T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARDY-HİLBERT TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE BAZI OPERATÖRLERİN BEREZİN SAYILARI

Dilara GÜNDOĞDU

Danışman
Doç. Dr. Suna SALTAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2017

TEZ ONAYI

Dilara GÜNDOĞDU tarafından hazırlanan "**Hardy-Hilbert Tipli Eşitsizlikler ve Bazı Operatörlerin Berezin Sayıları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Doç. Dr. Suna SALTAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi **Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL**
Süleyman Demirel Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Hüseyin TUNA**
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Enstitü Müdürü **Prof. Dr. Yasin TUNCER**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Dilara GÜNDOĞDU

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARDY-HİLBERT TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE BAZI OPERATÖRLERİN BEREZİN SAYILARI

Dilara GÜNDOĞDU

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Suna SALTAN

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihi gelişimi ifade edilmiş ve çalışmada kullanılan bazı temel tanımlar verilmiştir.

Daha sonra, klasik Hardy eşitsizlikleri ve Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler ifade edilmiştir.

Üretici çekirdekler ve Berezin sembolü metodunun bir uygulaması bazı Hardy-Hilbert eşitsizliklerinin kullanılması ile verilmiştir.

Yani, üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerindeki pozitif bir operatörün Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliği ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Üretici çekirdekli Hilbert uzayı, Üretici çekirdek, Hardy uzayı, Hardy-Hilbert eşitsizliği, Berezin sembolü, Berezin sayısı, Nümerik Yarıçap, Pozitif operatör, Kendine eş operatör.

2017, 31 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HARDY-HILBERT TYPE INEQUALITIES AND BEREZIN NUMBERS OF SOME OPERATORS

Dilara GÜNDOĞDU

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Suna SALTAN

In this work, firstly, the historical development of the topic is mentioned, and some main definitions are given.

Later, classical Hardy inequalities and Hardy-Hilbert type inequalities are expressed.

An application of method of reproducing kernels and Berezin symbol is given by using some Hardy-Hilbert inequalities.

Namely, the inverse power inequality for Berezin number of a positive operator on reproducing kernel Hilbert space is proven.

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space, Reproducing kernel, Hardy space, Hardy-Hilbert inequality, Berezin symbol, Berezin number, Numeric radius, Positive operator, Self-adjoint operator.

2017, 31 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Suna SALTAN'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam esnasında hiçbir bilgisini benden esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet GÜRDAL'a ve Arş. Gör. Ulaş YAMANCI'ya şükranlarımı bir borç bilirim.

Aynı zamanda tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteklerini esirgemeyen anneannem Yüksel BÜYÜKYÖRÜK ve annem Ferhan BÜYÜKYÖRÜK'e ve tüm arkadaşlarıma sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Dilara GÜNDOĞDU
ISPARTA, 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\widetilde{A}$	A operatörünün Berezin sembolü
$ber\,(A)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Ber\,(A)$	A operatörünün Berezin kümesi
$\mathcal{H}$	Fonksiyonel Hilbert uzayı
A^*	A operatörünün adjointi
$\{e_n\}$	Ortonormal baz
$\mathbb{D}$	Birim disk
$\mathcal{B}\,(\mathcal{H})$	$\mathcal{H}$ Hibert uzayındaki lineer sınırlı operatörler
Ω	Kompleks sayıların açık bir kümesi
$\{a_n\}_1^\infty$	Negatif olmayan reel sayılar dizisi
H^2	Hardy uzayı
$w(A)$	Nümerik yarıçap
$W(A)$	Nümerik değer kümesi
$k_{\mathcal{H},\lambda}$	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
L_a^2	Bergman uzay
k_λ	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_\lambda$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek

1. GİRİŞ

Üretici çekirdekler teorisi, yirminci yüzyılın başında ilk olarak Zaremba'nın (1907) harmonik ve biharmonik fonksiyonlar için sınır değer problemleri ile ilgili çalışmasında kullanılmıştır.

Bir süre dikkat çekmeyen ve üzerinde çalışılmayan üretici çekirdek kavramı, Szegö (1921), Bochner (1922) ve Bergman'ın (1922) çalışmaları ile yeniden gündeme gelmiştir. Özellikle Bergman'ın çalışmaları ile kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde önemli sonuçlar elde edilmiştir (Bergman, 1922). 1941 yılında üretici çekirdekler Kolmogorov tarafından olasılık teorisinde kullanılmış, orijinal ve yeni sonuçlar bulunmuştur.

Daha sonra üretici çekirdekler konusu ayrıntılı olarak Aronszajn tarafından ele alınarak, konunun genel teorisi ortaya konulmuştur (Aronszajn, 1950).

Sonraki yıllarda, Japon matematikçi Saitoh üretici çekirdekler tekniğine yeni yönler vererek, analizde, diferansiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, operatörler teorisinde önemli sonuçlara imza atmıştır (Saitoh, 1988; 1997).

Üretici çekirdekler, Hilbert uzaylarındaki lineer ve lineer olmayan operatörlerle birlikte düşünüldüğünde oldukça geniş uygulama alanlarına sahiptir. Bergman çekirdeği ve Szegö çekirdeği gibi belirli üretici çekirdekler de kompleks analizde çeşitli uygulama alanları bulmaktadır.

Berezin sembolü kavramı, üretici çekirdekler kullanılarak ilk defa Rus matematikçi Berezin tarafından tanımlanmıştır (Berezin, 1972; 1974). Böylece Berezin operatörler için kovaryant ve kontravaryant sembol kavramlarını ifade etmiştir.

Berezin sembolü, operatörler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Çünkü bir operatör için önemli bilgiler taşımaktadır. Örneğin, fonksiyonel Hilbert uzaylarında bir operatör Berezin sembolüyle tek türlü tanımlanabilir. Dolayısıyla operatörlerin bazı özellikleri Berezin sembolü ile ortaya koyulabilmektedir.

