

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI ÖZEL EVOLUTION DENKLEMLERİNİN NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI**

Zekeriya ÖZKAN

**Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018**



© 2018 [Zekeriya ÖZKAN]

TEZ ONAYI

Zekeriya ÖZKAN tarafından hazırlanan "**Bazı Özel Evolution Denklemlerinin Nümerik Çözümlerinin Karşılaştırılması**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman **Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi **Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU**
Süleyman Demirel Üniversitesi



Jüri Üyesi **Doç. Dr. Hüseyin TUNA**
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi



Enstitü Müdürü **Prof. Dr. Yasin TUNCER**

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Zekeriya ÖZKAN


İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|--|-------|
| İÇİNDEKİLER..... | i |
| ÖZET..... | ii |
| ABSTRACT..... | iii |
| TEŞEKKÜR..... | iv |
| ŞEKİLLER DİZİNİ..... | v |
| ÇİZELGELER DİZİNİ..... | vi |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ..... | vii |
| 1. GİRİŞ..... | 1 |
| 1.1. Amaç ve Kapsam..... | 1 |
| 1.2. Kaynak Özetleri..... | 5 |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR..... | 9 |
| 2.1. Evolution Denklemleri..... | 9 |
| 2.2. Radyal Baz Fonksiyonları (RBF)..... | 10 |
| 2.3. Yüksek Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklemini Birinci Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemine İndirgeme..... | 11 |
| 3. KULLANILAN YÖNTEMLER..... | 13 |
| 3.1. Çizgiler Yöntemi (MOL)..... | 13 |
| 3.2. Ağsız Yöntemler (MM)..... | 16 |
| 3.3. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi (MMOL-RBF)..... | 17 |
| 3.3.1. Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler için MMOL-RBF..... | 17 |
| 3.3.2. Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri için MMOL-RBF..... | 19 |
| 3.3.3. İkinci mertebeden (2+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler için MMOL-RBF..... | 22 |
| 4. UYGULAMALAR..... | 23 |
| 4.1. Problem 1..... | 24 |
| 4.1.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 24 |
| 4.1.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 25 |
| 4.2. Problem 2..... | 28 |
| 4.2.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 29 |
| 4.2.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 29 |
| 4.3. Problem 3..... | 37 |
| 4.3.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 38 |
| 4.3.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile Çözüm..... | 39 |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER..... | 45 |
| 5.1. Sonuçlar..... | 45 |
| 5.2. Öneriler..... | 46 |
| KAYNAKLAR..... | 47 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 50 |

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ÖZEL EVOLUTION DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILATIRILMASI

Zekeriya ÖZKAN

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN

Bilgisayarın hesaplama biliminde etkin ve etkili kullanılması ile birlikte kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için literatürde birçok yöntem tanıtılmıştır. Bu yöntemlerin bazıları analitik yöntem çözümü elde ederken bazıları algoritma tabanlı yaklaşık çözümü veren yöntemlerdir. Bu tez çalışmasında, bazı özel evolution denklemleri çizgiler yöntemi ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar üzerinden de bu iki yöntem kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Çizgiler Yöntemi, Ağsız Yöntemler, Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi, Evolution Denklemleri

2018, 50 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

COMPARISON OF NUMERICAL SOLUTION OF SOME SPECIAL EVOLUTION EQUATIONS

Zekeriya ÖZKAN

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ramazan UYHAN

Efficient and effective use of computers in computing science, along with part of the literature, many methods to obtain the solution of differential equations is presented. Some of these methods, while achieving analytical method and some of them algorithm based solution methods that approximate the solution. In this thesis study, some special evolution equations are solved using the method of lines and meshless method of lines using radial basis functions. These two methods are compared on the obtained results.

Keywords: Method of Lines, Meshless Method, Meshless Method Of Lines Using Radial Basis Functions, Evolution Equations

2018, 50 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni ynlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrbesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN'a teőekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Zekeriya ÖZKAN
ISPARTA, 2018



ŞEKİLLER DİZİNİ

| | |
|--|-------------|
| Şekil 3.2.1 Ağsız yöntemler kullanılarak alanı ayırma..... | Sayfa 17 |
|--|-------------|



ÇİZELGELER DİZİNİ

| | Sayfa |
|--|--------------|
| Çizelge 2.2.1. Yaygın olarak kullanılan radyal baz fonksiyonları..... | 11 |
| Çizelge 4.1.1. Sawada Kotera denklemi için L_2 hata normu | 26 |
| Çizelge 4.1.2. Sawada Kotera denklemi için L_∞ hata normu..... | 26 |
| Çizelge 4.1.3. Sawada Kotera denklemi için zamanda noktasal yakınsaklık oranı..... | 27 |
| Çizelge 4.2.1. Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için $N = 3, dt = 0.005$ iken L_∞ hata normu..... | 31 |
| Çizelge 4.2.2. Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için $N = 3, dt = 0.005$ iken L_∞ hata normu..... | 31 |
| Çizelge 4.2.3. Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için $N = 3, dt = 0.005$ iken L_2 hata normu..... | 32 |
| Çizelge 4.2.4. Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için $N = 3, dt = 0.005$ iken L_2 hata normu..... | 32 |
| Çizelge 4.2.5. $t = 2.5$ 'te $N=3$ iken Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için zamanda noktasal yakınsaklık oranı | 33 |
| Çizelge 4.2.6. $t = 2.5$ 'te $N=3$ iken Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için zamanda noktasal yakınsaklık oranı | 34 |
| Çizelge 4.2.7. $t = 2.5$ 'te $dt = 0.005$ iken Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için konumda noktasal yakınsaklık oranı | 35 |
| Çizelge 4.2.8. $t = 2.5$ 'te $dt = 0.005$ iken Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için konumda noktasal yakınsaklık oranı..... | 36 |
| Çizelge 4.3.1. Klein-Gordon denklemi için $N = 3, dt = 0.001$ iken L_∞ hata normu..... | 40 |
| Çizelge 4.3.2. Klein-Gordon denklemi için $N = 3, dt = 0.001$ iken L_2 hata normu | 41 |
| Çizelge 4.3.3. $t = 0.5$ 'te $N = 3$ iken Klein-Gordon denklemi için zamanda noktasal yakınsaklık oranı..... | 42 |
| Çizelge 4.3.4. $t = 0.5$ 'te $dt = 0.001$ iken Klein-Gordon denklemi için konumda noktasal yakınsaklık oranı..... | 43 |

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|-------------|--|
| A | İnterpolasyon matrisi |
| GA | Gauss merkezci |
| IMQ | Ters çoklu kuadratik |
| MQ | Çoklu kuadratik |
| MM | Ağsız yöntemler |
| MOL | Çizgiler yöntemi |
| $MMOL$ | Ağsız çizgiler yöntemi |
| $MMOL-RBF$ | Radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi |
| N | Problem alanında seçilen düğüm sayısı |
| RBF | Radyal baz fonksiyonları |
| t | Zaman değişkeni |
| $u(x, t)$ | Analitik çözüm |
| $u^N(x, t)$ | Yaklaşık çözüm |
| $v(x, t)$ | Analitik çözüm |
| x | Konum değişkeni |
| Ψ | Radyal baz fonksiyonları |
| Ω | Problem alanı |

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, genellikle doğanın temel kurallarının formülasyonunda ve uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimi problemlerinin matematiksel analizinde ortaya çıkmaktadır. Çoğu zaman bu denklemlerin analitik yöntemlerle çözümü zor hatta imkânsız olmaktadır. Bu yüzden böyle denklemlerin nümerik olarak çözümlerinin bulunması gerekebilir (Debnath, 2005).

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için analitik ve nümerik olarak birçok yöntem tanıtılmıştır. Genelde bu tür denklemlerin nümerik çözümlerine gereksinim duyulmaktadır, bunun nedeni nümerik çözümler bilgisayar ile daha uyumlu olup, farklı algoritmalarla istenilen sonuçlar daha kolay elde edilebilmektedir (Çağlar, 2012).

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için nümerik yöntemlerin çalışılması son yıllarda hem teori hem de uygulama açısından yoğun bir şekilde yapılmıştır. Bilgisayar teknolojisindeki hızlı değişmeyle birlikte nümerik yöntemlerdeki gelişmeler, mühendislik ve başka bilimsel alanlardaki uygulamalarda ortaya çıkan ve önceden çözümü zor olan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çoğunun şimdi çözülebilir olması anlamına gelmektedir (Mitchell vd., 1980).

Sonlu farklar yöntemi, sonlu elemanlar yöntemi, sonlu hacim yöntemi ve sınır eleman yöntemi gibi nümerik yöntemler çeşitli kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılmıştır. Bu yöntemler alanı ağ, ızgara ya da aralarında sabit iletişim sağlayan noktaların kümesine ayırıştırır. Ağ yapısında kullanılan birimlere verilen isim önem taşımamaktadır. Burada önemli olan bu yapıların çözüm sürecine geçilmeden tanımlanıyor olmasıdır. Bu sayede elemanların veya ızgaraların kesişim noktaları olan düğümler arasında bağlantı kurulmakta ve kullanılacak olan sayısal yöntemin formülasyonu gerçekleştirilmektedir.

Sonlu farklar yöntemi, genellikle kartezyen koordinatlarda bölgenin düzgün dikdörtgenlere ayrıştırılmasıyla elde edilen noktalar üzerinde Taylor seri açılımı ile fark denklemlerinin ifade edilmesine dayanır. Uygulaması son derece basit olmasına rağmen özellikle düzgün olmayan bölgelerin ayrıştırılması, bölgenin ve problemin fiziksel şartlarının tanımlanması açısından sonlu elemanlar yöntemi kadar etkin değildir. Sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu hacim yöntemi kompleks geometriyle mücadele etmede daha esnektir fakat üç boyutlu problemlerde uygun ağı oluşturulması, ilgili verilerin yapısı ve bilgisayar programlaması oldukça zordur (Demkowicz vd., 1989).

Günümüzde mevcut geliştirilmiş hali ile sonlu elemanlar yöntemi, sonlu farklar yöntemi, sonlu hacim yöntemi gibi ağ tabanlı yöntemler kullanılarak statik, dinamik, lineer ve lineer olmayan pek çok problemin çözümü elde edilebilmektedir. Bu problemlerin çözümünde aşağıda belirtilen sebeplerden dolayı elde edilmek istenen çözümün maliyeti ve doğruluğu önemli ölçüde etkilenmektedir (Liu, 2003):

- Analizlerde genelde zamanın çoğu uygun bir ağ yapısının oluşturulmasına harcanmaktadır. Ağ yapısı analiz süresini ve hassasiyetini önemli ölçüde etkilemektedir. Günümüzde sayısal yöntemlerle ilgili araştırma noktalarından bir tanesi bu sürecin mümkün olduğu kadar kısaltılması ve analiz hassasiyetinin artırılmasıdır. Bu da daha az insan emeği ve daha çok bilgisayar kullanımı anlamına gelmektedir.
- Büyük şekil değişimleri söz konusu olduğunda elemanların çarpılmasından dolayı hesaplanan değerlerdeki doğruluk oldukça düşmektedir.
- Çatlak büyümesi probleminin herhangi bir geometri veya kompleks bir geometri için modellenmesi ve faz dönüşümlerinin uygulanması oldukça zordur.

- Sonlu elemanlar yöntemi sürekli ortam mekaniğine dayandığından, malzeme kırılmasından doğan süreksizliklerde elemanlar arasındaki bağların kopması sebebi ile olumsuzluklar ortaya çıkarmaktadır.

Yukarıda bir bölümü belirtilen hataların ve yetersizliklerin en aza indirilmesi için çözüm sürecinde ortaya çıkabilen süreksizlik bölgelerinde birbiriyle olan temasını kaybeden elemanların temas etmesini sağlamak amacıyla ağ yapısının yeniden oluşturulması gerekmektedir. Ayrıca çözüm sürecinde bağımlı değişken üzerinde dönüşüm yapma ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. Bu durum işlem hassasiyetini olumsuz etkilemektedir. Bu yüzden çözüm sürecinde daha esnek ve süreksizliğin söz konusu olduğu problemlerde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına gerek duymayan yöntemlerin geliştirilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu sebeple önerilmiş olan ağsız yöntemlerde bu ihtiyaçların çoğu karşılanabilmektedir. Ağsız yöntemlerde geometrinin modellenmesi rastgele dağılmış düğümlerle gerçekleştirildiğinden bu düğümler arasında herhangi bir ilişkinin veya bir bağı kurulmasına ve dolayısıyla çözüm sürecinde yeni bir ağ yapısının oluşturulmasına ihtiyaç yoktur (Çalışkan, 2006).

