T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİ VE ONLARIN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Firdevs YILDIZ

Danışman
Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
ISPARTA - 2018

TEZ ONAYI

Firdevs YILDIZ tarafından hazırlanan **"İkinci Mertebeden Fark Denklemleri ve Onların Çözüm Yöntemleri"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri üyeleri önünde Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	**Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU** Süleyman Demirel Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hüseyin TUNA** Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Yrd. Doç. Dr. Ramazan UYHAN** Süleyman Demirel Üniversitesi	....

Enstitü Müdürü	**Prof. Dr. Yasin TUNCER**	....

TAAHHÜTNAME

Bu tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Firdevs YILDIZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİ VE ONLARIN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Firdevs YILDIZ

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

Bu tez çalışması sekiz bölümden oluşmaktadır.

Tezimizin birinci bölümü olan giriş kısmında fark denklemlerinin tarihçesi, bu denklemlerin hangi alanlarda kullanıldığı ve bu denklemlere neden ihtiyaç duyulduğu verilmiştir. İkinci bölümde fark denklemlerinde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ve üçüncü bölümde de birinci mertebeden fark denklemleri ve çözüm metotları üzerinde durulmuştur. Dördüncü bölümde tezimizin asıl konusu olan ikinci mertebeden fark denklemleri ve çözüm metotları incelenmiş ve çeşitli örnekler verilmiştir. Beşinci bölümde de k.mertebeden fark denklemleri verilmiştir. Altıncı bölümde lineer olmayan skaler fark denklemlerinden bahsedilmiş, hangi metotlar kullanılarak lineerleştirilebileceğinden bahsedilmiştir. Yedinci bölümde ise fark denklemlerinde kararlılık konusundan bahsedilmiştir. Tezin son bölümünde bu çalışmalara dair sonuçlara ve önerilere ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklemleri, Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, k. Mertebeden Lineer Fark Denklemleri, Lineer Olmayan Fark Denklemi, Riccati Fark Denklemi, Kararlılık.

2018, 69 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SECOND ORDER DIFFERENCE EQUATIONS AND SOLUTIONS METHODS OF THEM

Firdevs YILDIZ

Süleyman Demirel University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU

This thesis consists of eight parts.

In the introduction which is the first part of our thesis; the history of difference equations, in which areas these equations are used and why these equations are required were given. In the second part, the basic description and theorems which are to be used in difference equations and also in the third part, it is emphasized on the first order linear difference equations and methods of solution. In the fourth part, second order linear difference equations and methods of solutions which are the main concern of our thesis were examined and various examples were given. In the fifth part, k^{th} order difference equations were given. In the sixth part, nonlinear difference equations and which methods are used to to linearization were mentioned. As for the seventh part, difference equations stability subject was mentioned. In the last part of the thesis, the results and the suggestions about these studies were examined.

Keywords: Difference Equations, First Order Linear Difference Equations, Second Order Linear Difference Equations, k^{th} Order Linear Difference Equations, Nonlinear Difference Equations, Riccati Difference Equations, Stability.

2018, 69 pages

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Bilender PAŞAOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezimin her aşamasında beni yalnız bırakmayan ve destek veren sevgili eşim Tuncay YILDIZ'a ve canım aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Firdevs YILDIZ
ISPARTA, 2018

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

E Kaydırma (genişletme operatörü)

$Ey(x)$ $Ey(x)=y(x+h)$

N Doğal sayılar kümesi

$x^{(n)}$ $x^{(n)}=x(x-h)(x-2h)...[x-(n-1)h]$, $(x\in\mathbb{R}, n=1,2,3,...)$ şeklinde tanımlanan faktöriyel polinom

$\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar kümesi

$\mathbb{R}$ Reel sayılar kümesi

$W(n)$ $W(n)=\det\begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \cdots & f_m(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \cdots & f_m(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n+r-1) & f_2(n+r-1) & \cdots & f_m(n+r-1) \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanır ve verilen fonksiyonların *Casoratyan'ı* denir.

$\mathbb{Z}$ Tam sayılar kümesi

Δ $\Delta y(x)=y(x+h)-y(x)$ şeklinde tanımlanan ileri fark operatörü

Δ^m $\Delta^m y(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}y(x+(m-k)h)$, $(m\in\mathbb{Z}^+)$

Δ^{-1} Ters fark operatörü

∇ Geri fark operatörü

Γ Gamma fonksiyonu

$\sum$ Toplam sembolü

$\prod$ Çarpım sembolü

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Fark denklemi; ayrık zaman aralıklarında değişen doğa olaylarını matematiksel olarak formüle eden bir denklemdir. Uygulamalı matematiğin bir dalı olan fark denklemleri son kırk yıldır uygulamalı matematikçilerin ve bilimcilerin çok ilgi gören bir alanı olmuştur. Bu denklemler; genetik, kuantum, fizik, kimya, mühendislik, ekonomi, olasılık teorisi, tıp, sosyal bilimler ve teknik bilimler gibi birçok bilim alanında kullanılmaktadır.

Diferansiyel denklemler "doğada kopukluklar yoktur" varsayımına dayanıyordu; fakat 20. yy başlarında radyasyondaki quantum ile genetik olaylardaki gelişmeler tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri fark denklemleri kullanılarak ortadan kaldırılması amaçlanmaktadır (Çatal, 2004).

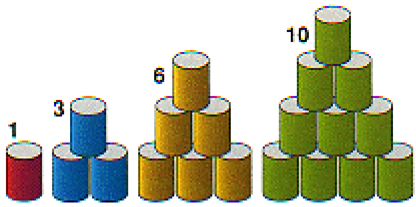
Diferansiyel denklemler, temelde fark denklemlerinden geliştirilerek bugünkü duruma getirilmiştir. Fark denklemleri ve diferansiyel denklemler arasında büyük benzerlikler olmakla birlikte bazı farklar da bulunmaktadır. Diferansiyel denklemler süreklilik içeren doğa olaylarındaki değişmeleri matematiksel olarak ifade etmekte kullanılırken; fark denklemleri ayrık (discrete) zaman aralıklarında değişen doğa olaylarını matematiksel olarak ifade eder (Bolat, 2003).

Fark denklemlerinin ilk ortaya çıkışı kesin olarak bilinmemekle birlikte en basit haliyle ilk defa MÖ 2000 yıllarında Babillerde bir denklemin kökünü bulmada kullanıldığı görülmüştür (Kelly, 2001).

M.Ö. 600-0 yıllarında fark denklemleri ile özyinelemeli tekrar işlemlerini ve özelliklerini ilk inceleyen matematikçiler Pisagor, Öklid ve Arşimet'i görmekteyiz.

Pisagor'un "üçgensel sayılar (triangular numbers)" fikri fark denklemlerinin temellerinin atılması için büyük katkı sağlamıştır.

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ &= t_{n-2} + (n-1) + n \\ &= t_1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n \end{aligned}$$



Şekil 1.1.1. Üçgensel Sayılar

M.S. 0-400 yılları arasında Heron, Theon, Diophantus yaptıkları çalışmalarla fark denklemlerine katkılar yapmıştır. Heron formülü olarak da bilinen pozitif a sayısının kökünün yaklaşık değerlerini bulan denklem

$$x_{n+1} = \frac{\left(x_n + {}^{a}\!/_{x_n} \right)}{2}$$ dir.

Bu denklem

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.1.1}$$

Newton formülünün özel halidir.

400-1200 yılları Avrupa'da başarılı çalışmalar yapılmadığı için bu yıllar matematik tarihinde karanlık dönem olarak isimlendirilebilir. Bu dönemdeki başarılar çoğunlukla Ortadoğu'dan gelmiştir. Bu dönemde çalışmaları Brahmagupta, Ömer Hayyam, Al-Karaji, Bhaskara, Al-Samawal yapmıştır. Hintli matematikçi Brahmagupta ikinci dereceden bir denklemi çözmek için kurallar geliştirmiş ve bu yöntemleri uygularken ardışık tekrar işlemini kullanmıştır (Kulenovic ve diğerleri,2000).

1200-1600 yılları arasında fark denklemleri ile ardışık tekrar işlemlerine önemli katkı sağlayanlar Fibonacci, Al-Banna, Al-Farisi, Nasir Al-Tusi ve Shih-Chieh'dir.

İtalyan matematikçi ismi daha çok Fibonacci olarak bilinen Leonardo di Pisa, 1202'de Liber Abacide yazılan abaküs hakkındaki bir kitabında, "tavşan problemi" olarak da bahsedilen bu problemi bazı kaynaklarda fark denklemlerinin başlangıcı olarak da kabul edilir. Bu problem şu şekildedir:

Bir çiftlikteki her yeni çift tavşan iki aylık olduklarında her ay bir çift tavşan (bir dişi, bir erkek) yavrulayabilmektedir. Buna göre bu çiftlikte bir çift tavşanla başlanırsa bir yıl sonra kaç çift tavşan elde edilebilir? Sorusunun cevabı aranmaktadır (Tavşanların ölmediği ve dişi tavşanların her zaman üreyebildiği kabul edilir).

Çizelge 1.1.1. Fibonacci Dizisi

aylar	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
çift sayısı	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

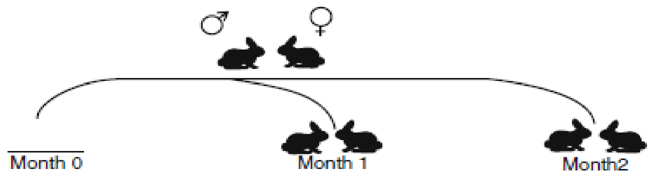
Bu örneğin matematik modeli

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_{n}, \;\; F_0 = 1, \quad F_1 = 2, \quad 0 \le n \le 10 \tag{1.1.2}$$

şeklindedir. Bu denklem ilerde bahsedilecek olan ikinci mertebeden bir fark denklemidir ve bu şekilde iki nokta sınır değer problemidir. (1.1.2) denklemi,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_{n}, \;\; F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad 0 \le n \tag{1.1.3}$$

olarak verilen *Fibonacci dizisi nin* özel halidir.



Şekil 1.1.2. (Elaydi, 2000) Fibonacci Dizisi

(1.1.2) fark denklemi sabit katsayılı lineer homojen fark denklemidir ve çözümünün karakteristik eşitliği

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

Ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup, denklemin genel çözümü

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ (c_1, c_2 \text{ keyfi sabitler; } 1 \le n \text{ olmak üzere}),$$

şeklindedir. $F_0 = 0, F_1 = 1$ sınır koşullarına göre; c_1, c_2 keyfi sabitleri

$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ olarak bulunur. Buna göre,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^n - \lambda_2^n\right)$$

dizisi elde edilir. Bu dizinin $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \approx 1.618$ değerini verir. Yaklaşık olarak bulunan bu değer *altın oran(golden mean)* olarak bilinen sayıdır (Elaydi, 2000).

1600-1700 yıllarında Bernoulli, Moivre, Pascal ve Newton fark denklemleri üzerinde çalışmalar yaparak bu konuya önemli katkılar sağlamıştır. Bu dönemde yapılan çalışmalardan biri Newton, günümüzde "Newton Metodu" olarak bilinen kök bulma formülü (1.1.1) fark denklemiye ifade etmiştir (Kulenovic ve diğ., 2000).

1700-1750 bu dönemde fark denklemlerine ve ardışık tekrar işlemlerine katkı sağlayan matematikçiler Riccati, Simson ve Cotes'i görmekteyiz. Riccati bu dönemde analiz ve özellikle diferansiyel denklemler üzerinde önemli çalışmalar yapmıştır ve kendi ismiyle anılan

$$y_{n+1} = \frac{a + by_n}{c + dy_n}$$

denklem *" Riccati Fark Denklemi"* olarak bilinmektedir.

1751-1800 yıllarında Euler, Johan Bernoulli III, Gaspard Monge ve Laplace 'ın çalışmaları bulunmaktadır. Euler 1755'te yayınladığı "Instıtutiones calculi differentials”, sonlu farkların hesaplama çalışmasının başlangıcıdır. Çalışma, türevlemenin yerine koyma metodu altında nasıl davrandığının araştırmasını yapar. Euler ayrıca farklar için “deltayı” kullanmıştır. Bu da $\Delta y + p(n)y(n) = 0$ gibi denklemlerin sunumunu basitleştirmiş veya kısaca $\Delta y = y(n+1) - y(n)$ göstermiştir. 1794’te Laplace ve Lagrange parametrelerin salınım metodunu kullanarak homojen olmayan lineer fark denklemlerinin değişken katsayılarla özel çözümlerinin bulunmasını sağlamışlardır. 1771’de Monge “Academie” adlı yayında diferansiyel ve sonlu fark denklemlerinin geometrik bakış açısı üzerinde çalışmalar göndermiştir.

1801-1825 yıllarında Babbage, Bessel, Farey, Gauss, Gomperz ve Legendre’nin çalışmaları bulunmaktadır.

1826-1850 yıllarında bu konuyla ilgili yoğun çalışmalar yapılmıştır. Cauchy, Airy, Verhulst, Sturm, Verhulst, Jacobi, Liouville, Dirichlet’in önemli katkıları olmuştur. Symplectic fark sistemleri fark denklemleri ve sistemlerinin Sturm-Liouville fark denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$\Delta\left(r_k \Delta x_k\right) = p_k x_{k+1} = 0, \quad \Delta x_k := x_{k+1} - x_k$$

1851-1875 yıllarında Heine, Casorati, Riemann,’ın çalışmaları bulunmaktadır.

1876-1900 yılları arasında Hermite, Christoffel, Routh, Laguerre, Lucas, Gegenbauer, Poincare, Markov, Chebychev ve Peano çalışmalarıyla bu konuya katkı sağlamışlardır.

1901-1925 yıllarında ardışık denklemler sayesinde düzlem doldurma eğrileri veya fraktallarla başlayan bazı matematiksel mucizeler oluşmaya başlamıştır. Düzlem doldurma eğrileri hiçbir boşluk bırakmadan düzlem dolduran eğrilerdir, bu gibi eğriler Peano tarafından 1890 yılında keşfedilmiştir. Çalışmalarında fark denklemlerini düzlem doldurma eğrileri ile kullanan diğer matematikçiler Hilbert ve Van Koch’dur. Fraktallların ve düzlem doldurma eğrilerinin fark denklemlerinde birçok uygulama alanı vardır. Başka bir uygulama alanı da diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleridir. Bu çözüm yöntemlerinden en önemlilerinden birisi de Martin Kutta'nın çalışmalarına dayanan Runge-Kutta Metodudur. Böylece fark denklemlerinden faydalanılarak diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri uygulanabilir olmuştur.

1926-1950 yıllarında Julia ve Fatou temel yinelemeli süreç üzerinde çalışmalar yaparak fark denklemleri ve ardışık yöntemleri kompleks tanım kümesindeki rasyonel fark denklemleri üzerinde çalışmalar yapmıştır. Ayrıca bu dönemde Rus matematikçi Aleksandr Gelfond Fark Denklemleri ve devamlı kesirleri içeren Sonlu Fark Denklemleri isimli önemli ders kitaplarını yazmıştır (Kulenovic ve diğ.,2000).

1950'lerden sonra fark denklemlerinin çözümleri ve özellikle salınımlılığı üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; Ladas (1990) lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri ve $k \in \mathbb{R}$ ve $s \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;

$$y_{n+1} - y_n + k y_{n-s} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

lineer otonom fark denklemlerinin tüm çözümlerinin salınımlılığı üzerinde çalışmalar yapmıştır.

Erbe ve Zhang (1989) $0 \le k_n$ bir reel terimli dizi, $s \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$y_{n+1} - y_n + k_n y_{n-s} = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.1.4}$$

lineer otonom olmayan gecikmeli fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığını incelemişlerdir. Ayrıca Ladas, Philos ve Sficas'ın da aynı denklem üzerinde benzer çalışmaları vardır.

Yu, Zhang ve Qian (1993), Yu ve Tang (2000) (1.1.4) fark denkleminin k_n nin salınımlı bir dizi olması durumunda bu denklemin bütün çözümlerinin salınımlılık durumlarını incelemiştir.

Fark denklemleri üzerinde çalışmalar yaparak bu konunun gelişmesinde katkı sağlayan diğer matematikçiler Amleh ve diğ. (1999), Komsala ve diğ. (2000), Agarwal ve Grace (2000) Aboutaleb ve diğ. (2001), Al-Saris ve DeVault (2003), El-Owaidy ve diğ. (2003), Fan ve diğ. (2004), El-Owaidy ve diğ. (2004), He ve diğ. (2004) dir.

