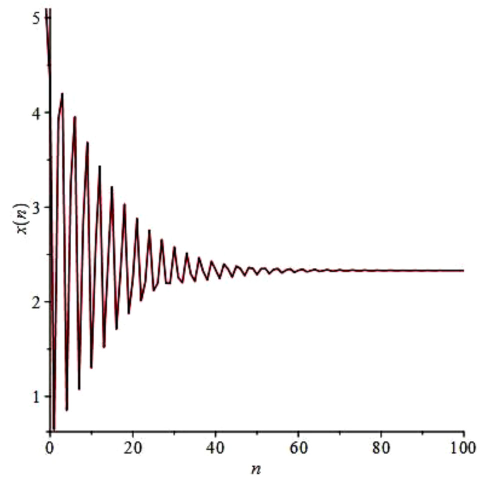
Bu bölümde, önceki bölümlerde elde edilen teorik sonuçları desteklemek için bazı nümerik örnekler verilmiş ve çözümler grafiklerle görselleştirilmiştir.

Örnek 5.1. $\alpha = 5$ ve $x_{-1} = 3.2$, $x_0 = 7.3$ için (4.2) denkleminin çözümü Grafik 1 de verilmiştir.



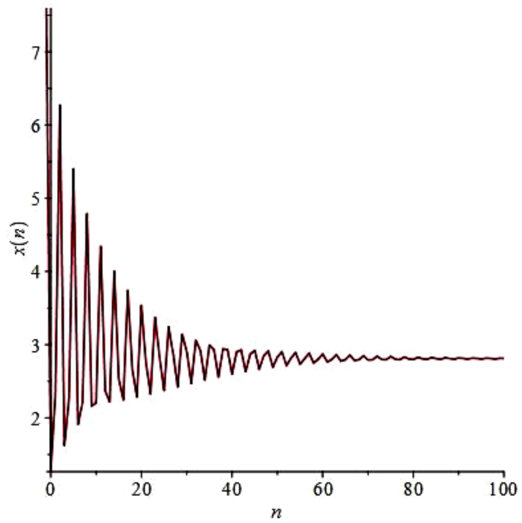
Grafik 1: $\alpha = 5$, $x_{-1} = 3.2$, $x_0 = 7.3$

Örnek 5.2. $\alpha = 15$ ve $x_{-1} = 5.1$, $x_0 = 4.3$ için (4.2) denkleminin çözümü Grafik 2 de verilmiştir.



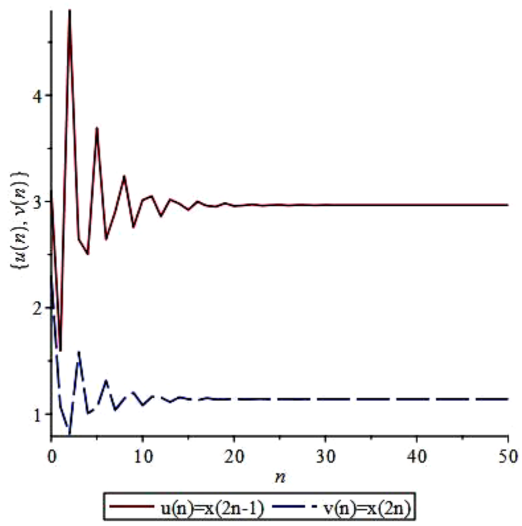
Grafik 2: $\alpha = 15$, $x_{-1} = 5.1$, $x_0 = 4.3$

Örnek 5.3. $\alpha = 25$ ve $x_{-1} = 7.6$, $x_0 = 1.3$ için (4.2) denkleminin çözümü Grafik 3 te verilmiştir.



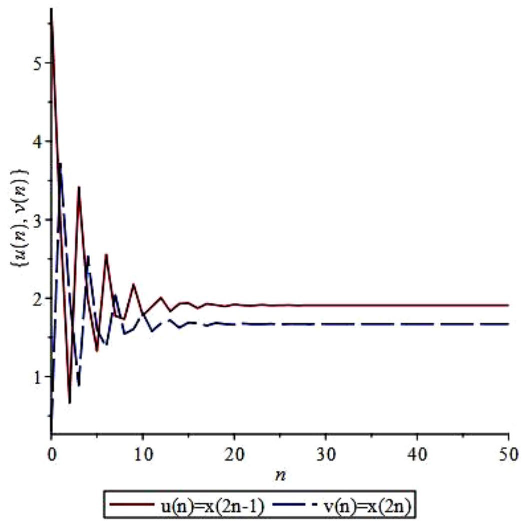
Grafik 3: $\alpha = 25$, $x_{-1} = 7.6$, $x_0 = 1.3$

Örnek 5.4. $a = 13$, $b = 5$ ve $u_0 = 3.1$, $v_0 = 2.3$ için (4.15) denklem sisteminin çözümü Grafik 4 te verilmiştir.