Çizgiler yöntemi (MOL), kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için iyi bilinen bir başka tekniktir. Bu yöntem, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin önemli sınıflarının (eliptik, parabolik ve hiperbolik, lineer ve lineer olmayan, bir, iki ve üç boyutlu gibi) hemen hemen tümüne uygulanabilir. Yöntem aslında öncelikle Alman matematikçi Erich Rothe tarafından 1930'da parabolik tipteki denklemlere uygulanmıştır (Pregla, 2008). Daha sonra fizikteki sınır değer problemlerini çözmek için matematikçiler tarafından geliştirilmiştir (Schiesser, 1991). Doğruluk ve bilgisayar maliyeti bakımından, sonlu farklar yönteminden daha etkili olan çizgiler yöntemi, sonlu farklar yönteminin özel bir şeklidir. Bu yöntemde bağımsız değişken x konum veya t zaman değişkenine göre ayrıklaştırılabilir. x konum değişkenine göre ayrıklaştırıldığında t zaman değişkeni, t zaman değişkenine göre ayrıklaştırıldığında ise x konum değişkeni yalnız bırakılır. Örneğin; Meyer'in çalışmalarında genellikle zaman ayrıklaştırılarak problem sınır değer problemine indirgenir (Meyer, 2015). Bu çalışmada, x ayrıklaştırılarak problem başlangıç değer problemine

indirgenmiştir. Ayrıca bilgisayar programlama sırasında oluşan zorluk, standart adi türevli diferansiyel denklem çözücüsü kullanılarak azaltılabilir.

Ağ tabanlı yöntemlerde karşılaşılan zorluklar, araştırmacıları geleneksel ızgara tabanlı nümerik yöntemlere alternatif aramaya zorladı. Böylece ağsız yöntemlerin yeni alanı ortaya çıktı ve ilk ağsız yöntem Yumuşatılmış Parçacık Hidrodinamiği 1977'de Gingold ve Monaghan tarafından gök fiziği problemlerinin simülasyonu için tanıtıldı (Gingold vd., 1977). Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için ağsız yöntemler (MM) son 20 yıl içinde çok cezbedici oldu ve kayda değer bir gelişim gösterdi.

Ağsız yöntemlerin (MM) en önemli özelliği ağ gerektirmeksizin dağılmış düğüm ya da parça kullanarak mümkün olan sınır şartların bütün türleri ile integral denklemleri ya da kısmi türevli diferansiyel denklemler için kararlı nümerik çözüm sağlamasıdır.

Ağsız yöntemlerde çözüm bölgesinin modellenmesi ve çözüm aşamasına geçilebilmesi için modelleme aşamasında düğümler kullanılmakta ve düğümler arasında sonlu elemanlar yöntemi ile kıyaslandığında herhangi bir bağın oluşturulmasına ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu özellik ağsız yöntemler için ortaktır. Yöntemlerin ağsız olarak adlandırılmasının sebebi de budur.

Bugüne kadar geliştirilen ağsız yöntemlerin geniş bir sınıfı, çok boyutlu kompleks alan içeren kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için radyal baz fonksiyonları kullanılarak kollokasyon ağsız yöntemine dayanır.

Bu tez çalışmasında çizgiler yöntemine ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemine kısaca değinildi. Bazı özel denklemler kullanılarak bu iki yöntem arasında karşılaştırmalar yapıldı. Bu karşılaştırmalar ışığında problemlerin çözümüne dair yorumlarda bulunuldu.

1.2. Kaynak Özeti

Ali A., Haq F., Hussain I., 2011, A Numerical Meshless Tecnique For The Solution Of Some Burgers' Type Equations, World Applied Sciences Journal, 14(12), 1792-1798. Bu çalışmada, Burgers' denklemlerinin nümerik çözümü için radyal baz fonksiyonları çizgiler yöntemiyle birlikte kullanılarak ağsız bir yöntem sunulmuştur.

Bibi N., 2011, Meshless Method Of Lines For Numerical Solutions Of Nonlinear Time Dependent Partial Differential Equations, PhD Thesis, Ghulam Ishaq Khan Of Engineering Sciences And Technology, Pakistan. Bu doktora tez çalışmasında, zaman bağımlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi sunulmuştur. Aynı zamanda yöntemin yakınsaklığı ve öz değerlerin kararlılığı tartışılmıştır. Yöntemin doğruluğu L_2 ve L_∞ hata normları ve kütle, momentum ve enerji korunum kanunları ile değerlendirilmiştir.

Bibi N., Tirmizi S.I.A., Haq S., 2011, Meshless Method Of Lines For Numerical Solution Of Kawahara Type Equations, Applied Mathematics, 2, 608-618. Bu çalışmada, radyal baz fonksiyonları ile birlikte çizgiler yöntemi yani ağsız çizgiler yöntemi, Kawahara, modifiye edilmiş Kawahara ve KdV-Kawahara denklemlerinin nümerik çözümü için sunulmuştur. Sonuçlar analitik çözümle kıyaslanmıştır.

Bratsos A.G., 1998, The Solution Of The Boussinesq Equation Using The Method Of Lines, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 157, 33-44. Bu çalışmada, lineer olmayan hiperbolik Boussinesq denklemleri ile ilişkili başlangıç/sınır değer problemini birinci mertebeden, lineer olmayan, başlangıç değer problemine dönüştüren çizgiler yöntemi kullanılmıştır.

Dereli Y., 2012, Numerical Solutions Of The MRLW Equation Using Meshless Method Of Lines, International Journal Of Nonlinear Science,

13(1), 28-38. Bu çalışmada, modifiye edilmiş uzun dalga denklemi (MRLW) ağsız çekirdek tabanlı çizgiler yöntemi ile çözülmüştür. L_2 ve L_∞ hata normları yöntemin performansını değerlendirmek için hesaplanmıştır.

Dereli Y., 2012, The Meshless Kernel-Based Method Of Lines For The Numerical Solution Of The Nonlinear Schrödinger Equation, Engineering Analysis With Boundary Elements, 36, 1416-1423. Bu çalışmada, lineer olmayan Schrödinger denklemi çoklu kuadratik, ters çoklu kuadratik ve gauss merkezli radyal baz fonksiyonları kullanılarak çekirdek tabanlı çizgiler yöntemi ile çözülmüştür.

Dereli Y., Schaback R., 2013, The Meshless Method Of Lines For Solving The Equal Width Equation, Applied Mathematics And Computation, 219, 5224-5232. Bu çalışmada, lineer olmayan dalga olaylarından meydana gelen Equal width denklemi ağsız çekirdek tabanlı çizgiler yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür.

Haq S., Bibi N., Tirmizi S.I.A., Usman M., 2010, Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation, Applied Mathematics And Computation, 217, 2404-2413. Bu makalede, geliştirilmiş Kuramoto-Sivashinsky denkleminin nümerik çözümü ağsız çizgiler yöntemi ile verilmiştir. Konum türevlerine sonlu fark yöntemi ve sonlu eleman yönteminden daha avantajlı olan radyal baz fonksiyonları ile yaklaşmıştır.

Haq S., Hussain A., Uddin M., 2011, RBFs Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of Time-Dependent Nonlinear Coupled Partial Differential Equations, Applied Mathematics, 2, 414-423. Bu çalışmada, yazar ağsız çizgiler yöntemini zaman bağımlı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin nümerik çözümü için sunmuştur. Yöntemin doğruluğu L_2, L_∞ hata normları ve C_1, C_2, C_3 değişkenleriyle değerlendirilmiştir.

Haq S., Hussain A., Uddin M., 2012, On The Numerical Solution Of Nonlinear Burgers'-Type Equations Using Meshless Method Of Lines, Applied Mathematics And Computation, 218, 6280-6290. Bu çalışmada, problem alanında ağ inşa etmeyi gerektirmeyen ağsız çizgiler yöntemi radyal baz fonksiyonları ile birlikte Burgers' tipi denklemlerin nümerik çözümü için verilmiştir.

Hussain A., Haq S., Uddin M., 2013, Numerical Solution Of Klein-Gordon And Sine-Gordon Equations By Meshless Method Of Lines, Engineering Analysis With Boundary Elements, 37, 1351-1366. Bu çalışmada, bir boyutlu lineer olmayan Klein Gordon denklemi ile iki boyutlu lineer olmayan Sine-Gordon denklemlerinin radyal baz fonksiyonları kullanılarak ağsız çizgiler yöntemi ile nümerik çözümü araştırılmıştır.

Köroğlu C., 2002, Üstel Matris Fonksiyonları Yardımıyla Amerikan Opsiyon Problemlerinin Çizgiler Yöntemi İle Çözümü, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir. Bu çalışmada, çizgiler yöntemi kısaca anlatılmış ve üstel matris fonksiyonları yardımıyla yöntemin incelemesi yapılmıştır.

Nguyen V.P., Rabczuk T., Bordas S., Duflot M., 2008, Meshless Methods: A Review And Computer Implementation Aspects, Mathematics And Computers In Simulation, 79, 763-813. Bu çalışmada, ağsız yöntemler genel bakış açısı ile incelenmiştir. Ayrıca ağsız yöntemlerin MATLAB programlaması yapılmıştır.

Pregla R., 2008, Analysis of Electromagnetic Fields and Waves: The Method Of Lines, John Wiley & Sons. Bu kitapta, çizgiler yöntemi mühendisler için detaylıca incelenmiş ve çeşitli problemlere uygulanmıştır.

Sadiku M.N.O, Obiozor C.N., 2000, A Simple Introduction To The Method Of Lines, International Journal Of Electrical Engineering Education, 37(3),

282-296. Bu çalışmada birkaç örnek yardımı ve MATLAB programıyla çizgiler yöntemi anlatılmıştır.

Schiesser W.E., 1991, The Numerical Method of Lines: Integration Of Partial Differential Equations, Academic Press, San Diego. Bu kitapta, çizgiler yöntemi hem teorik olarak hem de uygulamalı olarak derinlemesine incelenmiştir.

Schiesser W.E., Griffiths G.W., 2009, A Compendium Of Partial Differential Equation Models: Method Of Lines Analysis With Matlab, Cambridge University Press, Cambridge. Bu çalışmada yazarlar çeşitli türevli diferansiyel denklemlerinin çözümlerini MATLAB programını ile çizgiler yöntemini kullanarak hesaplamışlardır.

Schiesser W.E., Griffiths G.W., 2012, Traveling Wave Analysis Of Partial Differential Equations, Academic Press, San Diego. Bu çalışmada, çizgiler yöntemi ile gezen dalga analizleri yapılmıştır.

Shen Q., 2009, A Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of KdV Equation Using Radial Basis Functions, Engineering Analysis With Boundary Elements, 33, 1171-1180. Bu çalışmada, ağırsız çizgiler yöntemi Korteweg-de Vries denkleminin nümerik çözümü için verilmiştir. Ayrıca bahsedilen yöntemin geleneksel çizgiler yöntemine göre olan avantajlarından bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Uygulamalı matematikte fizik, mühendislik ve uzay bilimlerinde ki birçok problemin modellenerek çözümleri aranmaktadır. Bu modellemelerde çok farklı problemler ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çözümleri için de farklı türde analitik ve nümerik yöntemler geliştirilmiştir.

Bu bölümde kullanılan yöntemler ve bu yöntemler ile alakalı temel kavramlar tanıtılmıştır. Bu yöntemler arasında literatürdeki en yeni yöntemlerden biri olan çizgiler yöntemi ve kademeli olarak çeşitli bilim adamları tarafından geliştirilerek şimdiki halini almış olan radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi vardır.

2.1. Evolution Denklemleri

Bağımsız değişkenlerinden biri t , zaman olan kısmi türevli diferansiyel denklemlere evolution denklemleri denilmektedir. Birinci mertebeden evolution denklemleri $K[\mathbf{u}]$; \mathbf{u} ve \mathbf{u}' 'nin x değişkenine göre türevlerinin tanımlı fonksiyonu olmak üzere:

$$\mathbf{u}_t = K[\mathbf{u}] \quad (2.1.1)$$

formundadır. Eğer $K[\mathbf{u}]$; \mathbf{u} terimine göre lineer ise bu tip denklemlere lineer evolution denklemleri ve $K[\mathbf{u}]$; \mathbf{u} terimine göre lineer değil ise bu tip denklemlere lineer olmayan evolution denklemleri denir. Benzer şekilde, ikinci mertebeden evolution denklemleri

$$\mathbf{u}_{tt} = K[\mathbf{u}] \quad (2.1.2)$$

şeklindedir.

Isı iletimini tanımlayan ısı denklemi ve bir telin titreşimini tanımlayan dalga denklemi evolution denklemlerine en basit iki örnek olarak verilebilir. Lineer

olmayan evolution denklemleri sadece matematiğin bazı alanlarında değil aynı zamanda fizik, kimya, biyoloji ve malzeme bilimi gibi bilim dallarında da ortaya çıkan kısmi türevli diferansiyel denklemlerdir. Örneğin Navier-Stokes ve Euler denklemleri akışkanlar mekaniğinde, lineer olmayan reaksiyon-difüzyon denklemleri ısı transferinde ve biyoloji biliminde, lineer olmayan Klein-Gordon denklemi ve lineer olmayan Schrödinger denklemi kuantum mekaniğinde ve Cahn-Hilliard denklemi malzeme biliminde ortaya çıkan lineer olmayan evolution denklemlerinden sadece birkaçıdır (Zheng, 2004).

2.2. Radyal Baz Fonksiyonları (RBF)

Radyal baz fonksiyonları (RBF), nümerik analizde ve istatistikte geniş uygulama alanına sahiptir ve halen matematikçiler için aktif çalışma alanıdır.