1.2. Kaynak Özetleri

Agarwal, R.P., 2000. Difference Equations and Inequalities, Chapter 1, Marcel Dekker, New York, USA. Fark denklemlerinin demirbaş kitabı sayılacak bir kitap olan "Difference Equations and Inequalities" birinci mertebeden, ikinci mertebeden, k. mertebeden sabit, değişken katsayılı; homojen, homojen olmayan fark denklemleri detaylı bir şekilde kitapta incelenmiştir.

Bereketoğlu H., Kutay V., 2011. Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara. Bu kitapta skaler, lineer, lineer olmayan fark denklemleri, fark denklem sistemleri, kararlılık teorisi, lineerleştirme yöntemleri verilmiştir. Özellikle S. Elaydi, S. Goldberg, R. Agarwal, Levy ve Lessmann ve diğer matematikçilerin kitapları Türkçe'ye çevrilerek çok faydalı bir eser ortaya çıkmıştır.

Bolat, Y., 2003. Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Salınımlılığı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara. Yaşar Bolat k. mertebeden neutral fark denklemlerini detaylı bir şekilde incelemiş ve k. mertebeden fark denklemlerinin salınımlılığını ele almıştır.

Elaydi, S., (2000), An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York. Fark denklemlerinin demirbaş kitabı sayılacak bir kitap olan "An Introduction to Difference Equations" birinci mertebeden, ikinci mertebeden, k. mertebeden lineer, lineer olmayan fark denklemlerinden, bu denklemlerin çözümlerinin limit alma davranışlarından bahsedilmiştir. Kararalılık teorisi, Z dönüşüm metotları kitapta verilen diğer önemli konu başlıklarıdır. Tezimizde verilen birinci mertebeden fark denklemlerinin kararlılığı konusu bu kaynaktan faydalanılmış ve bu konu detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Goldberg S., 1958. "Introduction to Difference Equations", Chapter 1, Chapter 3, Yohn Wiley and Sons, New York, USA. Fark denklemlerinin demirbaş kitabı sayılacak bir kitap olan "Introduction to Difference Equations" birinci mertebeden, ikinci mertebeden, k. mertebeden lineer, lineer olmayan fark denklemlerinden bahsedilmiş, lineer olmayan fark denklemlerinin lineerleştirme yöntemleri detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Kır, İ.,2007. "Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine", Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. İbrahim Kır'ın tezi Yaşar Bolat'ın tezinin devamı şeklinde hazırlanmış, k. mertebeden fark denklemlerinin çözümleri incelenmiştir.

Kulenovic, M. R. S., Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, http://fibonacci.math.uri.edu/~kulenm/diffeqaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm. İnternet sitesinde fark denklemlerinin M.o. 600-M.N 1950 yılları arasındaki tarihçesinden bahsetmiştir.

Levy H., Lessman F., 1961. Finite Difference Equations, The Macmillan Company, New York. Birinci ve ikinci mertebeden fark denklemlerinin sabit ve değişken katsayılı olma durumları detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Soykan Y., Gümüş M., Göcen M, 2017. Lineer Fark Denklemleri, Nobel Kitapevi, 232s, Ankara. Lineer fark denklemleri detaylı bir şekilde incelenmiş, çeşitli ve farklı örneklerle konunun daha anlaşılır olmasını sağlamıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Bazı Operatörler Ve Özellikleri

Bu bölümde fark denklemlerini anlamamıza ve onların çözümlerini bulmamızda bize yardımcı olacak operatörler ve özellikleri verilmiştir.

2.1.1. Tanım (Δ operatörü): y bir fonksiyon ve h herhangi bir sabit olsun. Δy, x değerinde $\Delta y(x)$ (ya da Δy_x) ile gösterilen ve

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x) \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanan Δ operatörüne ileri fark operatörü ve h sayısına da fark aralığı denir.

Eğer $\Delta y(x) = \Delta x$ olarak alınırsa,

$$\Delta y(x) = \Delta x = x + h - x = h$$

olarak bulunur ve $\Delta x = h$ olarak yazılabilir. Bu durumda fark aralığını Δx olarak da yazabiliriz (Goldberg, 1958).

2.1.2. Tanım: y bir fonksiyon ve bu fonksiyonun da birinci farkı Δy olsun. y nin ikinci farkını,

$$\Delta(\Delta y) = \Delta^2 y$$

biçiminde yani y nin birinci ileri farkının ileri farkı şeklinde yazılabilir ve Δ^2 ile gösterilir. $\Delta^2 y$ fonksiyonunun x deki değerini $\Delta^2 y(x)$ ile gösterilir ve

$$\Delta^2 y(x) = \Delta y(x+h) - \Delta y(x)$$

biçiminde yazılır.

Benzer biçimde y nin üçüncü ileri farkını $\Delta^3 y$ ile gösterilir.

$$\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y)$$
$$\Delta^4 y = \Delta(\Delta^3 y)$$
$$\cdots$$
$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), n = 2, 3, 4, \ldots$$

Yukarıdaki gibi genellediğimizde y nin n. farkını $\Delta^n y$ ile gösterilir ve y nin $(n+1)$. farkının ileri farkını yukarıdaki gibi yazılır.

Sonuç olarak $y(x)$ fonksiyonunun m. dereceden farkı $(a-b)^m$ nin Binom Açılımına benzer şekilde

$$\Delta^m y(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} y(x+(m-k)h)\,,\ (m \in \mathbb{Z}^+)$$

formülüyle bulunur.

$n=2$ için $\Delta^2 y = \Delta(\Delta^1 y)$ şeklinde özdeşleştirilebilir. $\Delta^1 y$ yerine Δy yazılabilir. $n=1$ için $\Delta y = \Delta(\Delta^0 y)$ şeklinde yazılır ve $\Delta^0 y = y$ eşitliği kabul edilir. Bu operatöre birim (özdeşlik) operatörü denir (Goldberg, 1958).

2.1.3. Tanım (I **operatörü):** I ile gösterilen birim (özdeşlik) operatörü herhangi bir y fonksiyonuna uygulanırsa y ile özdeş yeni bir I_y birim operatörü üretir. y fonksiyonunun tanım kümesindeki bir x için,

$$I_y(x) = y(x)$$

elde edilir. Δ^0 sembolünün birim operatörü, $\Delta^0 y = Iy$ dir. Böylece $n=1$ için $I_y(x) = y(x)$ eşitliği doğru olur (Goldberg, 1958).

2.1.4. Teorem (Δ operatörünün özellikleri**):**

Δ nın özellikleri Δy nin değerlerini hesaplamak için önemlidir.

y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

1) $\Delta^0 = I$

2) Dağılma özelliği:

$$\Delta\left[y_1(x) + y_2(x)\right] = \Delta y_1(x) + \Delta y_2(x)$$

3) Bir sabitle bir fonksiyonunun çarpımının farkı:

$$\Delta\left[cy(x)\right] = c\Delta y(x)$$

4) Bir sabitle bir fonksiyonun çarpımlarının toplamlarının farkı:

$$\Delta\left[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right] = c_1 \Delta y_1(x) + c_2 \Delta y_2(x)$$

5) $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n; n$ tane fonksiyon ve $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n; n$ tane keyfi sabit olsun. Buna göre

$$\Delta\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+...+c_ny_n(x)\right]=c_1\Delta y_1(x)+c_2\Delta y_2(x)+...+c_n\Delta y_n(x)$$

eşitliği yazılabilir.

6) $y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ bir fonksiyon, $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ keyfi sabitler ve $a_n\neq 0$ olsun. O zaman y nin $n.$ ileri farkı bir sabit fonksiyondur ve $\Delta^n y=n!h^na_n$ eşitliği yazılır. Eğer $p>n$ ise $\Delta^p y(x)=0$ olur.

7) İki fonksiyonun çarpımının farkı:

$$\Delta\left[y_1(x)y_2(x)\right]=y_2(x)\Delta y_1(x)+y_1(x+1)\Delta y_2(x)$$

8) İki fonksiyonunun bölümünün farkı:

$$\Delta\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]=\frac{y_2(x)\Delta y_1(x)-y_1(x)\Delta y_2(x)}{y_2(x)y_2(x+1)}$$

9) Fark operatörü iki ya da daha çok değişkenli fonksiyonlara uygulanırsa, Δ operatörünün sağ alt köşesine belirtilen indis yardımıyla hangi değişkenin farkının alındığını gösterir.

$$\Delta_n(nx^m)=(n+1)x^m-nx^m=x^m$$
$$\Delta_m(nx^m)=nx^{m+1}-nx^m=(x-1)nx^m$$

10) m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere,

$\Delta^m(\Delta^n y(x))=\Delta^n(\Delta^m y(x))=\Delta^{m+n}y(x)$ dir.

2.1.5. Tanım: a bir sabit ve $h=1$ olmak üzere bazı temel fonksiyonlar aşağıdaki şekilde ifade edilir:

a) $\Delta a^x=(a-1)a^x$

b) $\Delta\sin ax=2\sin\frac{a}{2}\cos a\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c) $\Delta\cos ax=-2\sin\frac{a}{2}\sin a\left(x+\frac{1}{2}\right)$

d) $\Delta\log ax=\log(1+\frac{1}{x})$

2.1.6. Tanım (E **operatörü)**: y bir fonksiyon ve h herhangi bir sabit olsun. Ey, x değerinde $Ey(x)$ (ya da Ey_x) ile gösterilen ve

$Ey(x)=y(x+h)$

şeklinde eşitliği verilen E operatörüne genişletme (kaydırma) operatörü denir.

E operatörünün özelliklerinden $E^0 y(x) = Iy(x) = y(x)$ şeklinde tanımlanır.

$x+h$ sayısı y nin tanım kümesinde ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere, E operatörünü genellersek

$E^0 y(x) = y(x)$

$E^1 y(x) = \mathrm{E}\left[E^0 y(x)\right] = \mathrm{E}\left[y(x)\right] = y(x+h)$

$E^2 y(x) = E\left[Ey(x)\right] = E\left[y(x+h)\right] = y(x+2h)$

$E^3 y(x) = E\left[E^2 y(x)\right] = E\left[y(x+2h)\right] = y(x+3h)$

...

$E^m y(x) = E\left[E^{m-1} y(x)\right] = y(x+mh)$

yukarıdaki denklem yazılır. E^m, m. mertebeden E operatörünü tanımlar(Goldberg, 1958).

2.1.7. Teorem (E operatörünün özellikleri**):**

E nın özellikleri Ey nin değerlerini hesaplamak için önemlidir.

y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

1) $E^0 = I$

2) $E^0 y(x) = Iy(x) = y(x)$

3) $E\left[y_1(x) + y_2(x)\right] = Ey_1(x) + Ey_2(x)$

4) $E\left[cy(x)\right] = cEy(x)$

5) $E^m(E^n y(x)) = E^n(E^m y(x)) = E^{m+n} y(x)$

2.1.8. Teorem (Δ ve E operatörleri arasındaki ilişki**):** Δ ve E operatörlerinin özelliklerinden faydalanarak

$$\begin{aligned}\Delta y(x) &= y(x+h) + y(x)\\ &= Ey(x) - y(x)\\ &= (E-1)y(x) \Rightarrow \Delta = E - 1\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Elaydi, 2000).

Özellikler:

1) $\Delta = E - 1$ ve benzer bir şekilde $E = \Delta + 1$ yazılabilir.

2) $\Delta\left[y_1(x).y_2(x)\right] = Ey_1(x).\Delta y_2(x) + y_2(x).\Delta y_1(x)$

3) $\Delta^2 = E^2 - 2E + I$ ve $\Delta^3 = E^3 - 3E^2 + 3E - I$

4) $\Delta E \equiv E\Delta$

5) $\Delta^m \equiv (E - I)^m$

6) $\Delta = E - 1$'den yararlanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\Delta^m y(x) = (E - I)^m y(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} E^{m-k} y(x)$$

7) $E = \Delta + 1$ 'den yararlanarak aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$E^m y(x) = (\Delta + I)^m y(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^{m-k} y(x)$$

(Goldberg, 1958).

2.1.9. Teorem (Alt indis notasyonu**):** Alt indis notasyonunun hem kullanımının işlemlerde kolaylık sağladığı hem de kolay yazılışı olduğu için sıkça tercih edilir (Levy ve Lessman, 1961).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $y = f(x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda, $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ ve h adım genişliği olmak üzere,

$x = m + nk \quad \Rightarrow \quad f(m + nk)$ notasyonu yerine f_k notasyonu kullanılabilir.

2.1.10. Teorem (∇ operatörü**):** Geri fark operatörü ∇;

$\nabla y(x) = y(x) - y(x - h)$ şeklinde tanımlanır ve,

$\nabla y(x) = \Delta E^{-1}\left[y(x)\right] = (1 - E^{-1})y(x)$ olarak yazılabilir.

2.1.11 Teorem (Δ^{-1} operatörü**):** $n \geq n_0$ için $\Delta Y(n) = y(n)$ eşitliği verilsin. Bu durumda $n \geq n_0$ ve c keyfi sabit olmak üzere,

$$\Delta^{-1} y(n) = Y(n) + c$$

şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne *ters fark operatörü* (*antidifference operator*) denir, ayrıca $Y(n)$ fonksiyonuna $y(n)$ fonksiyonunun birinci mertebeden ters farkı denir.

$y(n)$ fonksiyonunun $n \geq n_0$ için ters farkı belirli toplam olarak da ifade edilebilir ve

$\Delta^{-1} y(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c$ şeklinde yazılır.

2.1.12. Uyarı: Δ^{-1} ve Δ operatörleri arasında

$\Delta\Delta^{-1} = I$ olmasına rağmen $\Delta^{-1}\Delta \neq I$ dir.

Gerçekten;

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta^{-1} y(x) = y(x) \\ &\Delta^{-1}\Delta Y(x) = Y(x) + c \end{aligned}$$ (c keyfi sabit) eşitliği elde edilir.

2.1.13. Teorem (Δ^{-1} **operatörünün özellikleri):** Δ^{-1} ters fark operatörü ve c, c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

a) $\quad \Delta^{-1} y(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} y(i) + c$

b) $\quad \Delta^{-2} y(n) = \sum_{m=n_0}^{n-1} \sum_{i=n_0}^{m-1} y(i) + c_1 n + c_2$

c) $\quad \Delta^{-1}(y(n)k(n)) = y(n-1)\Delta^{-1}k(n) - \Delta^{-1}(\Delta y(n-1)\Delta^{-1}k(n))$

d) $\quad \Delta^{-1}\left[ay(n) + bk(n)\right] = a\Delta^{-1}y(n) + b\Delta^{-1}k(n)$, $(a, b \in \mathbb{R})$

e) $\quad \Delta^{-m} 0 = c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \ldots + c_m$

f) $\quad \Delta^{-m} 1 = \dfrac{n^m}{m!} + c_1 n^{m-1} + c_2 n^{m-2} + \ldots + c_m$

g) $\quad \Delta^{-1} y^{(k)} = \dfrac{y^{(k+1)}}{k+1} + c, \quad k \neq -1$

şeklinde yazılır.

2.1.14. Örnek: $y(n)=\frac{n}{6}$ olmak üzere, $\Delta^{-1}y(n)$ nin değerini bulalım.

$$\Delta^{-1}y(n)=\sum_{i=0}^{n-1}y(i)+c$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{6}+c$$
$$=\frac{1}{12}(n-1)n+c$$

sonucuna ulaşılır.

2.1.15. Örnek: Bazı fonksiyonların birinci basamaktan ters farkları aşağıdaki gibidir:

$$y(n)=0\Rightarrow\Delta^{-1}0=c,(c\in\mathbb{R})$$
$$y(n)=1\Rightarrow\Delta^{-1}1=n+c,(c\in\mathbb{R})$$
$$y(n)=\sin an\Rightarrow\Delta^{-1}\sin an=\frac{-\cos a(n-\frac{1}{2})}{2\sin\frac{a}{2}},(n\in\mathrm{N},a\neq 2k\pi)$$
$$y(n)=n^{a}\Rightarrow\Delta^{-1}n^{a}=\frac{n^{a+1}}{a+1}+c,(a\neq-1)$$

2.1.16. Tanım (Faktöriyel polinom**):** Fark denklemlerinin hesaplanmasında en önemli fonksiyonlardan biri de faktöriyel polinomlardır. *n.* dereceden bir *faktöriyel polinom (factorial polynomials)*

$x^{(n)}=x(x-h)(x-2h)\ldots\left[x-(n-1)h\right]$ **,** $(x\in\mathbb{R},n=1,2,3,\ldots)$

şeklinde verilen fonksiyona denir (Goldberg, 1958 ve Elaydi, 2005). Ayrıca;

$n=0$ ise; $x^{(0)}=1$

$n\in\mathbb{Z}^{+}$ ise; $x^{(-n)}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x-n+1)}$

$n\notin\mathbb{Z}$ ise; $x^{(n)}=\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}$, ($\Gamma$ gamma fonksiyonudur) (Elaydi, 2000).