Ünlü Hardy eşitsizliklerinin gelişimi 1906-1928 yıllarında olmuştur. G.H. Hardy' den başka Landau (1921), Polya (1926), Riesz (1919) gibi ünlü matematikçiler bu eşitsizliklerin geliştirilmesinde önemli katkılarda bulunmuşlardır.

Klasik Hardy eşitsizlikleri olarak bilinen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$$

ve

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{x}f(t)\,dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty}f^p(x)\,dx.$$

eşitsizlikleri Hardy vd. (1967) tarafından yazılan "Eşitsizlikler" adlı kitabın oluşmasına ışık tutmuştur. 1900 lü yılların başında David Hilbert tarafından araştırılmaya başlanan Hilbert eşitsizliği, $\{a_n\}_1^{\infty}$ reel sayılar dizisi için verilen klasik Hardy eşitsizliği ile yakından ilişkilidir. Dahası Hilbert eşitsizliği, Hardy için temel motivasyon kaynağı olmuştur. Hilbert eşitsizliğinin ispatı tek başına Hilbert tarafından verilmemiştir. Bu eşitsizliğin ispatında önemli katkı sağlayan Hardy sayesinde, bugün literatürde Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler olarak yer alan teori ortaya konulmuştur. Bu eşitsizlikler analiz ve uygulamalarını içeren matematiğin birçok alanında kullanılmıştır (Mitrinovic vd., 1991).

Bazı genelleştirmeler yapılarak Hardy-Hilbert tipli yeni eşitsizlikler Das ve Sahoo (2010), Krinic ve Pecaric (2006) tarafından elde edilmiştir. Konunun farklı yollarla ele alınması ve geliştirilmesi ile Hardy-Hilbert tipli eştsizlikler ve uygulamaları operatörler teorisinde yerini almıştır.

Bu tez çalışmasında, Berezin sembolü methodunun bir uygulaması Hardy-Hilbert tipli eşitsizliklerin kullanılması ile verilmiştir.

Üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerindeki, pozitif A operatörünün Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliği ifade edilmiştir. Yani

$$(ber(A))^n \leq C(n,m)ber(A^n)$$

eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizlikleri kullanılarak ispatlanmıştır.

Böylece operatörlerin Berezin sayılarının klasik eşitsizliklerine alternatif bir bakış açısı kazandırılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Üretici çekirdekler kavramı, ilk olarak 1907 yılında Zaremba tarafından kullanılmıştır (Zaremba, 1907).

1950 yılında Aronzajn konuyu ayrıntılı ve derinlemesine ele alarak çalışmalar yapması üretici çekirdeklerin genel teorisini ortaya koymuştur (Aronszajn, 1950).

Üretici çekirdekler tekniğine yeni yönler veren Japon matematikçi Saitoh konunun operatörler teorisinde yer almasına önemli katkı sağlamıştır (Saitoh, 1988; 1997)

Berezin sembolleri kavramı üretici çekirdekler kullanılarak Rus matematikçi Berezin tarafından tanımlanmıştır. Berezin kavramı kullanılarak Schrödinger operatörü, Hamilton operatörü, Jacobi operatörü gibi kuantum fiziği ve matematiksel fiziğin önemli operatörlerinin özdeğerlerinin dağılımı konusunda önemli sonuçlar elde etmiştir (Berezin, 1972; 1974).

Sınırlı bir fonksiyon olan Berezin sembolü, operatörleri incelemek için iyi bir araçtır. Bu sebeple Nordgren ve Rosenthal standart fonksiyonel Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonunu Berezin sembolü kullanarak ifade etmiştir (Nordgren ve Rosenthal, 1994).

Hardy ve Bergman uzayı gibi fonksiyonel Hilbert uzaylarında bir A operatörü kendisinin Berezin sembolü $\widetilde{A}$ ile tek olarak tanımlanabilir. Berezin sembolü Toeplitz ve Hankel operatörlerini inceleme konusunda da önemli rol oynamıştır. Böylece "Berezin sembolü operatörler için başka hangi bilgileri verebilir?" doğal sorusu sorulabilir. Bu sorunun cevabı ile ilgili bazı sonuçlar Zhu'nun kitabında, Zorboska, Karaev, Karaev ve Saltan'ın makalelerinde verilmiştir (Zhu, 1990; Zorboska, 2003; Karaev, 2010; Karaev ve Saltan, 2005).

$\mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayındaki A operatörünün Berezin kümesi ve Berezin sayısı Karaev tarafından

$$Ber(A) := \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\}$$

$$ber(A) := \sup\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Karaev, 2006; 2013).

$$w(A) := \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\}$$

şeklinde ifade edilen A operatörünün nümerik yarıçapı için kuvvet eşitsizliği Halmos tarafından verilmiştir (Halmos, 1982):

$$w(A^n) \leq (w(A))^n\,,\ \forall n \geq 1.$$

Klasik Hardy eşitsizlikleri olarak bilinen, $p > 1$ ve $\{a_n\}_1^\infty$ negatif olmayan reel sayılar dizisi için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p$$

ve $p > 1$ ve $(0, +\infty)$ üzerinde p-integrallenebilir f fonksiyonu için,

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(x)^p\,dx.$$

eşitlikleri ünlü Hardy eşitliklerinin geliştirilmesinde temel oluşturmuştur (Hardy, 1967).

1900 lü yılların başında David Hilbert tarafından ifade edilen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \pi\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hilbert eşitsizliği $\{a_n\}_1^\infty$ reel sayılar dizisi için verilen klasik Hardy eşitsizliği ile yakından ilişkilidir. Bu eşitsizliğin ispatındaki adımlarda Hardy ve Riesz'in de katkıları olmuştur.