Radyal baz fonksiyonları genellikle çok değişkenli fonksiyonlardır ve bu fonksiyonların değerleri orijine olan uzaklığına dayanır. Öyle ki; $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ dir. Ya da alternatif olarak $\{\mathbf{x}_j\}$ kümesinde verilen noktaların uzaklığına dayanır ve $\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = \phi(\mathbf{r}_j) \in \mathbb{R}$ dir. $\phi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_2)$ özelliğini sağlayan herhangi bir ϕ fonksiyonu radyal fonksiyondur. $\mathbf{r}_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2$ normu genellikle Öklid normudur (Chen vd., 2014).

Burada bahsedilen radyal baz fonksiyonların hepsi tanımlarında c değişkeni içerir. Bu c değişkeni şekil parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre radyal baz fonksiyonlarının nümerik yöntemlere uygulanmasında kullanıldığı zaman çözüm üzerinde oldukça önemli bir etkiye sahiptir. Bu yüzden c şekil parametresinin en uygun değerinin seçilmesi çok önemlidir. Ancak bu şekil parametresinin belirlenmesi hala çalışılan ve henüz çözülememiş bir problemdir (Shen, 2009).

Radyal baz fonksiyonları, çok değişkenli fonksiyonlara tek değişkenli fonksiyonların lineer kombinasyonu ile yaklaşmak için bir araçtır. Bu tipteki yaklaşımların esas avantajı şudur; hiçbir şekilde ağ gerektirmez ve yüksek

boyutlular için keyfi geometri ile çalışır. Yaygın olarak kullanılan radyal baz fonksiyonları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

| Radyal Baz Fonksiyonları | $\phi(r)$ |
|----------------------------|----------------------|
| Çoklu kuadratik (MQ) | $(r^2 + c^2)^{1/2}$ |
| Ters çoklu kuadratik (IMQ) | $(r^2 + c^2)^{-1/2}$ |
| Gauss merkezci (GA) | $e^{-c^2 r^2}$ |

Çizelge 2.2.1. Yaygın olarak kullanılan radyal baz fonksiyonları

2.3. Yüksek Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklemini Birinci Mertebeden Adi Türevli Diferansiyel Denklem Sistemine İndirgeme

n . mertebeden adi türevli diferansiyel denklem her zaman n adet birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemden oluşan bir sisteme dönüştürülebilir.

$$y^{(n)} = f(y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2.1)$$

şeklinde n . mertebeden adi türevli diferansiyel denklemi verilmiş olsun. Bu denklemi adi türevli diferansiyel denklem sistemine dönüştürmek için

$$y_1 = y \quad (2.2.2)$$

$$y_2 = y'_1 = y' \quad (2.2.3)$$

$$y_3 = y'_2 = y'' \quad (2.2.4)$$

⋮

$$y_n = y'_{n-1} = y^{(n-1)} \quad (2.2.5)$$

olarak n tane parametreye ihtiyaç vardır. Bunu yaparken en yüksek mertebeli türev hariç, yeni değişken olarak bilinmeyen fonksiyonlar ve türevleri tanımlanır. Bu yeni değişkenlerin (2.2.1) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$y'_n = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (2.2.6)$$

şeklinde yeni tanımlanan n adet değişkene bağlı birinci mertebeden bir adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem ile y_1, y_2, \dots, y_{n-1} 'den oluşan grup

$$y_1' = y_2 \quad (2.2.7)$$

$$y_2' = y_3 \quad (2.2.8)$$

⋮

$$y_n' = f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad (2.2.9)$$

şeklinde birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşturulur.

3. KULLANILAN YÖNTEMLER

Evolution denklemlerinin nümerik çözümü için kullanacağımız belli başlı yöntemler bu bölümde ifade edilmiştir.

3.1. Çizgiler Yöntemi (MOL)

Çizgiler yöntemi, bağımsız değişken x konum değişkeni veya t zaman değişkenine bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yerine uygun sonlu fark denklemlerinin yazılması sonucu oluşan adi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözülmesiyle sonuca gidilen nümerik çözüm tekniğidir.

Bu çalışmada, evolution denklemleri ele alınacaktır. Bu denklemleri temsil etmesi için aşağıdaki (3.1.1) denklemi göz önüne alınarak çizgiler yöntemi (MOL) açıklanacaktır (Schiesser vd., 2009):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1.1)$$

Burada u , x ve t 'ye bağlı bağımlı değişken, t zamanı temsil eden bağımsız değişken, x konumu temsil eden bağımsız değişken ve D değişkeni sabit sayıdır.

$\frac{\partial u}{\partial t}$, u 'nun t değişkenine göre kısmi türevidir. (3.1.1) denkleminde t değişkenine göre en yüksek mertebeden kısmi türevi birinci mertebeden olduğu için bu denklem t değişkenine göre birinci mertebededir. Aynı şekilde, (3.1.1) denklemi x değişkenine göre en yüksek mertebeden kısmi türevi ikinci mertebeden olduğu için bu denklem x değişkenine göre ikinci mertebededir.

(3.1.1) denkleminin çözümünü düşünmeden önce kısmi türevli diferansiyel denklem probleminin ifadesini tamamlamak için bazı yardımcı şartlar tanımlanması gerekir. Gerekli yardımcı şartların sayısı her bir bağımsız değişkenin türev mertebesine göre belirlenir. (3.1.1) denklemi t değişkenine

göre birinci mertebeden olduğu için bir tane şart, x değişkenine göre ikinci mertebeden olduğu için iki tane şart gereklidir.

t , başlangıç değer değişkeni olarak adlandırılır ve bir tane başlangıç şartı gereklidir. x ise sınır değer değişkeni olarak adlandırılır ve iki tane sınır şart gereklidir. Başlangıç değer şartı

$$\mathbf{u}(x, t = t_b) = \mathbf{u}_0(x), \quad t_b \leq t \leq t_s \quad (3.1.2)$$

şeklinde ve sınır değer şartı

$$\mathbf{u}(x = x_b, t) = \mathbf{u}_b(t), \mathbf{u}(x = x_s, t) = \mathbf{u}_s(t), \quad x_b \leq x \leq x_s \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlansın. (3.1.1), (3.1.2) ve (3.1.3) denklemleri birlikte kısmi türevli diferansiyel denklem problemini oluştururlar. Bu problemin çizgiler yöntemiyle çözümü aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$x_b \leq x \leq x_s$ aralığında $x_b = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = x_s$ olacak şekilde N tane düğüm olsun. x_1 ve x_N sınır düğümler, x_2, \dots, x_{N-1} iç düğümlerdir.

Çizgiler yönteminin temel fikri, kısmi türevli diferansiyel denklemlerdeki konum türevlerine sonlu fark eşitlikleri ile yaklaşmaktır. Bu yapıldığı zaman konum türevleri artık konum bağımsız değişkeni ile ifade edilemez. Böylece sadece zaman bağımsız değişkeni kalır. Bir başka deyişle, orijinal kısmi türevli diferansiyel denkleme yaklaşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Esas zorluk kısmi türevli diferansiyel denklemi adi türevli diferansiyel denklem sistemi ile ifade etmektir. Bu yapıldıktan sonra kısmi türevli diferansiyel denklemin nümerik çözümünü hesaplamak için başlangıç değer adi türevli diferansiyel denklem sistemine herhangi bir integrasyon algoritması uygulanabilir. Böylece çizgiler yönteminin en belirgin özelliklerinden biri adi türevli diferansiyel denklem sistemi için mevcut, iyi tanımlanmış nümerik yöntemlerin kullanımınıdır.

Bu prosedürü yansıtmak için öncelikle (3.1.1) denklemindeki u_{xx} konum türevini cebirsel yaklaşımı ile yer değiştirmek gerekir. Bu durumda

$$u_{xx} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.1.4)$$

sonlu fark eşitliği kullanılacaktır. Burada i , ızgara üzerinde x 'in konumunu ifade eden indeks, Δx ise ızgara üzerinde x eksenini boyunca düğümler arası mesafedir. O zaman, (3.1.1) denkleminin çizgiler yöntemi yaklaşımı

$$\frac{du_i}{dt} = D \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.1.5)$$

şeklindedir. (3.1.5) denklemi sadece bir tane bağımsız t değişkenini içerdiğinden adi türevli diferansiyel denklem sistemidir.

(3.1.1) kısmi türevli diferansiyel denkleminin, (3.1.5) adi türevli diferansiyel denklem sistemine dönüşümü çizgiler yönteminin özüdür. Daha sonra kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü hesaplamak için adi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözümünün bulunması gerekir. (3.1.5) denklem sistemi N tane adi türevli diferansiyel denklem içerdiğinden N tane başlangıç şartı gereklidir. Bu şartlar, ayırıklaştırmadan sonra (3.1.2) denkleminde

$$u(x_i, t = t_b) = u_i(x) = u_0(x_i), \quad 0 \leq i \leq N \quad (3.1.6)$$

olarak elde edilir. Aynı zamanda sınır şartları

$$u_1(t) = u_b(t), \quad u_N(t) = u_s(t) \quad (3.1.7)$$

şeklinde elde edilir. (3.1.5), (3.1.6) ve (3.1.7) denklemleri, verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin çizgiler yaklaşımı olarak elde edilir. Bu adi türevli diferansiyel denklem sistemi uygun bir yöntem ile çözülür. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözümü

$$\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_N(t) \quad (3.1.8)$$

şeklindedir ki, bu fonksiyonlar $i = 1, 2, \dots, N$ ızgara noktalarında $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 'ye yaklaşır (Griffiths vd., 2012).

Başlangıçta ele alınan kısmi türevli diferansiyel denklem eğer bir başlangıç-değer problemi ise sonuçta oluşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi de bir başlangıç değer problemidir. Eğer problem bir sınır değer problemi ise sonuçta oluşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi de sınır değer problemidir (Durmuş, 2015).

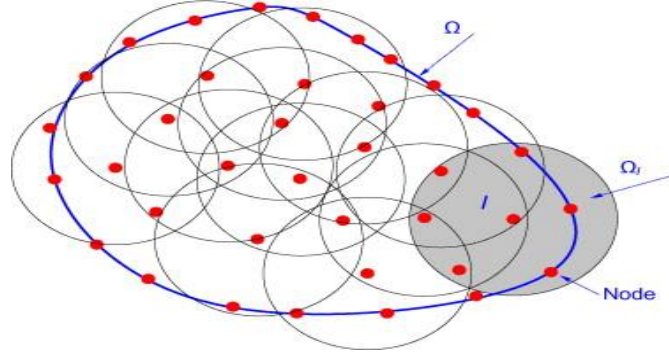
3.2. Ağsız Yöntemler (MM)

Ağızsız yöntem (MM), tanımlanan alanda ağ kurulmadan sistemin algoritmik denklemlerini kurmaya çalışan bir yöntem olarak tanımlanabilir. Ağsız yöntemler problem bölgesinde tanımlı düğüm noktalarını kullanarak sınır koşullarını uygulayıp problemi çözer. Dağılmış düğümlere alan düğümleri denir ve aralarında ağ oluşturmazlar (Liu vd., 2005). Sonlu elemanlar yönteminde olduğu gibi uygun olan interpolasyonu veya yaklaşık çözümü bulmak için önceden ağ tanımlanması gerekmemektedir.

Kartezyen koordinatlarda $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ fonksiyonu için ağsız yaklaşım

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{I \in \mathcal{S}} \boldsymbol{\varphi}_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I(t) \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\boldsymbol{\varphi}_I: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ şekil fonksiyonları, \mathbf{u}_I 'lar I parçasında \mathbf{x}_I konumundaki düğüm değerleri, \mathcal{S} ise $\boldsymbol{\varphi}_I(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ olmak üzere I parçasındaki düğümlerin kümesidir. (3.2.1) formu sonlu elemanlar yaklaşımına benzemektedir. Ancak, $\mathbf{u}_I \neq \mathbf{u}(\mathbf{x}_I)$ olduğu için (3.2.1) denklemindeki şekil fonksiyonları sonlu elemanlar yönteminin aksine sadece yaklaşım olup interpolasyon değildir (Nguyen vd., 2008).



Şekil 3.2.1. Ağsız yöntemler kullanılarak alanı ayrıklaştırma

3.3. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi (MMOL-RBF)

Radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yönteminin çeşitli tipteki kısmi türevli diferansiyel denklemler için nasıl uygulanacağından bahsedilmiştir.

3.3.1. Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler için MMOL-RBF

Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlere radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemini (MMOL-RBF) uygulamak için $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ve L konum türev operatörü olmak üzere

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0 \quad (3.3.1)$$

formundaki kısmi türevli diferansiyel denklemleri ele alınsın. Şimdi farz edelim ki; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ düğümleri $\Omega \subset \mathbb{R}$ problem alanındaki merkezin kümesinde seçilen düğümler olsun. Zaman bağımlı kısmi türevli diferansiyel denklemler için radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yönteminde sunulan fikirler aşağıdadır (Bibi, 2011). $\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t)$ yaklaşık çözümü

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \quad (3.3.2)$$

olarak sunulabilir. Burada Ψ bazı radyal baz fonksiyonları, \mathbf{x}_j 'ler merkezdeki düğümler ve $\lambda_j(t), j = 1, 2, \dots, N$ belirlenecek olan bilinmeyen katsayılarıdır. Benzer şekilde konum türev operatörü için yaklaşık çözüm

$$L(\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t)) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) L(\Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)) \quad (3.3.3)$$

olarak yazılabilir.

