T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA HARDY-HİLBERT TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Ceren ÇELİK

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2017

TEZ ONAYI

Ceren ÇELİK tarafından hazırlanan "**Üretici Çekirdekli Hilbert Uzaylarında Hardy-Hilbert Tipli Eşitsizlikler**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Yrd. Doç. Dr. Ulaş YAMANCI** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ALBAYRAK** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Banu GÜNTÜRK** Başkent Üniversitesi	

Enstitü Müdürü **Prof. Dr. Yasin TUNCER** ....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Ceren ÇELİK

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜRETİCİ ÇEKİRDEKLİ HİLBERT UZAYLARINDA HARDY-HİLBERT TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Ceren ÇELİK

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ulaş YAMANCI

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Daha sonra üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda Hardy-Hilbert tipli eşitsizlik kullanılarak konveks fonksiyonlar için Berezin sayısı eşitsizlikleri verildi. Aynı zamanda üretici çekirdekli Hilbert uzaylarda operatörler için bazı yeni nümerik değerler verildi ve bu nümerik değerler için bazı eşitsizlikler ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Üretici çekirdekli Hilbert uzayı, nümerik yarıçap, Hardy-Hilbert tipi eşitsizlik, self-adjoint operatör, konveks fonksiyon, üniter operatör, Berezin sembolü, Berezin sayısı.

2017, 33 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

HARDY-HILBERT TYPE INEQUALITIES IN REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE

Ceren ÇELİK

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ulaş YAMANCI

In this work, firstly, the historical development of the topic is mentioned, and some definitions and main results used in the work are given.

Later, by using the Hardy-Hilbert type inequality in reproducing kernel Hilbert space, it was given Berezin number inequalities for the convex functions in Reproducing Kernel Hilbert Spaces. It was also introduced some new numerical quantities for operators on reproducing kernel Hilbert space and proved some inequalities for these numerical characteristics.

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space, numerical radius, Hardy-Hilbert type inequality, self-adjoint operator, convex function, unitary operator, Berezin symbol, Berezin number.

2017, 33 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ulaş YAMANCI'ya teşekkürlerimi sunarım.

4903-YL1-17 No'lu Proje ile tezimi maddi olarak destekleyen Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitimim süresince manevi destekçim olan hocam Doç. Dr. Ayşe Nur GÜNCAN'a saygılarımı sunar ve teşekkür ederim.

Aynı zamanda tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan maddi, manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ceren ÇELİK
ISPARTA, 2017

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\lvert A\rvert$	A operatörünün modülü
$ber\left(A\right)$	A operatörünün Berezin sayısı
$Ber\left(A\right)$	A operatörünün Berezin kümesi
$\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)$	H Hibert uzayındaki lineer sınırlı operatörler
$c\left(A\right)$	Crawford sayısı
$\mathbb{D}$	Birim disk
e_n	Ortonormal baz
$H\left(\Omega\right)$	Üretici çekirdekli Hilbert uzay
k_λ	Üretici çekirdek
$\widehat{k}_\lambda$	Normalleştirilmiş üretici çekirdek
$R_\lambda T$	T nin resolvent operatörü
$\widetilde{T}$	T operatörünün Berezin sembolü
T^*	Self-adjoint operatör
$W\left(A\right)$	Nümerik değer
$w\left(A\right)$	Nümerik yarıçap
$\partial\Omega$	Ω kümesinin sınırı
$\sigma\left(T\right)$	T nin spektral değeri

1. GİRİŞ

Tarih boyunca, matematiksel analiz son üç yüz yıldır matematiğin önde gelen dallarından biri olmuştur. Aslında, eşitsizlikler, matematiksel analizin merkezi olmuştur. Kanıtlarla, matematik fiziği, teorik ve uygulamalı matematikteki birçok alanda faydalı uygulamalarıyla birlikte birçok yeni eşitsizliğin bulunmasını sağlayan bu konunun yeni gelişmelerine birçok büyük matematikçi önemli katkı sağlamıştır. Aslında ilk defa 1934 yılında bir bilimsel araştırma olarak basılan Hardy, Littlewood ve Polya tarafından çığır açan eseri "Eşitsizlikler" adlı kitap ile birlikte matematiksel eşitsizlikler yirminci yüzyılda da modern matematiğin önemli bir dalı haline gelmiştir (Hardy vd., 1967). Bu eşsiz yayın sağlam kanıtlar ve matematikteki faydalı uygulamalarıyla seçkin eşitsizliklerle dolu kesin mantıktaki bir paradigmayı temsil eder. Anthony Zygmund'ın eğlenceli sözünü söylemek yerinde olur. "Hardy, Littlewood ve Polyo'nun kitabı son yirmi, otuz yılda analiz alanındaki en önemli kitaplardan biri olmuştur. Kitabın araştırma trendleri üzerinde etkisi olmuştur ve hala etkilemeye devam etmektedir. Şuan da bir insan bu kitabı gözden geçirirken varolan metni değiştirmeyi ne kadar az istediğini farkeder" (Yang, 2014).

Yirminci yüzyılda ayrık ve integral eşitsizlikler matematikte temel bir rol oynamış olup artık teorik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında çok çeşitli uygulamaları bulunmaktadır. Özellikle, integral denklemleri hakkındaki derslerinde, sabiti tam olarak belirlemeden, Hilbert' in çift dizi eşitsizliğini ilk defa David Hilbert 1862-1943 yılları arasında kanıtlamıştır. Eğer $\{a_m\}$ ve $\{b_n\}$, $0 < \sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 < \infty$ ve $0 < \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ u oluşturacak iki reel dizi ise o zaman Hilbert'in çift dizi eşitsizliği

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \pi\left\{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olarak verebilir. Bu meşhur eşitsizlik Hilbert tarafından 1900 lerin başında π yerine 2π sabiti ile ispatlanmıştır. Hilbert'in kanıtından birkaç yıl sonra Schur, 1911 yılında yeni bir kanıt ortaya koydu ve bu kanıt da aslında en iyi olası keskin sabit olarak π sabitini alır (Schur, 1911).

Üretici çekirdekler konusu eskilere dayanan bir konu olup ilk önce 1907 yılında Zaremba tarafından harmonik ve biharmonik fonksiyon sınıfları için kullanılmıştır. 1909 yılında ise Mercer tarafından integral denklemler teorisinde ele alınmış ve bu fonksiyon pozitif tanımlı fonksiyon olarak adlandırılmıştır (Mercer, 1909). Uzun süre bu kavram dikkat çekmemiştir. Daha sonra üç Berlin matematikçisinin doktora tezlerinde üretici çekirdek kavramı ortaya çıkmıştır. Bu matematikçiler Szegö (1921), Bergman (1922) ve Bochner (1922) dir. Özel olarak, Bergman, harmonik ve analitik fonksiyon sınıfları için üretici çekirdekler kavramını vermiştir ve bu kavramı çekirdek fonkiyonu olarak adlandırmıştır (Bergman, 1922). Bergman, bu çekirdek fonksiyonu kavramını kullanarak, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisinde, konform dönüşümlerinde, pseudo-konform dönüşümlerinde, invaryant Riemannian metriklerin incelenmesinde önemli sonuçlar elde etmiştir (Bergman, 1922). Günümüz matematiğinde ise, yaklaşık 1972 yılından başlayarak ağırlıklı olarak Japon matematikçisi Saburou Saitoh üretici çekirdekler metoduna sanki yeni bir hayat vererek, bu yöntemi analizde, diferensiyel denklemler ve integral denklemler teorisinde, ters problemler konusunda, operatörler teorisinde ve harmonik analizde uygulayarak çok önemli ve orijinal sonuçlar almayı başarmıştır (Saitoh, 1988; 1997).

Üretici çekirdekler kullanılarak tanımlanabilen Berezin sembolleri kavramı ilk olarak Rus matematikçisi ve fizikçisi Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972; 1974). Berezin, aslında operatörler için kovaryant ve kontravaryant sembol kavramlarını vermiştir. Berger ve Coburn ise ilk olarak Toeplitz operatörünün kontravaryant sembollerini, yani Toeplitz operatörünün Berezin sembolünü kullanmışlardır (Berger ve Coburn, 1986).