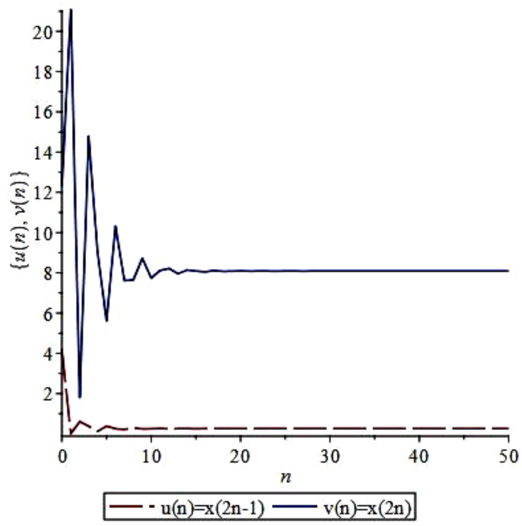
Grafik 4: $a = 13$, $b = 5$, $u_0 = 3.1$, $v_0 = 2.3$

Örnek 5.5. $a = 8$, $b = 7$ ve $u_0 = 5.7$, $v_0 = 0.3$ için (4.15) denklem sisteminin çözümü Grafik 5 te verilmiştir.



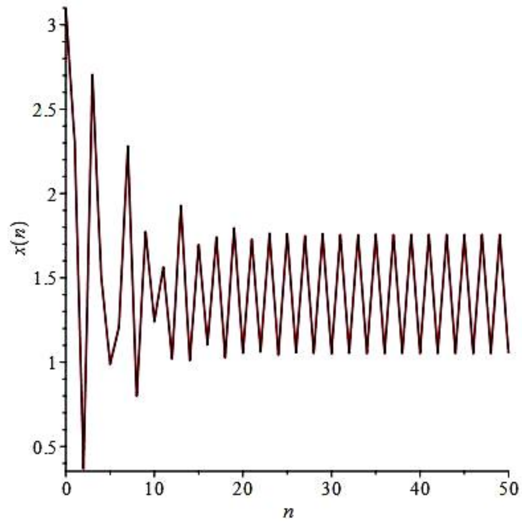
Grafik 5: $a = 8,\ b = 7,\ u_0 = 5.7,\ v_0 = 0.3$

Örnek 5.6. $a = 0.8$, $b = 25$ ve $u_0 = 4.2$, $v_0 = 12.3$ için (4.15) denklem sisteminin çözümü Grafik 6 da verilmiştir.



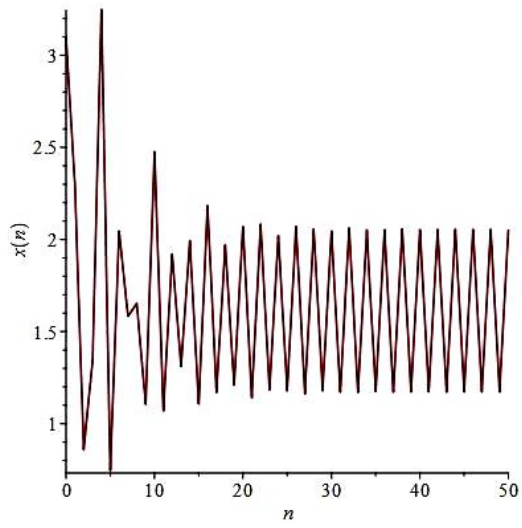
Grafik 6: $a = 0.8,\ b = 25,\ u_0 = 4.2,\ v_0 = 12.3$

Örnek 5.7. $a=3$, $b=5$ ve $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$ için (4.1) denkleminin çözümü Grafik 7 de verilmiştir.



