**T.C.**
**GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# FARKLI TABAN FONKSİYONLARI VE EN İYİ LİNEER YAKLAŞTIRIM

**YAKUP HACIALİOĞLU**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE**
**2015**

**T.C.**
**GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# FARKLI TABAN FONKSİYONLARI VE EN İYİ LİNEER YAKLAŞTIRIM

**YAKUP HACIALİOĞLU**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. YÜCEL ENGİNER
II. DANIŞMANI
YRD. DOÇ. DR. İREM YAMAN

**GEBZE**
**2015**

**T.R.**

**GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY**

**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

# DİFFERENT BASIS FUNCTIONS AND BEST LINEAR APPROXIMATIONS

**YAKUP HACIALİOĞLU**

**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF**

**MASTER OF SCIENCE**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

THESIS SUPERVISOR

ASSIST. PROF. DR. YÜCEL ENGİNER

II. THESİS SUPERVİSOR

ASSIST. PROF. DR. İREM YAMAN

**GEBZE**

**2015**

| GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ | **YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU** |
|---|---|

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ......./......./........ tarih ve ........../.......... sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Yakup HACIALİOĞLU'nun tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER

ÜYE
(II. TEZ DANIŞMANI): Yrd. Doç Dr. İrem YAMAN

ÜYE : Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. H. Gülay ALGÜL

**ONAY**

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./....../....... tarih ve ......./....... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

# ÖZET

Bu tez toplam altı bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde giriş kısmı bulunmakta olup burada tezin amacını belirttik. İkinci bölümde tez için gerekli olan bazı temel tanım ve kavramları verdik. Üçüncü bölümde fonksiyonlara polinomlar üzerinden en iyi yaklaştırımın varlığının sağlanması için gerekli bazı koşulları verdik. Dördüncü bölümde sürekli ve ayrık fonksiyonlara en iyi yaklaştırımın farklı normlar üzerinde nasıl karakterize edildiğini inceledik. Beşinci bölümde sürekli ve ayrık fonksiyonlara polinomlar üzerinden en iyi yaklaştırımın tekliği için koşulları ele aldık. Son bölümde sürekli fonksiyonlara Gauss Quadrature yardımı ile $\ell_1$ normunda en iyi yaklaştırımı ele alan matlab çalışmamız oldu.

**Anahtar Kelimeler: Polinom yaklaştırımı, En iyi yaklaştırım, En küçük kareler, Sayısal Integrasyon, Gauss Kuadratür.**

# SUMMARY

The first chapter includes the purpose of the thesis. In the second chapter, we present some basic definitions and useful notions. In the third chapter, we give some necessary conditions in order to satisfy the existence of the best approximation of the functions in terms of polynomials. In the fourth chapter, we examine how it is characterized the best approximation to continuous and discrete functions on different norms. In the fifth chapter, we give some necessary conditions in order to satisfy the uniqueness of the best approximation of the functions in terms of polynomials. In the last section we write matlab codes which computes the best approximation on $\ell_1$ norm to continuous function with the help of Gauss Quadrature.

**Key Words: Polynomial approximation, Best approximation, Least squares, Numerical Integration, Gauss Quadrature.**

# TEŞEKKÜR

Beni yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. İrem YAMAN'a, ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Yücel ENGİNER'e Bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli arkadaşım Sait ERKOVAN'a, ve göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili eşim Dilek HACIALİOĞLU'na en içten teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler ve Kısaltmalar** | | **Açıklamalar** |
|---|---|---|
| $C[a,b]$ | : | $a$ ve $b$ kapalı aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlar |

# ŞEKİLLER DİZİNİ

# TABLOLAR DİZİNİ

# 1. GİRİŞ

Uygulamalarda fonksiyonun analitik yapıları, ki genellikle bu yapı oldukça karmaşık olmaktadır, ya da ayrık noktalarda değerleri elde olmaktadır. Ayrık noktalarda değerleri bilinen fonksiyonlarla işlem yapmak için onları analitik yapısı bilinen bir fonksiyonla yaklaştırmak yoluna gidilmektedir. Yaklaştırım fonsiyonun seçimi, sonuçların tutarlılığı ve hesaplama karmaşıklığı açısından önemlidir. Yaklaştırım fonksiyonu oluştururken hem bilgisayarda programlaması kolay fonksiyonlar seçmek hem de yaklaştırımın iyi sonuçlar vermesi arzulanır. Programlaması kolay denildiğinde akla ilk gelen fonksiyonlar polinomlardır. Hem süreklilik özellikleri, hem türev ve integrallerinin kolay hesaplanabiliyor olması hem de bilgisayarda 4 işlem ile oluşturulabiliyor olmaları polinomları yaklaştırım teorisinin belki de en popüler fonksiyonları haline getirmiştir. Yaklaştırım fonksiyonu olarak polinomlar seçildikten sonra iyi sonuçlar elde etmek de yaklaştırım yöntemine bağlıdır.