Berezin sembolü bir çok durumlarda çok etkileyicidir ve mevcut operatör için önemli bilgileri taşımaktadır. Örneğin, çok sayıda fonksiyonel Hilbert uzaylarında (H^2 Hardy uzayı, L_a^2 Bergman uzayı vb.) A operatörü kendisinin Berezin sembolü $\widetilde{A}$ ile tek olarak tanımlanabilir. Berezin sembolü ağırlıklı olarak Toeplitz ve Hankel operatörleri için uygulanabilir.

Bu tez çalışması temel olarak aşağıdaki ana başlıklardan oluşmaktadır:

$\surd$ Hardy-Hilbert eşitsizlikleri yardımıyla konveks fonksiyonlar için operatörlerin Berezin sayısı için eşitsizlik elde edilmesi,

$\surd$ Yeni nümerik değerler tanımlanması ve bu tanımlanan nümerik değerler arasındaki ilişkinin verilmesi,

$\surd$ Buzano (1974) nun elde etmiş olduğu eşitsizlik yardımıyla yeni Berezin sayısı eşitsizliklerin bulunması.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

1925 te, Hardy aşağıdaki eşitsizliği vermiştir:

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $a_m,\ b_n \geq 0$, $a = \{a_m\}_{m=1}^{\infty} \in \ell^p$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ ve $0 < \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p < \infty$ ve $0 < \sum_{n=0}^{\infty} b_n^q < \infty$ ise o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.1}$$

dır. Burada $\pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)$ sabiti eşitsizliği sağlayan en iyi ihtimaldir. (2.1) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliği olarak bilinir ve bu eşitsizlik matematiksel analiz ve uygulamalarda önemlidir. Son zamanlarda, Hardy-Hilbert eşitsizliklerinin uygulamaları ile ilgili birçok sonuç elde edilmiştir (Garayev vd., 2016; Hansen, 2009; Hansen.vd, 2010; Kian, 2012).

(2.1) in benzer koşulları altında, Hardy vd. (1967) aşağıdaki gibi (2.1) eşitsizliğine benzer bir eşitsizlik vermiştir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{\max\{m,n\}} < pq \left\{\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{2.2}$$

ve denk formu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{\max\{m,n\}}\right)^p < (pq)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \tag{2.3}$$

dır. Burada pq ve $(pq)^p$ sabitleri en iyi ihtimallerdir (Edmunds vd., 2002; Kufner vd., 2006; Opic ve Kufner, 1990).

Üretici çekirdeklerin genel teorisi Aronszajn (1950) tarafından kurulmuş ve Schwartz (1964) tarafından geliştirilmiştir. Aynı yıllarda Krein (1963), farklı bağlamda üretici çekirdeklerin genel teorisini geliştirmiştir.

Berezin sembolleri kavramı üretici çekirdekler ile tanımlı olup ilk olarak Berezin tarafından verilmiştir (Berezin, 1972; 1974). Bu kavramın yardımıyla Berezin, kuantum fiziğinin ve istatistiksel fiziğin önemli operatörlerinin (Schrödinger operatörü, Hamilton operatörü, Jacobi operatörü vd.) özdeğerlerinin dağılımı için önemli sonuçlar almıştır. Örneğin ilk olarak nükleer operatörün izini Berezin sembolü ile ifade etmiştir. Ayrıca eliptik tipli kısmi diferensiyel operatörün pozitif özdeğerlerinin sayısı için de önemli formüller elde etmiştir. Daha sonra Berezin sembolünün, operatörler teorisinin iç gelişimindeki rolü daha çok ortaya çıkmıştır. Bundan dolayı ilk olarak Nordgren ve Rosenthal, standart fonksiyonel Hilbert uzayındaki kompakt operatörlerin karakterizasyonunu Berezin sembolü kullanarak vermişlerdir (Nordgren ve Rosenthal, 1994). Ayrıca Bergman uzayındaki Toeplitz operatörlerin Berezin sembolü Poisson çekirdeğinin, $H^2(\mathbb{D})$ Hardy uzayındaki rolü kadar, Bergman uzayında da önemli olduğu ortaya çıkmıştır. Bilindiği gibi harmonik fonksiyonların Berezin sembolleri yardımıyla tasvir edilmesi Engliš (1994), Axler ve Zheng (1998) tarafından ortaya konulmuştur ve günümüzde farklı alanlarda kullanılışı ve önemi ortaya çıkmaktadır. Berezin sembolü, Hardy, Bergman ve Fock uzaylarını içeren Üretici Uzayın Hilbert Uzayı üzerindeki operatörleri çalışmak için en kullanışlı araçtır. Örneğin; bazı operatörleri sınırlılığı, tersinirliği, kompaktlığı ve pozitifliği Berezin sembolüyle karakterize edilmiştir. (Chalender vd., 2012; Karaev, 2006; Karaev, 2013).

Berezin kümesi ve Berezin sayısı ise Karaev (2006) tarafından tanımlanmıştır (Karaev, 2006). Berezin sembolleri yardımıyla operatörlerin Schatten-von Neumann sınıflarına ait olması ile ilgili yeni kriterler verilmiştir (Karaev, 2002; Karaev ve Saltan, 2005; Karaev vd., 2013). Yine Berezin sembolleri yardımıyla toplanabilme teorisi için (Abel, Borel, vd.) yeni metodlar elde edilmiştir (Pehlivan ve Karaev, 2004; Karaev, 2010; 2013; Karaev vd., 2014).

Nümerik yarıçap ve uygulamaları ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur (Abu-Omar ve Kittaneh, 2015; Dragomir, 2006; Dragomir, 2007; Gustafson ve Rao, 1997; Kittaneh, 2005; Kittaneh vd. , 2015). Nümerik yarıçap için temel bir eşitsizlik

$$w(A^n) \leq w(A)^n, \ n \geq 1$$

şeklindeki kuvvet eşitsizliğidir (Gustafson ve Rao, 1997; Halmos, 1982). Bu eşitsizliğe benzer yazarlar tarafından birçok eşitsizlik elde edilmiştir (Abu-Omar ve Kittaneh, 2014; 2015).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bu tezde kullanılacak olan bazı kavramlara yer verilecektir.

Tanım 3.1. V bir vektör uzayı olsun. $x, y \in V$ için $< x, y >$ ile gösterilen ve aşağıdaki koşulları sağlayan $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to< x, y >$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım V ye de iç çarpım uzayı denir. Bu iç çarpım uzayı $(V, <,>)$ ile gösterilir.

(i) Her $x, y \in V$ için $< x, y >=< y, x >$,

(ii) Her $x, y, z \in V$ için $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$,

(iii) Her $x, y \in V$, $c \in \mathbb{R}$ için $< cx, y >= c < x, y >=< x, cy >$,

(iv) Her $x \in V$ için $< x, x >\geq 0; < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.2. X bir vektör uzayı, $x, y \in X$ keyfi vektörler ve α skaler olmak üzere

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,

(iv)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özellikleri gerçekleyen $\|.\|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.3. X normlu uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi $m \to \infty$ ve $n \to \infty$ iken $\|x_m - x_n\| \to 0$ ise o zaman $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir. Eğer X normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına tam uzay denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.4. Tam iç çarpım uzayına Hilbert uzay denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.5. Tam normlu uzaya Banach uzayı denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.6. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için , $\|Tx\| \leq c \|x\|$ olacak şekilde c sayısı varsa T operatörü sınırlıdır denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.7. Bir H Hilbert uzayında, sınırlı lineer bir $T : H \to H$ operatörü verilmiş olsun. Eğer $T^* = T$ ise T operatörüne self-adjoint ya da Hermityen operatör denir. T operatörü bire-bir, üzerine ve $T^* = T^{-1}$ ise T operatörüne üniter operatör adı verilir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.8. $[a, b]$ aralığında herhangi x_1, x_2 noktaları ve $0 < \lambda < 1$ aralığındaki herhangi λ değeri için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $f(x)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.9. $X \neq \{0\}$ kompleks, normlu bir uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \longrightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks bir sayı ve I, $D(T)$ üzerindeki özdeşlik operatörü olmak üzere T ile $T_\lambda = T - \lambda I$ operatörü eşlensin. T_λ nın bir tersi varsa, bu $R_\lambda T$ yani, $R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}$ ile gösterilir, buna T nin resolvent operatörü denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.10. $X \neq \{0\}$ kompleks, normlu bir uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. T nin bir λ regüler değeri,
(i) $R_\lambda(T)$ mevcut,
(ii) $R_\lambda(T)$ sınırlı,
(iii) X de yoğun bir küme üzerinde $R_\lambda(T)$ tanımlı olacak şekilde kompleks bir sayıdır (Kreyszig, 1989).