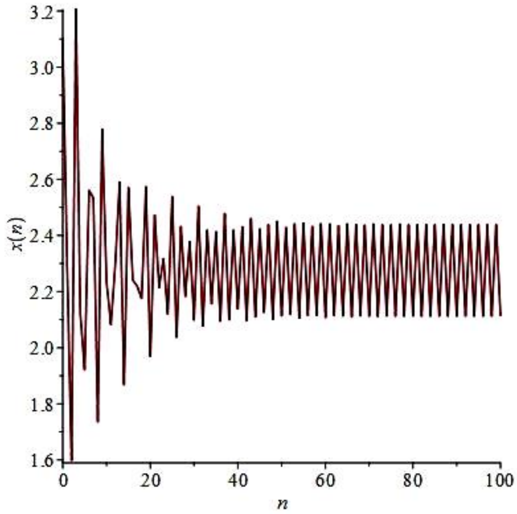
Grafik 7: $a=3$, $b=5$, $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$

Örnek 5.8. $a=7$, $b=4$ ve $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$ için (4.1) denkleminin çözümü Grafik 8 de verilmiştir.



Grafik 8: $a=7$, $b=4$, $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$

Örnek 5.9. $a=13$, $b=15$ ve $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$ için (4.1) denkleminin çözümü Grafik 9 da verilmiştir.



Grafik 9: $a=13$, $b=15$, $x_{-1}=3.1$, $x_0=2.3$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, x_{-1}, x_0 başlangıç koşulları pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \alpha_n / (1 + x_n x_{n-1})$ fark denklemi incelenmiştir. Söz konusu denklemde $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin sabit dizi olması durumunda her $n \geq 0$ için $\alpha_n = \alpha$ olduğu kabul edilerek $x_{n+1} = \alpha / (1 + x_n x_{n-1})$ fark denklemi elde edilmiş ve bu denklemin pozitif çözümleri, α parametresinin tüm pozitif değerleri için incelenmiştir. Yine bu fark denkleminin tek pozitif denge noktasının global çekimli olduğu gösterilerek global asimptotik kararlılık sonucu elde edilmiştir.

Ayrıca, yine bu çalışmada $x_{n+1} = \alpha_n / (1 + x_n x_{n-1})$ fark denklemi, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin iki periyotlu bir dizi olması durumunda, kararlılık analizi yapmak için bir sisteme dönüştürülmüştür. Dahası, söz konusu denklemin ya da sistemin sınırlılığı, lokal asimptotik kararlılığı, kapalı form çözümü, global asimptotik kararlılığı ve çözümlerinin periyodiklik karakteri incelenmiştir.

$x_{n+1} = \alpha_n / (1 + x_n x_{n-1})$ fark denkleminde $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizisinin üç periyotlu bir dizi olması durumunda denklemin çözülebilirliği araştırılabilir. Ayrıca, çözümlerin periyodiklik karakteri, sınırlılığı, lokal asimptotik kararlılığı ile global asimptotik kararlılığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Abo-Zeid, R., 2019, Behavior of solutions of a second order rational difference equation, *Mathematica Moravica,* 23(1), 11-25.

Amleh, A. M., Camouzis, E. and Ladas, G., 2008, On the dynamics of a rational difference equation, Part 1, *International Journal of Difference Equations,* 3(1), 1-35.

Anisimova, A., 2012, On the second order rational difference equation $x_{n+1} = \beta + 1/x_n x_{n-1}$, *International Conference on Difference Equations and Applications,* 1-14.

Anisimova, A. and Bula, I., 2014, Some problems of second-order rational difference equations with quadratic terms, *International Journal of Difference Equations,* 9(1), 11-21.

Bajo, I. and Liz, E., 2011, Global behaviour of a second-order nonlinear difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(10), 1471-1486.

Berenhaut, K. S. and Stević, S., 2005, A note on the difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(14), 1225-1228.

Camouzis, E., Ladas, G., Rodrigues, I. W. and Northshield, S., 1994, The rational recursive sequence, *Computers & Mathematics With Applications*, 28(1-3), 37-43.

Camouzis, E. and DeVault, R., 2003, The forbidden set of $x_{n+1} = p + x_{n-1}/x_n$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(8), 739-750.

Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G., 2004, Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + x_n/y_{n-m}$, $y_{n+1} = 1 + y_n/x_{n-m}$, *Applied Mathematics Letters*, 17(6), 733-737.

Camouzis, E. and Ladas, G., 2007, Dynamics of third-order rational difference equations with open problems and conjectures, *Volume 5 of Advances in Discrete Mathematics and Applications,* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. and Ladas, G., 2003, On the trichotomy character of $x_{n+1} = (\alpha + \gamma x_{n-1})/(A + Bx_n + x_{n-2})$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(12), 1113-1128.