Bazı durumlarda uygulama sonuçlarında fonksiyonun analitik yapısı da elde olabilir. Fakat genellikle bu yapı bilgisayarda direk kullanmaya uygun değildir (4 işlemle oluşturulamaz). Böyle durumlarda da yine fonksiyonu daha basit yapıda bir fonksiyonla yaklaştırmak anlamlı olmaktadır.

Analitik yapısı bilinen veya ayrık noktalarda değerleri bilinen fonksiyonları yaklaştırmak için farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bu tezde her iki tipteki fonksiyonlar için de en iyi polinom yaklaştırımı yöntemi üzerinde durulmuştur. Bu yöntemin amacı yaklaştırım fonksiyonu (derecesi önceden belirlenen bir polinom) ile yaklaştırılacak fonksiyonun (esas fonksiyon) farkının normunu minimize etmektir. Seçilecek norm esas fonksiyonun nasıl verildiği ile ilgilidir. Bu tezde ayrık ve sürekli fonksiyonlar için en sık kullanılan normların tanımları yapılmış, bu normlar kullanılarak yapılan yaklaştırımların varlık, teklik ve karakterizasyonları incelenmiştir.

Yukarıda belirtilen konularda literatürde olan sonuçların ayrıntılı bir şekilde verilmesinin yanı sıra, bu çalışmada, analitik yapısı verilen sürekli bir fonksiyon için $\ell_1$ normu kullanılarak en iyi polinom yaklaştırımını elde eden Matlab algoritması Gauss kuadratürü yardımı ile geliştirilmiştir.

Bazı temel tanım ve kavramları vermek faydalı olacaktır.

# 2. TEMEL TANIMLAR İLE KAVRAMLAR

*Tanım 2.1: $S$ bir doğrusal vektör uzayı ve $\| \,.\, \|$: $S \to \mathbb{R}_+$, $x \in S$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyon olsun.*

- $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$,
- $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

*Bu durumda $(S, \| \,.\, \|)$ uzayına normlu doğrusal uzay denir [2].*

Uygulamalarda sıklıkla kullanılan normlu doğrusal uzaylardan bazıları aşağıdaki şekilde verilmiştir. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ve $f \in C[a, b]$ olsun.

i) $(\mathbb{R}^N, \| \,.\, \|)$

$$\ell_p : \| \mathbf{x} \|_p = \left[ \sum_{k=1}^{N} | x_k |^p \right]^{1/p} , \ 1 \leq p < \infty \tag{2.1}$$

$$\ell_\infty : \| \mathbf{x} \|_\infty = \max_{k=1,\ldots,N} | x_k | \,. \tag{2.2}$$

ii) $(C[a, b], \| \,.\, \|)$

$$L_p : \| f \|_p = \left[ \int_a^b | f |^p dx \right]^{1/p} , \qquad 1 \leq p < \infty, \tag{2.3}$$

$$L_\infty : \| f \|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) | \,. \tag{2.4}$$

## 2.1. En İyi Yaklaştırım Problemi

$S$ normlu doğrusal uzay olmak üzere, $M$, $S$'nin bir alt kümesi olsun. $\forall x \in S$ noktasına karşılık $M$ kümesinde $\forall y \in M$ için $\| x - y^* \| \leq \| x - y \|$, bir $y^* \in M$ var ise buna $M$'den $x$'ye yapılan en iyi yaklaştırım denir. Bu $y^*$ elemanını (var ise) bulma problemine de *“en iyi yaklaştırım problemi"* denir.

Burada incelenmesi gereken temel unsurlar

- En iyi yaklaştırımın varlığı,
- En iyi yaklaştırım var ise tekliği,
- En iyi yaklaştırımın karakterizasyonunudur.

Sırasıyla bu maddeleri inceleyelim.