(3.3.2) ve (3.3.3) denklemlerindeki yaklaşımlar matris formunda

$$\mathbf{u}^N = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.3.4)$$

ve

$$L(\mathbf{u}^N) = \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} \quad (3.3.5)$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\mathbf{u}^N = [\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \dots, \mathbf{u}_N(t)]^T \quad (3.3.6)$$

$$L(\mathbf{u}^N) = [L(\mathbf{u}_1(t)), L(\mathbf{u}_2(t)), \dots, L(\mathbf{u}_N(t))]^T \quad (3.3.7)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_N(t)]^T \quad (3.3.8)$$

şeklinde sütun matrisleri, A ise $A_{i,j} = \Psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), i, j = 1, \dots, N$ şeklinde elemanları olan matris ve B ise $B_{i,j} = L\Psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}, i, j = 1, \dots, N$ şeklinde elemanları olan simetrik olmayan matristir.

(3.3.4) ve (3.3.5) denklemleri kullanılarak

$$L(\mathbf{u}^N) = (\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1})\mathbf{u}^N \quad (3.3.9)$$

elde edilir. (3.3.9) denklemi

$$L(\mathbf{u}^N) = \mathbf{D}\mathbf{u}^N \quad (3.3.10)$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ 'dir.

Radyal baz fonksiyonları yardımıyla konum değişkenine göre ayrıştırıldıktan sonra, (3.3.1) kısmi türevli diferansiyel denklemi

$$\frac{du_i}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{u}^N, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.11)$$

ile verilen adi türevli diferansiyel denklem sistemine dönüşür. (3.3.11) denklem sistemi uygun bir adi türevli diferansiyel denklem çözüm yöntemi yardımıyla çözülür.

3.3.2. Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri için MMOL-RBF

Birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerine radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağırsız çizgiler yöntemini uygulamak için $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ve L konum türev operatörü olmak üzere

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + L(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \end{cases}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \geq 0 \quad (3.3.12)$$

formundaki kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Şimdi farz edelim ki; $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ düğümleri $\Omega \subset \mathbb{R}$ problem alanındaki merkezin kümesinde seçilen düğümler olsun. $\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t)$ ve $\mathbf{v}^N(\mathbf{x}, t)$ yaklaşık çözümleri sırasıyla

$$\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^1(t) \Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{v}^N(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2(t) \Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) \quad (3.3.14)$$

olarak sunulabilir. Burada, Ψ bazı radyal baz fonksiyonları, \mathbf{x}_j 'ler merkezdeki düğümler ve $\lambda_j^1(t)$ ve $\lambda_j^2(t), j = 1, \dots, N$ belirlenecek olan bilinmeyen katsayılarıdır. Benzer şekilde konum türev operatörü için yaklaşık çözüm

$$L(\mathbf{u}^N(\mathbf{x}, t)) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^1(t) L(\Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)) \quad (3.3.15)$$

$$L(\mathbf{v}^N(\mathbf{x}, t)) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2(t) L(\Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|)) \quad (3.3.16)$$

olarak yazılabilir. (3.3.13), (3.3.14), (3.3.15) ve (3.3.16) denklemlerindeki yaklaşımlar sırasıyla matris formunda

$$\mathbf{u}^N = A\lambda^1 \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{v}^N = A\lambda^2 \quad (3.3.18)$$

ve

$$L(\mathbf{u}^N) = B\lambda^1 \quad (3.3.19)$$

$$L(\mathbf{v}^N) = B\lambda^2 \quad (3.3.20)$$

olarak yazılabilir. Burada \mathbf{u}^N ve $L(\mathbf{u}^N)$ sırasıyla (3.3.6) ve (3.3.7) denklemlerinde verilen sütun matrisleri, benzer şekilde \mathbf{v}^N ve $L(\mathbf{v}^N)$

$$\mathbf{v}^N = [\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_N(t)]^T \quad (3.3.21)$$

$$L(\mathbf{v}^N) = [L(\mathbf{v}_1(t)), L(\mathbf{v}_2(t)), \dots, L(\mathbf{v}_N(t))]^T \quad (3.3.22)$$

şeklinde sütun matrisleri, A ise $A_{i,j} = \Psi(\|x_i - x_j\|)$, $i, j = 1, \dots, N$ şeklinde elemanları olan matris, B ise $B_{i,j} = L\Psi(\|x_i - x_j\|)_{x=x_j}$, $i, j = 1, \dots, N$ şeklinde elemanları olan simetrik olmayan matris ve

$$\lambda^i = [\lambda_1^i(t), \lambda_2^i(t), \dots, \lambda_N^i(t)]^T, \quad i = 1, 2 \quad (3.3.23)$$

şeklinde sütun matrisidir.

(3.3.17), (3.3.18), (3.3.19) ve (3.3.20) denklemleri kullanılarak

$$L(u^N) = (BA^{-1})u^N \quad (3.3.24)$$

$$L(v^N) = (BA^{-1})v^N \quad (3.3.25)$$

elde ederiz. (3.3.24) ve (3.3.25) denklemleri

$$L(u^N) = Du^N \quad (3.3.26)$$

$$L(v^N) = Dv^N \quad (3.3.27)$$

olarak yazılabilir. Burada $D = BA^{-1}$ 'dir.

Radyal baz fonksiyonları yardımıyla konum değişkenine göre ayırlandıktan sonra, (3.3.12) kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = Dv^N \\ \frac{dv_i}{dt} = Du^N \end{cases} \quad (3.3.28)$$

ile verilen adi türevli diferansiyel denklem sistemine dönüşür. (3.3.28) adi türevli diferansiyel denklem sistemi uygun bir adi türevli diferansiyel denklem çözüm yöntemi yardımıyla çözülür.

3.3.3. İkinci mertebeden (2+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemler için MMOL-RBF

İkinci mertebeden (2+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerine radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemini uygulamak için $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ ve L konum türev operatörü olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega, t \geq 0 \quad (3.3.29)$$

formundaki kısmi türevli diferansiyel denklemi ele alınsın. Şimdi farz edelim ki; $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2), \dots, (\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$ düğümleri $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ problem alanındaki merkezin kümesinde seçilen düğümler olsun.

(3.3.29) kısmi türevli diferansiyel denklemini birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgemek için $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ dönüşümü kullanılır. Böylece

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_t = -L(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (3.3.30)$$

adi kısmi türevli denklem sistemi elde edilir. Daha sonra Bölüm 3.3.2'deki adımlar takip edilir.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde bazı özel evolution denklemlerinin çizgiler yöntemi ve çoklu kuadratik (MQ), ters çoklu kuadratik (IMQ) ve gauss merkezci (GA) radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi ile çözümleri elde edilip, sayısal değerleri çizelgeler halinde verilmiştir.

Giriş bölümünde de bahsettiğimiz gibi radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi; birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin, birinci mertebeden (1+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklem sistemlerinin ve ikinci mertebeden (2+1) boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilir. Bu bölümde öncelikle birinci mertebeden (1+1) boyutlu Sawada Kotera denkleminin, birinci mertebeden (1+1) boyutlu Burgers denklem sisteminin, son olarakta ikinci mertebeden (1+1) boyutlu Klein Gordon denkleminin çözümü yapılmıştır.

Ayrıca metodun performansını değerlendirmek için aşağıdaki hata normları kullanılmıştır:

$$L_2 = \|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}\|_{L_2} = \sqrt{h \sum_{i=1}^N (\mathbf{u}_i^N - \mathbf{u}_i)^2}$$
$$L_\infty = \|\mathbf{u}^N - \mathbf{u}\|_{L_\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |\mathbf{u}_i^N - \mathbf{u}_i|$$

Burada \mathbf{u} analitik çözümü, \mathbf{u}^N nümerik çözümü temsil eder.

Konumda ve zamanda noktasal yakınsaklık oranlarını hesaplamak için aşağıdaki formüller kullanılmıştır:

$$\frac{\log(\|\mathbf{u}_{analitik} - \mathbf{u}_{h_i}\| / \|\mathbf{u}_{analitik} - \mathbf{u}_{h_{i+1}}\|)}{\log(h_i/h_{i+1})}$$
$$\frac{\log(\|\mathbf{u}_{analitik} - \mathbf{u}_{t_i}\| / \|\mathbf{u}_{analitik} - \mathbf{u}_{t_{i+1}}\|)}{\log(t_i/t_{i+1})}$$

Burada $\mathbf{u}_{analitik}$ analitik çözümü \mathbf{u}_{h_i} ve \mathbf{u}_{t_i} ise sırasıyla \mathbf{h}_i ve \mathbf{t}_i adımları ile nümerik çözümü temsil eder.

4.1. Problem 1

$$\mathbf{u}_t + \alpha \mathbf{u}^2 \mathbf{u}_x + \beta \mathbf{u}_x \mathbf{u}_{xx} + \gamma \mathbf{u} \mathbf{u}_{xxx} + \mathbf{u}_{xxxxx} = 0 \quad (4.1.1)$$

denklemi ile Sawada Kotera denklemini ele alalım. Burada α, β, γ sıfırdan farklı keyfi sabitler ve $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ yeterince türevlenebilen fonksiyondur. $\alpha = 45$, $\beta = \gamma = 15$ ve $-15 \leq x \leq 15$, $0 \leq t \leq 1$, $N = 11$ olarak denklemi klasik çizgiler yöntemini ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemini kullanarak çözelim.

Denklemin analitik çözümü

$$\mathbf{u}(x, t) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(k(x - 16k^4t - x_0)) \quad (4.1.2)$$

şeklindedir (Kaya vd., 2003). Burada k ve x_0 keyfi parametrelerdir. Bu çalışmada $k = 0.01, x_0 = 0$ olarak alınmıştır. Başlangıç şartı ise denklem (4.1.2)'den elde edilir.

4.1.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Burada (4.1.1) denkleminin x değişkenini verilen aralıkta N parçaya ayıralım.

$$x_i = i \cdot h \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

olup burada $h = \frac{15 - (-15)}{N}$ ile hesaplanır. (4.1.1) denkleminde u_x, u_{xx}, u_{xxx} ve u_{xxxxx} ifadelerinin yerine sonlu fark yaklaşımlarını yazarsak

$$\frac{du_i}{dt} = f(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.1.3)$$

şeklinde t 'ye bağlı bir adi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşur. Oluşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi MATLAB paket program aracılığıyla Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Schiesser vd., 2012). Elde edilen sonuçlar analitik çözümle L_2 ve L_∞ hata normlarına göre kıyaslanarak Çizelge 4.1.1, Çizelge 4.1.2 ve Çizelge 4.1.3'te verilmiştir.

4.1.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Bu denklemin radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi ile çözümü şu şekildedir: öncelikle $[-15, 15]$ problem alanında N değerine göre eşit aralıklı (uniform) düğüm dağılımı yapılmalıdır. Bu ayrıklaştırma sürecinde yaklaşık çözüm $\mathbf{u}^N(x, t)$ 'den, yani (3.3.4) denkleminde

$$\mathbf{u}^N = \mathbf{A}\lambda \quad (4.1.4)$$

yazılabilir. (4.1.1) denklemini x değişkenine göre birinci, ikinci, üçüncü ve beşinci mertebeden türev içerdiği için (3.3.10) denkleminde

$$\mathbf{u}_x^N = \mathbf{D}_x \mathbf{u}^N \quad (4.1.5)$$

$$\mathbf{u}_{xx}^N = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{u}^N \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{u}_{xxx}^N = \mathbf{D}_{xxx} \mathbf{u}^N \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{u}_{xxxx}^N = \mathbf{D}_{xxxx} \mathbf{u}^N \quad (4.1.8)$$

elde edilir. . Burada $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ 'dir. (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.8) denklemleri (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d\mathbf{u}_i^N}{dt} + a(\mathbf{u}_i^N)^2 (\mathbf{D}_x \mathbf{u}^N) + \beta (\mathbf{D}_x \mathbf{u}^N) (\mathbf{D}_{xx} \mathbf{u}^N) + \gamma (\mathbf{u}_i^N) (\mathbf{D}_{xxx} \mathbf{u}^N) + \mathbf{D}_{xxxx} \mathbf{u}^N = 0 \quad (4.1.9)$$

denklemler elde edilir. Ayrıklaştırma sonrası başlangıç şartı (4.1.2) denkleminde

$$u_i(0) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(k(x_i - x_0)) , i = 1, \dots, N \quad (4.1.10)$$

olur. Böylece (4.1.1) ve (4.1.2) denklemleriyle ifade edilen kısmi türevli diferansiyel denklem problemi (4.1.9) ve (4.1.10) denklemleriyle ifade edilen adi türevli diferansiyel denklem sistemi problemine indirgenir. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözümü, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi, ODE45 komutu ile MATLAB paket program aracılığıyla elde edilmiştir (Schiesser vd., 2012). Elde edilen sonuçlar analitik çözümle L_2 ve L_∞ hata normlarına göre kıyaslanarak Çizelge 4.1.1, Çizelge 4.1.2 ve Çizelge 4.1.3'te verilmiştir.