Clark, D. and Kulenović, M. R. S., 2002, A coupled system of rational difference equations, *Computers & Mathematics With Applications*, 43(6-7), 849-867.

Çinar, C., 2004a, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(1 + x_n x_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 150(1), 21-24.

Çinar, C., 2004b, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = ax_{n-1}/(1+bx_n x_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 587-590.

Çinar, C., 2004c, On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(1+ax_n x_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 158(3), 809-812.

Dehghan, M., Mazrooei-Sebdani, R. and Sedaghat, H., 2011, Global behavior of the riccati difference equation of order two, *Journal of Difference Equations and Applications*, 17(04), 467-477.

DeVault, R., Ladas, G. and Schultz, S. W., 1997, Necessary and sufficient conditions for the boundedness of $x_{n+1} = A/x_n^p + B/x_{n-1}^q$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3(3-4), 259-266.

DeVault, R., Ladas, G. and Schultz, S. W., 1998, On the recursive sequence $x_{n+1} = A/x_n + 1/x_{n-2}$, *American Mathematical Society*, 126(11), 3257-3261.

Drymonis, E., Kostrov, Y. and Kudlak, Z., 2012, On rational difference equations with nonnegative periodic coefficients, *International Journal of Difference Equations,* 7(1), 19-34.

El-Afifi, M. M., 2004, On the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1})/(Bx_n + Cx_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 147(3), 617-628.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2003, On the recursive sequences $x_{n+1} = -\alpha x_{n-1}/(\beta \pm x_n)$, *Applied Mathematics and Computation*, 145(2-3), 747-753.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsady, Z., 2004, Global attractivity of the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_{n-1})/(\gamma + x_n)$, *Applied Mathematics and Computation*, 151(3), 827-833.

Elabbasy, E. M. and Elsayed, E. M., 2009, Dynamics of a rational difference equation, *Chinese Annals of Mathematics-Series B*, 30(2), 187-198.

Elaydi, S., 2005, An introduction to difference equations, 3rd ed., *Springer-Verlag,* New York.

Elsayed, E. M., 2008, Qualitative behavior of a rational recursive sequence, *Indagationes Mathematicae*, 19(2), 189-201.

Feuer, J., Janowski, E. J. and Ladas, G., 1997, Lyness-type equations in the third quardrant, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 30(2), 1183-1189.

Gibbons, C. H. and Overdeep, C. B., 2005, On the trichotomy character of with period-two coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(7), 655-667.

Gümüs, M. and Abo-Zeid, R., 2019, Global behavior of a rational second order difference equation, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1-15.

Hamza, A. E. and Morsy, A., 2009, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1} / x_n^k$, *Applied Mathematics Letters*, 22(1), 91-95.

Hu, L. X., Li, W. T. and Stević, S., 2008, Global asymptotic stability of a second order rational difference equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 14(8), 779-797.

Hu, L. and Xia, H., 2014, Global asymptotic stability of a second order rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 377-382.

Kosmala, W. A., Kulenović, M. R. S., Ladas, G. and Teixeira, C. T., 2000, On the recursive sequence $y_{n+1} = (p + y_{n-1}) / (qy_n + y_{n-1})$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 251(2), 571-586.

Kulenović, M. R. S., Ladas, G. and Prokup, N. R., 2001, A rational difference equation, *Computers & Mathematics With Applications*, 41(5-6), 671-678.

Kulenović, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of second order rational difference equations with open problems and conjectures, *Boca Raton,* Florida.

Kulenović, M. R. S. and Nurkanović, M., 2003, Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation, *Journal of Difference Equations and Applications,* 9(1), 149-159.

Kulenović, M. R. S., Ladas, G. and Overdeep, C. B., 2004, On the dynamics of $x_{n+1} = p_n + x_{n-1} / x_n$ with a period-two coefficient, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10(10), 905-914.

Kulenović, M.R.S. and Mehuljić, M., 2012, Global behavior of some rational second order difference equations, *International Journal of Difference Equations,* 7(2), 153-162.

Kurbanli, A. S., 2011, On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} - 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} - 1)$, $z_{n+1} = 1 / y_n z_n$, *Advances in Difference Equations*, 2011(1), 40.

Kurbanli, A. S., Çinar, C. and Yalçinkaya, I., 2011, On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} + 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} + 1)$, *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5-6), 1261-1267.