Konunun gelişimi ile aşağıdaki Hardy-Hilbert eşitsizlikleri literatürdeki yerini almıştır.

$p > 1$, $a_n, b_n \geq 0$, $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < +\infty$ ve $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^q$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve bu eşitsizliğe denk olan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)^p < \left(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty} a^p$$

dir.

Hardy-Hilbert eşitsizlikleri analiz ve uygulamalarını içeren matematiğin çeşitli alanlarında kullanılmıştır (Mitirinovic vd., 1991). Bu eşitsizliklerin genelleştirilmeleri yapılarak Hardy-Hilbert tipli yeni eşitsizlikler Das ve Sahoo (2010), Krinic ve Pecaric (2006) tarafından elde edilmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan gerekli bazı kavramlar ve bu kavramlarla ilgili tanım, notasyon ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1. X, $\mathbb{C}$ skaleri üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in X$ ve λ skaleri için,

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$,
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
4. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$,

koşullarını sağlayan $\langle x, y\rangle$ fonksiyonuna iç çarpım denir. Üzerinde iç çarpım tanımlanmış X kompleks vektör uzayına iç çarpım uzayı denir (Kreyszig, 1989).

İç çarpım uzayının en önemli özelliği her $x, y \in X$ için

$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Bu eşitsizliğe Cauchy Schwarz eşitsizliği denir. Eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul x ve y vektörlerinin lineer bağımsız olmasıdır.

Tanım 3.2. X, $\mathbb{C}$ skaleri üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in X$ ve λ skaleri için,

1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ (pozitif),
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği),
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

koşullarını sağlayan $\|x\|$ reel sayısına X uzayındaki norm denir. Üzerinde norm tanımlanan X vektör uzayına normlu uzay denir. Her iç çarpım uzayı normlu uzaydır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.3. Normlu bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsaktır ya da norma göre yakınsaktır denir ve bu durum,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

veya, kısaca $x_n \to x$ ile gösterilir. x değerine, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli olarak x değerine yakınsaktır denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.4. X, $\mathbb{C}$ kompleks skaleri üzerinde bir normlu uzay olsun. $f : X \to \mathbb{C}$ sınırlı operatörü her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ koşulunu sağlıyorsa f fonksiyoneline sınırlı lineer fonksiyonel denir. Buna göre her $x \in X$ için

$$|f(x)| \leq c\,\|x\|$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır. Ayrıca f nin normu

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanır (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.5. X normlu uzay bir olsun. X üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşan küme,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X \\ x=1}} |f(x)|$$

ile tanımlanan norma sahip olan, normlu bir uzay oluşturur. Bu uzaya, X in dual uzayı adı verilir ve X' ile gösterilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.6. Normlu bir X uzayında $\{x_n\}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer her $f \in X'$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir. x değerine, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir ve $\{x_n\}$ dizisi x değerine zayıf yakınsaktır denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.7. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi $m \to \infty$ ve $n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise o zaman $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına tam uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.8. Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.9. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir (Kreyszig, 1989).

Şimdi vereceğimiz Riesz temsil teoremi, Berezin sembollerinin tanımında kullanılan üretici çekirdek kavramında önemli bir role sahiptir.

Tanım 3.10. **(Riesz temsil teoremi)** Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayındaki her sınırlı lineer f fonksiyoneli, iç çarpım olarak ifade edilebilir. Yani, y, f fonksiyoneline bağlı olmak üzere

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir tek y vektörü vardır ve $\|f\| = \|y\|$ dir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.11. e_j, $j = 1, 2, ...$ için Hilbert uzayında vektörler olsun. Eğer $S = \{e_1, e_2, ...\}$ vektörler dizisi

$$\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

koşulunu sağlıyorsa S kümesine ortonormal küme denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.12. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzay ve $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in \mathcal{H}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ özelliğini sağlarsa T ye lineer operatör denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.13. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında bir T lineer operatörü her $x \in \mathcal{H}$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa T ye sınırlı lineer operatör denir. Ayrıca T nin normu

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$$

dir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.14. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında T ve S sınırlı lineer operatör olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır (Kreyszig, 1989).

1. Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\|\alpha T\| = |\alpha| \, \|T\|$

2. $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$

3. $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$

Hilbert uzayı üzerinde tanımladığımız sınırlı lineer bir operatör adjoint operatörü tanımlamamıza olanak sağlamaktadır. Bu operatörün, aynı zamanda, kendine eş, normal, üniter, ortogonal projeksiyon ve izomeri operatörlerin tanımlanmasında ve çeşitli uygulamaların incelenmesinde önemli bir rolü vardır. İlk olarak adjoint operatörün tanımını verelim.

Tanım 3.15. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzaylar olmak üzere $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T nin T^* adjoint operatörü her $x \in \mathcal{H}_1$ ve $y \in \mathcal{H}_2$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

olacak şekilde bir $T^* : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ operatörüdür (Kreyszig, 1989).

Adjoint operatörlerin bazı özelliklerini verelim.

Tanım 3.16. $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzayları, $S : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ve $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ sınırlı lineer operatörler ve α herhangi bir skaler olsun. Buna göre

a. $\|T^*\| = \|T\|$

b. $(S + T)^* = S^* + T^*$

c. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$

d. $(T^*)^* = T$

e. $(ST)^* = T^* S^*$

f. $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$

g. $T^* T = 0 \Longleftrightarrow T = 0$

dir (Kreyszig, 1989).

Adjoint operatör yardımıyla bazı özel tip operatörler şöyle tanımlanabilir.