# 3. EN İYİ YAKLAŞTIRIMIN VARLIĞI

En iyi yaklaştırımın hangi koşullarda var olduğunu incelemeden önce bir $x \in S$ noktasına, $M \subset S$ olmak üzere $M$ kümesinden en iyi yaklaştırımın her zaman bulunamayacağını gösteren bir örnek vermek yerinde olacaktır.

*Örnek 3.1: $S = (\mathbb{R}^2, \| \; . \; \|)$ ve $\mathbf{x} = (0,0)^T \in S$ olsun. $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $S$ normlu doğrusal uzayının bir alt kümesi olan $M$'yi aşağıdaki şekilde alalım.*

$$M = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = (e^{a_1}, \ln a_2)^T, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

*Bu durumda $\mathbf{x}$ noktasına yaklaşmak amacı ile $a_2$'yi bir seçip $a_1$'i de negatif yönde büyütebiliriz. Fakat $e^{a_1}$'i sıfıra istenildiği kadar yakın yapmak mümkündür. Yani $\mathbf{x}$'ye $M$'den en iyi yaklaştırım elde etmek mümkün olmayacaktır.*

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi en iyi yaklaştırım probleminde yaklaştırımın varlığını garanti altına almak için bazı özel koşullar gerekmektedir. Bu özel koşulların ne olduğunu vermeden önce bazı tanım ve teoremleri hatırlamak yerinde olacaktır.

*Tanım 3.1: $S$ normlu uzay, $M \subset S$ olmak üzere $M$'nin içindeki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse $M$'ye kompakt küme denir [2].*

*Tanım 3.2: $M$, $S$'nin bir alt kümesi ve $\forall y \in M$ için $c$ sabit olmak üzere $\| \; y \; \| \leq c$ oluyorsa $M$'ye sınırlı küme denir [6].*

*Teorem 3.1: Normlu uzayda her kapalı, sınırlı sonlu boyutlu küme kompakttır [6].*

*Teorem 3.2: $M \subset S$, kompakt bir küme olsun. $\forall x \in S$ noktasına karşılık, $M$ kümesinde $x$'e en yakın olan $y^* \in M$ elemanını bulmak mümkündür ($x$'ye $M$'den yapılan en iyi yaklaştırım) [1].*

En iyi yaklaştırımın varlığını garantilemek için aşağıdaki teorem oldukça etkin olarak kullanılmaktadır.

*Teorem 3.3: Eğer $M \subset S$, $S$'nin bir sonlu boyutlu alt uzayı ise $\forall x \in S$ noktasına karşılık, $M$ kümesinde $x$'e en yakın olan $y^* \in M$ elemanını bulmak mümkündür [1].*

*İspat 3.1: $M$, $S$'nin bir alt uzayı olsun. Bir $x \in S$ elemanına karşılık keyfi bir $y \in M$ için aşağıdaki şekilde küme oluşturalım.*

$$M = \{y^* : y^* \in M : \quad \| y^* - x \| \leq \| x - y \|\}. \tag{3.2}$$

- *$S$ sonlu boyutlu olduğundan, $M$'de sonlu boyutludur.*
- *$M$, $S$'de kapalı bir yuvar olduğundan kapalıdır.*
- *Aşağıda verilen eşitsizlik*

$$\begin{cases} \| y^* - x + x \| \leq \| y^* - x \| + \| x \| \leq \| y - x \| + \| x \| \\ \| y^* \| \leq \| y - x \| + \| x \| \end{cases} \tag{3.3}$$

*sağlandığından $M$ sınırlıdır. Dolayısıyla $M$ kompakttır ve Teorem (3.3)'dan, $x$'e en yakın olan $y^*$ elemanını bulmak mümkündür.*

Teorem (3.3)'da verilmiş olan sonlu boyutlu olma hipotezi gereklidir, düşürülemez. Bu gerekliliğin daha iyi anlaşılması için aşağıdaki örnek yararlı olacaktır. Fakat önce bu örnekte kullanacağımız bir teoremi verelim.