Özban, A. Y., 2006, On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=1/y_{n-k}$, $y_{n+1}=y_n/x_{n-m}y_{n-m-k}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(323), 26-32.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 1998, On a system of two nonlinear difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 219(2), 415-426.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., 2005, On a $(k+1)-th$ order difference equation with a coefficient of period $k+1$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(3), 215-225.

Papaschinopoulos, G. and Stefanidou, G., 2010, Asymptotic behavior of the solutions of a class of rational difference equations, *International Journal of Difference Equations,* 5(2), 233-249.

Philos, Ch. G., Purnaras, I. K. and Sficas, Y. G., 1994, Global attractivity in a nonlinear difference equation, *Applied Mathematics and Computation, 62(2-3),* 249- 258.

Raouf, A., 2012, Global behaviour of the rational Riccati difference equation of order two: the general case, *Journal of Difference Equations and Applications,* 18(6), 947-961.

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation $y_{n+1}=A+y_{n-k}/y_n$, *Applied Mathematics and Computation,* 171, 862-869.

Schinas, C. J., 1997, Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 216(1), 164-179.

Sedaghat, H., 2009, Global behaviours of rational difference equations of orders two and three with quadratic terms, *Journal of Difference Equations and Applications,* 15(3), 215-224.

Soykan, Y., Göcen, M. ve Gümüş, M., 2017, Lineer fark denklemleri, *Nobel Akademik Yayıncılık,* Ankara.

Spiegel, M. R., 1971, Theory and problems of calculus of finite differences and difference equations, Schaum's Outline Series, *McGraw-Hill Inc.,* New York.

Stević, S., Iricanin, B., Kosmala, W. and Smarda, Z., 2018, Representation of solutions of a solvable nonlinear difference equation of second order, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,* (95), 1-18.

Sun, T. and Xi, H., 2007, On convergence of the solutions of the difference equation $x_{n+1}=1+x_{n-1}/x_n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 325(2), 1491-1494.

Tasdemir, E. and Soykan, Y., 2016, On the periodicies of the difference equation $x_{n+1} = x_n x_{n-1} + \alpha$, *Karaelmas Science and Engineering Journal*, 6(2), 329-333.

Taskara, N., Uslu, K. and Tollu, D. T., 2011, The periodicity and solutions of the rational difference equation with periodic coefficients, *Computers & Mathematics With Applications*, 62(4), 1807-1813.

Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2013, On the solutions of two special types of Riccati difference equation via Fibonacci numbers, *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 174.

Tollu, D. T., Yazlik, Y. and Taskara, N., 2014, On fourteen solvable systems of difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 233, 310-319.

Tollu, D. T. and Yalçinkaya, I., 2018, Global behavior of a three-dimensional system of difference equations of order three, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 68(1), 1-16.

Yalçinkaya, I., Çinar, C. and Simsek, D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis*, 87(6), 677-687.

Yan, X. X. and Li, W. T., 2003, Global attractivity in the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n)/(\gamma - x_{n-1})$, *Applied Mathematics and Computation*, 138(2-3), 415-423.

Yazlik, Y., Tollu, D. T. and Taskara, N., 2013, On the solutions of difference equation systems with Padovan numbers, *Applied Mathematics*, 4(12), 15-20.

Zeng, X. Y., Shi, B. and Zhang, D. C., 2005, Stability of solutions for the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha - \beta x_n)/(\gamma + g(x_{n-k}))$, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176(2), 283-291.

Zheng, Y., 1997, Existence of nonperiodic solutions of the Lyness equation $x_{n+1} = (\alpha + x_n)/x_{n-1}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 209(1), 94-102.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ali YILDIRIM
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Anamur / 20.04.1980
Telefon : 0.505.706 68 50
e-mail : aliyildirim.mat@gmail.com

EĞİTİM

Derece		Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	:	Anamur Lisesi, Anamur, Mersin	1997
Üniversite	:	Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Yenimahalle, Ankara	2003
Yüksek Lisans	:	Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Matematik Eğitimi (Tezsiz Yüksek Lisans), Çankaya, Ankara	2006
		Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Tezli Yüksek Lisans), Meram, Konya	
Doktora	:	-	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2002-2007	Ankara Özel Açı Dershaneleri (Merkez Şube)	Matematik Öğretmeni
2007-2008	Konya Özel Zafer Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008- Halen	Konya Özel Enderun Fen ve Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

YABANCI DİLLER

İngilizce