2.1.17. Lemma: $x\in\mathbb{R},n\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $n\leq x$ olmak üzere,

i. $\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$

ii. $\Delta^{k}x^{(n)}=n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{(n-k)}$

iii. $\Delta^n x^{(n)} = n!$

Yukarıdaki ifadeler geçerlidir (Elaydi, 2000).

İspat (i): $\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)}$

$$= (x+1)x(x-1)\ldots(x-n+2) - x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1)$$

$$= x(x-1)\ldots(x-n+2)n$$

$$= nx^{(n-1)} \quad \square.$$

2.1.18. Teorem (Fark operatörü ve diferansiyel operatörü arasındaki ilişki**):** Fark analizi ile diferansiyel analiz arasında bazı benzerlikler ve farklar vardır. Bunlar;

Çizelge 2.1.1. Fark operatörü ve diferansiyel operatörü arasındaki ilişki

Fark Analizi	Diferansiyel Analiz
$\Delta y(n) = y(n+\varepsilon) - y(n)$	$Dy(t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\Delta y(t)}{\varepsilon}$
$\Delta cy(n) = c\Delta y(n)$	$Dcy(t) = cDy(t)$
$\Delta(yk) = k\Delta y + (Ey)\Delta k$	$D(yk) = kDy + yDk$
$\Delta \dfrac{y}{k} = \dfrac{k\Delta y - y\Delta k}{kEk}$	$D\dfrac{y}{k} = \dfrac{kDy - yDk}{k^2}$

2.1.19. Tanım: Fark denklemler teorisi (ayrık teori) ve diferansiyel denklemler teorisi birçok benzer özelliğe sahiptir. Fark ve diferansiyel denklemleri arasındaki ilişki aşağıdaki çizelgede verilecektir.

Çizelge 2.1.2. Fark denklemler teorisi ile diferansiyel teorisi arasındaki ilişki

Fark Denklemler Teorisi	Diferansiyel Denklemler Teorisi
$x(n)$	$y = f(x)$
$x(n+k)$, $k \in \mathbb{N}_0$	$d^k y / dx^k$, $k \in \mathbb{N}_0$
n	x
5^n	5^x
$x(n+2) - 3nx(n+1) - (n-1)x(n) = n + 6^n - \sin(4n)$	$d^2y/dx^2 - 3x\, dy/dx - (x+1)y = x + 6^x - \sin(4x)$

2.1.20. Tanım (Belirli Toplam Formülleri**):** Aşağıda formülleri ilerleyen konularda yararlanılacaktır.

a) $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

d) $$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} a = 1 \text{ ise;} & n \\ a \neq 1 \text{ ise;} & a^n - 1 \big/ (a-1) \end{cases}$$

e) $$\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \begin{cases} a = 1 \ \ ise; & n-1 \\ a \neq 1 \ \ ise; & a^n - a \big/ a-1 \end{cases}$$

f) $$\sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2}, a \neq 1$$

(Elaydi, 2000).

2.2. Fark Denklemleri

2.2.1. Tanım (Fark Denklemi**):** Bir G kümesi üzerinde tanımlı y fonksiyonunun değeri ve bu y fonksiyonunun her x değeri için bir ya da daha yüksek mertebeden farkları terimlerini içeren $(\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots)$ bağıntıya, G kümesi üzerinde fark denklemi denir (Goldberg, 1958).

2.2.2. Tanım (Mertebe**):** Bir fark denklemindeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki farkına o denklemin *mertebesi* denir (Agarwal, 2000).
Örneğin;
$5x_{n+1} - 4x_n - x_{n-2} = 0$ denklemi üçüncü mertebeden,
$x_{n+3} + 4x_{n+2} - 3x_{n+1} = 0$ denklemi ikinci mertebeden bir fark denklemidir.

2.2.3. Tanım: x sürekli bir değişken olmak üzere m. mertebeden bir fark denklemi genel olarak;

$$G(x, y(x), y(x+h), y(x+2h), ..., y(x+mh)) = 0 \quad (2.2.1)$$

biçiminde tanımlanır (Elaydi, 2000). $h=1$ için;

$$G(x, y(x), y(x+1), y(x+2), ..., y(x+m)) = 0 \quad (2.2.2)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *fonksiyonel fark denklemi* denir ve bu denklem;

$$G(x, y(x), \Delta y(x), \Delta^2 y(x), ..., \Delta^m y(x)) = 0 \quad (2.2.3)$$

şeklinde de ifade edilebilir. $h=1$ ve $n \in \mathrm{N}$ olmak üzere y_n ayrık noktaları üzerinde tanımlı fark denklemi ise

$$Y(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, ..., y_{n+m}) = 0 \quad (2.2.4)$$

olarak tanımlanan denkleme de *skaler fark denklemi* denir (Elaydi,2000).

2.2.4. Tanım (Lineer fark denklemi**):** Bir fark denklemi bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin var olan ileri farkına göre birinci mertebeden ise bu denkleme *lineer fark denklemi* denir. Aksi durumda *lineer olmayan fark denklemi*dir.

Genel olarak n. mertebeden lineer fark denklemi;

$p_0(n), p_1(n), ..., p_k(n)$ katsayıları ile $p_i(n)$ ve $g(n)$, $n_0 \le n$ için tanımlı reel değerli fonksiyon olsun. $p_k(n) \ne 0$ olmak üzere;

$$p_0(n)y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + ... + p_k(n)y(n) = g(n) \quad (2.2.5)$$

veya

$$p_0(n)y_{n+k} + p_1(n)y_{n+k-1} + ... + p_k(n)y_n = g(n) \quad (2.2.6)$$

fark denklemine k. *mertebeden lineer fark denklemi* denir (Elaydi, 2000).

2.2.5. Örnek: $y(n+2) + 2y(n+1) - 5y(n) + y(n-1) = n + \cos n$ denklemi 3. mertebeden lineer bir fark denklemidir.

$y(n+3) = \dfrac{n+4}{3n-51} y(n+1)$ denklemi ikinci mertebeden lineer bir denklemdir.

$y^3(n+6)y(n+2) = \sin(3n-1)$ denklemi dördüncü mertebeden olup lineer olmayan bir fark denklemidir, çünkü bağımlı değişken $y(n)$ birinci mertebeden değildir.

2.2.6. Uyarı: Bir operatörün lineerliği ile fark denklemlerin lineerliği farklı durumlardır. Örneğin bir operatör (fonksiyon) olarak $y(n)=2^n$ lineer olmamasına rağmen bunu bir çözüm olarak kabul eden $y(n+1)-2y(n)=0$ fark denklemi lineerdir.

Lineer fark denklemleri, (2.2.5) denklemindeki $g(n)$ fonksiyonu ve $p_i(n)$ katsayılarının durumlarına göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

i. $g(n)=0$ ise denkleme *lineer homojen fark denklemi* denir.

ii. $g(n)\neq 0$ ise denkleme *lineer homojen olmayan fark denklemi* denir.

iii. $g(n)=0$ ve $p_0(n), p_1(n),\ldots, p_k(n)$ katsayıları $p_k(n)=p_k$ şeklinde sabit ise *denkleme sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi* denir.

iv. $p_0(n), p_1(n),\ldots, p_k(n)$ katsayılarından en az biri değişken içeren fonksiyon ise denkleme *değişken katsayılı fark denklemi* denir.

Eğer bir $\{y(k)\}_{n_0}^{\infty}$ dizisi veya basitçe $y(k)$ dizisi (2.2.5) denklemini sağlıyor ise bu *denklemin çözümüdür* denir ve bu denklemin başlangıç değerleri veriliyorsa, $t_i\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(n+k)+p_1(n)y(n+k-1)+\ldots+p_k(n)y(n)=g(n) \qquad (2.2.7)$$

$$y(n_0)=t_0,\quad y(n_0+1)=t_1,\ldots,\quad y(n_0+k-1)=t_{k-1} \qquad (2.2.8)$$

olarak verilen ifadeler *başlangıç değer problemidir (initial value problem).*

2.2.7. Teorem: (2.2.7) ve (2.2.8) denklemlerinde verilen başlangıç değer probleminin çözümü $y(n)$ vardır ve tektir (Elaydi, 2000).

İspat: (2.2.8) koşullarını kullanarak (2.2.7) den sırasıyla $n=n_0$ için $y(n_0+k)$ değeri ve ardından $n=n_0+1$ için $y(n_0+k+1)$ ve bu işleme devam edilerek $y(n_0+k+2), y(n_0+k+3),\ldots$ değerleri hesaplanır. Herhangi bir $n_0+k\le n$ değerinin $n=n_0+k+(n-n_0-k)$ şeklinde yazılabileceği görünür. Böylece (2.2.7) ve (2.2.8) başlangıç değer probleminin bir çözümü

$$y(n_0), y(n_0+1),\ldots, y(n_0+k-1), y(n_0+k), y(n_0+k+1), y(n_0+k+2),\ldots$$

olarak bulunur. Bu durumda çözümün varlığı kanıtlanmış olur. Çözümün tekliğini göstermek için $y(n)$ den farklı bir $x(n)$ çözümü var olsun. $x(n)$ çözümü benzer şekilde (2.2.7) ve (2.2.8) denklemleri yardımıyla hesaplandığında $\forall n \geq n_0$ için $y(n)$ çözümüne özdeş olduğu görülür. O halde çözüm tektir□ (Soykan vd., 2017).

2.2.8. Tanım : $n_0 \leq n$ için tanımlı $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ fonksiyonları verilsin ve hepsi birden sıfır olmayan $t_1, t_2, \dots, t_m$ sabitler olmak üzere,

$$t_1 f_1(n) + t_2 f_2(n) + \dots + t_m f_m(n) = 0 \qquad (2.2.9)$$

eşitliğini sağlayan $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ fonksiyonları $[n_0, \infty)$ aralığında *lineer bağımlıdır (linearly dependent)* denir.

Eğer $\forall n_0 \leq n$ için, (2.2.9) denklemini sağlayan $t_1, t_2, \dots, t_m$ sabitleri $t_1 = t_2 = \dots = t_m = 0$ ise; $f_1(n), f_2(n), \dots, f_m(n)$ fonksiyonları $[n_0, \infty)$ aralığında *lineer bağımsızdır (linearly independent)* denir.

2.2.9. Örnek: $1 \leq n$ için $2^n, n2^n, n^2 2^n$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösterilsin.

Çözüm:

$$t_1 2^n + t_2 n 2^n + t_3 n^2 2^n = 0, \quad \forall n \geq 1$$

Verilen eşitlikte denklemin her iki tarafı da 2^n ile bölünürse;

$$t_1 + t_2 n + t_3 n^2 = 0, \quad \forall n \geq 1$$

eşitliği bulunur ve bu eşitliğin $\forall n \geq 1$ için sağlanması ancak ve ancak $t_1 = t_2 = t_3 = 0$ olması ile mümkündür. O halde verilen denklem lineer bağımsızdır.

2.2.10. Örnek: $1 \leq n$ için $2^n, n2^n, 2n2^n$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğu gösterilsin.

Çözüm:

$$t_1 2^n + t_2 n 2^n + t_3 2n 2^n = 0, \quad \forall n \geq 1$$

Verilen eşitlikte denklemin her iki tarafı da 2^n ile bölünürse;

$t_1 + t_2 n + t_3 2n = 0, \quad \forall n \geq 1$

eşitliği bulunur ve $t_1 = 0, t_2 = -2, t_3 = 1$ olarak alınırsa bu eşitlik sağlanmış olur. Buna göre verilen denklem lineer bağımlıdır.

2.2.11. Teorem: Aşağıda verilen lineer homojen fark denkleminin

$$p_0(n)y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \ldots + p_k(n)y(n) = 0 \qquad (2.2.10)$$

n tane lineer bağımsız çözümünün kümesine, *çözümlerin temel kümesi (fundamental set of solution)* denir (Elaydi, 2000).

2.2.12. Teorem: $\forall n \geq n_0$ için $p_k(n) \neq 0$ ise, (2.2.10) lineer homojen fark denkleminin $n \geq n_0$ üzerinde tanımlı bir *temel kümesi vardır*.

2.2.13. Tanım: $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_m(n)$ verilen fonksiyonlar olmak üzere $w(n)$ kümesi

$$w(n) = \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \cdots & f_m(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \cdots & f_m(n+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(n+r-1) & f_2(n+r-1) & \cdots & f_m(n+r-1) \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır ve bu matrisin determinantı

$W(n) = \det w(n)$

şeklinde tanımlanır ve bu $W(n)$ determinanta verilen fonksiyonların *Casoratyan'ı* denir.

2.2.14. Teorem (Abel Lemması**):** $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_m(n)$ fonksiyonları (2.2.10) denkleminin çözümleri ve $W(n)$ bu fonksiyonların *Casoratyan'ı* olsun. Buna göre $n_0 \leq n$ için

$$W(n) = (-1)^{m(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a_m(i) \right) W(n_0)$$

eşitliği vardır.

2.2.15. Sonuç: $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_m(n)$ fonksiyonları (2.2.10) denkleminin çözümleri ve $\forall n \geq n_0$ için $a_m(n) \neq 0$ olsun. Buna göre $\forall n \geq n_0$ için $W(n) \neq 0$ olması için ancak ve ancak $W(n_0) \neq 0$ olmalıdır.

2.2.16. Teorem: $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_m(n)$ fonksiyonları (2.2.10) lineer homojen denkleminin çözümleri olsun ve

$V = \{ f_1(n), f_2(n), \ldots, f_m(n) \}$

eşitliği verilsin. V bir temel kümedir ancak ve ancak $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ için $W(n_0) \neq 0$ dir.

2.2.17. Örnek: $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0$ denkleminin çözümleri olan 2^n ve 3^n bir temel küme oluşturup oluşturmadığı incelensin.

Bir sonraki konuda (fark denklemlerin çözümleri) işlenecek olan verilen denklemin genel çözümü

$x(n) = c_1 2^n + c_2 3^n$, (c_1 ve c_2 keyfi sabitler)

şeklindedir. 2^n ve 3^n fonksiyonlarının Casoratyanı

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. $n = 0$ noktasında

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

eşitliği bulunur, bu durumda verilen fonksiyonların kümesi lineer bağımsızdır.

2.2.18. Örnek: $x(n+3) - 5x(n+2) - 2x(n+1) + 24x(n) = 0$ üçüncü mertebeden lineer homojen fark denkleminin $(-2)^n$, 3^n ve 4^n çözümleri bir temel küme oluşturup oluşturmadığı incelensin.

Verilen denklemin genel çözümü

$x(n) = c_1(-2)^n + c_2 3^n + c_3 4^n$, ($c_1, c_2$ ve c_3 keyfi sabitler)

dir. $(-2)^n$, 3^n ve 4^n fonksiyonlarının Casoratyanı

$$W(n)=\det\begin{pmatrix}(-2)^n & 3^n & 4^n\\ (-2)^{n+1} & 3^{n+1} & 4^{n+1}\\ (-2)^{n+2} & 3^{n+2} & 4^{n+2}\end{pmatrix}$$

şeklindedir. $n=0$ noktasında

$$W(0)=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ (-2) & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\end{pmatrix}=30\neq 0$$

eşitliği bulunur, bu durumda verilen fonksiyonların kümesi lineer bağımsızdır.

2.2.19. Teorem: $\forall n\geq n_0$ için $p_k(n)\neq 0$ olsun. Buna göre (2.2.10) denklemi $[n_0,\infty)$ üzerinde bir temel kümeye sahiptir.

2.2.20. Tanım: $G(x,y(x),y(x+1),y(x+2),....,y(x+m))=0$ fonksiyonel fark denklemi ve $Y(n,y_n,y_{n+1},y_{n+2},...,y_{n+m})=0$ skaler fark denklemlerinin çözümleri

$$y(x)=\varphi\left(x,k_1(x),k_2(x),....,k_n(x)\right)$$

şeklinde n tane $k_1(x),k_2(x),....,k_n(x)$ birim periyodik fonksiyon içeren çözüme *genel çözüm*, genel çözümlerden elde edilen çözümlere de *özel çözümler* denir.