T nin bütün regüler değerleri olan λ ların oluşturduğu $\rho(T)$ kümesine ise, T nin resolvent kümesi adı verilir. $\rho(T)$ nin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyeni olan $\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T)$ kümesine T nin spektrumu ve bir $\lambda \in \sigma(T)$ sayısına da T nin spektral değeri denir (Kreyszig, 1989).

Tanım 3.11. H Hilbert uzayı üzerinde $ST = TS$ olacak şekilde bir S operatörü varsa o zaman T operatörüne tersinebilir operatör denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.12. Tüm $x_1, x_2, ..., x_n$ ve $y_1, y_2, ..., y_n$ reel sayı olmak üzere,

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \leq \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right).\left(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2\right)$$

eşitsizliğine Cauch-Schwartz eşitsizliği denir (Furuta, 2002).

Tanım 3.13. Kompleks sayıların açık bir Ω kümesi üzerinde, her $\lambda \in \Omega$ için $f \to f(\lambda)$ lineer fonksiyoneli $\mathcal{H}$ uzayında sürekli olacak şekilde Ω kümesi üzerindeki f fonksiyonlarının oluşturduğu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayına "fonksiyonel Hilbert uzayı" ya da "üretici çekirdekli Hilbert uzayı" denir (Halmos, 1982).

Klasik Riesz temsil teoreminden, $\lambda \in \Omega$ için $f(\lambda) = \langle f, k_{\mathcal{H},\lambda}\rangle$ olacak şekilde bir tek $k_{\mathcal{H},\lambda} \in \mathcal{H}$ fonksiyonu vardır. $\Omega \times \Omega$ kümesi üzerinde $k_{\mathcal{H},\lambda}(z) = k(z, \lambda)$ ile tanımlanan bu k fonksiyonuna "$\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeği" denir (Halmos, 1982).

Diğer taraftan üretici çekirdek bazlar yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

Yardımcı Teorem 3.14. $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi ortonormal bazı $\{e_n\}$ olsun. O zaman $\mathcal{H}$ uzayının k üretici çekirdeği

$$k_\lambda(z) = k(z, \lambda) = \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

şeklinde ifade edilebilir (Stroethoff, 1997).

İspat: $\mathcal{H}$ fonksiyonel Hilbert uzayının herhangi bir ortonormal bazı $\{e_n\}$ olduğundan her $z \in \Omega$ için

$$k_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_\lambda, e_n\rangle e_n$$

yazılabilir. Parseval eşitliğinden $z \in \Omega$ olmak üzere

$$k(z, \lambda) = \langle k_\lambda, k_z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle k_\lambda, e_n\rangle \langle e_n, k_z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{e_n(\lambda)} e_n(z)$$

olup böylece ispat tamamlanır (Stroethoff, 1997).

Üstteki Yardımcı Teorem'den $k_\lambda(z) = \overline{k_z(\lambda)}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla her $\lambda, z \in \Omega$ için $k(z,\lambda) = \overline{k(\lambda,z)}$ dir. k_λ normu ise

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = k(\lambda,\lambda)$$

dir. $\widehat{k}_\lambda = \dfrac{k_\lambda}{k(\lambda,\lambda)^{1/2}}$ fonksiyonuna λ noktasında $\mathcal{H}$ uzayının "normalleştirilmiş üretici çekirdeği" denir (Stroethoff, 1997).

Tanım 3.15. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$, fonksiyonel Hilbert uzayı ve $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} = \dfrac{k_{\mathcal{H},\lambda}}{\|k_{\mathcal{H},\lambda}\|}$ bu uzayın normelleştirilmiş üretici çekirdeği olsun. Eğer $\lambda \to \partial\Omega$ $(\lambda \to \xi \in \partial\Omega)$ iken $\widehat{k}_{\mathcal{H},\lambda} \to 0$ zayıf yakınsak ise $\mathcal{H}$ uzayına "standart fonksiyonel Hilbert uzayı" denir (Aronzajn, 1950; Saitoh, 1988; 1997).

Tanım 3.16. $\mathcal{H}$ uzayı Ω kümesi üzerinde üretici çekirdekli Hilbert uzayı ve A bu uzayda lineer sınırlı operatör olsun. Bu durumda

$$\widetilde{A}(\lambda) = \left\langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{A}$ fonksiyonuna "A operatörünün Berezin sembolü" ya da "Berezin dönüşümü" denir (Berezin, 1972).

Tanım 3.17. k_λ üretici çekirdeğine sahip, boş olmayan bir Ω kümesi üzerindeki kompleks değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ fonksiyonel Hilbert uzayı üzerinde sınırlı lineer bir A operatörünün "Berezin kümesi" ve "Berezin sayısı", sırasıyla,

$$Ber(A) = \left\{ \widetilde{A}(\lambda) : \lambda \in \Omega \right\} \text{ ve } ber(A) = \sup \left\{ \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| : \lambda \in \Omega \right\}$$

ifadeleriyle tanımlanır (Karaev, 2006).

Aşağıda Berezin sembolünün bazı temel özellikleri verilmiştir (Kiliç, 1994).

1. A pozitif operatör ise o zaman $\widetilde{A}$ pozitif fonksiyondur.

2.

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{A}(\lambda) \right| &= \left| \left\langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle \right| \leq \left\| A\widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \\ &\leq \|A\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| \left\| \widehat{k}_{H,\lambda} \right\| = \|A\| \quad (\lambda \in \Omega) \end{aligned}$$

olduğundan $\widetilde{A}$ Berezin sembolü sınırlı bir fonksiyondur.

3. A^* adjoint operatörünün Berezin sembolü, $\widetilde{A}$ nın kompleks eşleniğine eşittir. Yani

$$\widetilde{A^*}(\lambda) = \left\langle A^*\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle = \left\langle \widehat{k}_{H,\lambda}, A\widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle = \overline{\left\langle A\widehat{k}_{H,\lambda}, \widehat{k}_{H,\lambda} \right\rangle} = \overline{\widetilde{A}(\lambda)}$$

dir.

4. Her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{A}(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul, $A = B$ olmasıdır.

5. A operatörü kompakt ise $\widetilde{A}(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \partial\Omega)$ dir. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani $\widetilde{A}(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \partial\Omega)$ ise A operatörü kompakt olmayabilir.

Tanım 3.18. Herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünün Crawford sayısı

$$c(A) := \inf\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1\}$$

şeklinde tanımlanır (Zamani, 2017).

Tanım 3.19. $H = \operatorname{Re}(A) = \dfrac{A + A^*}{2}$ ve $K = \operatorname{Im}(A) = \dfrac{A - A^*}{2i}$ sırasıyla A operatörünün reel ve sanal kısımları olmak üzere herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünün kartezyen ayrışımı $A = H + iK$ şeklinde ifade edilir (Zamani, 2017).

Tanım 3.20. Herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörünün $|A|$ modülü $|A| := (A^*A)^{1/2}$ ile tanımlanır. Aynı zamanda $|A|^2 := A^*A$ dir (Zamani, 2017).