Tanım 3.17. Hilbert uzayı üzerindeki bazı özel tip operatörler aşağıdaki gibi tanımlanır (Kreyszig, 1989).

kendine eş operatör: $T^* = T$

normal operatör: $T^*T = TT^*$

ortogonal projeksiyon operatör: $T^2 = T$ ve $T^* = T$

üniter operatör: $T^*T = TT^* = I$

izometri operatör: $T^*T = I$

pozitif operatör: $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ (her $x \in \mathcal{H}$)

Tanım 3.18. $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : S \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. f kompleks fonksiyonu z_0 noktasının bir

$$\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

komşuluğunun bütün noktalarında türevlenebilir ise f, z_0 noktasında analitiktir denir.

Başka bir deyişle, f fonksiyonu z_0 noktasının her $\mathbb{D}(z_0, r)$ komşuluğunda yakınsak $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Taylor serisine sahip ise f, z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer f kompleks fonksiyonu S bölgesinin tüm noktalarında analitik ise f fonksiyonuna S kümesi üzerinde analitiktir denir. f fonksiyonu, $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise tam fonksiyon olarak tanımlanır (Rudin, 1991).

Tanım 3.19. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski üzerinde $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$ analitik fonksiyonlarının oluşturduğu

$$H^2 = \left\{ f : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n \text{ ve } \sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2 < \infty \right\}$$

uzayına klasik Hardy uzayı denir ve $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ ile ifade edilir.

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$ ve $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \widehat{g}(n)z^n$ için H^2 uzayındaki iç çarpım,

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$$

ile tanımlanır.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)z^n$ vektörünün normu,

$$\|f\|_{H^2} := \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde olup, $\widehat{f}(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ifadesi $f(z)$ analitik fonksiyonunun n. Taylor katsayısıdır (Rosenblum, Rovnyak, 1985; Martinez-Avendano, Rosenthal, 2007).

Tanım 3.20. $\|f\|_{L^2_\alpha}^2 = \int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dA(z)$ normu sonlu olacak şekilde tüm analitik fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayına $L^2_\alpha = L^2_\alpha(\mathbb{D})$ Bergman uzayı denir. Burada $dA = \frac{dxdy}{\pi}$, $\mathbb{D}$ nin ölçümü 1 e eşit olacak şekilde normalleştirilmiş Lebesgue bölge ölçümüdür.

Tanım 3.21. Kompleks sayıların açık Ω kümesi üzerinde her $\lambda \in \Omega$ için $f \to f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerinde kompleks değerli f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına fonksiyonel Hilbert uzayı ya da üretici çekirdekli Hilbert uzayı denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda}\rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu vardır. Bu $k_{\mathcal{H},\lambda} = k_\lambda$ fonksiyonuna $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği, $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \dfrac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ fonksiyonuna ise $\mathcal{H}$ uzayının normalleştirilmiş üretici çekirdeği denir. Diğer taraftan üretici çekirdek bazlar yardımıyla

$$k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k_{\mathcal{H}}(\lambda, z) = \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(\lambda)}e_n(z)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada e_n, $\mathcal{H}$ uzayının herhangi ortonormal bazıdır (Stroethoff, 1997). Fonksiyonel Hilbert uzayına örnekler verelim.

Örnek 3.22. $H^2(\mathbb{D})$, $\{z^n\}$ ortonormal bazına sahip fonksiyonel Hilbert uzayıdır.

Bu uzayın üretici çekirdeği

$$k_{H^2,\lambda}(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{\lambda}^n z^n = \sum_{n\geq 0} \left(\overline{\lambda} z\right)^n = \frac{1}{1-\overline{\lambda} z}$$

dir. Bu çekirdeğe aynı zamanda Szegö çekirdeği de denir.

Örnek 3.23. Bergman uzayı $\left\{\sqrt{n+1}z^n\right\}$ ortonormal bazına sahip fonksiyonel Hilbert uzayıdır. Bu uzayın üretici çekirdeği

$$\begin{aligned} k_{L^2_\alpha,\lambda}(z) &= \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+1}\overline{\lambda}^n\right)\left(\sqrt{n+1}z^n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1)\overline{\lambda}^n z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1)\left(\overline{\lambda} z\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left(\left(\overline{\lambda} z\right)^{n+1}\right)' = \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda} z}\right)' = \left(\frac{1}{1-\overline{\lambda} z}\right)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 3.24. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}$ normalleştirilmiş üretici çekirdeğe sahip fonksiyonel Hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer sınırlı operatör olsun.

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna A operatörünün Berezin sembolü denir (Berezin, 1972).

Tanım 3.25. k_λ üretici çekirdeğine sahip, Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı lineer bir A operatörünün Berezin kümesi ve Berezin sayısı sırasıyla

$$\begin{aligned} Ber(A) &: = Range\left(\widetilde{A}\right) = \left\{\widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega\right\} \\ ber(A) &: = \sup\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Karaev, 2006).

Tanım 3.26. A operatörü için nümerik değer kümesi ve nümerik yarıçap kavramları da sırasıyla

$$\begin{aligned} W(A) &:= \{\langle Ax, x\rangle : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\} \\ w(A) &:= \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Karaev, 2013).

Açıkça görülüyor ki

$$Ber(A) \subset W(A) \text{ ve } ber(A) \leq w(A)$$

dır.

Berezin sembolünün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir (Kılıç, 1994).

1. A pozitif bir operatör ise $\widetilde{A}$ pozitif bir fonksiyondur.

2. Sınırlı lineer bir A operatörünün $\widetilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur. Yani

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{A}(\lambda)\right| &= \left|\left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle\right| \leq \left\|A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\| \left\|\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\| \\ &\leq \|A\| \left\|\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\| \left\|\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\| = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega) \end{aligned}$$

dir.

3. $A = I$ birim operatörünün Berezin sembolü $\widetilde{A} = \widetilde{I} = 1$ dir.