2.2.21. Tanım: (2.2.10) homojen denkleminde k tane lineer bağımsız çözümü $y_1(n),y_2(n),\ldots,y_k(n)$ olsun. Bu durumda $c_1,c_2,\ldots,c_k$ keyfi sabitler olmak üzere (2.2.10) denkleminin genel çözümü

$$y(n)=c_1y_1(n)+c_2y_2(n)+\ldots+c_ky_k(n)$$

şeklindedir.

2.2.22. Tanım (Üst üste ekleme ilkesi, Superposition prensibi**):** c_1,c_2 keyfi sabitler ve $y^{(1)}(n)$ ve $y^{(2)}(n)$

$$y_{n+k}+p_1(n)y_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)y_n=0 \qquad (2.2.11)$$

denkleminin çözümleri olmak üzere

$$y(n)=c_1y^{(1)}(n)+c_2y^{(2)}(n)$$

denklemi de (2.2.11) denkleminin bir çözümüdür (Mickens, 1990).

2.2.23. Tanım (Genel çözüm ve özel çözüm**):** Yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan bir fark denkleminin çözümü, homojen kısmının genel çözümü ile homojen olmayan denklemi sağlayan bir özel çözümünün toplamından oluşur. $y(x)$ denkleminin homojen kısmının genel çözümü $y^{(H)}(x)$ ile, homojen olmayan denklemin bir özel çözümü $y^{(Ö)}(x)$ ile gösterilsin, o halde;

$$y(x) = y^{(H)}(x) + y^{(Ö)}(x)$$

eşitliği elde edilir (Mickens, 1990).

2.2.24. Tanım: $k.$ mertebeden lineer homojen fark denkleminin (2.2.10) bütün çözümlerinin kümesi V olsun. $x, y \in V$ ve $n \in \mathrm{N}_0$ için

$$\left(x + y\right)(n) = x(n) + y(n)$$

ve a bir sabit olmak üzere

$$(ax)(n) = ax(n)$$

ile tanımlı $+$ ve $.$ işlemleri ile V, k boyutlu bir vektör uzayıdır.

2.2.25. Tanım (Gecikmeli Fark Denklemi**):** $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a = \max\left\{0, a_1, a_2, \ldots, a_k\right\} \geq 0$, $b = \max\left\{1, -a_1, -a_2, \ldots, -a_k\right\} = 1$ biçiminde tanımlansın. $n = 0, 1, 2, \ldots$ için bir $y(n)$ dizisi, $i = 1, 2, \ldots, k$ ve $\left\{p_i(n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ bir reel dizi olmak üzere, $a_i \in \mathbb{Z}$ için

$$y(n+1) - y(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(n - a_i) = 0$$

biçimindeki fark denklemi $(a+1).$ mertebeden *gecikmeli fark denklemidir* (Györi ve Ladas, 1991).

2.2.26. Tanım: Fark denklemlerinde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin en yüksek mertebeden farkını içeren denklemlere *nötral (neutral) tipten fark denklemi* denir (Agarwal, 2000).

2.2.27. Tanım: Diferansiyel denklemlerde, bilinmeyen fonksiyonun gecikmeli ve gecikmesiz terimlerinin en yüksek mertebeden türevini içeren denklemlere nötral (neutral) tipten diferansiyel denklem denir (Agarwal, 2000).

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

$a(n) \neq 0$ ve $a(n)$, $0 \leq n_0 \leq n$ de reel değerli fonksiyon olmak üzere birinci mertebeden lineer homojen fark denklemi;

$$y(n+1) = a(n)y(n),\ y(n_0) = y_0,\ 0 \leq n_0 \leq n \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde,

$a(n) \neq 0$ ve $a(n), g(n)$ $0 \leq n_0 \leq n$ de reel değerli fonksiyonlar olmak üzere birinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denklemi;

$$f(n+1) = a(n)f(n) + g(n),\ f(n_0) = f_0,\ 0 \leq n_0 \leq n \tag{3.2}$$

ile gösterilir.

(3.1) Denkleminin çözümü basit iterasyon ile

$$y(n_0+1) = a(n_0)y(n_0) = a(n_0)y_0$$

$$y(n_0+2) = a(n_0+1)y(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)y_0$$

$$y(n_0+3) = a(n_0+2)y(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)y_0$$

...

Buradan kolayca görülebilir ki,

$$\begin{aligned} y(n) &= y(n_0+n-n_0) \\ &= a(n-1)a(n-2)\ldots a(n_0)y_0 \end{aligned}$$

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0 \tag{3.3}$$

eşitliği elde edilir.

Homojen olmayan (3.2) denkleminin çözümü de;

$$f(n_0+1) = a(n_0)f(n_0) + g(n_0)$$

$$\begin{aligned} f(n_0+2) &= a(n_0+1)f(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)f_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1) \\ &\ldots \end{aligned}$$

İşlemlerini devam ettirdiğimizde, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$f(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] f_0 + \sum_{s=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1} a(i)\right] g(s) \tag{3.4}$$

şeklinde genel denklem elde edilir ve bu çözüm tekdir. (Elaydi,2000).

(3.4) denkleminin doğruluğunu tümevarım yöntemiyle ispatlanabilir (Elaydi, 2000);

$n=1$ için,

$f(1)=f(0)=f_0$ dir.

$n=k$ için,

$$f(k)=\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] f_0+\sum_{s=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=s+1}^{k-1} a(i)\right] g(s$$

eşitliği doğru kabul edilsin.

$n=k+1$ için denklemin doğruluğu ispatlansın,

(3.2) denklemi ile , (3.4) denkleminden aşağıdaki denklem elde edilir,

$$f(k+1)=a(k)\left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i)\right] f_0+\sum_{s=n_0}^{k-1}\left[a(k)\prod_{i=s+1}^{k-1} a(i)\right] g(s)+g(k)$$

$$=\left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] f_0+\sum_{s=n_0}^{k-1}\left[\prod_{i=s+1}^{k} a(i)\right] g(s)+\left[\prod_{i=k+1}^{k} a(i)\right] g(k)$$

$$=\left[\prod_{i=n_0}^{k} a(i)\right] f_0+\sum_{s=n_0}^{k}\left[\prod_{i=s+1}^{k} a(i)\right] g(s) \tag{3.5}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca $a(i):=a$ yazılırsa

$$f(k)=a^k f_0+\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} g(i) \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ için denklem doğrulanmış olur□.

Burada; $\prod_{i=k+1}^{k} a(i)=1$ ve $\sum_{i=k+1}^{k} a(i)=0$ olduğu kabul edilir.

3.1. Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemlerinin Çözümleri

(3.2) denkleminde beş önemli uygulama vardır. Bunlar;

I. $a(n)$ fonksiyonu sabit ve $g(n)=0$

II. $a(n)$ fonksiyonlarından en az biri değişken ve $g(n)=0$

III. $a(n)$ fonksiyonu sabit ve $g(n)$ fonksiyonlarından en az biri değişken, $g(n)\neq 0$

IV. $a(n)$ ve $g(n)$ fonksiyonlarının sabit, $g(n)\neq 0$

V. $a(n)$ ve $g(n)$ fonksiyonlarından en az biri değişken, $g(n)\neq 0$ dir (Levy ve Lessman, 1961).

Bu uygulamaların çözümleri aşağıda sırasıyla verilecektir.

3.1.1. $f(n+1)=af(n)$

$$f(n+1)=af(n) \tag{3.1.1}$$

denklemi birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemidir.

(3.1.1) denkleminin çözümü için $a=1$ ve $a\neq 1$ olmak üzere iki durum vardır.

i. $a=1 \Rightarrow f(n+1)=1.f(n)$

$$\Rightarrow f(n+1)=f(n)$$

$$\Rightarrow f(n+1)-f(n)=0$$

$$\Rightarrow \Delta f_n=0$$

Yukarıdaki eşitlikten anlaşıldığı gibi denklem ardışık herhangi iki terimin farkı 0 olup, çözüm:

$f_n=f_0$ olacak şekilde sabittir.

ii. $a\neq 1$ ise; basit bir işlemle (3.1.1) denklemi $a=1$ durumuna dönüştürülebilir.

Denklemin her iki tarafının da a^{n+1} katsayısına bölündüğünde

$$\frac{f(n+1)}{a^{n+1}}=\frac{f(n)}{a^{n}}\ ,\ n\in \mathrm{N}_0 \tag{3.1.2}$$

denklemi elde edilir. Buradan

$$\Delta\left(\frac{f(n)}{a^{n}}\right)=0 \tag{3.1.3}$$

eşitliği elde edilir, bu denklemden $\frac{f(n)}{a^n}$ oranının sabit olduğu sonucuna ulaşılır. Sonuç olarak (3.1.1) denkleminin genel çözümü

$$f_n = f_0 a^n \quad , \quad n \in \mathrm{N}_0$$

olarak bulunur.

3.1.2. $f(n+1) = a(n)f(n)$

Denklemi birinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen fark denklemidir. Denklemin genel çözümü (3.3) denklemi düzenlenerek

$$f(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] f_0 \tag{3.1.4}$$

3.1.3. $f(n+1) = af(n) + g(n)$

$a(n)$ fonksiyonu sabitse, denklem birinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan fark denklemi adını alır ve (3.2) denklemi aşağıdaki gibi yazılır;

$$f(n+1) = af(n) + g(n), \; f(0) = f_0 \tag{3.1.5}$$

(3.4) denkleminden faydalanılarak (3.1.5) denkleminin çözümü için aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$f(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] f_0 + \sum_{s=0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1} a(i)\right] g(s)$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} a(i) = a(0)a(1)a(2)\dots a(n-1) = a^n, (a \text{ sabit}) \tag{3.1.6}$$

$$\sum_{s=0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1} a(i)\right] g(s) = \prod_{i=0+1}^{n-1} a(i)g(0) + \prod_{i=1+1}^{n-1} a(i)g(1) + \dots + \prod_{i=n-1+1}^{n-1} a(i)g(n-1)$$

$$= a^{n-1}g(0) + a^{n-2}g(1) + \dots + a^0 g(n-1)$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} a^{n-s-1} g(s) \qquad (a \text{ sabit}) \tag{3.1.7}$$

Sonuç olarak (3.1.6) ve (3.1.7) denklemlerinden, (3.1.5) denkleminin çözümü

$$f(n) = a^n f_0 + \sum_{s=0}^{n-1} a^{n-s-1} g(s) \tag{3.1.8}$$

şeklinde ifade edilir□. .

3.1.4. $f(n+1) = af(n) + g$

$a(n)$ ve $g(n)$ fonksiyonlarının sabit ise, (3.2) denklemi $f(n+1) = af(n) + g$ şeklini alır ve bu denklem birinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemidir.

(3.1.8) denkleminden

$$f(n) = \begin{cases} a \neq 1 \text{ ise;} & a^n f_0 + g\left(\dfrac{a^n - 1}{a-1}\right) \\ a = 1 \text{ ise;} & f_0 + g_n \end{cases} \tag{3.1.9}$$

şeklinde yazılabilir

3.1.5. $f(n+1) = a(n)f(n) + g(n)$

Denklemi birinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemidir. Denklemin genel çözümü (3.5) ve (3.6) yukarıda verilmiştir.

Bu konuyla ilgili aşağıdaki örnek verilebilir.

3.1.6. Örnek: $f(n+1) = (n+1)f(n) + 2^n(n+1)!, \quad f(0) = 1, \quad 0 < n$

Birinci mertebeden lineer değişken katsayılı homojen olmayan fark denkleminin çözümü bulunmak istensin.

Çözümü için (3.1.3) nolu denklem kullanılır.

$$\begin{aligned} &f_0 = 1 \\ &a(i) = (i+1) \qquad \Rightarrow \qquad f(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] f_0 + \sum_{s=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1} a(i)\right] g(s) \\ &g(s) = 2^s(s+1)! \end{aligned}$$

$$f(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1}(i+1)\right]1 + \sum_{s=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1}(i+1)\right]2^s(s+1)!$$

$$f(n) = n! + \sum_{s=0}^{n-1} n!2^s$$

$$f(n) = n!\left(1 + \sum_{s=0}^{n-1} 2^s\right)$$

Buradan (2.1.20) özelliğinden de,

$$f(n) = n!\left(1 + \frac{2^s - 1}{2-1}\right)$$

$$f(n) = n!2^n$$

sonucu elde edilir.

3.1.7. Örnek: $f(n+1) = 2f(n) + 3^n, \qquad f(1) = \dfrac{1}{2}$

Birinci mertebeden lineer homojen olmayan fark denkleminin de çözümü bulunmak istensin. Çözümü için (3.1.8) nolu denklem kullanılır.

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)2^{n-1} + \sum_{s=1}^{n-1} 2^{n-s-1}3^s$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-1}\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^s$$

$$= 2^{n-2} + 2^{n-1}\frac{3}{2}\left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}\right)$$

$$= 3^n - 5.2^{n-2}$$

sonucu bulunur.

3.1.8. Örnek: Bir hasta tarafından dört saatte bir alınan bir ilaç, m. saat aralığında kan dolaşımı sistemindeki miktarı y_m olsun. Hastanın vücudu ilacın k oranını her bir aralık boyunca dolaşım sisteminden çekmektedir. İlacın her dört saatte bir alınan miktarı t ise $\lim_{m\to\infty} y_m$ limitinin değeri ne olur?

Çözüm için problemin matematik modelini yazılmalıdır. Matematik model,

$y_{m+1} = (1-k)y_n + t$ dir. (3.1.10)

Hastanın vücudunda bulunan ilaç miktarı $(m+1)$. zaman diliminde m. zaman dilimindeki ilaç miktarından k katının çıkarılması ve t yeni dozajının eklenmesiyle elde edilen denklem, sabit katsayılı lineer fark denklemidir. Bu denklemin çözümü için (3.1.9) denklemi kullanılır,

$$y_m = \left[y_0 - \frac{t}{k}\right](1-k)^m + \frac{t}{k}$$

$\lim_{m\to\infty} y_m = \dfrac{t}{k}$ eşitliği bulunur.

$t = 2cm^3,\ k = 1/4$ olarak alınırsa (3.1.10) denklemi

$y_{m+1} = 3/4\, y_n + 2,\ \ y_0 = 2$

$\lim_{m\to\infty} y_m = \frac{t}{k} = \frac{2}{1/4} = 8cm^3$ bulunan bu sonuç ilacın kandaki *denge* değeridir. İlerleyen konularda bahsedilecek olan denge noktası, ilacın kandaki miktarının nasıl dengeye geldiği aşağıdaki çizelgede görülebilir.

Çizelge 3.1.1. Kandaki ilaç miktarının dengeye gelmesi

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_m	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

4. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

4.1. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ keyfi sabitler ve $c_2 \neq 0$ olmak üzere,

$$y(n+2)+c_1 y(n+1)+c_2 y(n)=0\,,\ (n \in \mathrm{N}_0) \qquad (4.1.1)$$

denklemi *ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi*dir. (4.1.1) denkleminde $y(n)=\lambda^n$ dönüşümü yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$\lambda^2+c_1\lambda+c_2=0 \qquad (4.1.2)$$

formatını alır. (4.1.2) denklemine (4.1.1) denkleminin *karakteristik denklemi* denir ve denklemin çözümünde elde edilen λ_1 ve λ_2 köklerine denklemin *karakteristik kökleri* adı verilir.

(4.1.1) denkleminin genel çözümü λ_1 ve λ_2 köklerine bağlı olarak üç farklı durumda hesaplanır. Bunlar:

1. Durum: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere, (4.1.1) denkleminin temel kümesi $\left\{\lambda^n{}_1, \lambda^n{}_2\right\}$ dir ve (4.1.1) denkleminin genel çözümü

$$y(n)=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n\,,\ (c_1, c_2 \text{ keyfi sabitler})$$

olarak bulunur. Burada $y_1(n)=\lambda_1^n$ ve $y_2(n)=\lambda_2^n$ dir.

4.1.1. Örnek: $y(n+2)-5y(n+1)+6y(n)=0$ denkleminin genel çözümü bulunmak istensin.

Verilen denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2-5\lambda+6=0$ dir. Buna göre karakteristik kökler $\lambda_1=2, \lambda_2=3$ tür. O halde denklemin genel çözümü c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n)=c_1 2^n+c_2 3^n \text{ dir.}$$

2. Durum: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin temel kümesi $\left\{\lambda^n, n\lambda^n\right\}$ dir ve (4.1.1) denkleminin genel çözümü

$y(n)=(c_1+c_2n)\lambda^n$, $(c_1,c_2$ keyfi sabitler)

olarak bulunur. Burada $y_1(n)=\lambda^n$ ve $y_2(n)=n\lambda^n$ dir

4.1.2. Örnek: $y(n+2)+2y(n+1)+y(n)=0$ denkleminin genel çözümü bulunmak istensin.