*Teorem 3.4: Weierstrass Yaklaştırım teoremi: $f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \epsilon > 0$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $| f(x) - p_m(x) | < \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan $[a, b]$'de tanımlı bir $p$ polinomu vardır [2].*

*Örnek 3.2: $S = (C[a, b], L_\infty)$ olsun. $M$ kümesi keyfi dereceden polinomlardan oluşan altuzay olsun. Weierstrass teoremine göre $\forall \epsilon > 0$ olmak üzere $[a, b]$ de tanımlı bir $p$ polinomu vardır ki her $x \in [a, b]$ için $| f(x) - p(x) | < \epsilon$ eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $f$ fonksiyonuna bir polinomla istenildiği kadar yaklaşmak mümkündür. Bu da en iyi yaklaştırımın bulunamayacağını söyler.*

## 3.1. Sürekli Fonksiyonlar İçin En İyi Yaklaştırımın Varlığı

$S = (C[a, b], \| \, . \, \|)$ olsun. $M \subset S$ kümesini de aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$M = P_n = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j g_j(x), a_j \in \mathbb{R}, g_j(x) \in C[a,b] \right\}. \tag{3.4}$$

$P_n$'nin $S$'nin bir alt uzayı olduğu açıktır. Teorem (3.3)'a göre, verilen her $f \in C[a,b]$ için bir $p^* \in P_n$ vardır ki $\| f - p^* \| \leq \| f - p \|$ eşitsizliği her $p \in P_n$ için sağlanır.

## 3.2. Ayrık Fonksiyonlar İçin En İyi Yaklaştırımın Varlığı

$S = (\mathbb{R}^N, \| \, . \, \|)$ ve $X = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset C[a,b]$ olsun. $M \subset S$ kümesini de aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\begin{cases} M = P_n^{(G)} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{a}, \;\; G_{ij} = g_j(x_i), \;\; g_j(x) \in C[a,b], a_j \in \mathbb{R}, \\ \qquad i = 1, \ldots, N, j = 0, \ldots, n\} \end{cases} \tag{3.5}$$

$P_n^{(G)}$, $\mathbb{R}^N$'nin bir alt uzayıdır. Teorem (3.3)'a göre $S$'deki her noktaya en yakın uzaklıkta bir $\mathbf{p}^* \in P_n^{(G)}$ vektörü bulunabilir. Bu da şu anlama gelmektedir. Eğer $\mathbf{f}$, $X$ üzerinde $\mathbf{f} = (f(x_1), \ldots, f(x_N))^T$ şeklinde verilmiş reel değerli bir fonksiyon ve $p \in P_n$ olmak üzere $\mathbf{p} = (p(x_1), \ldots, p(x_N))^T$ ise $\| \mathbf{f} - \mathbf{p}^* \| \leq \| \mathbf{f} - \mathbf{p} \|$,eşitsizliğini her $p \in P_n^{(G)}$ için sağlayan bir $\mathbf{p}^* \in P_n^{(G)}$ vardır.

Dolayısıyla ayrık noktalarda değerleri veya analitik yapısı verilen sürekli bir fonksiyona derecesi sabit bir polinom ile herhangi bir normda yapılacak en iyi yaklaştırımın var olduğu gösterilmiş olur. Şimdi bu yaklaştırımın nasıl karakterize edileceğine bakalım.

# 4. EN İYİ YAKLAŞTIRIMIN KARAKTERİZE EDİLMESİ

## 4.1. Sürekli Fonksiyonlarda En İyi Yaklaştırımın Karakterize Edilmesi

En iyi yaklaştırımın karakterizasyonunu farklı normlar için incelemeden önce aşağıdaki tanımları verelim.

*Tanım 4.1: $X$ bir kompakt küme, $\phi(x), i = 1, 2, \ldots, n$ fonksiyonları $X$ üzerinde tanımlı olsun. Eğer $\phi(x)$'lerin aşikar olmayan doğrusal birleşimleri, $X$ üzerinde en fazla $(n-1)$ tane köke sahipse bu fonksiyonlardan oluşan kümeye "Chebyshev kümesi" denir [6].*