Tanım 3.21. $(H, \langle .,. \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. T operatörünün nümerik değer kümesi

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$$

ile verilen $\mathbb{C}$ kompleks sayısının bir alt kümesidir (Dragomir, 2013).

$W(T)$ nümerik değer kümesinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$,

(ii) $W(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in W(T)\}$, burada T^*, T 'nin adjoint operatörüdür,

(iii) Herhangi U üniter operatör için $W(U^*TU) = W(T)$ dır (Dragomir, 2013).

Tanım 3.22. $(H, \langle ., . \rangle)$ kompleks bir Hilbert uzayı olsun. H üzerindeki bir T operatörünün nümerik yarıçapı

$$w(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in W(T)\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanır.

Üstteki tanımda herhangi $x \in H$ için $|\langle Tx, x\rangle| \leq w(T)\|x\|^2$ dir (Dragomir, 2013).

Bilindiği üzere $w(.)$ nümerik yarıçapı tüm sınırlı lineer operatörleri $B(H)$ cebiri üzerinde bir normdur. Yani,

(i) Herhangi $T \in B(H)$ için $w(T) \geq 0$ ve $w(T) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $T = 0$;

(ii) Herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $w(\lambda T) = |\lambda| w(T)$ ve $T \in B(H)$;

(iii) Herhangi bir $T, V \in B(H)$ için $w(T + V) \leq w(T) + w(V)$

koşulları sağlanır (Dragomir, 2013).

Operatörün normu ile nümerik yarıçap arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.

Teorem 3.23. Herhangi T operatörü için

$$\frac{1}{2}\|T\| \leq w(T) \leq \|T\|$$

dır (Furuta, 2002).

Aynı zamanda operatörün Berezin sayısı ve nümerik yarıçapı ile Berezin kümesi ve nümerik değeri arasında

$$ber(T) \leq w(T) \quad \text{and } Ber(T) \subset W(T)$$

şeklinde bir bağıntı vardır.

Nümerik yarıçap için en önemli kuvvet eşitsizliği aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.24. Herhangi T operatörü ve n doğal sayısı için

$$w\left(T^{n}\right) \leq w\left(T\right)^{n}$$

dir (Furuta, 2002).

Teorem 3.25. $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer a_m, $b_n \geq 0$, $a = \{a_m\}_{m=1}^{\infty} \in \ell^p$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^q$ ve $0 < \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m^p < \infty$ ve $0 < \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n^q < \infty$, ise o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

dır. Burada mümkün olan en iyi sabit faktör $\pi \csc\left(\dfrac{\pi}{p}\right)$ dır. (2.1) eşitsizliği Hardy-Hilbert eşitsizliği olarak bilinir (Hansen , 2009).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Self-adjoint operatörler, konveks fonksiyonlar için Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler ve Berezin sayısı eşitsizlikleri

Aşağıdaki teoremde, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında self-adjoint operatörler ve konveks fonksiyonlar için (2.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlik verilmiştir.

Teorem 4.1.1. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $f, g : J \to (0, \infty)$ fonksiyonları sürekli ve konveks fonksiyonlar ise o zaman her $\lambda, \eta \in \Omega$ ve spektrumları J aralığı tarafından kapsanan herhangi $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörleri için
(i)

$$\begin{aligned} & f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) g(\widetilde{A}(\lambda)) + \frac{f(\widetilde{A}(\lambda)) g\left(\widetilde{B}(\eta)\right)}{2} + \frac{f\left(\widetilde{B}(\eta)\right) g(\widetilde{A}(\lambda))}{2} + \frac{f\widetilde{(B)\, g}(B)(\eta)}{2} \\ < \; & q\left(\widetilde{f^p(A)}(\lambda) + \widetilde{f^p(B)}(\eta)\right) + p\left(\widetilde{g^q(A)}(\lambda) + \widetilde{g^q(B)}(\eta)\right) \end{aligned}$$

dir.
(ii) Spektrumu J aralığı tarafından kapsanan herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörü için

$$[f(ber(A))]^2 < \frac{15}{4} ber\left(f^2(A)\right)$$

dir.

İspat. (2.2) eşitsizliğinde $n \geq 3$ için $a_n, b_n = 0$ olsun. $a_n, b_n \geq 0$ olduğundan, (2.2) eşitsizliğinden

$$a_1 b_1 + \frac{a_1 b_2}{2} + \frac{a_2 b_1}{2} + \frac{a_2 b_2}{2} < pq\left(a_1^p + a_2^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.1}$$

elde edilir. $x, y \in J$ olsun. Teoremin hipotezi gereği $f, g \geq 0$ olduğundan (4.1) formülünde $a_1 = f(x)$, $a_2 = f(y)$, $b_1 = g(x)$, $b_2 = g(y)$ yazılabilir. Böylece her

$x, y \in J$ için

$$
\begin{aligned}
& f(x)g(x)+\frac{1}{2}f(x)g(y)+\frac{1}{2}f(y)g(x)+\frac{1}{2}f(y)g(y) \\
< \;& pq\left(f(x)^p+f(y)^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(g(x)^q+g(y)^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

olur. (4.2) formülünde x yerine $\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle$ ifadesi konularak her $\lambda \in \Omega$ ve herhangi $y \in J$ için

$$
\begin{aligned}
& f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)+\frac{f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)g(y)}{2} \\
& +\frac{f(y)g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)}{2}+\frac{f(y)g(y)}{2} \\
< \;& pq\left(f^p\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+f^p(y)\right)^{1/p}\left(g^q\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+g^q(y)\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Üstteki eşitsizlikte B self-adjoint operatörüne fonksiyonel kalkülüs uygulandığında

$$
\begin{aligned}
& f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)+\frac{f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)g(B)}{2} \\
& +\frac{f(B)g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)}{2}+\frac{f(B)g(B)}{2} \\
< \;& pq\left(f^p\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+f^p(B)\right)^{1/p}\left(g^q\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+g^q(B)\right)^{1/q}
\end{aligned}
$$

olup, böylece

$$
\begin{aligned}
& f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)+\frac{f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)\left\langle g(B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle}{2} \\
& +\frac{\left\langle f(B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle g(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)}{2}+\frac{\left\langle f(B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle\left\langle g(B)\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle}{2} \\
< \;& pq\left\langle\left(f^p\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+f^p(B)\right)^{1/p}\left(g^q\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right)+g^q(B)\right)^{1/q}\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& f\left(\widetilde{A}\,(\lambda)\right) g(\widetilde{A}\,(\lambda)) + \frac{f(\widetilde{A}\,(\lambda))\widetilde{g\,(B)}\,(\eta)}{2} \\
& + \frac{\widetilde{f\,(B)}\,(\eta)\, g(\widetilde{A}\,(\lambda))}{2} + \frac{\widetilde{f\,(B)}\,(\eta)\,\widetilde{g\,(B)}\,(\eta)}{2} \\
< \; & pq\left[\left(f^p\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) + f^p\,(B)\right)^{1/p}\left(g^q\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) + g^q\,(B)\right)^{1/q}\right]^{\sim}(\eta)
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

elde edilir.

f, g fonksiyonlarının konveksliğini ve kuvvet fonksiyonların özelliği göz önünde bulundurularak

$$
\begin{aligned}
f\left(\left\langle B\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle\right) & \leq \left\langle f\,(B)\,\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle, \\
g\left(\left\langle B\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle\right) & \leq \left\langle g\,(B)\,\widehat{k}_\eta, \widehat{k}_\eta\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f^p\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right) & \leq \left\langle f^p\,(A)\,\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle, \\
g^q\left(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right) & \leq \left\langle g^q\,(A)\,\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

olur. (4.3) formülünde (4.4) ve (4.5) eşitsizlikleri konularak

$$
\begin{aligned}
& f(\widetilde{A}(\lambda))g(\widetilde{A}(\lambda)) + \frac{f(\widetilde{A}(\lambda))g\left(\widetilde{B}\,(\eta)\right)}{2} \\
& + \frac{f\left(\widetilde{B}\,(\eta)\right) g(\widetilde{A}(\lambda))}{2} + \frac{\widetilde{f\,(B)\,g\,(B)}\,(\eta)}{2} \\
< \; & pq\left[\left(f^p\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) + f^p\,(B)\right)^{1/p}\left(g^q\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) + g^q\,(B)\right)^{1/q}\right]^{\sim}(\eta)
\end{aligned}
$$

olur.