Verilen denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2+2\lambda+1=0$ dir. Buna göre karakteristik kökler $\lambda_1=\lambda_2=-1$ tür. O halde denklemin genel çözümü c_1,c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$y(n)=\left(c_1+c_2n\right)\left(-1\right)^n$ dir.

3. Durum: $\lambda_1,\lambda_2\in C$, $\lambda_1=\alpha+i\beta$ ve $\lambda_2=\alpha-i\beta$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ve $\beta\neq 0)$ olmak üzere (4.1.1) denkleminin genel çözümü

$$r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2},\qquad \theta=\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

ise ve bu denklemin temel kümesi $\left\{r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta\right\}$ dir ve

$y(n)=r^n\left(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta\right)$, $(c_1,c_2$ keyfi sabitler)

veya

$y(n)=Ar^n\cos(n\theta-B)$, $\left(A\ \ ve\ \ B\ keyfi\ sabitler\right)$

olarak bulunur. Burada $y_1(n)=r^n\cos n\theta$ ve $y_2(n)=r^n\sin n\theta$ dır (Bereketoğlu, 2012).

4.1.3. Örnek : $y(n+2)+4y(n)=0$ denkleminin genel çözümü bulunsun.

Verilen denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2+4=0$ dir. Buna göre karakteristik kökler $\lambda_1=-2i,\lambda_2=2i$ tür. $r=2,\beta=\frac{\pi}{2}$ olarak bulunur.

O halde denklemin genel çözümü c_1,c_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n)=2^n\left(c_1\cos\frac{\pi}{2}n+c_2\sin\frac{\pi}{2}n\right)\text{ dir.}$$

4.1.4. Tanım (Fibonacci Dizisi**):** $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0, \quad y(0)=1, y(1)=1$

başlangıç değer probleminin

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

çözümüne *Fibonacci Dizisi* ve bu dizinin $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,\ldots$ elemanlarına *Fibonacci sayıları* denir.

4.1.5. Tanım (Lucas Dizisi**):** $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0, \quad y(0)=2, y(1)=1$

başlangıç değer probleminin

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

çözümüne *Lucas Dizisi* ve bu dizinin $2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,\ldots$ elemanlarına *Lucas sayıları* denir (Soykan vd, 2017).

4.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi

$n_0 \le n$ için tanımlı $c_0(n), c_1(n), c_2(n)$ $\left(c_0(n)\neq 0, c_2(n)\neq 0\right)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$c_0(n)y(n+2)+c_1(n)y(n+1)+c_2(n)y(n)=0\,, n_0 \le n \tag{4.2.1}$$

şeklinde tanımlanan denkleme *ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen fark denklemi* denir. (4.2.1) fark denkleminin genel çözümünü hesaplamak için aşağıdaki yöntemler kullanılacaktır. Bunlar:

i. Operatörlerin çarpanlara ayrılması
ii. Bir çözümün bilinmesi

(Kelley ve Peterson, 1991).

4.2.1. Operatörlerin Çarpanlara Ayrılması

(4.2.1) denklemini E operatörüyle aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$c_0(n)E^2y(n)+c_1(n)Ey(n)+c_2(n)y(n)=0$$

$$y(n)\left[c_0(n)E^2+c_1(n)E+c_2(n)\right]=0$$

şeklinde yazılabilir.

$$c_0(n)E^2+c_1(n)E+c_2(n)$$

operatörü E ye göre çarpanlarına ayrıldığında (4.2.1) denkleminin genel çözümü bulunur (Bereketoğlu, 2012).

4.2.1.1. Örnek: $y(n+2)-ny(n+1)-2(n+1)y(n)=0$ değişken katsayılı lineer fark denkleminin çözümü bulunmak istensin.

Verilen denklem E operatörü yardımıyla

$$\left[E^2-nE-2(n+1)\right]y(n)=0$$

şeklinde yazılır ve çarpanlarına ayrıldığında

$$(E+2)\big(E-(n+1)\big)y(n)=0 \tag{4.2.1.1}$$

eşitliği elde edilir.

$$\begin{aligned}\big(E-(n+1)\big)y(n)&=h(n)\\ y(n+1)-(n+1)y(n)&=h(n)\end{aligned} \tag{4.2.1.2}$$

olarak tanımlanacak olursa (4.2.1.1) denklemi

$$(E+2)h(n)=0$$
$$h(n+1)-2h(n)=0$$

eşitliğine indirgenmiş olur. Elde edilen bu denklemin çözümü için c_1 keyfi sabit olmak üzere

$$h(n)=c_1(-2)^n \tag{4.2.1.3}$$

eşitliği yazılır. (4.2.1.3) denklemini (4.2.1.2) de yerine yazacak olursak

$$\big(E-(n+1)\big)y(n)=c_1(-2)^n$$
$$y(n+1)-(n+1)y(n)=c_1(-2)^n$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemler birinci dereceden homojen olmayan denklemlerdir. (4.3) denklemi kullanılarak elde edilen denklemin genel çözümü

$$y(n)=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}a(i)\right]f_0+\sum_{s=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1}a(i)\right]g(s)$$

c_2 keyfi sabit olmak üzere

$$=\left[\prod_{i=n_0}^{n-1}(i+1)\right]c_2+\sum_{s=n_0}^{n-1}\left[\prod_{i=s+1}^{n-1}(i+1)\right]c_1(-2)^s$$

$$=(n_0+1)\ldots(n-1)nc_2+\sum_{s=n_0}^{n-1}\left((s+2)\ldots(n-1)n\right)c_1(-2)^s$$

$$=(n_0+1)\ldots(n-1)nc_2+c_1\sum_{s=n_0}^{n-1}\left(\frac{n!(-2)^s}{(s+1)!}\right)$$

eşitliği bulunur. Buna göre $n_0=0$ alınırsa soruda verilen denklemin genel çözümü

$$y(n)=n!c_2+c_1n!\sum_{s=n_0}^{n-1}\left(\frac{(-2)^s}{(s+1)!}\right)$$

şeklindedir.

4.2.2. Bir Çözümün Bilinmesi

(4.2.1) denkleminin aşikâr olmayan bir çözümünün bilinmesi durumunda bu çözümden bağımsız olabilecek ikinci çözüm bulunabilir. Ayrıca bu yönteme ikinci dereceden değişken katsayılı lineer homojen denklemleri için mertebeyi indirgeme (düşürme) yöntemi de denir.

4.2.2.1. Lemma: $y_1(n)$ (4.2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ve $y_2(n)$ de bu denkleminin diğer bir çözümü olsun. $W(n)$ bu çözümlerin *Casoratyanı* olmak üzere

$$W(n+1)=\left(\frac{c_2(n)}{c_0(n)}\right)W(n),\left(c_0(n)\neq 0,c_2(n)\neq 0\right) \qquad (4.2.2.1)$$

eşitliğinden,

$$\Delta\frac{y_2(n)}{y_1(n)}=\frac{y_1(n)\Delta y_2(n)-y_2(n)\Delta y_1(n)}{y_1(n)y_1(n+1)}$$

$$=\frac{W(n)}{y_1(n)y_1(n+1)}$$

elde edilen denklemin her iki tarafına da Δ^{-1} uygulanırsa;

$$y_2(n)=y_1(n)\sum_{s=0}^{n-1}\frac{W(s)}{y_1(s)y_1(s+1)} \qquad (4.2.2.2)$$

eşitliği elde edilir (Bereketoğlu, 2012).

4.2.2.2. Teorem: $y_1(n)$ (4.2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ve $y_1(n) \neq 0$ olsun. $n_0 \leq n$ için $c_0(n) \neq 0, c_2(n) \neq 0$ olmak üzere, (4.2.2.2) denklemi (4.2.1) denkleminin diğer bağımsız bir çözümünü gösterir. (4.2.2.2) denkleminde bulunan $W(s)$ (4.2.2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümüdür. Bu teoreme ikinci basamaktan değişken katsayılı lineer homojen fark denklemlerinin genel çözümünü bulmak için kullanılan *basamağın indirgenmesi* olarak da bilinir (Bereketoğlu, 2012).

4.2.2.3. Örnek: $y(n+2) - y(n+1) - \dfrac{1}{n+2} y(n) = 0$ **,** $y_1(n) = n+2$

denklemi veriliyor. Denklemin lineer bağımsız ikinci çözümü ve genel çözümü bulunmak istensin.

(4.2.2.1) denkleminden aşağıdaki denklem elde edilir

$$W(n+1) = \left(-\frac{1}{n+2}\right) W(n)$$

Bu denklem de

$W(n) = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ şeklinde bir çözüme sahiptir. (4.2.2.2) denkleminden

$$y_2(n) = (n+2)\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(s+2)(s+3)(s+1)!}$$

$$= (n+2)\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(s+3)!}$$

eşitliği elde edilir. Verilen denklemin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılır

$$y(n) = c_1(n+2) + c_2(n+2)\sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{(s+3)!}, \ (c_1, c_2 \text{ keyfi sabitler}).$$

4.3. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemleri

$c_1(n), c_2(n)$ fonksiyonları $n \in \mathrm{N}_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $c_2(n) \neq 0$ olmak üzere,

$$y(n+2)+c_1(n)y(n+1)+c_2(n)y(n)=g(n)\,,\ (n \in \mathrm{N}_0) \tag{4.3.1}$$

denklemi *ikinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemi*dir. (4.3.1) denklemine karşılık gelen homojen fark denklemi

$$y(n+2)+c_1(n)y(n+1)+c_2(n)y(n)=0 \tag{4.3.2}$$

şeklindedir.

(4.3.1) denkleminin bir özel çözümünü bulmak için parametrelerin değişim yöntemi metodu verilecektir. Burada $g(n)$ fonksiyonu keyfi bir fonksiyondur ve bir özel çözüm bulmak için bu yönteme en genel yöntemdir denilebilir.

4.3.1. Teorem (Parametrelerin Değişimi): c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve (4.3.2) denklemin iki lineer bağımsız çözümü y_1 ve y_2 olmak üzere (4.3.2) denkleminin genel çözümü

$$y_h(n)=c_1y_1(n)+c_2y_2(n)\,,\ (n \in \mathrm{N}_0) \tag{4.3.3}$$

olsun. O halde (4.3.1) denkleminin bir özel çözümü

$$\begin{aligned} u_1(n) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_2(k+1)}{W(k+1)} \\ u_2(n) &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_1(k+1)}{W(k+1)} \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

için

$$y_{\ddot{O}}(n)=u_1(n)y_1(n)+u_2(n)y_2(n)\,,\ (n \in \mathrm{N}_0) \tag{4.3.5}$$

dir ve $W(n)$, y_1 ve y_2 nin *Casoratyanıdır* (Soykan vd, 2017).

4.3.2. Örnek: $y(n+2)-y(n+1)-\dfrac{1}{n+2}y(n)=\dfrac{1}{n+3}$ denkleminin genel çözümünü ve bir özel çözümü parametrelerin değişim yöntemi ile bulunsun.

Verilen denkleme karşılık gelen homojen denklem

$$y(n+2)-y(n+1)-\frac{1}{n+2}y(n)=0$$

dir. Örnek 4.2.2.3 den bu homojen denklemin lineer bağımsız iki çözümünün

$$y_1(n)=n+2 \text{ ve } y_2(n)=(n+2)\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}$$

ve genel çözümünün

$$y(n)=c_1(n+2)+c_2(n+2)\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{(s+3)!},\ (c_1,c_2 \text{ keyfi sabitler})$$

olduğunu biliyoruz. Teorem (4.3.1) de verilen (4.3.4) denklemini kullanarak bu genel denklemin özel çözümü bulunabilir:

$$W(n+1)=\begin{vmatrix} y_1(n+1) & y_2(n+1) \\ y_1(n+2) & y_2(n+2)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} n+3 & (n+3)\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!} \\ n+4 & (n+4)\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}\end{vmatrix}$$

$$=(n+3)(n+4)\left(\sum_{s=0}^{n+1}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}-\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}\right)$$

$$=(n+3)(n+4)\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+4)!}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)!}$$

sonucundan

$$u_1(n)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_2(k+1)}{W(k+1)}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+3}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}\left((k+3)\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}\right)$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}\right)$$

$$u_2(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)y_2(k+1)}{W(k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+3}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}(k+3)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}$$

bulunur, o halde verilen denklemin özel çözümü

$$y_{Ö}(n)=u_1(n)y_1(n)+u_2(n)y_2(n)$$

$$y_{Ö}(n)=\left(-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}\left(\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}\right)\right)(n+2)+\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(k+2)!}{(-1)^{k+1}}\right)(n+2)\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s}{(s+3)!}$$

sonucu elde edilir.

5. k. MERTEBEDEN LİNEER FARK DENKLEMLERİ

$c_1(n), c_2(n), \ldots, c_k(n)$, $n_0 \leq n$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $c_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + c_1(n)y(n+k-1) + \ldots + c_k(n)y(n) = g(n), (n \in \mathrm{N}_0) \quad (5.1)$$

denklemi k. *mertebeden lineer fark denkleminin* en genel formudur. Denklemde verilen $g(n)$ bir dizi belirtir. Eğer (5.1) denkleminde $g(n) = 0$ ise

$$y(n+k) + c_1(n)y(n+k-1) + \ldots + c_k(n)y(n) = 0, \ (n \in \mathrm{N}_0) \quad (5.2)$$

denklemine k. *mertebeden lineer homojen fark denklemi* denir.

5.1. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemi

(5.1) denkleminde bulunan reel değerli fonksiyonlar

$c_1(n) = c_1, c_2(n) = c_2, \ldots, c_k(n) = c_k$ reel sabiler olup, $c_k \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + c_1 y(n+k-1) + \ldots + c_k y(n) = 0, \ (n \in \mathrm{N}_0) \quad (5.1.1)$$

denklemine k. *mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemi* denir.

İkinci basamaktan sabit katsayılı lineer homojen fark denklemlerinde olduğu gibi (5.1.1) denkleminin $y(n) = \lambda^n$ formunda bir çözüm aranır. (5.1.1) denkleminde $y(n) = \lambda^n$ $(\lambda \neq 0)$ dönüşümü yapılırsa elde edilen yeni denklem

$$\lambda^{n+k} + c_1 \lambda^{n+k-1} + \ldots + c_k \lambda^n = 0 \quad (5.1.2)$$

eşitliğinden de

$$\lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \ldots + c_k = 0 \quad (5.1.3)$$

denklemi bulunur. (5.1.3) denklemine (5.1.1) denkleminin *karakteristik denklemi* denir ve denklemin çözümünde elde edilen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ köklerine bu denklemin *karakteristik kökleri* adı verilir (Bereketoğlu, 2012).

5.1.1. Teorem: Sabit reel katsayılı k. mertebeden homojen (5.1.3) fark denklemi daima k tane reel lineer bağımsız $y_1, y_2, \ldots, y_k$ çözümüne sahiptir. Bu çözümler (5.1.3) karakteristik denklemi elde edilir.

(5.1.1) denkleminin çözümleri karakteristik köklere bağlı olarak hesaplanır ve aşağıda verilen durumların incelenmesi yeterlidir.

1. Durum: (5.1.3) denkleminin k tane $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ reel kökü var ve birbirinden farklı ise $\left\{\lambda^n{}_1, \lambda^n{}_2, ..., \lambda^n{}_k\right\}$ kümesi (5.1.2) denkleminin bir temel kümesidir ve (5.1.3) in genel çözümü $c_1, c_2, ..., c_k$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n$$

şeklindedir. Buradaki $y_1(n) = \lambda_1^n, y_2(n) = \lambda_2^n, ..., y_k(n) = \lambda_k^n$ denklemin kökleridir.

2. Durum: (5.1.3) denkleminin k tane $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ reel karakteristik kökleri var ve sırası ile $r_1, r_2, ..., r_m$ katlı olsun. Burada $\sum_{i=1}^{m} r_i = m$ dir. Buna göre (5.1.2) denklemi E operatörü yardımıyla

$$(E-\lambda_1)^{r_1}(E-\lambda_2)^{r_2}...(E-\lambda_r)^{r_m}\, y(n) = 0 \tag{5.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. $\forall i \in [1, k]$ için

$$(E-\lambda_i)^{r_i}\, y(n) = 0 \tag{5.1.5}$$

denkleminin bir temel kümesi

$$A_i = \left\{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, ..., n^{r_i-1}\lambda_i^n\right\}$$

şeklindedir. (5.1.5) denkleminin genel çözümü $c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{ir_i-1}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n) = \lambda_i^n\left(c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + ... + c_{ir_i-1}n^{r_i-1}\right)$$

dir. Bu durumda (5.1.4) ve (5.1.5) denklemlerinin bir temel kümesi $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ olarak yazılabilir ve (5.1.1) denkleminin genel çözümü $\forall i \in [1, k]$ için $c_{i0}, c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{ir_i-1}$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n\left(c_{i0} + c_{i1}n + c_{i2}n^2 + ... + c_{ir_i-1}n^{r_i-1}\right)$$

dir.