| Yöntem | $t = 0.001$ | $t = 0.002$ | $t = 0.01$ | $t = 0.05$ | $t = 0.1$ |
|------------|--|--|--|--|--|
| MOL-Klasik | 3,9581974998 3952×10^{-14} | 1,5831606685 7293×10^{-13} | 3,9495584895 5172×10^{-12} | 6,1919363486 5275×10^{-9} | 1,2421913912 2962×10^{-8} |
| MMOL-GA | 5,3311595664 61482×10^{-8} | 1,0598727531 05454×10^{-7} | 5,0539128688 56254×10^{-7} | 2,0165151478 80510×10^{-6} | 3,1232020864 96560×10^{-6} |
| MMOL-MQ | 2,1303217122 12969×10^{-9} | 4,2660592357 29185×10^{-9} | 2,1551272475 85653×10^{-8} | 1,1392342595 43211×10^{-7} | 2,4699942294 96117×10^{-7} |
| MMOL-IMQ | 2,7244629375 27260×10^{-8} | 5,4305471394 01527×10^{-8} | 2,6433956258 07828×10^{-7} | 1,1617699822 72734×10^{-6} | 2,0000950067 35073×10^{-6} |

Çizelge 4.1.1. Sawada Kotera denklemi için L_2 hata normu

| Yöntem | $t = 0.001$ | $t = 0.002$ | $t = 0.01$ | $t = 0.05$ | $t = 0.1$ |
|------------|--|--|--|--|---|
| MOL-Klasik | 1,2346552134 4649×10^{-10} | 2,4694628324 8934×10^{-10} | 1,2353409818 9410×10^{-9} | 9,7693942243 7418×10^{-11} | 3,8555565963 67256×10^{-10} |
| MMOL-GA | 2,3856574769 08867×10^{-8} | 4,7428581462 30167×10^{-8} | 2,2615914730 07121×10^{-7} | 9,0237674692 10763×10^{-7} | 1,3976115853 38859×10^{-6} |
| MMOL-MQ | 1,0655923663 73939×10^{-9} | 2,1389398242 7743×10^{-9} | 1,0780012879 22601×10^{-8} | 5,6985123045 9670×10^{-8} | 1,2355125744 64254×10^{-7} |
| MMOL-IMQ | 1,2184168660 97943×10^{-8} | 2,4286145117 43768×10^{-8} | 1,1821624621 46380×10^{-7} | 5,1955933091 61116×10^{-7} | 8,9446967930 35045×10^{-7} |

Çizelge 4.1.2. Sawada Kotera denklemi için L_∞ hata normu

| Yöntem | dt | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|------------|---------|---|-----------------------|---|-----------------------|
| MOL-Klasik | 0.0004 | 3,0902828107 96819×10^{-14} | 1,99991805 7526170 | 9,6007005542 37670×10^{-14} | 1,00048009 673645 |
| MMOL-MQ | 0.0004 | 1,4385336855 87527×10^{-7} | 1,09605584 9625919 | 7,1956352335 58256×10^{-8} | 1,09606367 2262671 |
| MMOL-IMQ | 0.0004 | 1,3881552617 35297×10^{-7} | 0,80971999 5313131 | 6,2080190571 28272×10^{-7} | 0,80971999 5313131 |
| MMOL-GA | 0.0004 | 2,3454692649 38425×10^{-6} | 0,67280173 6081384 | 1,0495814658 70597×10^{-6} | 0,67280173 3209720 |
| MOL-Klasik | 0.0002 | 3,0902827460 95657×10^{-14} | 1,99993065 3555113 | 9,6007005542 37670×10^{-11} | 1,00004803 2015435 |
| MMOL-MQ | 0.0002 | 1,3878532813 72341×10^{-7} | 1,09216840 4454157 | 6,9421269467 67579×10^{-8} | 1,09217594 1817379 |
| MMOL-IMQ | 0.0002 | 1,3516365318 27191×10^{-6} | 0,81551972 6896214 | 6,0447023320 75313×10^{-7} | 0,81551972 6896247 |
| MMOL-GA | 0.0002 | 2,2938797537 34842×10^{-6} | 0,68237334 5427745 | 1,0264955119 17511×10^{-6} | 0,68237334 2623867 |
| MOL-Klasik | 0.0001 | 3,0902827460 95657×10^{-14} | 1,99992818 6581897 | 9,6007005542 80002×10^{-11} | 1,00004807 1386950 |
| MMOL-MQ | 0.0001 | 1,3878532804 27078×10^{-7} | 1,09207648 9807672 | 6,9421269420 39017×10^{-8} | 1,09208402 0401946 |
| MMOL-IMQ | 0.0001 | 1,3516365304 83120×10^{-6} | 0,81565813 4644515 | 6,0447023260 64446×10^{-7} | 0,81565813 4644515 |
| MMOL-GA | 0.0001 | 2,2938797414 50826×10^{-6} | 0,68260191 2317292 | 1,0264955064 20497×10^{-6} | 0,68260190 9514949 |
| MOL-Klasik | 0.00005 | 2,1460435927 06593×10^{-14} | 1,99999024 4197298 | 8,0005198025 71813×10^{-11} | 1,00004015 2354496 |
| MMOL-MQ | 0.00005 | 1,3878532805 52346×10^{-7} | 1,09203060 2455948 | 6,9421269426 65652×10^{-8} | 1,09203812 9667741 |
| MMOL-IMQ | 0.00005 | 1,3516365303 87683×10^{-6} | 0,81572751 1264141 | 6,0447023256 37636×10^{-7} | 0,81572751 1264141 |
| MMOL-GA | 0.00005 | 2,2938797402 62165×10^{-6} | 0,68271700 2488768 | 1,0264955058 88579×10^{-6} | 0,68271699 8687448 |

Çizelge 4.1.3. Sawada Kotera denklemi için zamanda noktasal yakınsaklık oranı

Sawada Kotera denklemi için L_2 ve L_∞ hata normları Çizelge 4.1.1 ve Çizelge 4.1.2'de hesaplanmıştır. Ayrıca Çizelge 4.1.3'te ise zamanda noktasal yakınsaklık oranı klasik çizgiler yöntemi için ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Çizelgelerden şu sonuç

çıkarılmıştır: Klasik çizgiler yöntemi, radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemine göre daha iyi sonuç vermiştir. Çizelge 4.1.3'ten görülür ki: N sayısının değişimi denklem sonucunda kayda değer bir değişiklik meydana getirmemiştir. Yani küçük N değerleri ile zaman kaybı yaşamadan eş değer doğrulukta sonuçlar elde edilebilir ki bu da yöntemi çekici kılan avantajlardan biridir.

4.2. Problem 2

Akışkanlar mekaniğinde yayılan dalgalar için en basit denklem modeli olan birinci mertebeden, (1+1) boyutlu, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel Burgers denklem sistemi

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \eta uu_x - \alpha(uv)_x \\ v_t = v_{xx} - \epsilon vv_x - \beta(uv)_x \end{cases}, \quad x \in (a, b), \quad t \in [0, T] \quad (4.2.1)$$

ele alınsın (Mittal vd., 2012). (4.2.1) denklem sisteminin başlangıç şartları

$$u(x, 0) = a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax) \quad (4.2.2)$$

$$v(x, 0) = a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax) \quad (4.2.3)$$

olsun. (4.2.1) denklem sisteminin analitik çözümü

$$u(x, t) = a_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)) \quad (4.2.4)$$

$$v(x, t) = a_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(A(x - 2At)) \quad (4.2.5)$$

şeklindedir (Mittal vd., 2012). Burada $A = \frac{a_0(4\alpha\beta-1)}{4\alpha-2}$ ve a_0, α, β keyfi sabitlerdir.

4.2.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Burada (4.2.1) denklem sisteminin x değişkenini verilen aralıkta N parçaya ayıralım.

$$x_i = i.h \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

olup burada $h = \frac{10 - (-10)}{N}$ ile hesaplanır. (4.2.1) denkleminde u_x, u_{xx}, v_x ve v_{xx} ifadelerinin yerine sonlu fark yaklaşımlarını yazarsak

$$\begin{cases} \frac{du_i}{dt} = f(u_i) \\ \frac{dv_i}{dt} = g(u_i) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.6)$$

şeklinde t 'ye bağlı bir adi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşur. Oluşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi MATLAB paket program aracılığıyla Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Schiesser vd., 2012). Çözüm sırasında $\epsilon = 2, \eta = 1, \alpha = \beta = 1, a_0 = 0.01$ olarak seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle L_2 ve L_∞ hata normlarına göre kıyaslanarak Çizelge 4.2.1-Çizelge 4.2.8'de verilmiştir.

4.2.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Bu denklem sisteminin radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi ile çözümü şu şekildedir: öncelikle $[-10, 10]$ problem alanında N değerine göre eşit aralıklı (uniform) düğüm dağılımı yapılmalıdır. Bu ayrıklaştırma sürecinde (3.3.17) ve (3.3.18) denklemlerindeki yaklaşık çözüm yaklaşımlardan

$$u^N = A\lambda^1 \quad (4.2.7)$$

$$v^N = A\lambda^2 \quad (4.2.8)$$

yazılabilir. (4.2.1) denklem sistemi x değişkenine göre birinci ve ikinci mertebeden türev içerdiği için (3.3.26) ve (3.3.27) denklemlerinden

$$\mathbf{u}_x^N = \mathbf{D}_x \mathbf{u}^N \quad (4.2.9)$$

$$\mathbf{u}_{xx}^N = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{u}^N \quad (4.2.10)$$

$$\mathbf{v}_x^N = \mathbf{D}_x \mathbf{v}^N \quad (4.2.11)$$

$$\mathbf{v}_{xx}^N = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{v}^N \quad (4.2.12)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{D} = \mathbf{BA}^{-1}$ 'dir. (4.2.7) – (4.2.12) denklemleri (4.2.1) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_i^N}{dt} = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{u}^N - \eta \mathbf{u}_i^N (\mathbf{D}_x \mathbf{u}^N) - \alpha \left((\mathbf{D}_x \mathbf{u}^N) \mathbf{v}_i^N + \mathbf{u}_i^N (\mathbf{D}_x \mathbf{v}^N) \right) \\ \frac{d\mathbf{v}_i^N}{dt} = \mathbf{D}_{xx} \mathbf{v}^N - \varepsilon \mathbf{v}_i^N (\mathbf{D}_x \mathbf{v}^N) - \beta \left((\mathbf{D}_x \mathbf{u}^N) \mathbf{v}_i^N + \mathbf{u}_i^N (\mathbf{D}_x \mathbf{v}^N) \right) \end{cases} \quad (4.2.13)$$

denklem sistemi elde edilir. Ayrıklaştırma sonrası başlangıç şartı (4.2.2) ve (4.2.3) denklemlerinden

$$\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{a}_0 - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax_i) \quad (4.2.14)$$

$$\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{a}_0 \left(\frac{2\beta - 1}{2\alpha - 1} \right) - 2A \left(\frac{2\alpha - 1}{4\alpha\beta - 1} \right) \tanh(Ax_i) \quad (4.2.15)$$

olarak elde edilir. Böylece (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.3) denklemleriyle ifade edilen kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi problemi (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.15) denklemleriyle ifade edilen adi türevli diferansiyel denklem sistemi problemine indirgenir. Elde edilen adi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözümü, dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi, ODE45 komutu ile MATLAB paket program aracılığıyla elde edilmiştir (Schiesser vd., 2012). Çözüm sırasında $\varepsilon = 2, \eta = 1, \alpha = \beta = 1, \mathbf{a}_0 = \mathbf{0.01}$ olarak seçilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik çözümle L_2 ve L_∞ hata normlarına göre kıyaslanarak Çizelge 4.2.1-Çizelge 4.2.8'de verilmiştir.

| Yöntem | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | $t = 5$ |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 6.4491921 04326346 $\times 10^{-7}$ | 2.3867563 29465495 $\times 10^{-6}$ | 2.3219058 93782838 $\times 10^{-6}$ | 1.9548620 02642089 $\times 10^{-6}$ | 3.8726157 35769018 $\times 10^{-6}$ |
| MMOL-GA $c = 0.4$ | 0.0031506 24685030 | 0.0054396 53994394 | 0.0071030 36265090 | 0.0083121 04924947 | 0.0091912 73601970 |
| MMOL-MQ $c = 2.8$ | 0.0050656 00370656 | 0.0123855 69712629 | 0.0229797 39491629 | 0.0383478 07542032 | 0.0607153 47196657 |
| MMOL-IMQ $c = 3$ | 9.3433302 33139418 $\times 10^{-4}$ | 0.0017840 75737642 | 0.0017840 75737642 | 0.0032641 23266647 | 0.0039090 97072742 |