$\widetilde{f^p\,(A)}\,(\lambda) + f^p\,(B)$ ve $\widetilde{g^q\,(A)}\,(\lambda) + g^q\,(B)$ birbirleriyle yer değiştirebildiğinden aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden her $\lambda, \eta \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) g(\widetilde{A}(\lambda))+\frac{f(\widetilde{A}(\lambda)) g\left(\widetilde{B}(\eta)\right)}{2} \\ & +\frac{f\left(\widetilde{B}(\eta)\right) g(\widetilde{A}(\lambda))}{2}+\frac{\widetilde{f(B) g(B)}(\eta)}{2} \\ < \; & pq\left[\frac{1}{p}\left(\widetilde{f^p(A)}(\lambda)+\widetilde{f^p(B)}(\eta)\right)+\frac{1}{q}\left(\widetilde{g^q(A)}(\lambda)+\widetilde{g^q(B)}(\eta)\right)\right] \\ = \; & q\left(\widetilde{f^p(A)}(\lambda)+\widetilde{f^p(B)}(\eta)\right)+p\left(\widetilde{g^q(A)}(\lambda)+\widetilde{g^q(B)}(\eta)\right) \end{aligned} \tag{4.6}$$

dir. Böylece (i) eşitsizliği elde edilir.

(ii) $B = A$, $g = f$, $p = q$ ve $\eta = \lambda$ olduğunda (4.6) eşitsizliğinden

$$\left[f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left[f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left[f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)\right]^2+\frac{1}{2}\widetilde{f^2(A)}(\lambda)<8\widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

olup böylece her $\lambda \in \Omega$ için

$$\left[f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)\right]^2<\frac{15}{4}\widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

elde edilir. $f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) \geq 0$ $\left(\text{çünkü } \widetilde{A}(\lambda) \text{ reel sayı}\right)$ ve $\widetilde{f^2(A)}(\lambda) \geq 0$ olduğundan üstteki eşitsizlikten her $\lambda \in \Omega$ için

$$\left[f\left(\widetilde{A}(\lambda)\right)\right]^2<\frac{15}{4}\sup_{\lambda \in \Omega}\widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

dır. Dolayısıyla spektrumu J aralığı tarafından kapsanan herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörü için

$$[f(ber(A))]^2<\frac{15}{4} ber\left(f^2(A)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Aşağıdaki sonuç bu çalışmada elde edilecek temel sonuçlardan biridir.

Teorem 4.1.2. $f : J \to (0, \infty)$ konveks ve sürekli fonksiyon ve $A : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$

operatörü spektrumu J aralığı tarafından kapsanan herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ self-adjoint operatörü olsun. O zaman

$$[f(ber\,(A))]^2 \leq \frac{128}{13} ber\left(f^2\,(A)\right)$$

elde edilir.

İspat. (2.3) formülü kullanılarak, $p = 2$ için

$$\left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right)^2 < 16\left(a_1^2 + a_2^2\right) \tag{4.7}$$

dır. $x, y \in J$ olsun. f pozitif fonksiyon olduğundan, (4.7) formülünde $a_1 = f(x), a_2 = f(y)$ ifadeleri konularak

$$\left(f(x) + \frac{f(y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2}\right)^2 < 16\left(f^2(x) + f^2(y)\right) \tag{4.8}$$

elde edilir. Teorem 4.1.1 in ispatında olduğu gibi (4.8) formülünde x yerine $\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle$ ifadesi konulduğunda her $\lambda \in \Omega$ ve herhangi $y \in J$ için

$$\begin{aligned}
&\left(f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle) + \frac{f(y)}{2}\right)^2 + \left(\frac{f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)}{2} + \frac{f(y)}{2}\right)^2 \\
< \;& 16\left(f^2(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle) + f^2(y)\right)
\end{aligned}$$

olur.

Üstteki eşitsizliğe B self-adjoint operatörü için fonksiyonel kalkülüs kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left(f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle) + \frac{f(B)}{2}\right)^2 + \left(\frac{f(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle)}{2} + \frac{f(B)}{2}\right)^2 \\
< \;& 16\left(f^2(\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle) + f^2\,(B)\right)
\end{aligned}$$

ve her $\lambda, \mu \in \Omega$ için

$$\begin{aligned} & \left(f(\widetilde{A}(\lambda))+\frac{\widetilde{f(B)}(\mu)}{2}\right)^2+\left(\frac{f(\widetilde{A}(\lambda))}{2}+\frac{\widetilde{f(B)}(\mu)}{2}\right)^2 \\ < \; & 16\left(f^2(\widetilde{A}(\lambda))+\widetilde{f^2(B)}(\mu)\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

f, g fonksiyonlarının ve kuvvet fonksiyonların özelliğinden, $f(\widetilde{B}(\mu)) \leq \widetilde{f(B)}(\mu)$ ve $f^2\left(\widetilde{A}(\lambda)\right) \leq \widetilde{f^2(A)}(\lambda)$ dir. Böylece son eşitsizlikten

$$\begin{aligned} & \left(f(\widetilde{A}(\lambda))+\frac{f(\widetilde{B}(\mu))}{2}\right)^2+\left(\frac{f(\widetilde{A}(\lambda))}{2}+\frac{f(\widetilde{B}(\mu))}{2}\right)^2 \\ < \; & 16\left(\widetilde{f^2(A)}(\lambda)+\widetilde{f^2(B)}(\mu)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. $B = A$ ve $\mu = \lambda$ alındığında her $\lambda \in \Omega$ için üstteki eşitsizlikten

$$\left[f(\widetilde{A}(\lambda))\right]^2 \leq \frac{128}{13}\widetilde{f^2(A)}(\lambda)$$

dir. $\left[f(\widetilde{A}(\lambda))\right]^2 \geq 0$ ve $\widetilde{f^2(A)}(\lambda) \geq 0$ olduğundan, son eşitsizlikte supremum alınarak her A self-adjoint operatörü ve $\lambda \in \Omega$ için

$$[f(ber(A))]^2 \leq \frac{128}{13} ber\left(f^2(A)\right)$$

elde edilir.

4.2. Diğer Berezin Sayısı Eşitsizlikleri

Bu bölümde, üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında bazı yeni nümerik değerler ele alındı ve bu sayılar için yeni nümerik eşitsizlikler ispatlandı.

Tanım 4.2.1. $\widetilde{b}(A)$ ve $\widetilde{c}(A)$ sayıları sırasıyla

$$\widetilde{c}(A) := \inf\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\}$$

ve

$$\widetilde{b}(A) := \inf\left\{\frac{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}{\left\|A\widehat{k}_{\lambda}\right\|} : \lambda \in \Omega\right\}$$

ile tanımlanır. $\widetilde{b}(A) \leq 1$ ve

$$c(A) \leq \widetilde{c}(A) \leq ber(A)$$

dir.

Yukarıda tanımlanan nümerik değerler ve diğer nümerik karakteristikler sınırlı lineer operatörlerin çalışılmasında kullanışlıdır ve son zamanlarda birçok yazarın dikkatini çekmiştir (El-Haddad ve Kittaneh, 2007; Gustafson ve Rao, 1997; Moslehian ve Sattari, 2016; Zamani, 2017).

Tanım 4.2.2. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü için $|\cos| A$

$$|\cos| A := \inf\left\{\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|Ax\| \|x\|} : x \in \mathcal{H},\ \|Ax\| \neq 0\right\}$$

ile tanımlanır.