4. $\widetilde{A^*} = \overline{\widetilde{A}}$ dır, yani A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü $\widetilde{A}$ nın kompleks eşleneğine eşittir.

$$\widetilde{A^*}(\lambda) = \left\langle A^*\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle = \left\langle \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle = \overline{\left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle} = \overline{\widetilde{A}}$$

dir.

5. $A^* = A$ ise $\overline{\widetilde{A}} = \widetilde{A}$ reel değerli bir fonksiyondur.

6. Her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

Tanım 3.27. $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel diziler, $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ ve π sabit çarpan olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m+n} a_m b_n < \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

şeklinde ifade edilen eşitsizliğe Hilbert eşitsizliği denir (Weyl, 1908).

Tanım 3.28. $f(x)$ ve $g(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar, $0 < \int\limits_0^{\infty} f^2(x)dx < \infty$ ve $0 < \int\limits_0^{\infty} g^2(x)dx < \infty$ olmak üzere;

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{1}{x+y} f(x)g(y)dxdy < \pi \left(\int_0^{\infty} f^2(x)dx \int_0^{\infty} g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

eşitsizliğine Hilbert integral eşitsizliği adı verilir (Schur, 1911).

Tanım 3.29. $p > 1$ ve $\{a_n\}_1^{\infty}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

eşitsizliğine Hardy eşitsizliği denir. Kesin olarak bu eşitsizliği sağlayan sabit $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ dir (Hardy, 1967).

Bu eşitsizliğin integral formu aşağıdaki şekildedir.

Tanım 3.30. $p > 1$ ve f fonksiyonu $(0, +\infty)$ aralığında negatif olmayan p-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^{x} f(t)\, dt \right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\, dx.$$

dir (Hardy,1967).

Teorem 3.31. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_n, b_n \geq 0$, $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ ve $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty$

olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.3}$$

eşitsizliğine Hardy-Hilbert eşitsizliği denir (Hardy, 1920; Hardy vd., 1967). Bu eşitsizliğe eşdeğer (denk) olan eşitsizlik

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m+n}\right)^p < \left[\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}\right]^p\sum_{n=1}^{\infty} a^p \tag{3.4}$$

şeklinde ifade edilir.

(3.3) ve (3.4) numaralı Hardy-Hilbert eşitsizlikleri analiz ve uygulamaları için önemlidir (Mitrinovic, 1991).

Teorem 3.32. $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $a_n, b_n \geq 0$, $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$ ve $0 < \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^q < \infty$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max\{m,n\}} < pq\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği ve bunun bir eşdeğer formu olan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\max\{m,n\}}\right)^p < (pq)^p\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$$

eşitsizliği de Hardy-Hilbert eşitsizliği olarak adlandırılır (Hardy, 1920).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Operatörlerin Berezin Sayıları İçin Ters Kuvvet Eşitsizlikleri

Bu bölümde, üretici çekirdekli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayı üzerindeki pozitif A operatörünün Berezin sayısı için

$$(ber(A))^n \leq C(n,m)ber(A^n)$$

şeklinde ifade edilen ters kuvvet eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliği kullanılarak ispatlanmıştır.

Kompleks sayıların açık Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer A operatörünün $(A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega)))$ Berezin sembolü

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \right\rangle, \ \lambda \in \Omega$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \dfrac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$, $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeğidir.

A operatörünün Berezin sayısı ve nümerik yarıçapı

$$ber(A) := \sup\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\}$$

ve

$$w(A) := \sup\left\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1\right\}$$

şeklindedir ve $ber(A) \leq w(A)$ olduğu açıktır.

A Hilbert uzayı operatörünün nümerik yarıçapı için ifade edilen

$$w(A^n) \leq (w(A))^n, \ n \geq 1$$

kuvvet eşitsizliği Halmos tarafından verilmiştir (Halmos, 1982).

Berezin sayısı ile nümerik yarıçap arasındaki $ber(A) \leq w(A)$ eşitsizliğinden dolayı, doğal olarak,

$$ber(A^n) \leq (ber(A))^n\,,\ n > 1$$

eşitsizliği doğru mudur sorusu akla gelmektedir. Ancak bu sorunun cevabı literatürde henüz verilememiştir.

Buna rağmen, Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler kullanılarak $\mathcal{H}(\Omega)$ uzayı üzerindeki pozitif operatörün Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliği ispatlanmıştır. Yani, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ uzayındaki pozitif A operatörü için

$$(ber(A))^n \leq C(n,m)ber(A^n)$$

ters kuvvet eşitsizliği ispatlanmıştır.

Burada $C(n,m) > 1$ sadece n ve onun eşleniği olan m ye bağlı bir sabittir ve $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = 1$ dir.

4.2. Hardy-Hilbert Tipi Eşitsizlikler ve Bazı Operatörlerin Berezin Sayıları

$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerindeki bazı kendine eş ve pozitif operatörler için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\max\{m,n\}} < pq\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.1}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{\max\{m,n\}}\right)^p < (pq)^p\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{4.2.2}$$

eşitsizliklerine benzer eşitsizliklerin verilmesi ile başlayacağız.

Teorem 4.2.1. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g fonksiyonları $\Delta \subset (0,+\infty)$ aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar ve $f, g \geq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) $\mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$, $\mathcal{H}$ uzayındaki lineer sınırlı operatörler kümesi olmak üzere, spektrumları Δ aralığında olan $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ kendine eş operatörleri ve $\mu, \lambda \in \Omega$ için,

$$\widetilde{(fg)(A)}(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{g(B)}(\mu)\widetilde{f(A)}(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{f(B)}(\mu)\widetilde{g(A}(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{(fg)(B)}(\mu)$$

$$< pq\left[\left(f(A)^p + f(B)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(A)^q + g(B)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\sim}(\lambda)$$

dır.