Çizelge 4.2.1. Burgers denklem sisteminde $u(x,t)$ için $N = 3$, $dt = 0.005$ iken L_∞ hata normu

| Yöntem | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | $t = 5$ |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 2.1825384 76386222 $\times 10^{-6}$ | 4.7629831 85300015 $\times 10^{-6}$ | 7.1823044 46201863 $\times 10^{-6}$ | 9.9482761 11341965 $\times 10^{-6}$ | 1.1925188 31090411 $\times 10^{-5}$ |
| MMOL-GA $c = 0.4$ | 0.0031506 24710740 | 0.0054396 54026620 | 0.0071030 36295639 | 0.0083121 04950900 | 0.0091912 73622803 |
| MMOL-MQ $c = 2.8$ | 0.0050743 19023034 | 0.0124160 34457356 | 0.0230605 62083139 | 0.0385408 48731659 | 0.0611534 64053888 |
| MMOL-IMQ $c = 3$ | 9.3627208 05116964 $\times 10^{-4}$ | 0.0017874 53422203 | 0.0025624 86248758 | 0.0032692 42799959 | 0.0039146 65909221 |

Çizelge 4.2.2. Burgers denklem sisteminde $v(x,t)$ için $N = 3$, $dt = 0.005$ iken L_∞ hata normu

| Yöntem | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | $t = 5$ |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 4.4130109 61066593 $\times 10^{-8}$ | 8.6549324 20429010 $\times 10^{-8}$ | 1.1983512 88817234 $\times 10^{-7}$ | 1.1972342 20217529 $\times 10^{-7}$ | 2.6913307 91736238 $\times 10^{-7}$ |
| MMOL-GA $c = 0.4$ | 1.6512208 12692783 $\times 10^{-4}$ | 2.8511072 08168503 $\times 10^{-4}$ | 3.7232574 14137320 $\times 10^{-4}$ | 4.3574220 84160769 $\times 10^{-4}$ | 4.8187736 08949198 $\times 10^{-4}$ |
| MMOL-MQ $c = 2.8$ | 2.6541757 22144778 $\times 10^{-4}$ | 6.4772635 03450824 $\times 10^{-4}$ | 0.0011978 71332418 | 0.0011978 71332418 | 0.0031228 02219015 |
| MMOL-IMQ $c = 3$ | 3.9399234 50723384 $\times 10^{-5}$ | 7.6189918 29554422 $\times 10^{-5}$ | 1.1057255 78953580 $\times 10^{-4}$ | 1.4272626 33291992 $\times 10^{-4}$ | 1.7281199 15514667 $\times 10^{-4}$ |

Çizelge 4.2.3. Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için $N = 3$, $dt = 0.005$ iken L_2 hata normu

| Yöntem | $t = 1$ | $t = 2$ | $t = 3$ | $t = 4$ | $t = 5$ |
|----------------------|---|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 4.1982537 21198364 $\times 10^{-8}$ | 9.2983658 29364510 $\times 10^{-8}$ | 1.8273911 09362912 $\times 10^{-7}$ | 1.8210034 72910348 $\times 10^{-7}$ | 2.1928402 28173940 $\times 10^{-7}$ |
| MMOL-GA $c = 0.4$ | 1.6512207 99224805 $\times 10^{-4}$ | 2.8511071 91287158 $\times 10^{-4}$ | 3.7232573 98134318 $\times 10^{-4}$ | 4.3574220 70565681 $\times 10^{-4}$ | 4.8187735 98035981 $\times 10^{-4}$ |
| MMOL-MQ $c = 2.8$ | 2.6513973 90706966 $\times 10^{-4}$ | 6.4676703 44299767 $\times 10^{-4}$ | 0.0011953 64528298 | 0.0019826 44162205 | 0.0031098 43461392 |
| MMOL-IMQ $c = 3$ | 3.9282141 90749512 $\times 10^{-5}$ | 7.5982151 14688431 $\times 10^{-5}$ | 1.1029632 99684399 $\times 10^{-4}$ | 1.4240010 64857218 $\times 10^{-4}$ | 1.7245123 65217845 $\times 10^{-4}$ |

Çizelge 4.2.4. Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için $N = 3$, $dt = 0.005$ iken L_2 hata normu

Çizelge 4.2.1 ve Çizelge 4.2.2'de sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için L_∞ hata normu verilmiştir. Çizelge 4.2.3 ve Çizelge 4.2.4'te sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için L_2 hata normu verilmiştir. Bu çizelgelerden klasik çizgiler yönteminin çok daha iyi sonuç verdiği açıkça görülmektedir.

| Yöntem | dt | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-------|---|---------------------------|---|---------------------------|
| MOL- Klasik | 0.005 | 1.1610293 74019384 $\times 10^{-8}$ | 0.9938 528745 85085 | 1.9873462 31628372 $\times 10^{-6}$ | 1.00901 1887562 771 |
| | 0.01 | 1.9187319 23426473 $\times 10^{-7}$ | 0.9927 631455 88383 | 1.9593716 28374219 $\times 10^{-6}$ | 1.01019 7103191 215 |
| | 0.02 | 2.2011294 37643290 $\times 10^{-7}$ | 0.9937 992673 90484 | 1.6253820 34842918 $\times 10^{-6}$ | 1.00907 8535072 795 |
| MMOL- MQ | 0.005 | 8.9787647 80938512 $\times 10^{-4}$ | 1.5240 630183 62911 | 0.0171932 38791708 | 1.53213 4490145 937 |
| | 0.01 | 0.0012697 89165872 | 1.5246 515088 11011 | 0.0171932 40106931 | 1.53274 1271493 928 |
| | 0.02 | 0.0017957 52913752 | 1.5258 215249 57132 | 0.0171932 38351108 | 0.01719 3238351 108 |
| MMOL- IMQ | 0.005 | 9.3670588 91015801 $\times 10^{-5}$ | 0.9173 702415 73984 | 0.0021800 33276249 | 0.88712 3357081 927 |
| | 0.01 | 1.3247021 72642385 $\times 10^{-4}$ | 0.9172 916593 75865 | 0.0021800 33277190 | 0.88701 8171097 207 |
| | 0.02 | 1.8734117 77946499 $\times 10^{-4}$ | 0.9171 346409 02511 | 0.0021800 33275739 | 0.88680 7999566 704 |
| MMOL- GA | 0.005 | 3.3218696 51209375 $\times 10^{-4}$ | 0.6532 925673 76488 | 0.0063375 63131690 | 0.65308 0677115 403 |
| | 0.01 | 4.6978332 06774185 $\times 10^{-4}$ | 0.6529 996147 43821 | 0.0063375 63258035 | 0.65278 7471809 341 |
| | 0.02 | 6.6437392 22515088 $\times 10^{-4}$ | 0.6524 113018 41183 | 0.0063375 63055422 | 0.65219 8651655 398 |

Çizelge 4.2.5. $t = 2.5$ 'te $N = 3$ iken Burgers denklem sisteminde $u(x, t)$ için zamanda noktasal yakınsaklık oranı

| Yöntem | dt | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-------|---|---------------------------|---|---------------------------|
| MOL- Klasik | 0.005 | 1.5242938 47201384 $\times 10^{-7}$ | 1.0086 517432 25619 | 6.2445172 63810183 $\times 10^{-6}$ | 1.00392 289663 7308 |
| | 0.01 | 1.9182341 82736472 $\times 10^{-7}$ | 1.0100 906852 82958 | 6.1182743 62817364 $\times 10^{-6}$ | 1.00445 849404 8989 |
| | 0.02 | 2.4992834 62915331 $\times 10^{-7}$ | 1.0087 258740 99431 | 6.0182635 41738193 $\times 10^{-6}$ | 1.00395 234547 3977 |
| MMOL- MQ | 0.005 | 8.9629543 66237285 $\times 10^{-4}$ | 1.5225 355433 60843 | 0.0172438 04088655 | 1.53476 087155 6271 |
| | 0.01 | 0.0012675 53232585 | 1.5231 211913 85294 | 0.0172438 05488791 | 1.53537 265163 1229 |
| | 0.02 | 0.0017925 90831428 | 1.5242 855259 47561 | 0.0172438 03636490 | 1.53658 942000 0246 |
| MMOL- IMQ | 0.005 | 9.3426056 54402990 $\times 10^{-5}$ | 0.9179 441839 61748 | 0.0021839 73056774 | 0.88670 184572 9550 |
| | 0.01 | 1.3212439 62753118 $\times 10^{-4}$ | 0.9178 660734 72098 | 0.0021839 73057729 | 0.88659 632069 2515 |
| | 0.02 | 1.8685211 30625173 $\times 10^{-4}$ | 0.9177 099967 36996 | 0.0021839 73056259 | 0.88638 547177 9968 |
| MMOL- GA | 0.005 | 3.3218696 34451461 $\times 10^{-4}$ | 0.6532 925714 17287 | 0.0063375 63163680 | 0.65308 067307 3327 |
| | 0.01 | 4.6978331 83074906 $\times 10^{-4}$ | 0.6529 996187 85360 | 0.0063375 63290026 | 0.65278 746776 6467 |
| | 0.02 | 6.6437391 88999264 $\times 10^{-4}$ | 0.6524 113058 84264 | 0.0063375 63087412 | 0.65219 864761 0951 |

Çizelge 4.2.6. $t = 2.5$ 'te $N = 3$ iken Burgers denklem sisteminde $v(x, t)$ için zamanda noktasal yakınsaklık oranı

| Yöntem | N | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-----|---|---------------------------|---|---------------------------|
| MOL- Klasik | 3 | 1.1827492 04857293 $\times 10^{-7}$ | 0.9938 528745 85085 | 1.0193746 27183746 $\times 10^{-6}$ | 1.00901 1887562 771 |
| | 5 | 2.1833029 84739193 $\times 10^{-4}$ | 1.0415 435790 21367 | 0.0190193 84757482 | 1.09982 4112890 861 |
| | 7 | 9.7462441 92384753 $\times 10^{-4}$ | 1.1581 370794 39979 | 0.1689993 85473929 | 1.59520 7576647 282 |
| MMOL- MQ | 3 | 8.9787647 80938512 $\times 10^{-4}$ | 1.5240 630183 62911 | 0.0171932 38791708 | 1.53213 4490145 937 |
| | 5 | 0.0011032 55708716 | 1.6211 164078 98288 | 0.0220600 23227725 | 1.65376 4906629 607 |
| | 7 | 0.0015616 46766526 | 1.8292 029089 37618 | 0.0357095 99181146 | 1.90501 9143749 099 |
| MMOL- IMQ | 3 | 9.3670588 91015801 $\times 10^{-5}$ | 0.9173 702415 73984 | 0.0021800 33276249 | 0.88712 3357081 927 |
| | 5 | 6.0813580 77919889 $\times 10^{-5}$ | 0.8830 744265 12076 | 0.0016406 45644722 | 0.85445 1773828 316 |
| | 7 | 4.8977316 17848875 $\times 10^{-5}$ | 0.7991 717727 13239 | 0.0014185 40227867 | 0.78763 0198534 191 |
| MMOL- GA | 3 | 3.3218696 51209375 $\times 10^{-4}$ | 0.6532 925673 76488 | 0.0063375 63131690 | 0.65308 0677115 403 |
| | 5 | 0.4884623 34449960 | 5.1478 862193 57798 | 6.9079005 80875558 | 5.14788 6219357 798 |
| | 7 | 0.5293692 67413934 | 5.5383 584126 97735 | 8.5063812 50261247 | 8.56037 8010705 577 |

Çizelge 4.2.7. $t = 2.5$ 'te $dt = 0.005$ iken Burgers denklem sisteminde $u(x,t)$ için konumda noktasal yakınsaklık oranı

| Yöntem | N | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-----|---|---------------------------|---|---------------------------|
| MOL- Klasik | 3 | 1.0294387 57638202 $\times 10^{-7}$ | 1.0086 517432 25619 | 6.1823748 34923845 $\times 10^{-6}$ | 1.00392 2896637 308 |
| | 5 | 2.1923847 50302034 $\times 10^{-4}$ | 1.0369 281454 24002 | 0.0195937 43827458 | 1.10754 8909433 747 |
| | 7 | 9.1726483 92019384 $\times 10^{-4}$ | 1.1387 956904 86985 | 0.1788928 47583937 | 1.68797 6840106 386 |
| MMOL- MQ | 3 | 8.9629543 66237285 $\times 10^{-4}$ | 1.5225 355433 60843 | 0.0172438 04088655 | 1.53476 0871556 271 |
| | 5 | 0.0011026 40189980 | 1.6212 891092 00173 | 0.0220654 55320575 | 1.65353 5627944 337 |
| | 7 | 0.0015639 69009274 | 1.8333 088010 91869 | 0.0357371 07863746 | 1.90544 8144155 140 |
| MMOL- IMQ | 3 | 9.3426056 54402990 $\times 10^{-5}$ | 0.9179 441839 61748 | 0.0021839 73056774 | 0.88670 1845729 550 |
| | 5 | 6.0314231 77647237 $\times 10^{-5}$ | 0.8836 271129 02081 | 0.0016498 96131082 | 0.85381 9532247 961 |
| | 7 | 4.8383852 52884523 $\times 10^{-5}$ | 0.7982 650472 65707 | 0.0014298 79815983 | 0.78781 2237738 078 |
| MMOL- GA | 3 | 3.3218696 34451461 $\times 10^{-4}$ | 0.6532 925714 17287 | 0.0063375 63163680 | 0.65308 0673073 327 |
| | 5 | 0.4608793 27246154 | 4.3789 110749 89382 | 6.5178179 52088993 | 4.37891 1074989 439 |
| | 7 | 0.4489171 17740010 | 5.6126 492311 84164 | 8.1669726 60029026 | 4.72046 8835326 509 |

Çizelge 4.2.8. $t = 2.5$ 'te $dt = 0.005$ iken Burgers denklem sisteminde $v(x,t)$ için konumda noktasal yakınsaklık oranı

Çizelge 4.2.5 ve Çizelge 4.2.6'da sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için N değeri sabit iken $dt = 0.005, 0.01, 0.02$ değerleri için zamanda noktasal yakınsaklık oranları verilmiştir. Bu çizelgelerden şu sonuçlar elde edilmiştir: $u(x, t)$ için klasik çizgiler yöntemi için dt değeri arttıkça L_2 ve L_∞ *Oran* artar, L_2 *Oran* ve L_∞ azalır. $v(x, t)$ için ise klasik çizgiler yöntemi için dt değeri arttıkça L_2 , L_2 *Oran* ve L_∞ *Oran* artar, L_∞ azalır.