Teorem 4.2.3. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü her $f \in \mathcal{H}$ ve $M > 0$ sayısı için $\|Af\| \geq M\|f\|$ olacak şekilde sıfırdan farklı operatör olsun. O zaman

$$\widetilde{c}(A) \geq M |\cos| A$$

dır.

İspat. Gerçekten

$$\begin{aligned}\widetilde{b}(A) &= \inf\left\{\frac{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}{\left\|A\widehat{k}_{\lambda}\right\|} : \lambda \in \Omega\right\} \leq \inf\left\{\frac{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}{M} : \lambda \in \Omega\right\} \\ &= \frac{1}{M}\inf\left\{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right| : \lambda \in \Omega\right\} = M^{-1}\widetilde{c}(A),\end{aligned}$$

olup böylece $\widetilde{c}(A) \geq M\widetilde{b}(A)$ elde edilir. Şimdi $\widetilde{b}(A) \geq |\cos| A$ olduğu gösterilecektir. Önermenin koşulundan her $f \in \mathcal{H}$ için $\|Af\| \geq M\|f\|$ olduğundan, özel olarak her $\lambda \in \Omega$ için $\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\| \geq M > 0$ dır. Bu yüzden

$$\widetilde{b}(A) = \inf\left\{\frac{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}{\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|} : \lambda \in \Omega\right\} = \inf\left\{\frac{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}{\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|} : \lambda \in \Omega, \quad \left\|A\widehat{k}_\lambda\right\| \neq 0\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\inf\left\{\frac{\left|\left\langle A\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}, \frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\right\rangle\right|}{\left\|A\frac{k_\lambda}{\|k_\lambda\|}\right\|} : \lambda \in \Omega\right\} &= \inf\left\{\frac{|\langle Ak_\lambda, k_\lambda\rangle|}{\|Ak_\lambda\|\,\|k_\lambda\|} : \lambda \in \Omega\right\} \\
&= \inf\left\{\frac{|\langle Ak_\lambda, k_\lambda\rangle|}{\|Ak_\lambda\|\,\|k_\lambda\|} : \lambda \in \Omega, \quad \|Ak_\lambda\| \neq 0\right\} \\
&\geq \inf\left\{\frac{|\langle Ax, x\rangle|}{\|Ax\|\,\|x\|} : x \in \mathcal{H}, \ \|Ax\| \neq 0\right\} \\
&= |\cos|\, A
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\widetilde{b}(A) \geq |\cos|\, A$ olup $\widetilde{c}(A) \geq M\,|\cos|\, A$ elde edilir.

Sonuç 4.2.4. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tersinir operatör ise o zaman $\widetilde{c}(A) \geq \|A^{-1}\|^{-1}\,|\cos|\, A$ dır.

Teorem 4.2.5. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ise o zaman

$$ber\left(|A|^2\right) \leq ber(A)^2 + \sqrt{ber\left(|A|^2\right)\left[ber\left(|A|^2\right) - \widetilde{c}(A)^2\right]}$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
ber\left(|A|^2\right) &= ber(A^*A) = \sup_\Omega \left\langle A^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = \sup_\Omega \left\langle A\widehat{k}_\lambda, A\widehat{k}_\lambda\right\rangle \\
&= \sup_\Omega\left\{\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, A\widehat{k}_\lambda - \widetilde{A}(\lambda)\widehat{k}_\lambda\right\rangle + \left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widetilde{A}(\lambda)\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\right\} \\
&\leq \sup_\Omega\left\{\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|\left\|A\widehat{k}_\lambda - \widetilde{A}(\lambda)\widehat{k}_\lambda\right\| + \left|\widetilde{A}(\lambda)\right|^2\right\} \\
&\leq \sup_\Omega\left\{ber(A^*A)^{1/2}\sqrt{\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|^2 - \left|\widetilde{A}(\lambda)\right|^2} + ber(A)^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \ ber\left(|A|^2\right)^{1/2} \sup_{\Omega} \sqrt{ber\left(|A|^2\right) - \left|\widetilde{A}(\lambda)\right|^2} + ber(A)^2$$
$$= \ ber\left(|A|^2\right)^{1/2} \sqrt{ber\left(|A|^2\right) - \inf_{\lambda\in\Omega} \left|\widetilde{A}(\lambda)\right|^2} + ber(A)^2$$
$$= \ ber(A)^2 + \sqrt{ber\left(|A|^2\right)\left[ber\left(|A|^2\right) - \widetilde{c}(A)^2\right]},$$

olup böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.6. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbb{D})$ uzayı $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskte analitik fonksiyonların üretici çekirdekli Hilbert uzayı olsun. Herhangi $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü için

$$\begin{aligned} &\widetilde{c}(A^*A) + \frac{1}{4}\sup_{\lambda\in\Omega}[\widetilde{c}\left(\frac{\widetilde{A^*}(\lambda)}{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}A + \frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}A^*\right)^2 \\ &-ber\left(\left(\frac{\widetilde{A}(\lambda)}{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}A^*\right)^2 + \left(\frac{\widetilde{A^*}(\lambda)}{\left|\widetilde{A}(\lambda)\right|}A\right)^2\right)] \\ \leq\ & ber(A)^2 + \frac{1}{4}ber(A^*A + AA^*) \end{aligned}$$

elde edilir.

İspat. Herhangi $\lambda \in \Omega$ ve $\mu_\lambda \in \mathbb{C}$ için $\widetilde{A}(\lambda) = \mu_\lambda \left|\widetilde{A}(\lambda)\right|$ olsun. O zaman $\left\langle \overline{\mu_\lambda} A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|$ dır. Eğer $\overline{\mu_\lambda}A = H + iK$ ifadesi $\overline{\mu_\lambda}A$ operatörünün kartezyen ayrışımı ise o zaman

$$\left\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle + i\left\langle K\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = \left\langle \overline{\mu_\lambda}A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| \geq 0$$

dır. Böylece her $\lambda \in \Omega$ için $\widetilde{K}(\lambda) = \left\langle K\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = 0$ olur. Dolayısıyla $K = 0$ dır (Zhu, 2007). O zaman her $\lambda \in \Omega$ için $\left\langle \overline{\mu_\lambda}A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle = \left\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle$ olur. Herhangi $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\lambda \in \mathbb{D}$ için $X\widehat{k}_\lambda - \widetilde{X}(\lambda)\widehat{k}_\lambda \perp \widehat{k}_\lambda$ ve $X\widehat{k}_\lambda - \widetilde{X}(\lambda)\widehat{k}_\lambda^2 = \left\|X\widehat{k}_\lambda\right\|^2 - \left|\widetilde{X}(\lambda)\right|$ olduğundan

$$\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|^2 = \left\|\overline{\mu_\lambda}A\widehat{k}_\lambda - \left\langle \overline{\mu_\lambda}A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle \widehat{k}_\lambda\right\|^2 + \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| H\widehat{k}_\lambda - \left\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \widehat{k}_\lambda \right\|^2 + \left| \left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 \\
&= \left\| H\widehat{k}_\lambda \right\|^2 - \left| \widetilde{H}(\lambda) \right|^2 + \left| \widetilde{A}(\lambda) \right|^2,
\end{aligned}
$$

ve

$$
\left\| A\widehat{k}_\lambda \right\|^2 + \left| \widetilde{H}(\lambda) \right|^2 = \left\| H\widehat{k}_\lambda \right\|^2 + \left| \widetilde{A}(\lambda) \right|^2, \ \forall \lambda \in \Omega
$$

elde edilir. O zaman

$$
\begin{aligned}
\inf_{\lambda\in\Omega} \left\langle A^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \inf_{\lambda\in\Omega} \left| \left\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 &\leq \inf_{\lambda\in\Omega} \left[\left\langle A^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \left| \left\langle H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 \right] \\
&= \inf_{\lambda\in\Omega} \left[\left\langle H^*H\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle + \left| \left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda \right\rangle \right|^2 \right] \\
&\leq ber(H^*H) + ber(A)^2,
\end{aligned}
$$