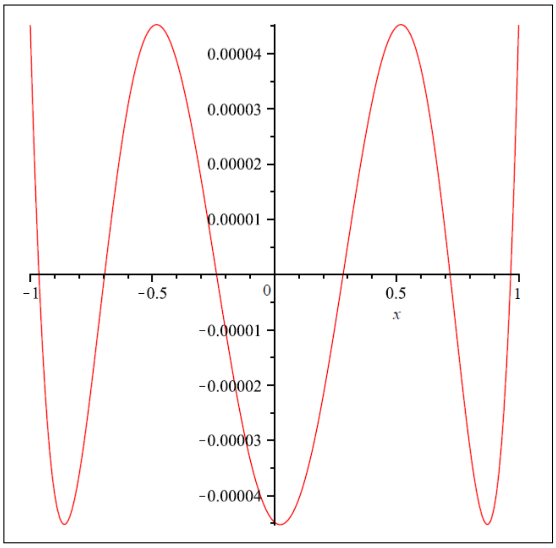
*Tanım 4.2: $a \leq y_1 < y_2 < \ldots y_m \leq b$, $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ ve $p_n \in P_n$ olsun. $\| f - p \|_\infty = | f(y_j) - p(y_j) |$, $j = 1, \ldots m$, olmak üzere $f(y_j) - p(y_j) = -[f(y_{j+1}) - p(y_{j+1})]$, eşitliği sağlanıyorsa $A$ kümesine alterne küme denir [4].*

### 4.1.1. $L_\infty$ Normu

*Teorem 4.1: $S = (C[a, b], L_\infty)$ ve $M \subset S$ kümesi $M = P_n$ olarak tanımlansın. (3.4)'de verilen taban fonksiyonları $g_i$'ler eğer bir Chebyshev kümesi oluşturuyorsa, $p^*$'ın bir $f \in S$ elemanına yapılan en iyi yaklaştırım olması için gerek ve yeter koşul $(f - p^*)$ için $[a, b]$'de $(n + 2)$ noktadan oluşan alterne küme olmasıdır [6].*

*Örnek 4.1: Aşağıda $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $[-1, 1]$ aralığında $5.$ dereceden polinomla yapılan en iyi yaklaştırımın hata grafiği ve yaklaştırımın maple betiği ile elde edilişi verilmiştir.*

Şekil 4.1' de görüldüğü gibi $5.$ dereceden polinom $(n = 5)$ ile yaklaştırım yapıldığı için 7 noktadan oluşan bir alterne küme vardır. Bu örnek için maple betiği aşağıdaki şekilde kullanılmıştır.



Şekil 4.1: $L_\infty$ normunda en iyi yaklaştırımın hata grafiği

$$A = \{-0.86024, 0.02368, 0.48247, 0.51799, 0.87207\}, \quad (4.1)$$

$$\| f - p \|_\infty = | f(y_i) - p(y_i) | = 0.00004518. \quad (4.2)$$

### 4.1.2. $L_p$ $(1 < p < \infty)$ Normu

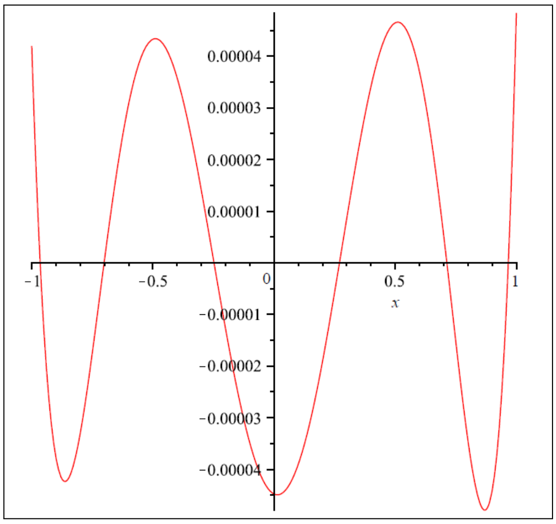
*Teorem 4.2: $S = (C[a,b], L_p)$, $M \subset S$ kümesi $M = P_n$ olarak tanımlansın.* (3.4)*'de verilen $g_i$, taban fonksiyonları, Chebyshev kümesi oluşturuyorsa, $\forall f \in S$ elemanına $P_n$' den en iyi yaklaştırım yapılabilmesi için gerek koşul $\| f - p^* \|_p > 0$ olması ve $f - p^*$'ın $[a,b]$ aralığında en az $n+1$ kere işaret değiştirmesidir [6].*

*Örnek 4.2: $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında 5. dereceden polinomla $L_2$ normuna göre yapılan en iyi yaklaştırımın hata grafiği Şekil 4.2'de verilmiştir.*

Bu yaklaştırım problemine güzel bir örnek $p = 2$ durumunda elde edilen en küçük kareler yaklaştırımıdır. Bu yaklaştırımı vermeden önce bazı tanımları hatırlamak faydalı olacaktır.