Çizelge 4.2.7 ve Çizelge 4.2.8'de sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ için dt değeri sabit iken $N = 3, 5, 7$ değerleri için konumda noktasal yakınsaklık oranları verilmiştir. Bu çizelgelerden şu sonuçlar elde edilmiştir: $u(x, t)$ için klasik çizgiler yöntemi için N değeri arttıkça L_2 , L_∞ , L_2 *Oran* ve L_∞ *Oran* artar. $v(x, t)$ için ise $u(x, t)$ için elde edilen sonuçlar ile aynı inceleme sonuçları elde edilir.

4.3. Problem 3

Atomaltı fizikte kendi eksenini etrafında dönmeyen parçacıkları tanımlamada kullanılan ikinci mertebeden, (1+1) boyutlu, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel Klein-Gordon denklemi

$$u_{tt} + \alpha u_{xx} + g(u) = f(x, t), \quad (a \leq x \leq b, 0 < t < T) \quad (4.3.1)$$

ele alınsın (Shao vd., 2014). (4.3.1) denklemi

$$u(a, t) = p_1(t), u(b, t) = p_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.3.2)$$

dirichlet sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3.3)$$

başlangıç şartları ile birlikte ele alınsın. Burada $g(u) = \beta u + \gamma u^k$ ve α, β, γ bilinen katsayılarıdır.

4.3.1. Çizgiler Yöntemi ile Çözüm

Öncelikle birinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgemek için $\mathbf{u}_t(x, y, t) = \mathbf{v}(x, y, t)$ dönüşümü kullanılır. Böylece

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_t = \mathbf{f}(x, t) - \alpha \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{g}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

şeklinde birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

Burada (4.3.1) denkleminin x değişkenini verilen aralıkta N parçaya ayıralım.

$$x_i = i \cdot h \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

olup burada $h = \frac{10 - (-10)}{N}$ ile hesaplanır. (4.3.4) denkleminde u_{xx} ifadesinin yerine sonlu fark yaklaşımını yazarsak

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_i) \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.3.5)$$

şeklinde t 'ye bağlı bir adi türevli diferansiyel denklem sistemi oluşur. Oluşan adi türevli diferansiyel denklem sistemi MATLAB paket program aracılığıyla Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Schiesser vd., 2012). Çözüm sırasında $\mathbf{f}(x, t) = \mathbf{0}$, $\alpha = -m^2$, $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{nu} - \mathbf{lu}^3$, $m = n = 0.1$, $l = 1$, $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh(\kappa x)$, $\varphi_2(x) = -c \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \kappa \operatorname{sech}^2(\kappa x)$, $\kappa = \sqrt{a/(2c^2 - a^2)}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$, $c = 0.3$ olarak alınmıştır. Çözüm $[-10, 10]$ problem bölgesinde eşit aralıklı düğüm dağılımıyla gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar analitik çözümle L_2 ve L_∞ hata normlarına göre kıyaslanarak Çizelge 4.3.1-Çizelge 4.3.4'de verilmiştir.

4.3.2. Radyal Baz Fonksiyonları Yardımıyla Ağsız Çizgiler Yöntemi ile

Çözüm

Bu denklemin radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi ile çözümü şu şekildedir: bunun için öncelikle verilen denklemin $u_t(x, y, t) = v(x, y, t)$ dönüşümünü kullanarak

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = f(x, t) - \alpha u_{xx} - g(u) \end{cases} \quad (4.3.6)$$

şeklinde birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenmesi gerekir. Buna göre başlangıç ve sınır şartları da düzenlenirse

$$u(a, t) = p_1(t), u(b, t) = p_2(t), v(a, t) = p_3(t), v(b, t) = p_4(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.3.7)$$

$$u(0) = \varphi_1(x), v(0) = \varphi_2(x), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3.8)$$

elde edilir. Böylece verilen problem (4.3.6)-(4.3.8) denklemleri ile ifade edilen birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi problemine dönüştürüldükten sonra Bölüm 3.3.3'te bahsedilen adımlar takip edilerek

$$\begin{cases} \frac{du_i^N}{dt} = v_i^N \\ \frac{dv_i^N}{dt} = f(x, t) - \alpha(D_{xx}u^N) - g(u) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

adi türevli diferansiyel denklem sistemine indirgenir. Buna göre başlangıç ve sınır şartları tekrar düzenlenirse

$$u_1(t) = p_1(t), u_N(t) = p_2(t), v_1(t) = p_3(t), v_N(t) = p_4(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.3.10)$$

$$u_i(0) = \varphi_1(x_i), v_i(0) = \varphi_2(x_i), \quad a \leq x \leq b \quad (4.3.11)$$

elde edilir. Böylece verilen problem (4.3.9)-(4.3.11) denklemleri ile ifade edilen adi türevli diferansiyel denklem sistemi problemine dönüştürüldükten sonra,

dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi, ODE45 komutu ile MATLAB paket program aracılığıyla çözüme ulaşılır. Çözüm sırasında $f(x,t) = 0$, $\alpha = -m^2$, $g(u) = nu - lu^3$, $m = n = 0.1$, $l = 1$, $\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh(\kappa x)$, $\varphi_2(x) = -c \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \kappa \operatorname{sech}^2(\kappa x)$, $\kappa = \sqrt{a/(2c^2 - a^2)}$, $\alpha = 0.1$, $\beta = 1$, $c = 0.3$ olarak alınmıştır. Çözüm $[-10, 10]$ problem bölgesinde eşit aralıklı düğüm dağılımıyla gerçekleştirilmiştir. Buna göre verilen denklemin analitik çözümü

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tanh(\kappa(x - ct)) \quad (4.3.12)$$

dir (Shao vd., 2014).

Yöntemin doğruluğunu göstermek için elde edilen nümerik sonuçlar analitik çözümle, klasik çizgiler yöntemi ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağız çizgiler yöntemi kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlar ile kıyaslanmış ve sonuçlar Çizelge 4.3.1-Çizelge 4.3.4'te ifade edilmiştir.

| Yöntem | $t = 0.2$ | $t = 0.4$ | $t = 0.6$ | $t = 0.8$ | $t = 1$ |
|-----------------------|---|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 1.9384575 92328475 $\times 10^{-6}$ | 9.0928475 63829103 $\times 10^{-6}$ | 3.9375648 29173753 $\times 10^{-5}$ | 7.1274385 76849392 $\times 10^{-5}$ | 1.8374583 91039485 $\times 10^{-4}$ |
| MMOL-GA $c = 0.2$ | 1.6251917 47226529 $\times 10^{-4}$ | 6.5327458 58816025 $\times 10^{-4}$ | 0.0014787 65661119 | 0.0026477 62147707 | 0.0041712 95194874 |
| MMOL-MQ $c = 0.78$ | 8.1137409 26141144 $\times 10^{-5}$ | 3.2524374 15333653 $\times 10^{-4}$ | 7.3440662 91029017 $\times 10^{-4}$ | 0.0013121 33026506 | 0.0020633 94916642 |
| MMOL-IMQ $c = 1$ | 6.6726972 58919280 $\times 10^{-5}$ | 2.6780746 23154170 $\times 10^{-4}$ | 6.0535174 46560908 $\times 10^{-4}$ | 0.0010824 90879551 | 0.0017033 87246914 |

Çizelge 4.3.1. Klein-Gordon denklemi için $N = 3$, $dt = 0.001$ iken L_∞ hata normu

| Yöntem | $t = 0.2$ | $t = 0.4$ | $t = 0.6$ | $t = 0.8$ | $t = 1$ |
|-----------------------|--|---|---|---|---|
| MOL-Klasik | 6.1029438 54839201 $\times 10^{-10}$ | 5.7384741 82374009 $\times 10^{-9}$ | 1.0193846 31184628 $\times 10^{-8}$ | 4.0193746 19374739 $\times 10^{-8}$ | 7.9991736 40018361 $\times 10^{-8}$ |
| MMOL-GA $c = 0.2$ | 5.1393075 55744467 $\times 10^{-6}$ | 2.0658356 28889141 $\times 10^{-5}$ | 4.6762676 14782273 $\times 10^{-5}$ | 8.3729590 89132804 $\times 10^{-5}$ | 1.3190793 60871907 $\times 10^{-4}$ |
| MMOL-MQ $c = 0.78$ | 2.5657520 69163186 $\times 10^{-6}$ | 1.0284805 16193608 $\times 10^{-5}$ | 2.3222946 00345730 $\times 10^{-5}$ | 4.1490841 80971056 $\times 10^{-5}$ | 6.5245484 29410263 $\times 10^{-5}$ |
| MMOL-IMQ $c = 1$ | 2.1100921 47494722 $\times 10^{-6}$ | 8.4688155 53064283 $\times 10^{-6}$ | 1.9142902 98669909 $\times 10^{-5}$ | 3.4231367 25739028 $\times 10^{-5}$ | 5.3865834 37530776 $\times 10^{-5}$ |

Çizelge 4.3.2. Klein-Gordon denklemi için $N = 3$, $dt = 0.001$ iken L_2 hata normu

| Yöntem | dt | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-------|---|---------------------------|--|---------------------------|
| MOL- Klasik | 0.001 | 9.0192384 19294857 $\times 10^{-9}$ | 3.0016 697257 80404 | 1.8071536 20193055 $\times 10^{-5}$ | 2.98622 6916355 902 |
| | 0.002 | 1.1938475 93019338 $\times 10^{-8}$ | 3.0016 761472 67489 | 1.8071534 81217126 $\times 10^{-5}$ | 2.98620 0946567 991 |
| | 0.004 | 1.9183659 12001938 $\times 10^{-8}$ | 3.0016 875912 90897 | 1.8071530 984197340 $\times 10^{-5}$ | 2.98614 7337769 110 |
| MMOL- MQ | 0.001 | 1.6095638 76414594 $\times 10^{-5}$ | 2.0088 750275 48855 | 5.0900763 86881082 $\times 10^{-4}$ | 2.00891 1887490 615 |
| | 0.002 | 2.2762670 64568037 $\times 10^{-5}$ | 2.0088 928038 86110 | 5.0900763 89201448 $\times 10^{-4}$ | 2.00892 9700015 200 |
| | 0.004 | 3.2191277 52461253 $\times 10^{-5}$ | 2.0089 283697 54471 | 5.0900763 86299325 $\times 10^{-4}$ | 2.00896 5338098 992 |
| MMOL- IMQ | 0.001 | 1.3261010 43894733 $\times 10^{-5}$ | 2.0115 484046 45722 | 4.1934997 06234283 $\times 10^{-4}$ | 2.01154 8404645 722 |
| | 0.002 | 1.8753900 81708798 $\times 10^{-5}$ | 2.0115 677140 32644 | 4.1934997 07029758 $\times 10^{-4}$ | 2.01156 7714032 616 |
| | 0.004 | 2.6522020 87514920 $\times 10^{-5}$ | 2.0116 063249 52173 | 4.1934997 05800186 $\times 10^{-4}$ | 2.01160 6324952 187 |
| MMOL- GA | 0.001 | 3.2371705 77220968 $\times 10^{-5}$ | 2.0151 123247 81485 | 0.0010236 83219850 | 2.01511 2324781 485 |
| | 0.002 | 4.5780505 34337557 $\times 10^{-5}$ | 2.0151 344280 99836 | 0.0010236 83219921 | 2.01513 4428099 836 |
| | 0.004 | 6.4743411 53648839 $\times 10^{-5}$ | 2.0151 786026 92990 | 0.0010236 83219725 | 2.01517 8602692 962 |