olup böylece

$$
\widetilde{c}(A^*A) + \widetilde{c}(H)^2 \leq ber(H^*H) + ber(A)^2,
$$

ve

$$
\begin{aligned}
& ber(A)^2 + ber\left(\frac{\mu_\lambda A^* + \overline{\mu_\lambda} A}{2} \frac{\overline{\mu_\lambda} A + \mu_\lambda A^*}{2} \right) \\
\geq \ & \widetilde{c}(A^*A) + \widetilde{c}\left(\frac{\overline{\mu_\lambda} A + \mu_\lambda A^*}{2} \right)^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
& ber(A)^2 + \frac{1}{4} ber\left(A^*A + \mu_\lambda^2 A^{*2} + \overline{\mu_\lambda}^2 A^2 + AA^* \right) \\
\geq \ & \widetilde{c}(A^*A) + \frac{1}{4} \widetilde{c}(\overline{\mu_\lambda} A + \mu_\lambda A^*)
\end{aligned}
$$

dır. Buradan herhangi $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operatörü için $ber(A_1 + A_2) \leq ber(A_1) + ber(A_2)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
& ber(A)^2 + \frac{1}{4} ber(A^*A + AA^*) - \widetilde{c}(A^*A) \\
\geq \ & \frac{1}{4} \left[\widetilde{c}(\overline{\mu_\lambda} A + \mu_\lambda A^*)^2 - ber\left((\mu_\lambda A^*)^2 + (\overline{\mu_\lambda} A)^2 \right) \right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned} & ber\,(A)^2 + \frac{1}{4} ber\,(A^*A + AA^*) - \widetilde{c}\,(A^*A)^2 \\ \geq\ & \frac{1}{4} \sup_{\lambda\in\Omega} \left[\widetilde{c}\,(\overline{\mu_\lambda} A + \mu_\lambda A^*)^2 - ber\left((\mu_\lambda A^*)^2 + (\overline{\mu_\lambda} A)^2\right)\right] \end{aligned}$$

dır. $\overline{\mu_\lambda} = \dfrac{\overline{\widetilde{A}\,(\lambda)}}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|} = \dfrac{\widetilde{A^*}\,(\lambda)}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} & \widetilde{c}\,(A^*A) + \frac{1}{4} \sup_{\lambda\in\Omega} [\widetilde{c} \left(\frac{\widetilde{A^*}\,(\lambda)}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|} A + \frac{\widetilde{A}\,(\lambda)}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|} A^* \right)^2 \\ & - ber \left(\left(\frac{\widetilde{A}\,(\lambda)}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|} A^* \right)^2 + \left(\frac{\widetilde{A^*}\,(\lambda)}{\left|\widetilde{A}\,(\lambda)\right|} A \right)^2 \right)] \\ \leq\ & ber\,(A)^2 + \frac{1}{4} ber\,(A^*A + AA^*) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Buzano (1974), Cauchy-Schwartz eşitsizliğinin genişletilmiş halini aşağıdaki gibi vermiştir. a, b, x elemanları iç çarpım uzayında vektörler olsun. O zaman

$$|\langle a, x\rangle|\,|\langle x, b\rangle| \leq \frac{\|a\|\,\|b\| + |\langle a, b\rangle|}{2} \|x\|^2 \tag{4.9}$$

dır. (4.9) eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.2.7. $A, B \in \mathcal{B}\,(\mathcal{H})$ olsun. O zaman

$$ber\,(A + B) \leq \sqrt{ber\,(A)^2 + ber\,(B)^2 + \sqrt{ber\left(|A|^2\right) ber\left(|B|^2\right)} + ber\,(B^*A)}$$

dır.

İspat. Herhangi $\lambda \in \Omega$ için (4.9) formülü kullanılarak

$$\left|\widetilde{A + B}\,(\lambda)\right|^2 \leq \left(\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| + \left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + 2\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\left|\left\langle \widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|\left\|B\widehat{k}_\lambda\right\| + \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|^2 + \left\langle A^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle^{1/2}\left\langle B^*B\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle^{1/2} + \left\langle B^*A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle \\
&\leq ber\,(A)^2 + ber\,(B)^2 + ber\,(B^*A) + \sqrt{ber\,\left(|A|^2\right) ber\,\left(|B|^2\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
ber\,(A+B)^2 &= \sup_{\lambda\in\Omega}\left|\widetilde{A+B}\,(\lambda)\right|^2 \leq ber\,(A)^2 + ber\,(B)^2 + ber\,(B^*A) \\
&\quad + \sqrt{ber\,\left(|A|^2\right) ber\,\left(|B|^2\right)}
\end{aligned}$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Önerme 4.2.8. $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ üniter operatör olsun. O zaman

$$\sup_{n\geq 1}\max\left\{\frac{ber\,(U^n)}{1+ber\,(U^{n-1})}, \frac{ber\,(U^{n-1})}{1+ber\,(U^n)}\right\} \leq \frac{1}{2ber\,(U)} \tag{4.10}$$

dır.

İspat. $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ keyfi iki operatör ve $\lambda \in \Omega$ herhangi nokta olsun. (4.10) eşitsizliğinde $a = A\widehat{k}_\lambda$, $b = B\widehat{k}_\lambda$ konularak

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, \widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|\left|\left\langle \widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right| &\leq \frac{\left\|A\widehat{k}_\lambda\right\|\left\|B\widehat{k}_\lambda\right\| + \left|\left\langle A\widehat{k}_\lambda, B\widehat{k}_\lambda\right\rangle\right|}{2} \\
&= \frac{\left(\widetilde{A^*A}\,(\lambda)\right)^{1/2}\left(\widetilde{B^*B}\,(\lambda)\right)^{1/2} + \widetilde{B^*A}\,(\lambda)}{2} \\
&\leq \frac{\sqrt{ber\,\left(|A|^2\right) ber\,\left(|B|^2\right)} + ber\,(B^*A)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$ber\,(A)\,ber\,(B) \leq \frac{\sqrt{ber\,\left(|A|^2\right) ber\,\left(|B|^2\right)} + ber\,(B^*A)}{2} \tag{4.11}$$

olur. (4.11) formülünde $A = U$ ve $B = U^n$ konularak

$$ber\,(U)\,ber\,(U^n) \leq \frac{1 + ber\left(U^{*(n-1)}\right)}{2} = \frac{1 + ber\,(U^{n-1})}{2}$$

olur ve

$$\frac{ber\,(U^n)}{1 + ber\,(U^{n-1})} \leq \frac{1}{ber\,(U)}, \quad n \geq 1 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.11) formülünde $A = U$ ve $B = U^{*(n-1)}$ konularak

$$\begin{aligned} ber\,(U)\,ber\left(U^{*(n-1)}\right) &= ber\,(U)\,ber\left(U^{n-1}\right) \leq \frac{1 + ber\,(U^{n-1}U)}{2} \\ &= \frac{1 + ber\,(U^n)}{2} \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece herhangi $n \geq 1$ için

$$\frac{ber\,(U^{n-1})}{1 + ber\,(U^n)} \leq \frac{1}{2ber\,(U)} \tag{4.13}$$

dir. (4.12) ve (4.13) eşitsizlikleri (4.10) eşitsizliğini verir ve böylece ispat tamamlanır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu yüksek lisans tez çalışmasında üretici çekirdekli Hilbert uzaylarında konveks fonksiyonlar için Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler elde edildi. $\widetilde{b}(A)$ ve $\widetilde{c}(A)$ sayıları tanımlandı ve bu sayılar ile Berezin sayısı arasındaki ilişkiyi veren bazı sonuçlar elde edildi. Aynı zamanda Buzano'nun elde etmiş olduğu eşitsizlik yardımıyla operatörlerin Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler elde edildi.