*Tanım 4.3: $W(x)$, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $\forall x \in [a,b]$'de eğer $W(x) \geq 0$ ve $[a,b]$'nin alt aralıklarında $W(x) \neq 0$ ise bu fonksiyona ağırlık fonksiyonu denir.*

*Tanım 4.4: $\phi_1, \ldots, \phi_n$, $[a,b]$ üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar kümesi, $c_i \in \mathbb{R}$, $i =$*




Şekil 4.2: $L_p$ normunda en iyi yaklaştırımın hata grafiği

$1, \ldots, n$ *katsayılar olsun. Eğer* $c_1\phi_1(x) + \ldots c_n\phi_n(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ *eşitliği ancak ve ancak* $c_1 = \ldots = c_n = 0$ *olduğunda sağlanıyorsa* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *fonksiyonlarına doğrusal bağımsızdır denir [2].*

*Tanım 4.5:* $[a, b]$*'de* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *sürekli fonksiyonları ve* $W(x)$ *ağırlık fonksiyonu verilsin. Eğer*

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_k(x)W(x)dx = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ \alpha_k, & i = k. \end{cases} \tag{4.3}$$

*eşitliği sağlanıyorsa* $\phi_i$, $i = 1, \ldots, n$ *fonksiyonlarına ortogonal fonksiyon denir [2].*

*Eğer özel olarak* $\alpha_k = 1$, *her* $k = 1, \ldots, n$ *için* $\alpha_k = 1$ *ise bu fonksiyonlara ortonormal fonksiyon denir [2].*

- $p = 2$: Sürekli Fonksiyonlarda En Küçük Kareler Yaklaştırımı

$[a, b]$ üzerinde $\phi_1, \ldots, \phi_n$ doğrusal bağımsız fonksiyonlar, $W(x)$ ağırlık fonksiyonu ve $f(x) \in C[a, b]$ olsun. $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\phi_i(x)$ yaklaştırım fonksiyonundaki $a_i$ katsayılarını

$$\| f - p \|_2^2 = \int_a^b W(x)[f(x) - p(x)]^2 dx \tag{4.4}$$

integralini minimize edecek şekilde elde edelim. Hatayı

$$E(a_0,\ldots,a_n)=\int_a^b W(x)\left[f(x)-\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x)\right]^2dx \tag{4.5}$$

olarak tanımlayalım. $E$'yi minimize etmek için $a_i$ katsayıları,

$$\frac{\partial E}{\partial a_i}=0,\;\; i=0,\ldots,n \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilirler.

$$0=\frac{\partial E}{\partial a_i}=2\int_a^b W(x)[f(x)-\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x)]\phi_k(x),\; i=0,\ldots,n,\; k=0,\ldots,n \tag{4.7}$$

Buradan normal denklem aşağıdaki şekilde olur.

$$\int_a^b W(x)f(x)\phi_k(x)dx=\sum_{i=1}^{n}a_i\phi_i(x)\int_a^b W(x)\phi_i(x)\phi_k(x)dx,\; k=0,\ldots,n. \tag{4.8}$$

$a_i'$ler aşağıdaki denklem sisteminden elde edilir.

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \int_a^b W(x)\phi_0(x)\phi_0(x)dx & \int_a^b W(x)\phi_1(x)\phi_0(x)dx & \ldots & \int_a^b W(x)\phi_n(x)\phi_0(x)dx \\ \int_a^b W(x)\phi_0(x)\phi_1(x)dx & \int_a^b W(x)\phi_1(x)\phi_1(x)dx & \ldots & \int_a^b W(x)\phi_n(x)\phi_1(x)dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b W(x)\phi_0(x)\phi_n(x)dx & \int_a^b W(x)\phi_1(x)\phi_n(x)dx & \ldots & \int_a^b W(x)\phi_n(x)\phi_n(x)dx \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \int_a^b W(x)\phi_0(x)f(x)dx \\ \int_a^b W(x)\phi_1(x)f(x)dx \\ \vdots \\ \int_a^b W(x)\phi_n(x)f(x)dx \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Eğer özel olarak, $\phi_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$ fonksiyonları (4.3) özelliğini sağlayacak şekilde seçilirse

$$\int_a^b W(x)f(x)\phi_k(x)dx = a_k \int_a^b W(x)[\phi_k(x)]^2 dx = a_k\alpha_k \tag{4.12}$$

olur ve $a_i$'ler aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$a_i = \frac{\int_a^b W(x)\phi_i(x)f(x)dx}{\alpha_i}, \qquad i = 0, \ldots, n. \tag{4.13}$$