3.Durum: (5.1.3) karakteristik denklemin bir $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ kompleks kökü s_1 katı olsun. Katsayılar reel olduğu için $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha + i\beta$ de diğer bir köküdür ve buradan $2s_1 \le k$ eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla (5.1.2) denkleminin $2s_1$ tane reel lineer bağımsız $y_1, y_2, ..., y_{2s_1}$ çözümleri

$r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, nr^n \cos n\theta, nr^n \sin n\theta, ..., n^{s_1-1} r^n \cos n\theta, n^{s_1-1} r^n \sin n\theta$ şeklindedir.

y fonksiyonunun diğer çözümleri $y_{2s_1}, y_{2s_1+1}, y_{2s_1+2}, ..., y_k$ çözümleri 1.durum ve 2.durum göz önüne alınarak benzer şekilde bulunur. Böylece (5.1.2) nin genel çözümü $c_1, c_2, ..., c_k$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(n)$$

olarak bulunur.

5.2. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Olmayan Fark Denklemleri

$c_1, c_2, ..., c_k$ reel sabiler olup, $c_k \neq 0$ olmak üzere

$$y(n+k) + c_1 y(n+k-1) + ... + c_k y(n) = g(n), \; (n \in \mathrm{N}_0) \qquad (5.2.1)$$

denklemine k. *mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemi* ele alınacaktır. Bu denklemin bir özel çözümünü bulmak için önce belirsiz katsayılar yöntemi, devamında operatör yöntemi verilecektir.

5.2.1. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

Belirsiz katsayılar yöntemini dört adımda anlatılabilir:

1. (5.2.1) denklemine karşılık gelen homojen

$$y(n+k) + c_1 y(n+k-1) + ... + c_k y(n) = 0 \qquad (5.2.1.1)$$

denklemin $y_H = a_1 y_1 + a_2 y_2 + ... + a_k y_k$ genel çözümü bulunur. Burada $y_1, y_2, ..., y_k$ (5.2.1.1) nin lineer bağımsız çözümleridir.

2. $y_1, y_2, ..., y_k$ ve g fonksiyonlarının lineer bağımsızlığı araştırılır (bu fonksiyonların ya Casoratyanı hesaplanarak bakılabilir ya da bazen

direkt olarak görülebilir). Eğer bu fonksiyonlar lineer bağımlı ise bu yöntem uygulanmaz.

3. (5.2.1) denklemindeki $g(n)$ fonksiyonlarının belli durumları için özel çözüm olabilecek aday çözümler $y_A(n)$ çözümleri oluşturulur. Aday çözümler ile genel çözümlerdeki terimler karşılaştırılır; varsa benzerliklerin yok edilmesi için aday çözümler n nin en küçük kuvvetleri ile çarpılır. Böylece aranan özel çözüm formu kesinleştirilmiş olur.
4. Belirlenen özel çözüm $y_Ö(n)$ (5.2.1.1) homojen denkleminde yerine konularak katsayılar belirlenir (Soykan vd, 2017).

Çizelge 5.2.3. Belirsiz Katsayılar Yöntemi

$g(n)$	$y_Ö(n)$
a^n	Aa^n
n^k	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k$
Derecesi k olan bir $p(n)$ polinomu	$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k$
$n^k a^n$	$\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k\right) a^n$
$p(n) a^n$	$\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k\right) a^n$
$\sin bn$ ya da $\cos bn$	$A \sin bn + B \cos bn$
$a^n \sin bn$ ya da $a^n \cos bn$	$\left(A \sin bn + B \cos bn\right) a^n$
$n^k a^n \sin bn$ ya da $n^k a^n \cos bn$	$\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k\right) a^n \sin bn +$ $\left(A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots + A_k n^k\right) a^n \cos bn$

5.2.2. $L(E)$ Operatör Yöntemi

k. mertebeden sabit katsayılı lineer homojen olmayan (5.2.1) denklemi E operatörü cinsinden

$$L(E)\, y(n) = g(n) \tag{5.2.2.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $L(E)$ operatörü

$$L(E) = E^k + c_1 E^{k-1} + \ldots + c_k \tag{5.2.2.2}$$

ile tanımlıdır. Buradan (5.2.2.2) in ya da (5.2.1) in bir özel çözümü $L^{-1}(E)=\dfrac{1}{L(E)}$ olmak üzere

$$y_{\ddot{o}}(n)=L^{-1}(E)g(n) \tag{5.2.2.3}$$

dir. Belli $g(n)$ durumları için (5.2.2.3) denklemindeki $L^{-1}(E)$ nin fonksiyonlara nasıl uygulanabileceği aşağıdaki teoremde verilecektir (Soykan vd, 2017).

5.2.2.1. Teorem: $L(a)\neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{1}{L(E)}a^n=\frac{a^n}{L(a)}$$

dır (Bereketoğlu, 2012).

5.2.2.2. Teorem: n ye bağlı bir $F(n)$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{L(E)}a^nF(n)=a^n\frac{1}{L(aE)}F(n)$$

dir (Bereketoğlu, 2012).

5.2.2.3. Teorem: $L(a)=0$ olsun. $\varphi(a)\neq 0$ olmak üzere $L(E)=(E-a)^m\varphi(E)$ ise bu durumda

$$\frac{1}{L(E)}a^n=\frac{a^{n-m}n^m}{\varphi(a)m!}$$

dir.

İspat: $L^{-1}(E)a^n=(E-a)^{-m}\varphi^{-1}(E)a^n=(E-a)^{-m}\dfrac{a^n}{\varphi(a)}=\dfrac{a^n}{\varphi(a)}(aE-a)^{-m}(1)$

$$=\frac{a^{n-m}}{\varphi(a)}(E-1)^{-m}(1)=\frac{a^{n-m}}{\varphi(a)}\Delta^{-m}(1)=\frac{a^{n-m}n^m}{\varphi(a)m!}\square.$$

5.2.2.4. Teorem: $\dfrac{1}{L(E)}a^n\sin(\alpha n+\beta)=\dfrac{a^n}{r^2+c^2}\left(-c\cos(\alpha n+\beta)+r\sin(\alpha n+\beta)\right)$

ve

$$\frac{1}{L(E)}a^n\cos(\alpha n+\beta)=\frac{a^n}{r^2+c^2}\left(r\cos(\alpha n+\beta)+c\sin(\alpha n+\beta)\right)$$

dir. Burada

$r=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\cos(aj)$ ve $c=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)$

dir**.**

İspat: İlk önce

$$\frac{1}{L(E)}a^n\sin(\alpha n)=\frac{a^n\left(-c\cos(\alpha n)+r\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}$$

$,\frac{1}{L(E)}a^n\cos(\alpha n)=\frac{a^n\left(r\cos(\alpha n)+c\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}$ olduğu gösterilsin.

$L(E)=a_0E^k+a_1E^{k-1}+\ldots+a_k$ ve $a_0=1$ dir. $\mu,\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$\frac{1}{L(E)}\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)$ alınarak verilenler ispatlansın

$\frac{1}{L(E)}\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)=\frac{1}{L\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)}\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)=\frac{1}{\left|L\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)\right|^2}\frac{\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)}{L\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)}$ dir. Payda

$$L\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}e^{\mu j}\left(\cos(aj)+i\sin(aj)\right)=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}e^{\mu j}\cos(aj)+i\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}e^{\mu j}\sin(aj)$$

polinomunun mutlak değerinin karesidir ve $a=e^{\mu}$ değişken değişimi uygulanırsa

$$\left|L\left(e^{(\mu+i\alpha)}\right)\right|^2=\left(\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\cos(aj)\right)^2+\left(\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)\right)^2$$

elde edilir.

$$r=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^{\mu j}\cos(aj),c=\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)$$

olarak yazılırsa

$$\left|L\left(e^{(\mu+i\alpha)}\right)\right|^2=r^2+c^2$$

olur. Pay

$$\frac{\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)}{L\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)}=e^{\mu n}e^{ian}\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}e^{\mu j}\left(\cos(aj)-i\sin(aj)\right)=e^{\mu n}e^{ian}\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}\cos(aj)+i\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}e^{\mu j}\sin(aj)$$

$$=a^n\left(\cos an+i\sin an\right)\left(\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\cos(aj)-i\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)\right)$$

$$=a^n\left(\cos an\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\cos(aj)+i\sin an\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)\right)$$

$$+ia^n\left(-\cos an\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\sin(aj)+\sin an\sum_{j=0}^{k}a_{k-j}a^j\cos(aj)\right)$$

$$=\left(ra^n\cos an+ca^n\sin an\right)+i\left(-ca^n\cos an+ra^n\sin an\right)$$

dir. Buna göre

$$\frac{1}{L(E)}a^n\sin(\alpha n)=\operatorname{Im}\frac{1}{L(E)}\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)=\frac{a^n\left(-c\cos(\alpha n)+r\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}$$

$$\frac{1}{L(E)}a^n\cos(\alpha n)=\operatorname{Re}\frac{1}{L(E)}\left(e^{(\mu+i\alpha)n}\right)=\frac{a^n\left(r\cos(\alpha n)+c\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}$$

elde edilir.

$$\sin(\alpha n+\beta)=\sin\alpha n\cos\beta+\cos\alpha n\sin\beta$$

ve

$$\cos(\alpha n+\beta)=\cos\alpha n\cos\beta-\sin\alpha n\sin\beta$$

özdeşlikleri kullanılarak

$$\frac{1}{L(E)}a^n\sin(\alpha n+\beta)=\frac{1}{L(E)}\left(a^n\sin\alpha n\cos\beta+a^n\cos\alpha n\sin\beta\right)$$

$$=\cos\beta\frac{1}{L(E)}\left(a^n\sin\alpha n\right)+\sin\beta\frac{1}{L(E)}\left(a^n\cos\alpha n\right)$$

$$=\cos\beta\left(\frac{a^n\left(-c\cos(\alpha n)+r\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}\right)+\sin\beta\left(\frac{a^n\left(r\cos(\alpha n)+c\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}\right)$$

$$=\frac{a^n}{r^2+c^2}\left(-c\cos\beta\cos(\alpha n)+r\cos\beta\sin(\alpha n)+r\sin\beta\cos(\alpha n)+c\sin\beta\sin(\alpha n)\right)$$

$$=\frac{a^n}{r^2+c^2}\left(-c\cos\beta\cos(\alpha n+\beta)+r\sin(\alpha n+\beta)\right)$$

$$\frac{1}{L(E)}a^n\cos(\alpha n+\beta)=\frac{1}{L(E)}\left(a^n\cos\alpha n\cos\beta+a^n\sin\alpha n\sin\beta\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos\beta \frac{1}{L(E)}\left(a^n \cos\alpha n\right) - \sin\beta \frac{1}{L(E)}\left(a^n \sin\alpha n\right) \\
&= \cos\beta\left(\frac{a^n\left(r\cos(\alpha n)+c\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}\right) - \sin\beta\left(\frac{a^n\left(-c\cos(\alpha n)+r\sin(\alpha n)\right)}{r^2+c^2}\right) \\
&= \frac{a^n}{r^2+c^2}\left(r\cos\beta\cos(\alpha n) - r\sin\beta\sin(\alpha n) + c\cos\beta\sin(\alpha n) + c\sin\beta\cos(\alpha n)\right) \\
&= \frac{a^n}{r^2+c^2}\left(r\cos\beta\cos(\alpha n+\beta) + c\sin(\alpha n+\beta)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir (Soykan vd, 2017).

6. LİNEER OLMAYAN SKALER FARK DENKLEMLERİ

Tezimizin bu bölümünde bazı lineer olmayan skaler fark denklemleri ve çözümleri incelenmiştir.

6.1. Otonom Denklemler

$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(n+1)=h(y(n)),\quad n_0\le n \tag{6.1.1}$$

denklemine *otonom denklem* denir. (6.1.1) denkleminin

$$y(n_0)=y_0$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümü

$$y(n)=h^{n-n_0}(y_0),\quad n_0\le n$$

olarak bulunur ve

$$\begin{aligned}
&h^0(y_0)=y_0\\
&h^1(y_0)=h(y_0)\\
&h^2(y_0)=h\big(h(y_0)\big)\\
&h^3(y_0)=h\Big(h\big(h(y_0)\big)\Big)\\
&\qquad\cdots
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir.

6.1.1. Örnek: $y(n+1)=\sqrt{y(n)}$, $y(0)=y_0$ problemi incelenmek istensin. Denklemde n yerine sırasıyla $0,1,2,\ldots,(n-1)$ alındığında

$$\begin{aligned}
&y(1)=\sqrt{y(0)}=\sqrt{y_0}\\
&y(2)=\sqrt{y(1)}=\sqrt{\sqrt{y_0}}\\
&y(3)=\sqrt{y(2)}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{y_0}}}\\
&\ldots\\
&y(n)=\sqrt{y(n-1)}=\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{\sqrt{y_0}}}}=(y_0)^{\frac{1}{2^n}},\quad 0\le n
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

6.2. Otonom Olmayan Denklemler

$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathrm{N}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere

$$y(n+1)=g(n,y(n)),\quad n_0\le n \tag{6.2.1}$$

denklemine *otonom olmayan denklem* denir. (6.2.1) denkleminin bazı özel durumları aşağıda incelenmiştir(Soykan vd, 2017).

6.2.1. Homojen Riccati Fark Denklemleri

$$y(n+1)y(n)+p(n)y(n+1)+q(n)y(n)=0 \tag{6.2.1.1}$$

denklemi *homojen Riccati fark denklemidir*. (6.2.1.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için $y(n)=\dfrac{1}{z(n)}$ dönüşümü yapılır ve bu dönüşüm sonrası elde edilen yeni denklem

$$\frac{1}{z(n+1)}\frac{1}{z(n)}+p(n)\frac{1}{z(n+1)}+q(n)\frac{1}{z(n)}=0$$

veya

$$q(n)z(n+1)+p(n)z(n)+1=0 \tag{6.2.1.2}$$

dir ve bu (6.2.1.2) denklemi birinci mertebeden bir lineer fark denklemidir.

6.2.1.1. Örnek: $y(n+1)y(n)+4y(n+1)+4y(n)=0$

Verilen Riccati fark denkleminin genel çözümü bulunmak istensin.

Bu denkleme $y(n)=\dfrac{1}{z(n)}$ dönüşümü uygulandığında

$$\frac{1}{z(n+1)}\frac{1}{z(n)}+4\frac{1}{z(n+1)}+4\frac{1}{z(n)}=0$$

$$4z(n+1)+4z(n)+1=0$$

birinci mertebeden lineer fark denklemi bulunur. Bu denklemin homojen denklemi

$$4z(n+1)+4z(n)=0 \tag{6.2.1.3}$$

olup bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $4\lambda+4=0$ dir ve karakteristik kökü de $\lambda=-1$ olarak bulunur. (6.2.1.3) homojen denkleminin genel çözümü c_1 keyfi sabit olmak üzere $z_H(n)=c_1(-1)^n$ olarak bulunur ve (6.2.1.3) denkleminin bir özel çözümü de c sabit olmak üzere $z_{Ö}(n)=c$ formunda olup denklemde yerine yazıldığında

$4c+4c+1=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{8}$ dir.

O halde verilen denklemin genel çözümü

$z(n)=c_1(-1)^n-\frac{1}{8}$, ($c_1$ keyfi sabit) olmak üzere

$y(n)=\frac{1}{z(n)}=\frac{1}{c_1(-1)^n-\frac{1}{8}}$ olarak bulunur.