Bu çalışmanın devamı olarak düşünülen bir kaç öneri vardır:

1. Literatürde, tezde kullanılan Hardy-Hilbert tipli eşitsizliğinden hariç birçok Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikleri vardır. Bu eşitsizlikler kullanılarak operatörlerin Berezin sayısı için yeni eşitsizlikler elde edilebilir mi?

2. Hardy-Hilbert eşitsizlikleri dışındaki eşitsizlikler yardımıyla Berezin sayısı eşitsizliği elde edilebilir mi?

KAYNAKLAR

Abu-Omar, A., Kittaneh, F. , 2015. Notes on some spectral radius and numerical radius inequalities. Studia Mathematica, 272, 97-109.

Abu-Omar, A.,Kittaneh, F., 2014. Estimates for the numerical radius and the spectral radius of the Frobenius companian matrix and bounds for the zeros of polynomials. Annals of Functional Analysis, 5, 56-62.

Aronszajn, N., 1950. Theory of reproducing kernels. Transactions of the American Mathematical Society, 68, 337-404.

Axler, S., Zheng, D., 1998. The Berezin Transform on the Toeplitz Algebra. Studia Mathematica, 127, 113-136.

Berezin, F.A., 1972. Covariant and contravariant symbols for operators. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 6, 1117-1151.

Berger, C.A., Coburn, L.A., 1986. Toeplitz operators and quantum mechanics. Journal of Functional Analysis, 68 (3), 273-299.

Bergman, S., 1922. Uber die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach orthogonalfunktionen. Mathematische Annalen, 86, 237-271.

Bochner, S., 1922. Ueber orthogonale Systeme analytischer Funktion. Mathematische Zeitschrift, 14, 180-207.

Buzano, M.L., 1974. Generalizzazione della disiguaglianza di Cauchy-Schwartz (Italian). Rendiconti del Seminario Matematico Universita e Politecnicodi Torino, 31, 405–409.

Chalendar, I., Fricain, E., Gürdal, M., Karaev, M.T., 2012. Compactness and Berezin Symbols. Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged), 78, 315-329.

Dragomir, S.S., 2006. Reverse inequalities for the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 73, 255-262.

Dragomir, S.S, 2007. A survey of some recent inequalities for the norm and numerical radius of operators in Hilbert spaces. Banach Journal of Mathematical Analysis, 1, 154-175.

Dragomir, S.S., 2013. Inequalities for the numerical radius of linear operators in Hilbert space. Springer Briefs in Mathematics, Cham.

Edmunds, D.E., Kokilashvili, V., Meskhi, A., 2002. Bounded and compact integral operators. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 643.

El-Haddad, M., Kittaneh, F., 2007. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators II., Studia Mathematica, 182, 133-140.

Engliš, M., 1994. Functions Invariant under the Berezin Transform. Journal of Functional Analysis, 121, 223-254.

Furuta, T., 2002. Invitation to Linear Operators: From Matrices to Bounded Linear Operators on a Hilbert Space. Taylor and Francis, London.

Garayev, M.T., Gürdal, M., Okudan, A., 2016. Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality. Mathematical Inequalities and Applications, (3)(19) 883-891.

Gustafson, K.E., Rao, D.K.M., 1997. Numerical Range, Springer-Verlag, New-York.

Halmos, P., 1982. A Hilbert Space Problem Book. Springer-Verlag, Berlin.

Hansen, F., 2009. Non-commutative Hardy inequalities. Bulletin of the London Mathematical Society, 41(6), 1009-1016.

Hansen, F., Krulic, K., Pecaric, J.,Persson, L.E., 2010. Generalized noncommutative Hardy and Hardy-Hilbert type inequalities. International Journal of Mathematics, 21(10), 1283-1295.

Hardy, G., Littlewood, J.E., Polya, G., 1967. Inequalities, 2 nd ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Karaev, M. T., 2002. Berezin Symbols and Schatten-von Neumann Classes. Mathematical Notes, 72, 185-192.

Karaev, M.T., Saltan, S., 2005. Some Results on Berezin Symbols. Complex Variables: Theory and Applications, 50, 185-193.

Karaev, M. T., 2006. Berezin Symbol and Invertibility of Operators on the Functional Hilbert Spaces. Journal of Functional Analysis, 238, 181-192.

Karaev, M.T., 2010. (e)-convergence and related problem. Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, 348 $(19-20)$, 1059-1062.

Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2013. Special operator classes and their properties. Banach Journal of Mathematical Analysis, 7(2), 75-86.

Karaev, M.T., 2013. Reproducing Kernels and Berezin symbols Techniques in Various Questions of Operator Theory. Complex Analysis and Operator Theory, 7, 983-1018.

Karaev, M.T., Gürdal, M., Yamancı, U., 2014. Some results related with Berezin symbols and Toeplitz operators. Mathematical Inequalities and Applications, 17 (3) , 1031-1045.

Kian, M., 2012. Hardy-Hilbert type inequalities for Hilbert space operators. Annals of Functional Analysis, 3(2), 128-134.

Kittaneh, F., 2005. Numerical radius inequalities for Hilbert space operators. Studia Mathematica, 168, 73-80.

Kittaneh, F., Moslehian, M.S., Yamazaki, T., 2015. Cartesian decomposition and numerical radius inequalities. Linear Algebra and its Applications, 471, 46-53.

Kiliç, S., 1994. On the Berezin symbol. University of New Hampshire, Ph.D. Thesis, 44p, New Hampshire.

Kreyszing, E., 1989. Introductory functional analysis with applications. New York, London-Sydney.

Kufner, A., Maligranda, L., Persson, L.E., 2006. The prehistory of the Hardy inequality. American Mathematical Monthly, 113, 715-732.

Mercer, J., 1909. Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equation, Philosophical Transactions of the Royal Society, 209, 415-446.

Moslehian, M.S., Sattari, M., 2016. Inequalities for operator space numerical radius of 2x2 block matrices. Journal of Mathematical Physics, 57, *no.*1, 015201, 15*pp*.

Nordgren, E., Rosenthal, P., 1994. Boundary Values of Berezin symbols. Operator Theory: Advances and Applications, 73, 362-368.

Pehlivan, S., Karaev, M.T., 2004. Some Results Related with Statistical Convergence and Berezin Symbols. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 299 (2) , 333-340.

Opic, B., Kufner, A., 1990. Hardy-Type Inequalities. Pitman Reseach Notes in Mathematics, *no.*219, Harlow.

Saitoh, S., 1988. Theory of Reproducing Kernels and Its Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189.

Saitoh, S., 1997. Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 369.

Schur, I., 1911. Bernerkungen sur Theorie der bescrankten Bilinearformen mit unendlich vielenveranderlichen. Journal of Mathematics, 140, 1-28.

Stroethoff, K., 1997. The Berezin transform and operators on spaces of analytic functions. Banach Center Publications 38, 361-380.

Szegö, S., 1921. Ueber orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Mathematische Zeitschrift, 9, 218-270.

Yang, B., 2014. Half-Discrete Hilbert-Type Inequalities. World Scientific.

Zamani, A., 2017. Some lower bounds for the numerical radius of Hilbert space operators. Advances in Operator Theory, 2, 98-107.

Zhu, K., 2007. Operator Theory in Function Spaces. volume 138 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ceren ÇELİK
Doğum Yeri ve Yılı	:	DENİZLİ, 1992
Medeni Hali	:	Bekar
Yabancı Dili	:	İngilizce
E-posta	:	ceren.clk9692@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Kazım Kaynak Lisesi, 2006-2010
Lisans	:	Pamukkale Üniversitesi, 2010-2014

Mesleki Deneyim

Matematik Öğretmeni	:	Gülay Kaynak Anadolu Meslek Lisesi,2014
Matematik Öğretmeni	:	Babadağ Kelleci Ortaokulu, 2016

Yayınları

Yamancı, U., Gürdal, M., Çelik, C., 2017. On Power Inequalities for Berezin Number of Operators and Convex Functions 4 th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 11-15 May, Kuşadası, Turkey, 205