### 4.1.3. $L_1$ Normu

*Teorem 4.3:* $S = (C[a,b], L_1)$, $M \subset S$ *kümesi* $M = P_n$ *olarak tanımlansın.* (3.4)*'de verilen* $g_i$ *taban fonksiyonları Chebyshev kümesi oluştursunlar. Buna ek olarak*

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) - p_n^*(x) = 0\} \tag{4.14}$$

*kümesi,* $p^* \in P_n$ *olmak üzere sonlu bir küme olsun. Bu halde* $p_n^*$*,* $f$*'ye yapılan en iyi* $L_1$ *yaklaştırımı ise* $f - p_n^*$*,* $[a,b]$*'de en az* $n+1$ *kez işaret değiştirir [6].*

## 4.2. Ayrık Fonksiyonlarda En İyi Yaklaştırımın Karakterize Edilmesi

### 4.2.1. $\ell_\infty$ Normu

$S = (\mathbb{R}^N, \ell_\infty)$, $M \subset S$ kümesi (3.2.)'deki şekilde $M = P_n^G$ olarak tanımlansın. (3.2.)'de verilen taban fonksiyonları $g_i$'ler eğer bir Chebyshev kümesi oluşturuyorsa,

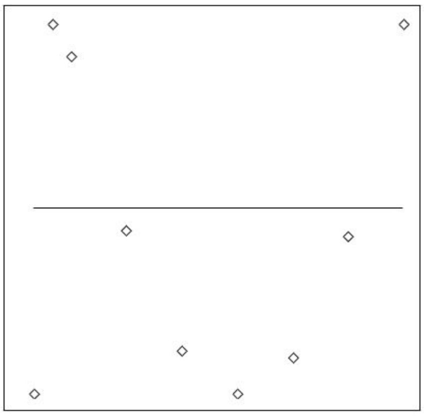
$p^*$'ın $\mathbf{x} \in S$ elemanına yapılan en iyi yaklaştırım olması için gerek yeter koşul, $(\mathbf{x}-p^*)$ için $[a, b]$'de $(n+2)$ noktadan oluşan bir alterne kümenin var olmasıdır [4; 6].

*Örnek 4.3: Aşağıda $9$ noktadan oluşan $x$ noktalarına karşılık fonksiyonun değerleri tabloda verilecektir.*

Tablo 4.1: Ayrık noktalara karşılık gelen fonksiyon değerleri

| $x_i$ | $f(x_i)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.05 | 0.7142 |
| 0.10 | 0.8060 |
| 0.25 | 0.8670 |
| 0.40 | 0.8633 |
| 0.55 | 0.8272 |
| 0.70 | 0.7641 |
| 0.85 | 0.6815 |
| 1.00 | 0.5896 |

*Örnek 4.4: Tablo 4.1 verilen noktalara $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ polinomu ile yaklaştırım yapılacaktır.Hata değerlerini $E_i = E(x_i) = f(x_i) - p^*(x_i), i = 1, 2, \ldots, 9$ şeklinde tanımlayalım. $f$'ye en iyi yaklaştırımin hata grafiği aşağıda verilmiştir.*



Şekil 4.3: $\ell_\infty$ normunda yaklaştırımın hata grafiği

Şekil 4.3'den görüldüğü üzere $2$. dereceden yaklaştırım yapılan polinomla hata vektörü $4$ elemandan oluşan alterne kümesi içerir. Burada norm üzerinde tanımlı olan hata (4.15)'de verilmiştir.

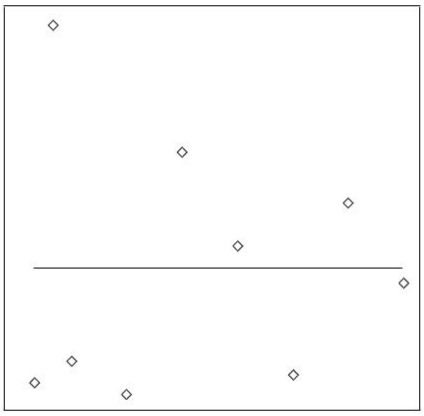
$$\| \mathbf{x} - \mathbf{p} \|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant 9} | e_i | = 0.2786. \tag{4.15}$$