Çizelge 4.3.3. $t = 0.5$ 'te $N = 3$ iken Klein-Gordon denklemi için zamanda noktasal yakınsaklık oranı

| Yöntem | N | L_2 | L_2 Oran | L_∞ | L_∞ Oran |
|----------------|-----|---|---------------------------|---|---------------------------|
| MOL- Klasik | 3 | 9.0293759 65321441 $\times 10^{-9}$ | 3.0016 697257 80404 | 1.9849302 1847210 $\times 10^{-5}$ | 2.98622 691635 5902 |
| | 5 | 1.8274950 21374634 $\times 10^{-6}$ | 2.0094 419677 09132 | 9.0183330 1837431 $\times 10^{-5}$ | 2.01636 537154 8785 |
| | 7 | 0.0013991 83756318 | 1.9410 909410 06374 | 0.0817464 78961868 | 1.94050 035600 3177 |
| MMOL- MQ | 3 | 1.6095638 76414594 $\times 10^{-5}$ | 2.0088 750275 48855 | 5.0900763 86881082 $\times 10^{-4}$ | 2.00891 188749 0615 |
| | 5 | 1.6152300 11057723 $\times 10^{-5}$ | 2.0088 767853 10269 | 5.1098076 64958610 $\times 10^{-4}$ | 2.00897 482268 4692 |
| | 7 | 1.6306244 10889766 $\times 10^{-5}$ | 2.0088 809469 04604 | 5.2068093 28416884 $\times 10^{-4}$ | 2.00897 035943 2999 |
| MMOL- IMQ | 3 | 1.3261010 43894733 $\times 10^{-5}$ | 2.0115 484046 45722 | 4.1934997 06234283 $\times 10^{-4}$ | 2.01154 840464 5722 |
| | 5 | 1.1400348 73870831 $\times 10^{-5}$ | 2.0104 421779 07197 | 3.8586135 05388631 $\times 10^{-4}$ | 2.01546 068176 4528 |
| | 7 | 9.8083861 33794985 $\times 10^{-5}$ | 2.0065 721058 69172 | 0.0036532 08440154 | 2.01560 843840 5953 |
| MMOL- GA | 3 | 3.2371705 77220968 $\times 10^{-5}$ | 2.0151 123247 81485 | 0.0010236 83219850 | 2.01511 232478 1485 |
| | 5 | 3.5487335 26727626 $\times 10^{-5}$ | 2.0129 170361 66543 | 0.0011222 08075346 | 2.01291 703616 6599 |
| | 7 | 3.8962009 04803872 $\times 10^{-5}$ | 2.0002 679170 47110 | 0.0012490 94306655 | 2.01392 985202 6113 |

Çizelge 4.3.4. $t = 0.5$ 'te $dt = 0.001$ iken Klein-Gordon denklemi için konumda noktasal yakınsaklık oranı

Çizelge 4.3.1 ve Çizelge 4.3.2'de sırasıyla farklı t değerleri için L_∞ ve L_2 hata normları verilmiştir. Bu çizelgelerde klasik çizgiler yöntemi ile elde edilen sonuçlar doğruluk bakımından radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi ile elde edilen sonuçlardan daha iyidir.

Çizelge 4.3.3'te N değeri sabit iken $dt = 0.001, 0.002, 0.004$ değerleri için zamanda noktasal yakınsaklık oranları verilmiştir. Bu çizelgeden şu sonuç elde edilmiştir: klasik çizgiler yöntemi için dt değeri arttıkça L_2 , L_2 *Oran* artar ve L_∞ , L_∞ *Oran* azalır.

Çizelge 4.3.4'te $N = 3, 5, 7$ değerleri için konumda noktasal yakınsaklık oranları verilmiştir. Bu çizelgeden şu sonuç elde edilmiştir: klasik çizgiler yöntemi için dt değeri sabit iken N değeri arttıkça L_2 ve L_∞ artar, L_2 *Oran* ve L_∞ *Oran* azalır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, klasik çizgiler yöntemi ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi hakkında bilgiler verilerek evolution denklemlerine nasıl uygulanacağını göstermek için uygulamalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar L_2 ve L_∞ hata normları ile konumda ve zamanda noktasal yakınsaklık oranı hesaplanarak kıyaslamalar yapılmıştır. Klasik çizgiler yöntemi ve ağsız çizgiler yöntemi sonucunda oluşan adi türevli diferensiyel denklem sistemi Runge-Kutta yöntemi ile MATLAB paket programları aracılığıyla çözülmüştür.

E. Rothe tarafından 1930'da geliştirilen klasik çizgiler yöntemi (Köroğlu, 2002) ile radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi kıyaslandığında avantajlarını şöyle sıralayabiliriz:

1. Klasik çizgiler yönteminde türevlere sonlu farklar formülü kullanılarak yaklaşılmıştır. Bu sırada problem çözümü için ağ inşa edilmiştir ki bu çizgiler yönteminin en büyük dezavantajıdır. Çünkü bu süreç oldukça zaman alıcı ve zordur. Yinede klasik çizgiler yöntemi radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemine göre daha hassas sonuç vermiştir.
2. Ağsız çizgiler yönteminde ise şekil fonksiyonu olarak çoklu kuadratik fonksiyonu (MQ), ters çoklu kuadratik fonksiyonu (IMQ) ve gauss merkezli fonksiyonu (GA) kullanılmıştır. Radyal baz fonksiyonları kullanılarak ağsız çizgiler yöntemi ağ tabanı gerektirmeden çözüm üretildiği için daha kolaydır ve bu yöntem başka lineer olmayan problemlere kolaylıkla uygulanabilir. Ancak bu metotta karşımıza çıkan c şekil parametresinin belirlenmesi ve A interpolasyon matrisinin terslenmesi yöntemin dezavantajıdır.
3. Her iki yöntemde de düşük konum düğüm sayısına rağmen oldukça yüksek derecede doğruluk elde edilmektedir.

4. Yöntemler konum boyutundan bağımsızdır. Yani $(N+1)$ boyutlu kısmi türevli diferansiyel denklemlere yöntem kolaylıkla uygulanabilmektedir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada, klasik çizgiler yöntemi ve radyal baz fonksiyonları yardımıyla ağsız çizgiler yöntemi zaman bağımlı oluşum tipindeki kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanıp oldukça iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. İlerleyen çalışmalarda ise hem zaman hem de konum değişkenine bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabilirliği incelenebilir.

Ayrıca çalışmamızda uygulamış olduğumuz yöntemin adi türevli diferansiyel denklem çözme adımında dördüncü mertebeden Runge-Kutta yöntemi kullanılmıştır. Yapılacak yeni çalışmalarda bu yöntemden farklı olarak istenilen adi türevli diferansiyel denklem çözme yöntemi uygulanarak daha iyi bir sonuç elde edilip edilemeyeceği araştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Ali A., Haq F., Hussain I., 2011, A Numerical Meshless Tecnique For The Solution Of Some Burgers' Type Equations, World Applied Sciences Journal, 14(12), 1792-1798.
- Bibi N., Tirmizi S.I.A., Haq S., 2011, Meshless Method Of Lines For Numerical Solution Of Kawahara Type Equations, Applied Mathematics, 2, 608-618.
- Bibi N., 2011, Meshless Method Of Lines For Numerical Solutions Of Nonlinear Time Dependent Partial Differential Equations, PhD Thesis, Ghulam Ishaq Khan Of Engineering Sciences And Technology, Pakistan.
- Bratsos A.G., 1998, The Solution Of The Boussinesq Equation Using The Method Of Lines, Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering, 157, 33-44.
- Bratsos A.G., 2007, The Solution Of The Two-Dimensional Sine-Gordon Equation Using The Method Of Lines, Journal Of Computational And Applied Mathematics, 206, 251-277.
- Chen W., Fu Z., Chen C.S., 2014, Recent Advances In Radial Basis Function Collocation Methods, Springer, New York.
- Çağlar İ., 2012, Bazı Özel Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Gezen Dalga Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Çalışkan S., 2006, Eleman Bağımsız Galerkin Ve Yerel Petrov Galerkin Ağsız Yöntemlerinin Bir Boyutlu Mühendislik Problemlerine Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Debnath L., 2005, Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Third Edition, Birkhauser Boston.
- Demkowicz L., Oden J.T., Rachowicz W. and Hardy O., 1989, Toward A Universal h-p Adaptive Finite Element Strategy, Part 1: Constrained Approximation And Data Structure, Computers Methods in Applied Mathematics and Engineering, 77(1), 79-112.
- Dereli Y., 2012, The Meshless Kernel-Based Method Of Lines For The Numerical Solution Of The Nonlinear Schrödinger Equation, Engineering Analysis With Boundary Elements, 36, 1416-1423.
- Dereli Y., 2012, Numerical Solutions Of The MRLW Equation Using Meshless Method Of Lines, International Journal Of Nonlinear Science, 13(1), 28-38.

- Dereli Y., Schaback R., 2013, The Meshless Method Of Lines For Solving The Equal Width Equation, Applied Mathematics And Computation, 219, 5224-5232.
- Durmuş F., 2015, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü İçin Method Of Lines Yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Gingold R.A. ve Monaghan J.J., 1977, Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory And Application To Non-spherical Stars, Monthly Notices Royal Astronomical Society, 181, 375-389.
- Haq S., Bibi N., Tirmizi S.I.A., Usman M., 2010, Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation, Applied Mathematics And Computation, 217, 2404-2413.
- Haq S., Hussain A., Uddin M., 2011, RBFs Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of Time-Dependent Nonlinear Coupled Partial Differential Equations, Applied Mathematics, 2, 414-423.
- Haq S., Hussain A., Uddin M., 2012, On The Numerical Solution Of Nonlinear Burgers'-Type Equations Using Meshless Method Of Lines, Applied Mathematics And Computation, 218, 6280-6290.
- Hussain A., Haq S., Uddin M., 2013, Numerical Solution Of Klein-Gordon And Sine-Gordon Equations By Meshless Method Of Lines, Engineering Analysis With Boundary Elements, 37, 1351-1366.
- Kaya D., El-Sayed S.M., 2003, On a Generalized Fifth Order KdV Equations, Physics Letters A., 310, 44-51.
- Köroğlu C., 2002, Üstel Matris Fonksiyonları Yardımıyla Amerikan Opsiyon Probleminin Çizgiler Yöntemi İle Çözümü, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.
- Liu G.R., 2003, Meshfree Methods: Moving Beyond The Finite Element Method, CRC Press.
- Liu G.R., Gu Y.T., 2005, An Introduction To Meshfree Methods And Their Programming, Springer, Netherlands.
- Meyer G.H., 2015, The Time-Discrete Method Of Lines For Options And Bonds A PDE Approach, World Scientific Publishing, Singapore.
- Mitchell A.R., Griffiths D.F., 1980, The Finite Difference Method in Partial Equations, John Wiley & Sons.

- Mittal R.C., Jiwari R., 2012, Differential Quadrature Method for Numerical Solution of Coupled Viscous Burgers' Equations, *International Journal For Computational Methods in Engineering Science And Mechanics*, 13:2, 88-92.
- Nguyen V.P., Rabczuk T., Bordas S., Duflot M., 2008, Meshless Methods: A Review And Computer Implementation Aspects, *Mathematics And Computers In Simulation*, 79, 763-813.
- Pregla R., 2008, *Analysis of Electromagnetic Fields and Waves: The Method Of Lines*, John Wiley & Sons.
- Sadiku M.N.O, Obiozor C.N., 2000, A Simple Introduction To The Method Of Lines, *International Journal Of Electrical Engineering Education*, 37(3), 282-296.
- Schiesser W.E., 1991, *The Numerical Method of Lines: Integration Of Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- Schiesser W.E., Griffiths G.W., 2009, *A Compendium Of Partial Differential Equation Models: Method Of Lines Analysis With Matlab*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Schiesser W.E., Griffiths G.W., 2012, *Traveling Wave Analysis Of Partial Differential Equations*, Academic Press, San Diego.
- Shen Q., 2009, A Meshless Method Of Lines For The Numerical Solution Of KdV Equation Using Radial Basis Functions, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 33, 1171-1180.
- Shao W., Wu Xionghua W., 2014, The Numerical Solution Of The Nonlinear Klein-Gordon And Sine Gordon Equations Using The Chebyshev Tau Meshless Method, *Computer Physics Communications*, 185, 1399-1409.
- Zheng S., 2004, *Nonlinear Evolution Equations*, CRC Press, Florida.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Zekeriya ÖZKAN
Doğum Yeri ve Yılı : Aydıntepe, 1976
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : zekeriyaozkan@gmail.com



Eğitim Durumu

Lise : Konya İmam Hatip Lisesi, 1993
Lisans : ODTÜ, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 1998

Mesleki Deneyim

Özel Yeniçağ Dersanesi : 1998-1999
Özel Ulus Dersanesi : 1999-2000
Özel Açık Dersanesi : 2000-2002
Özel Ulus Dersanesi : 2002-2013
Şanlıurfa Süleymaniye Kız AİHL : 2013-2015
Altınkin Akıncılar AİHL : 2015-2016
Selçuklu Fen Lisesi : 2016-2017
Selçuklu Konevi AL : 2017-2017
Cumhuriyet Üniversitesi Gürün MYO : 2017-