6.2.2. Homojen Olmayan Riccati Fark Denklemleri

$$y(n+1)y(n)+p(n)y(n+1)+q(n)y(n)=g(n) \tag{6.2.2.1}$$

denklemi *homojen olmayan Riccati fark denklemidir*. (6.2.2.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için $y(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)$ dönüşümü yapılır ve bu dönüşüm sonrası elde edilen yeni denklem

$$\left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)}-p(n+1)\right)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)\right)+p(n)\left(\frac{z(n+2)}{z(n+1)}-p(n+1)\right)+q(n)\left(\frac{z(n+1)}{z(n)}-p(n)\right)=g(n)$$

veya

$$z(n+2)+\left[q(n)-p(n+1)\right]z(n+1)-\left[g(n)+q(n)p(n)\right]z(n)=0 \tag{6.2.2.2}$$

dir ve bu (6.2.2.2) denklemi ikinci mertebeden bir lineer fark denklemidir.

6.2.2.1. Örnek: $y(n+1)y(n)+2y(n+1)+4y(n)=-9$

homojen olmayan Riccati fark denklemini çözebilmek için

$y(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}-2$ dönüşümünü yapıldığında

$$z(n+2)+2z(n+1)+z(n)=0 \tag{6.2.2.3}$$

ikinci dereceden lineer fark denklemi elde edilir. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem $\lambda^2+2\lambda+1=0$ dir ve karakteristik kökü de $\lambda_1=\lambda_2=-1$ olarak bulunur. (6.2.2.3) homojen denkleminin genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabit olmak üzere $z_h(n)=(c_1+c_2n)(-1)^n$ olarak bulunur. O halde verilen denklemin genel çözümü

$$y(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}-2=\frac{(c_1+c_2(n+1))(-1)^{n+1}}{(c_1+c_2n)(-1)^n}-2=-\frac{1}{c_1+c_2n}(3c_1+c_2+3nc_2)$$

dir.

6.2.3. Genel Riccati Fark Denklemleri

$a(n)d(n)-b(n)c(n)\neq 0$ ve $n_0\leq n$ için $c(n)\neq 0$ olmak üzere

$$y(n+1)=\frac{a(n)y(n)+b(n)}{c(n)y(n)+d(n)} \qquad (6.2.3.1)$$

denklemine *genel Riccati fark denklemi* denir. Bu denklemde

$$y(n)=\frac{z(n+1)}{c(n)z(n)}-\frac{d(n)}{c(n)}$$

veya

$$c(n)y(n)+d(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}$$

dönüşümü yapılarak (6.2.3.1) fark denklemi

$$\frac{z(n+2)}{c(n+1)z(n+1)}-\frac{d(n+1)}{c(n+1)}=\frac{a(n)\left(\frac{z(n+1)}{c(n)z(n)}-\frac{d(n)}{c(n)}\right)+b(n)}{c(n)\left(\frac{z(n+1)}{c(n)z(n)}-\frac{d(n)}{c(n)}\right)+d(n)}$$

şeklini alır, bulunan bu ifade düzenlenecek olursa

$$z(n+2)+\left(-d(n+1)-\frac{a(n)c(n+1)}{c(n)}\right)z(n+1)+\left(\frac{a(n)d(n)c(n+1)}{c(n)}-b(n)c(n+1)\right)z(n)=0 \qquad (6.2.3.2)$$

formuna dönüşür.

$$p(n)=-d(n+1)-\frac{a(n)c(n+1)}{c(n)}$$

$$q(n)=\frac{a(n)d(n)c(n+1)}{c(n)}-b(n)c(n+1)$$

olarak alınırsa (6.2.3.2) denklemi

$$z(n+2)+p(n)z(n+1)+q(n)z(n)=0$$

şeklinde yazılabilir ve bu denklem ikinci mertebeden lineer bir fark denklemidir.

6.2.3.1. Örnek: $y(n+1)=\dfrac{-3y(n)-13}{y(n)+3}$ denklemi çözülmek istensin.

$a(n)=-3, b(n)=-13, c(n)=1, d(n)=3$ olup

$a(n)d(n)-b(n)c(n)=4\neq 0$ dir. O halde $y(n)=\dfrac{z(n+1)}{z(n)}-3$ dönüşümü uygulandığında

$$\frac{z(n+2)}{z(n+1)}-3=\frac{-3\left(\dfrac{z(n+1)}{z(n)}-3\right)-13}{\left(\dfrac{z(n+1)}{z(n)}-3\right)+3}$$

$$z(n+2)++4z(n)=0$$

ikinci mertebeden lineer denklem elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2+4=0$ olup karakteristik kökleri de $\lambda=\mp 2i$ bulunur. $r=2, \theta=\dfrac{\pi}{2}$ dir ve denklemin genel çözümü aşağıdaki gibidir.

$z_H(n)=c_1 2^n\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)+c_2 2^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$, ($c_1$ ve c_2 keyfi sabit)

O halde verilen denklemin çözümü

$$y(n)=\frac{z(n+1)}{z(n)}-3=\frac{c_1 2^{(n+1)}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(n+1)\right)+c_2 2^{(n+1)}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(n+1)\right)}{c_1 2^n\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)+c_2 2^n\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)}-3$$

$$=\frac{2\left[c_1\cos\left(\dfrac{\pi}{2}(n+1)\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(n+1)\right)\right]}{c_1\cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)+c_2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)}-3$$

olarak bulunur.

6.3. Homojen Fark Denklemleri

$k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $n_0 \le n$ olmak üzere

$$k\left(\frac{y(n+1)}{y(n)}\right)=0 \tag{6.3.1}$$

denklemine *homojen fark denklemi* denir ve bu denklemi lineerleştirmek için

$$z(n)=\frac{y(n+1)}{y(n)} \tag{6.3.2}$$

dönüşümü (değişken değiştirmesi) uygulanır (Soykan vd, 2017).

6.3.1. Örnek: $y^2(n+1)-(4+7^n)y(n+1)y(n)+4.7^n y^2(n)=0$

fark denklemi çözülmek istensin.

Verilen fark denklemi

$$\left[\frac{y(n+1)}{y(n)}\right]^2-(4+7^n)\left[\frac{y(n+1)}{y(n)}\right]+4.7^n=0$$

şeklinde yazılabilir ve bu denkleme $z(n)=\dfrac{y(n+1)}{y(n)}$ dönüşümü uygulanırsa

$$z^2(n)-(4+7^n)z(n)+4.7^n=0$$

ve

$(z(n)-4)(z(n)-7^n)=0$ denkleminin kökleri $z(n)=4$ ve $z(n)=7^n$ olarak bulunur. O halde

$y(n+1)=4y(n)$ ve $y(n+1)=7^n y(n)$ fark denklemleri ortaya çıkar. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$y(n)=c_1 4^n \text{ ve } y(n)=c_2\prod_{k=0}^{n-1}7^k, \ (c_1 \text{ ve } c_2 \text{ keyfi sabit}) \tag{6.3.3}$$

dir. Böylece verilen denklemin bütün çözümleri (6.3.3) şeklindedir.

6.4. Logaritmik Dönüşümle Çözülebilen Fark Denklemleri

$\forall n_0 \leq n$ için $0 < g(n)$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$y^{\alpha_1}(n+k)\, y^{\alpha_2}(n+k-1) \ldots y^{\alpha_{k+1}}(n) = g(n) \qquad (6.4.1)$$

denklemi için

$$z(n) = \ln y(n) \qquad (6.4.2)$$

dönüşümü uygulanırsa, sabit katsayılı lineer homojen olmayan

$$\alpha_1 z(n+k) + \alpha_2 z(n+k-1) + \ldots + \alpha_{k-1} z(n) = \ln g(n) \qquad (6.4.3)$$

denklemi elde edilir.

6.4.1. Örnek: $y(n+2)\, y^8(n) = y^6(n+1) e^{3n^2+2-5.3^n}$ fark denkleminin genel çözümü bulunmak istensin.

Verilen denklemin logaritması alındığında

$$\ln y(n+2) - 6\ln y(n+1) + 8\ln y(n) = 3n^2 + 2 - 5.3^n$$

denklemi elde edilir ve $z(n) = \ln y(n)$ dönüşümü uygulandığında

$$z(n+2) - 6z(n+1) + 8z(n) = 3n^2 + 2 - 5.3^n \qquad (6.4.4)$$

elde edilir. (6.4.4) denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 4$ dir ve c_1 ve c_2 keyfi sabit olmak üzere genel çözümü

$z_H(n) = c_1 2^n + c_2 4^n$ dir.

(6.4.4) denklemin özel çözümünü bulmak için de

$$z_Ö(n) = A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 3^n$$

aday özel çözümü ele alınabilir.

$$z_Ö(n+2) - 6z_Ö(n+1) + 8z_Ö(n) =$$

$$= A_1(n+2)^2 + A_2(n+2) + A_3 + A_4 3^{(n+2)} - 6\left[A_1(n+1)^2 + A_2(n+1) + A_3 + A_4 3^{(n+1)}\right] + 8\left[A_1 n^2 + A_2 n + A_3 + A_4 3^n\right]$$

$$= 3A_1 n^2 + (-8A_1 + 3A_2)n - 2A_1 - 4A_2 + 3A_3 - A_4 3^n$$

$$3n^2 + 2 - 5.3^n = 3A_1 n^2 + (-8A_1 + 3A_2)n - 2A_1 - 4A_2 + 3A_3 - A_4 3^n$$

eşitliğinden

$A_1 = 1, A_2 = 8/3, A_3 = 44/9, A_4 = 5$

sonuçları bulunur. (6.4.4) denkleminin özel çözümü

$z_{Ö}(n) = n^2 + 8/3\, n + 44/9 + 5.3^n$

olup bu denklemin genel çözümü

$z(n) = c_1 2^n + c_2 4^n + n^2 + 8/3\, n + 44/9 + 5.3^n$

dir. Buna göre verilen denklemin genel çözümü olarak

$y(n) = \exp\left(c_1 2^n + c_2 4^n + n^2 + 8/3\, n + 44/9 + 5.3^n\right)$ elde edilir.

6.4.2. Örnek: $y(n+2)\,y^2(n) = y^3(n+1)$, $y(1) = 1, y(2) = 2$

Başlangıç koşullarını sağlayan fark denkleminin çözümü bulunmak istensin. Verilen denklemin logaritması alındığında

$\ln y(n+2) - 3\ln y(n+1) + 2\ln y(n) = 0$

denklemi elde edilir ve $z(n) = \ln y(n)$ dönüşümü uygulandığında

$$z(n+2) - 3z(n+1) + 2z(n) = 0, \; z(1) = 0, z(2) = \ln 2 \qquad (6.4.5)$$

elde edilir. (6.4.5) denklemin karakteristik denklemi $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ve karakteristik kökleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 2$ dir ve c_1 ve c_2 keyfi sabit olmak üzere genel çözümü

$z_H(n) = c_1 + c_2 2^n$ dir.

(6.4.5) denklemindeki başlangıç koşulları uygulandığı zaman $c_1 = -\ln 2, c_2 = \frac{1}{2}\ln 2$ olup

$z_H(n) = \ln 2\left(-1 + 2^{(n-1)}\right)$

eşitliği bulunur. O halde

$\ln y(n) = \ln 2\left(-1 + 2^{(n-1)}\right)$

$y(n) = e^{\ln 2\left(-1+2^{(n-1)}\right)}$

$y(n) = 2^{\left(-1+2^{(n-1)}\right)}$

sonucu çıkar.

7. KARARLILIK

7.1. Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Kararlılıkları

Denge noktası fikri fiziksel sistemin dinamiklerinin merkez çalışmasını oluşturmaktadır. Biyolojide, fizikte, mühendislikte, ekonomideki gibi birçok uygulamalarda istenilen çözümler verilen sistemlerin denge noktasıyla ilgilidir. Bu bilimciler ve mühendisler için büyük önem taşıyan kararlılık teorisi çalışmasının temelini oluşturur (Elaydi, 2000).

Fark denklemleri popülasyon modellemeleri şeklinde de tanımlanabilir. Örneğin, popülasyon modellerinde bir nesil kendinden önceki nesil cinsinden de yazılmak istenildiğinde

$$y(n+1) = f(y(n)),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{7.1.1}$$

birinci mertebeden fark denklemi şeklinde yazılabilir. Burada $y(n+1)$, $y(n)$ fonksiyonunun $n.$ neslidir.

Bir başka açıdan incelendiğinde herhangi bir x_0 noktasından başlayarak bir

$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))),\ldots$

dizisi oluşturulabilir. Burada

$f^2(x_0) = f(f(x_0)), f^3(x_0) = f(f(f(x_0))),\ldots$ dizisi oluşturulabilir.

Burada $f(x_0)$, f nin x_0 noktasında birinci iterasyonu; $f^2(x_0)$, f nin x_0 noktasında ikinci iterasyonu ve iterasyon böyle devam edilerek $f^n(x_0)$, f nin x_0 noktasında $n.$ iterasyonunu gösterir. $f^0(x_0) = x_0$ olmak üzere tüm pozitif $\{f^n(x_0) : 0 \le n\}$ iterasyonlar kümesi, x_0 noktasında *pozitif yörünge(positive orbit)* olarak isimlendirilir ve $O(x_0)$ olarak gösterilir. Bu iterasyon süreci de *ayrık dinamik sistemlerin(discrete dynamical system)* bir örneğidir.

7.1.1.Tanım (Denge Noktası**):** Bir x^* noktası f fonksiyonunun tanım bölgesinde ve

$f(x^*) = x^*$

eşitliğini sağlıyorsa bu x^* noktası (7.1.1) denkleminin *denge noktası (equilibrium point)* denir.

Başka bir ifade ile x^* noktası fonksiyonun

$$y(0) = x^*$$
$$y(1) = f\left(y(1)\right) = x^*$$
$$y(2) = f\left(y(2)\right) = f\left(x^*\right) = x^*$$
$$\ldots$$

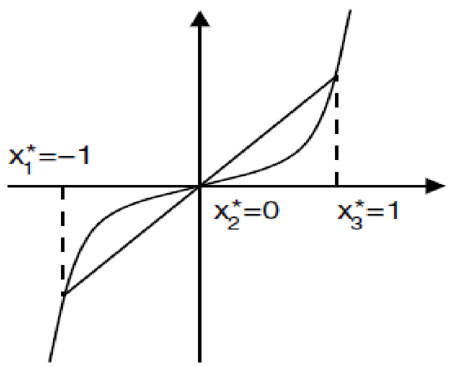
sabit noktası olduğu görülür.

Denge noktasını koordinat düzleminde gösterilmek istenirse f fonksiyonun grafiği ile $y = x$ birinci açıortay doğrusunun kesiştiği x noktasıdır (Elaydi, 2000).

Örneğin, $y(n+1) = y^3(n)$ denklemi üç denge noktasına sahiptir.

$$f(x) = x^3$$
$$f(x^*) = x^* \;\Rightarrow\; x = x^3$$

eşitliğini sağlayan x değerleri $\{-1, 0, 1\}$ denklemin denge noktalarıdır, bu noktalar koordinat düzleminde aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 7.1.1. $f(x) = x^3$ fonksiyonun denge noktaları

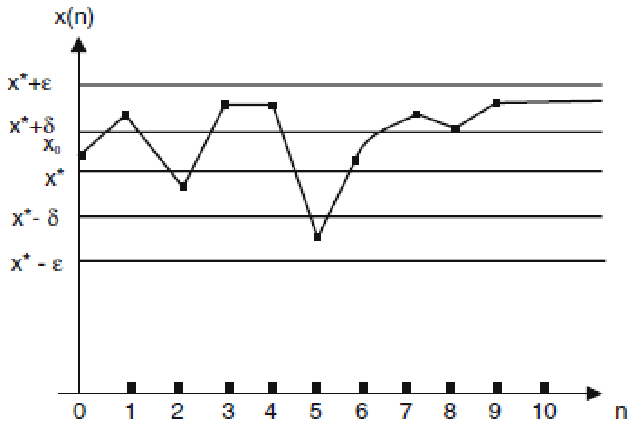
Fark denklemlerinin çözümü her zaman denge noktası olmayabilir. Birkaç sonlu iterasyon sonucunda çözüm denge noktasına ulaşabilir, başka bir ifade ile denklem sonlu zaman içinde denge durumuna ulaşabilir.

7.1.2. Tanım: x, f nin tanım kümesinde bir nokta olmak üzere

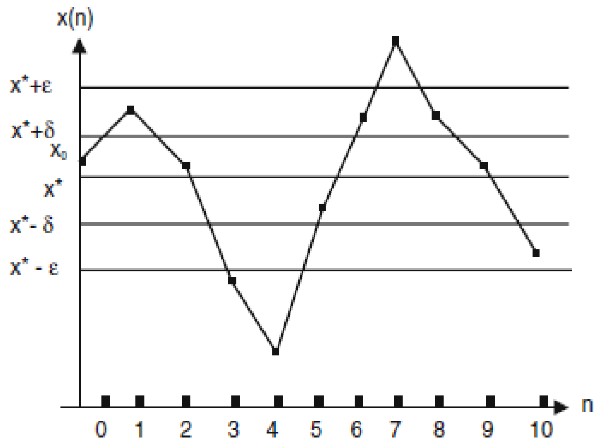
$f^{r}(x)=x^{*}$ ve $f^{r-1}(x)\neq x^{*}$

olacak şekilde bir $r\in\mathbb{Z}^{+}$ ve (7.1.1) denkleminin x^{*} denge noktası varsa, x e *nihai denge noktası (eventually equilibrium (fixed) point)* denir.