(ii) Spektrumları Δ aralığında olan kendine eş $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}(\Omega))$ operatörleri için,

$$(ber(f(A)))^2 < 4(pq-1)\, ber\left(f(A)^2\right)$$

dir. Özel olarak

$$(ber(A))^2 < 4(pq-1)\, ber\left(A^2\right)$$

dir.

İspat. (i) a_1, a_2, b_1, b_2 pozitif skalerler ve $x, y \in \Delta$ olsun. (4.2.1) eşitsizliği kullanılarak

$$a_1b_1 + \frac{a_1b_2}{2} + \frac{a_2b_1}{2} + \frac{a_2b_2}{2} < pq\left(a_1^p + a_2^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(b_1^q + b_2^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.3}$$

elde edilir.

Teoremin koşuluna göre her $x, y \in \Delta$ olmak üzere $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ olsun. (4.2.3) eşitsizliğinde $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y)$, $b_1 = g(x)$, $b_2 = g(y)$ yazılırsa

$$f(x)g(x) + \frac{f(x)g(y)}{2} + \frac{f(y)g(x)}{2} + \frac{f(y)g(y)}{2}$$

$$< pq\left(f(x)^p + f(y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(x)^q + g(y)^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.2.4}$$

elde edilir. Kendine eş A operatörünün Δ üzerindeki sürekli fonksiyonlar sınıfından fonksiyonel işlemlere sahip olduğu göz önünde bulundurularak (4.2.4) eşitsizliğinin devamı niteliğinde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir. (basitlik için λI skaler operatörü yerine λ notasyonu kullanılmıştır.)

$$f(A)g(A)+\frac{1}{2}g(y)f(A)+\frac{1}{2}f(y)g(A)+\frac{1}{2}f(y)g(y)$$
$$< pq\left(f(A)^p+f(y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(A)^q+g(y)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

buradan her $\lambda \in \Omega$ ve $\exists y \in \Delta$ için

$$\left\langle f(A)g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}g(y)\left\langle f(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}f(y)\left\langle g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}f(y)g(y)$$
$$< pq\left\langle\left(f(A)^p+f(y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(A)^q+g(y)^q\right)^{\frac{1}{q}}\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle$$

elde edilir.

Fonksiyonel işlemler bir kez daha kendine eş B operatörü için kullanılarak

$$\left\langle f(A)g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}g(B)\left\langle f(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}f(B)\left\langle g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}f(B)g(B)$$
$$< pq\left\langle\left(f(A)^p+f(B)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(A)^q+g(B)^q\right)^{\frac{1}{q}}\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle \tag{4.2.5}$$

elde edilir. Dolayısıyla (4.2.5) eşitsizliğinden

$$\left\langle f(A)g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle g(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu},\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle\left\langle f(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle$$
$$+\frac{1}{2}\left\langle f(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu},\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle\left\langle g(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle f(B)g(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu},\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle$$
$$< pq\left\langle\left(f(A)^p+f(B)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(A)^q+g(B)^q\right)^{\frac{1}{q}}\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda},\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle$$

bulunur.

Dolayısıyla tüm kendine eş $A,B\in\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\left(\Omega\right)\right)$ operatörleri ve $\lambda,\mu\in\Omega$ için,

$$\widetilde{(fg)\left(A\right)}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\widetilde{g\left(B\right)}\left(\mu\right)\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\widetilde{f\left(B\right)}\left(\mu\right)\widetilde{g\left(A\right)}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\widetilde{(fg)\left(B\right)}\left(\mu\right)$$

$$< pq\left[\left(f\left(A\right)^{p}+f\left(B\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(g\left(A\right)^{q}+g\left(B\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\sim}(\lambda) \tag{4.2.6}$$

elde edilir. Böylece (i) ispatlanmış olur.

(ii) Özel olarak $B = A$, $g = f$, $\mu = \lambda$ alınırsa ve her $\lambda \in \Omega$ için (4.2.6) eşitsizliğinden

$$\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2}+\frac{1}{2}\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)$$

$$< pq\left[\left(2f\left(A\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(2f\left(A\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]^{\sim}(\lambda)$$

$$2\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)+\frac{1}{2}\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} < pq\left[2^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} < 2pq\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)-2\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} < 2(pq-1)\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right)$$

$$\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} < 4(pq-1)\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right) \tag{4.2.7}$$

elde edilir. $pq-1>0$ ve her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)$ bir reel sayı olduğundan (çünkü $f(A)$ kendine eş) ve $\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} \geq 0$ olur. Böylece (4.2.7) eşitsizliğinden her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right) \geq 0$ sonucuna varılır. Buradan her $\lambda \in \Omega$ için

$$\left[\widetilde{f\left(A\right)}\left(\lambda\right)\right]^{2} < 4(pq-1)\sup_{\lambda\in\Omega}\widetilde{f\left(A\right)^{2}}\left(\lambda\right) = 4\left(pq-1\right)ber\left(f\left(A\right)^{2}\right)$$

elde edilir. Bu açıkça

$$\left(ber\left(f\left(A\right)\right)\right)^{2} < 4\left(pq-1\right)ber\left(f\left(A\right)^{2}\right)$$

olduğunu gösterir. Özel olarak $f(x) = x$ için

$$\left(ber\left(A\right)\right)^{2} < 4\left(pq-1\right)ber\left(A^{2}\right)$$

bulunur ve istenen sonuca ulaşılmış olur.

Böylece Önerme 4.2.2 verilebilir. İspatı Teorem 4.2.1 in ispatına benzerdir.

Önerme 4.2.2. $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde tanımlı herhangi bir pozitif A operatörü için

$$(w(A))^2 < 4(pq-1)\, w\left(A^2\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Herhangi bir $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve bir $n > 1$ sabiti için $w(A^n) \leq (w(A))^n$ olduğundan dolayı Önerme 4.2.2. den

$$\frac{1}{4(pq-1)}(w(A))^2 < w\left(A^2\right) \leq (w(A))^2$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f, $\Delta \subset (0, +\infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon ve $f \geq 0$ olsun. $A : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ operatörü $\mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerinde tanımlı pozitif bir operatör olsun. A nın spektrumu Δ aralığındadır.

$$[ber(f(A))]^p \leq C ber(f^p(A))$$

olacak şekilde bir $C = C(p,q) > 1$ sabiti vardır.

Özel olarak $ber(A)^p \leq C ber(A^p)$ dir.

İspat. a_1, a_2, b_1, b_2 pozitif sayılar olsun. (4.2.2) eşitsizliği kullanılarak

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)^p + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)^p < [pq]^p \left[a_1^p + a_2^p\right]$$

elde edilir. $x, y \in \Delta$ olsun. Her $x \in \Delta$ için $f(x) \geq 0$ olduğundan $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y)$ yazılırsa

$$\left(f(x) + \frac{f(y)}{2}\right)^p + \left(\frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}\right)^p < [pq]^p \left[f^p(x) + f^p(y)\right] \qquad (4.2.8)$$

bulunur.

Sonuç olarak Teorem 4.2.1. in ispatında olduğu gibi aynı fonksiyonel hesap işlemleri kullanılarak (4.2.8) eşitsizliğinden Δ'nın içerdiği bir spektrumu olan her pozitif B operatörü ve her $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\left[\left\langle f(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle f(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle\right]^p$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left\langle f(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle f(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle\right]^p$$

$$< [pq]^p \left[\left\langle f^p(A)\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda}\right\rangle + \left\langle f^p(B)\widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}, \widehat{k}_{\mathcal{H},\mu}\right\rangle\right]$$

bulunur ve dolayısıyla

$$\left[\widetilde{f(A)}(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{f(B)}(\mu)\right]^p + \left[\frac{1}{2}\widetilde{f(A)}(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{f(B)}(\mu)\right]^p$$

$$< [pq]^p \left[\widetilde{f^p(A)}(\lambda) + \widetilde{f^p(B)}(\mu)\right] \tag{4.2.9}$$

elde edilir.

Şimdi (4.2.9) eşitsizliğinde $B = A$ ve $\mu = \lambda$ yazılırsa her $\lambda \in \Omega$ için,

$$\left[\frac{3}{2}\widetilde{f(A)}(\lambda)\right]^p + \left[\widetilde{f(A)}(\lambda)\right]^p < [pq]^p \left[2\widetilde{f^p(A)}(\lambda)\right]$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p + 1\right]\left[\widetilde{f(A)}(\lambda)\right]^p < 2\,[pq]^p \left[\widetilde{f^p(A)}(\lambda)\right]$$

olur. $\widetilde{f^p(A)}(\lambda) \geq 0$ olduğundan her $\lambda \in \Omega$ için,

$$\left[\widetilde{f(A)}(\lambda)\right]^p < 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p + 1\right]^{-1} [pq]^p\, ber\left(f^p(A)\right)$$

bulunur. Bu da

$$\left[ber\left(f(A)\right)\right]^p < 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p + 1\right]^{-1} [pq]^p\, ber\left(f^p(A)\right)$$

olduğunu gösterir. Özel olarak

$$[ber(A)]^p < 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p + 1\right]^{-1} [pq]^p \, ber\left(A^p\right)$$

olur ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ eşitliğini sağlayan her p, q için

$$C = C(p,q) := 2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^p + 1\right]^{-1} [pq]^p > 1$$

elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Günümüzün sürekli gelişmekte olan çalışma alanlarında, Berezin sembolü ve tanımında kullanılan üretici çekirdek metodu operatörlerin genel teorisinin birçok probleminde aktif olarak kullanılan konulardır. Hazırlanan bu tez çalışmasında, üretici çekirdek ve Berezin sembolü metodunun bir uygulaması Hardy-Hilbert tipli eşitsizliklerin kullanılması ile verilmiştir. Üretici çekirdekli Hilbert uzayı üzerindeki pozitif operatörün Berezin sayısı için ters kuvvet eşitsizliği ifade edilmiştir.

Berezin sembolü metodunun Hardy-Hilbert eşitsizliği ile birlikte kullanılması, operatörlerin Berezin sayılarının klasik eşitsizliklerine alternatif bakış açısı kazandırmıştır.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir öneri vardır:

Üretici çekirdekli Hilbert uzayında, nümerik yarıçap için

$$w(A^n) \leq (w(A))^n\,,\ n > 0$$

eşitsizliği verilmiştir (Halmos, 1982).

Acaba Hardy-Hilbert eşitsizlikleri kullanılarak nümerik yarıçap için ters kuvvet eşitsizlikleri elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

Aronzajn, N., 1950. Theory of Reproducing Kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68, 337-404.

Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin Transform on the Toeplitz Algebra. Studia Mathematica, 127, 113-136.

Berezin, F.A., 1972. Covariant and Contravariant Symbols for Operators Mathematics of the USSR-Izvestiya, 6, 1117-1151.

Berezin, F.A., 1974. Quantization. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 8, 1109-1163.

Bergman, S., 1922. Uber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach orthogonalfunktionen. Mathematische Annalen, 86, 237-271.

Bochner, S., 1922. Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktion. Mathematische Zeitschrift, 14, 180-207.

Das, N., Sahoo, S., 2010. New inequalities of Hardy-Hilbert type, Buletinul Academiei de Stiinte a Republicii Moldova. Matematica, 63, 109-120.