7.1.3. Tanım : (a) Eğer $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall 0<n$ değerleri için $\left|x_0-x^{*}\right|<\delta$ olacak şekilde $\left|f^{n}(x_0)-x^{*}\right|<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $\exists\delta>0$ varsa, (7.1.1) denkleminin x^{*} denge noktası *kararlıdır (stable)* denir (Şekil 7.1.2). Kararlı olmayan denge noktasına *kararsızdır (unstable)* denir (Şekil 7.1.3).



Şekil 7.1.2. (Elaydi, 2000) x^{*} denge noktası kararlı

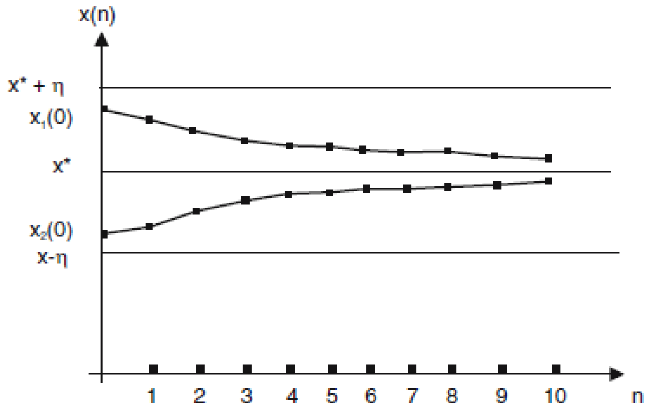


Şekil 7.1.3 (Elaydi, 2000) x^{*} denge noktası kararsız

(b) $\left|x(0)-x^{*}\right|<\eta$ iken $\lim_{n\to\infty}x(n)=x^{*}$ sağlayan bir $0<\eta$ sayısı varsa, x^{*} noktasına *çekicidir(attracting)* denir.

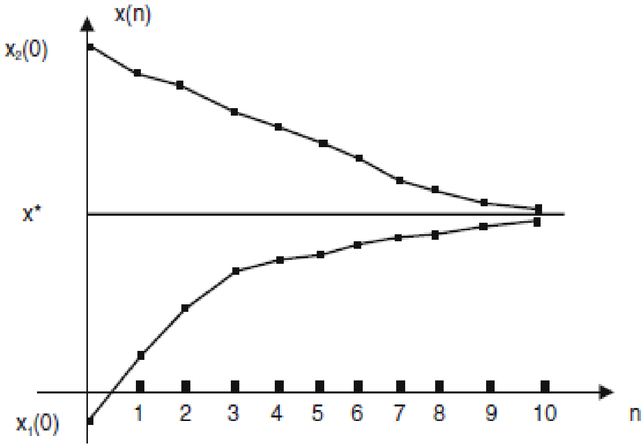
Eğer $\eta = \infty$ ise x^* noktasına *global çekicidir(global attractor or globally attracting)* denir.

(c) x^* noktası kararlı ve çekici ise, bu noktaya *asimtotik kararlı denge noktası (asymptotically stable equilibrium point)* denir.



Şekil 7.1.4. (Elaydi, 2000) x^* denge noktası asimtotik kararlı

Eğer $\eta = \infty$ ise x^* noktasına *global asimtotik kararlıdır(globally asymptotically stable)* denir.



Şekil 7.1.5. (Elaydi, 2000) x^* denge noktası global asimtotik kararlı

7.1.4. Teorem: x^* noktası, $y(n+1) = f(y(n))$ fark denkleminin denge noktası ve f bu noktada sürekli türevlenebilir olsun. Buna göre,

i. $\left| f\left(x^*\right) \right| < 1$ ise x^* noktası *asimtotik kararlıdır(asymptotically stable).*

ii. $1 < \left| f\left(x^*\right) \right|$ ise x^* noktası *kararsızdır(unstable).*

İspat: (i) $\left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right| < \mathrm{A} < 1$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\forall x \in K$ için $\left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right| < \mathrm{A} < 1$ olacak şekilde x^{*} noktasını bulunduran bir $K = (x^{*} - \alpha, x^{*} + \alpha)$ aralığı vardır.

$x(0) \in K$ için

$$\left|x(1) - x^{*}\right| = \left|f\left(x(0)\right) - f\left(x^{*}\right)\right|$$

Ortalama değer teoreminden

$$\left|f\left(x(0)\right) - f\left(x^{*}\right)\right| = \left|f^{'}(\eta)\right|\left|x(0) - x^{*}\right|$$

olacak şekilde $x(0) < \eta < x^{*}$ eşitsizliğini sağlayan bir η sayısı vardır. Buradan

$$\left|f\left(x(0)\right) - f\left(x^{*}\right)\right| \le A\left|x(0) - x^{*}\right|$$

$$\left|x(1) - x^{*}\right| \le A\left|x(0) - x^{*}\right| \qquad (7.1.2)$$

$A < 1$ koşulundan ve (7.1.2) denkleminden anlaşılacağı gibi $x(1)$ değeri $x(0)$ noktasına göre x^{*} denge noktasına daha yakındır ve $x(1) \in K$ dir. Tümevarım yöntemiyle

$$\left|x(n) - x^{*}\right| \le A^{n}\left|x(0) - x^{*}\right|$$

eşitsizliği elde edilir. O halde bir $\varepsilon > 0$ ve $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2A}$ seçilecek olursa, $\forall n_0 \le n$ değerleri için $\left|x(0) - x^{*}\right| < \delta$ olduğunda $\left|x(n) - x^{*}\right| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır, bu da kararlılığın tanımıdır. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty}\left|x(n) - x^{*}\right| = 0$ denkleminden $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^{*}$ sonucu çıkar, bu durumda x^{*} denge noktası asimtotik kararlıdır.

(ii) $1 < \mathrm{B} < \left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right|$ olduğunu kabul edelim. O zaman f' nün sürekliliği ve $\forall x \in L$ için $1 < \mathrm{B} < \left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right|$ olacak şekilde x^{*} noktasını bulunduran bir $L = (x^{*} - \alpha, x^{*} + \alpha)$ aralığı vardır.

$x(0) \in L$ için

$$\left|x(1) - x^{*}\right| = \left|f\left(x(0)\right) - f\left(x^{*}\right)\right|$$

eşitliği yazılabilir ve benzer şekilde Ortalama Değer Teoreminden

$\left| f\left(x(0)\right)-x^{*}\right| \geq B\left|x(0)-x^{*}\right|$

$\left|x(1)-x^{*}\right| \geq B\left|x(0)-x^{*}\right|$

ve tümevarım yöntemiyle

$\left|x(n)-x^{*}\right| \geq B^{n}\left|x(0)-x^{*}\right|$

eşitsizliği bulunur. Bu durumda $B>1$ olduğunda $\left|x(0)-x^{*}\right|<\delta$ iken $\left|x(n)-x^{*}\right|<\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan $\exists\delta>0$ sayısı bulunmaz ve x^{*} denge noktası kararsızdır denir.

Eğer $\left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right|\neq 1$ ise dinamik sistemlerde x^{*} denge noktasına *hiperbolik (hyperbolic)* denir. $\left|f^{'}\left(x^{*}\right)\right|=1$ eşitliği verildiğinde x^{*} denge noktasının kararlılığı hakkında yorum yapılamamaktadır. O yüzden $f^{'}\left(x^{*}\right)=1$ ve $f^{'}\left(x^{*}\right)=-1$ durumlarının kararlılığı ayrı ayrı incelenecektir.

7.1.5. Teorem: (7.1.1) fark denkleminin x^{*} denge noktası için $f^{'}\left(x^{*}\right)=1$ ise;

i. $f^{''}\left(x^{*}\right)\neq 0$ ise x^{*} denge noktası kararsızdır

ii. $f^{''}\left(x^{*}\right)=0$ ve $0<f^{'''}\left(x^{*}\right)$ ise x^{*} denge noktası kararsızdır.

iii. $f^{''}\left(x^{*}\right)=0$ ve $f^{'''}\left(x^{*}\right)<0$ ise x^{*} denge noktası asimtotik kararlıdır (Elaydi, 2000).

7.1.6. Lemma (Schwarzian türevi**):**

$$Sf(x)=\frac{f^{'''}(x)}{f^{'}(x)}-\frac{3}{2}\left(\frac{f^{''}(x)}{f^{'}(x)}\right)^{2}$$

$f^{'}(x^{*})=-1$ için

$Sf(x^{*})=-f^{'''}(x^{*})-\frac{3}{2}\left(f^{''}(x^{*})\right)^{2}$ bulunur.

7.1.7. Teorem: (7.1.1) fark denkleminin x^* denge noktası için $f'\left(x^*\right) = -1$ ise;

i. $Sf(x^*) < 0$ ise x^* denge noktası asimptotik kararlıdır.

ii. $0 < Sf(x^*)$ ise x^* denge noktası kararsızdır (Elaydi, 2000).

7.1.7.1. Örnek: $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$

denkleminin denge noktalarının kararlılık durumlarına bakılsın.

Denklemin denge noktaları

$x_1^* = 0, \quad x_2^* = -2$ dir.

$f'(x) = 2x+3 \quad \Rightarrow f'(0) = 3 > 0$ teorem (7.1.4 ii) den x^* denge noktası kararsızdır.

$\Rightarrow f'(-2) = -1$ sonucuna göre teorem (7.1.1) uygulanır ve

$Sf(2) = -f'''(2) - \frac{3}{2}\left(f'''(2)\right)^2 = -12 < 0$ bulunur o halde x^* denge noktası asimtotik kararlıdır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle fark denklemlerinin tarihçesi verilerek bu denklemlerin gelişim sürecini görmemize fırsat sağlamıştır. Son kırk yıldır fark denklemlere gösterilen önemin artması bu konuya olan ilgiyi arttırmış ve paralelinde de çalışmalar da artmıştır.

Tezimizin sonraki bölümlerinde birinci, ikinci, k. mertebeden lineer fark denklemlerinin homojen, homojen olmaması; sabit katsayılı, değişken katsayılı olma durumları incelenmiş ve çeşitli örneklerle bu konu desteklenmiştir. İkinci mertebeden değişken katsayılı lineer homojen olmayan fark denklemleri operatörlerin çarpanlara ayrılması ve bir çözümün bilinmesi yöntemleri detaylı bir şekilde incelenerek konunun daha anlaşılır olması sağlanmıştır.

Lineer olmayan skaler fark denklemlerinin otonom, otonom olmayan denklemler, homojen denklemler ve logoritmik dönüşümle lineer hale getirilebilen fark denklemlerinden bahsedilmiştir. Otonom olmayan fark denklemlerinden Riccati fark denklemleri detaylı bir şekilde incelenmiştir.

Son yıllarda lineer olmayan fark denklemleri konusu birçok bilim dalının ilgi alanı haline gelmiştir. Fakat bu konu üzerine yapılan çalışmaların azlığı ve özellikle Türkçe kaynak yetersizliği ülkemiz için bir eksikliktir. Bu nedenle araştırmacıların lineer olmayan fark denklemleri üzerinde çalışmalar yapmaları desteklenmeli ve cesaretlendirilmelidir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., 1997. Advanced Topics in Difference Equation, Kluwer Academic Publishers, London, England.

Agarwal, R.P., 2000. Difference Equations and Inequalities, Chapter 1, Marcel Dekker, New York, USA.

Agarwal, R.P., Grace, S.R. and O'Regan, D., 2000. "Oscillation Theory for Difference and Differential Equations", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Akın Ö, 1988. Nümerik Analiz, Ankara Üniversitesi Yayınları, Ankara.

Akın, Ö. ve Bulgak, H. 1998. Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi. Selçuk Üniversitesi Rektörlüğü Basımevi, 180, Konya.

Bayar, E.,2012. Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemleri İçin Çözüm Yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Denizli.

Bereketoğlu H., Kutay V., 2011. Fark Denklemleri, Gazi Kitabevi, Ankara.

Bolat, Y., 2003. Yüksek Basamaktan Fark Denklemlerinin Salınımlılığı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Çatal, S., (Ocak 2004) Cebirsel Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemlerin Fark
Denklemleri ile Çözümü, Dokuz Eylül Üniversitesi Fen ve Mühendislik Dergisi, 6(1): 129-138.

Elaydi, S., (2000), An Introduction to Difference Equations Third Edition, Springer, New York.

Elaydi, S. and Peterson, A. 1988. Stability of di¤erence Equations. Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Differential Equations, edited by Aftabizadeh R.,417-422.

Elaydi, S. and Harris, W. 1998. On the Computation of An . SIAM Review, 40 (4), 965-971.

Erbe ve Zhang, 1989. Oscillation of discrete analogues of delay equations Differential Integral Equations, New York.

Györi, I. And Ladas, G., 1991. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford, England.

Goldberg S., 1958. Introduction to Difference Equations, Chapter 1, Chapter 3, Yohn Wiley and Sons, New York, USA.

Kelly G. W., Peterson, C. A., 2001. Difference Equations: An Introduction with Applications, Academic Press, San Diego

Kır, İ.,2007. Yüksek Mertebeden Fark Denklemlerinin Çözümleri Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kulenovic, M. R. S., Kalabusic, S., 2000. Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island, http://fibonacci.math.uri.edu/~kulenm/diffeqaturi/m381f00fp/m381f00mp.htm

Kulenovic M. R. S., Ladas G., Prokup N. R., 2001. A Rational Difference Equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 41, 671-678.

Lakshmikantham V., Trigiante D., 2002. Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications second edition, Marcel Dekker, New York.
Hildebrand F.B., 1968. Finite-Difference Equations and Simulations, Chapter 1, Chapter 2, Prentice Hall Inc., New Jersey, USA.

Levy H., Lessman F., 1961. Finite Difference Equations, The Macmillan Company, New York.

Li, W.T., 1997. Oscillation criteria for first-order neutral nonlinear difference equations with variable coefficients, Pergamon Applied Mathematics Letters, Vol. 10, No. 6, pp. 101-106.

Li, W.T. and Saker, S.H., 2003. Oscillation of second-order sublinear neutral delay difference equations, N-H Elsevier Applied Mathematics and Computation, Vol. 146, pp. 543-551.

Lin, X., 2005. Oscillation for higher-order neutral superlinear delay difference Equations with unstable type, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 50, pp. 683-691.

Mickens, R.E., 1990. Difference Equations, Chapter 4, Van Nostrand Reinhold, Newyork.

Miller, K. S. 1968. Linear Di¤erence Equations. W. A Benjamin, New York.

Önay, O., 2009. Fark Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstanbul.

Soykan Y., Göcen M., Gümüş M., 2017. Lineer Fark Denklemleri, Nobel Kitapevi, 232s, Ankara.

Spiegel, M. R., (1971) Schaum's Outline of Theory and Problems of Calculus of Finite Differences and Difference Equations, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Inc., New York.

Spiegel R. Murray., 1971. Calculus of Finite Differences and Difference Equations Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.

Tang, X.H. and Liu, Y.J., 2001, Oscillation for nonlinear delay difference equations, Tamkang J. Math. Vol.32, pp. 275-280.

Thandapani, E., Ravi, K. and Graef, J.R. 2001. Oscillation and comparison theorems for half-linear second-order difference equations, Pergamon Applied Mathematics Letters, Vol. 42, pp. 953-960.

Weisstein E., 1999. MathWorld, A Wolfram Web Resource, CRC Pres LLC, http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html.

Weisstein W. Eric, 1999. Crc Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition, United States of America.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Firdevs YILDIZ
Doğum Yeri ve Yılı	: Dazkırı, 1985
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce, Almanca
E-posta	: firdevsyildiz0@gmail.com.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Burdur Anadolu Öğretmen Lisesi, 2003
Lisans	: Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi, Matematik Öğretmenliği, 2009

Mesleki Deneyim

Özel Dinar Dersanesi	2009-2010
Diyarbakır Hani ÇPAL	2014-2015
Döşemealtı OSB Mesleki ve Teknik AL	2015-2016
Kars Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2016-2016
Kars Kız AİHL	2016-...