Englis, M., 1994. Functions Invariant under the Berezin Transform. Journal of Functional Analysis, 121, 223-254.

Halmos, P.,1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.

Hardy, G.H., 1920. Note on a theorem of Hilbert, Mathematische Zeitschrift, 6, 314-317.

Hardy, G.H., 1925. Note on a theorem of Hilbert concerning series of positive term. Proceedings of the London Mathematical Society, 23, 45-46.

Hardy, G.H., Littewood J.E., Polya G., 1967. Inequalities, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge

Hardy, G.H., 1991. Divergent Series. AMS Chelsea Publishing, 394, New York.

Hu, K., 2007. Some problems in analysis inequalities. Wuhan University Press, Wuhan.

Ingham, A.E., 1936. A note on Hilbert's inequality. Journal of the London Mathematical Society, 11, 237-240.

Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. Some Results on Berezin Symbols. Complex Variables: Theory and Applications, 50, 185-193.

Karaev, M.T., 2006. Berezin Symbol and Invertibility of Operators on the Functional Hilbert Spaces. Journal of Functional Analysis, 238, 181-192.

Karaev, M.T., Gürdal, M., 2010. On the Berezin symbols and Toeplitz operators Extracta Mathematicae, 25(1), 83-102.

Karaev, M. T., 2013. Reproducing Kernels and Berezin Symbols Tecniques in Various Questions of Operator Theory. Complex Analysis and Operator Theory, 7, 983-1018.

Kılıç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44p, New Hampshire.

Kian, M., 2012. Hardy-Hilbert type inequalities for Hilbert space operators, Annals of Functional Analysis 3, 128-134.

Kolmogorov, A.N., 1941. Stationary Sequences in Hilbert Space. Moscow University Mathematics Bulletin, 2, 1-40.

Kreyszig, E., 1989. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley Classics Library Edition, 688, New York.

Krnic, M., Pecaric, J., 2006. Extension of Hilbert İnequality, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 324, 150-160.

Kuang, J.C., 2004. Applied Inequalities. Shangdong Science Technology Press, Jinan.

Landau, E., 1921. Letter to Godfrey Harold Hardy. June 21.

Martinez-Avendano, R.A., Rosenthal, P., 2007. An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space. Graduate Texts in Mathematics, 237, Springer.

Mitrinovic, D.S., Pecaric, J. E., Fink, A. M., 1991. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Kluwer Academic Publishers, Boston.

Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary Values of Berezin symbols. Operator Theory: Advances and Applications, 73, 362-368.

Polya, G. 1926. Proof of an Inequality. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(24), 57.

Riesz, M., 1919. Letter to Godfrey Harold Hardy.

Rosenblum, M., Rovnyak, J., 1985. Hardy Classes and Operator Theory. Oxford University Press.

Rudin, W., 1991. Functional Analysis. McGraw-Hill, 423, New York.

Saitoh, S., 1988. Theory of Reproducing Kernels and Its Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189.

Saitoh, S., 1997. Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369.

Schur, I., 1911. Bernerkungen sur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen veranderlichen. Journal of Math., 140, 1-28.

Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. Banach Center Publications 38, 361-380.

Szegö, S., 1921. Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Mathematische Zeitschrift, 9, 218-270.

Weyl, H., 1908. Singulare integral gleichungen mit besonderer berucksichtigung des fourierschen integral theorems. Inaugeral-Dissertation, Gottingen.

Wilhelm, M., 1950. On the spectrum of Hilbert's matrix. Amer J. Math., 72, 699-704.

Yang, B.C., 2004. On a new Hardy-Hilbert's type inequality. Mathematical Inequalities & Applications, 7(3), 355-363.

Yang, B.C., 2005. A more accurate Hardy-Hilbert's type inequality. Journal of Xinyang Normal University, 18(2), 140-142.

Yang, B.C., 2005. A more accurate Hilbert-type inequality. College Mathematics, 21(5), 99-102.

Yang, B.C., 2006. On a basic Hilbert-type inequality. Journal of Guangdong Education Institute (Natural Science), 26(3), 1-5.

Yang, B.C., 2006. On a more accurate Hardy-Hilbert's type inequality and its applications. Acta Mathematica Sinica, 49(3), 363-368.

Yang, B.C., 2007. A Hilbert-type inequality with two pairs of conjugate exponents. Journal of Jilin University (Science Edition), 45(4), 524-528.

Yang, B.C., 2007. A more accurate Hilbert type inequality. Journal of Mathematics, 27(6), 673-678.

Yang, B.C., 2007. On a more accurate Hilbert's type inequality. International Mathematical Forum, 2(37), 1831~1837.

Yang, B.C., 2007. On an extension of Hardy-Hilbert's type inequality and a reverse. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 50(4), 861-868.

Zaremba, S., 1907. L'ēquation Biharmonique et Une Classe Remarquable de

Fonctions Fondamentales Harmoniques. Bulletin International de I'Acadēmie des Sciences de Cracovie, 147-196.

Zhong, J.H., Yang, B.C., 2008. On an extension of a more accurate Hilbert-type inequality. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 35(2), 121-124.

Zhu, K., 1990. Operator Theory in Function Spaces. Marcel Dekker, 280, New York.

Zhu, K., 2007. Operator Theory in Function Spaces, volume 138 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

Zorboska, N., 2003. The Berezin trasform and radial operators. Proceedings of the American Mathematical Society, 131, 793-800.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Dilara GÜNDOĞDU
Doğum Yeri ve Yılı	:	ANKARA, 1989
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	07.dilara@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Antalya Gazi Lisesi, 2003-2006
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2008-2012

Mesleki Deneyim

Yayınları

Garayev, M.T., Saltan, S., Gündoğdu, D., 2017. Inverse Power Inequality for the Berezin Number of Operators. (Submit edildi)