### 4.2.2. $\ell_p$ Normu

*Teorem 4.4:* $S = (\mathbb{R}^N, \ell_p)$*,* $M \subset S$ *kümesi* (3.2.)*'deki şekilde* $M = P_n^G$ *olarak tanımlansın.* (3.2.)*'de verilen taban fonksiyonları Chebyshev kümesi oluşturuyorsa,* $\mathbf{p}^{*\prime}$*ın bir* $\mathbf{x} \in S$ *elemanına yapılan en iyi yaklaştırım olabilmesi için gerek ve yeter koşul* $\mathbf{p}^* \in M$*,* $(\mathbf{x} - \mathbf{p}^*)$ *hata vektörünün* $n+1$ *noktada güçlü işaret değiştirmesidir [3].*

$$[x_i - p^*(x_i)](-1)^i > 0 \text{ ya da } [x_i - p^*(x_i)](-1)^i < 0, \ i = 1, 2 \ldots, n+1. \quad (4.16)$$

*Örnek 4.5: Tablo 4.1'de ki noktalara* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ $(n = 5)$ *polinomuyla* $\ell_2$ *normunda yapılacak en iyi yaklaştırım yapılacak olsun. Hata fonksiyonu:* $e(x_i) = f(x_i) - p^*(x_i), \ \ i = 0, 1, \ldots, 9$ *olacaktır. Bu yaklaştırımın hata grafiği aşağıda verilmiştir.*



Şekil 4.4: $\ell_p$ normunda yaklaştırımın hata grafiği

Burada $g_i, \quad i = 0, \ldots, n$ taban fonksiyonalarıdır. Şekil 4.4'de görüldüğü gibi hata $6$ kere işaret değiştirir. Burada hata aşağıdaki şekildedir.

$$\| e \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{9} e_i^2} = 0.1916. \quad (4.17)$$

- $p = 2$ : Ayrık Fonksiyonlarda En Küçük Kareler Yaklaştırımı

$\{(x_i, f(x_i)) \ : \ i = 0, \ldots, m\}$ olsun. $f(x_i)$ değerlerini aşağıdaki polinom ile yaklaştıralım.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n,\ n < m \tag{4.18}$$

Bu yaklaştırımın hatası $E'$yi

$$E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) - P_n(x_i)^2 \tag{4.19}$$

olarak tanımlayalım. Buradan eşitliğin düzenlenmiş hali (4.2.2.)'deki gibi olur.

$$E = \sum_{i=1}^{m} f(x_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{m} P_n(x_i) f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} (P_n(x_i))^2 \tag{4.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j \right) f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j \right)^2 \tag{4.21}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} f(x_i)^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_i \left( \sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^j \right) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left( \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} \right), \tag{4.22}$$

$E'$yi minimize etmek için $a_i$ katsayıları,

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, i = 0, \dots, n \tag{4.23}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilirler.

$$0 = \frac{\partial E}{\partial a_i} = -2\sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} \tag{4.24}$$

Buradan normal denklem aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{m} x_i^{j+k} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^j,\ i = 0, 1 \dots, n \tag{4.25}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^0 & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^1 & \dots & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 & \dots & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^m & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{m+1} & \dots & \sum\limits_{i=1}^{m} x_i^{2m} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^0 \\ \sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^1 \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} f(x_i) x_i^m \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

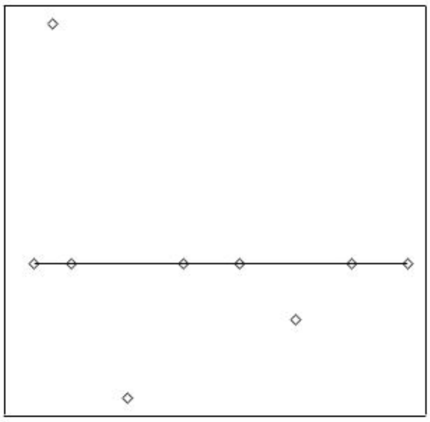
olmak üzere $Ha = b$ denkleminin çözümü $a_1, \dots, a_n$ ile elde edilen $P_n$ $f'$nin en küçük kareler yaklaştırımıdır.

### 4.2.3. $\ell_1$ Normu

*Teorem 4.5: $S = (\mathbb{R}^N, \ell_1)$ olsun ve $M \subset S$ kümesi $M = P_n^G$ olarak tanımlansın. (3.2.)'de verilen taban fonksiyonları Chebyshev kümesi oluşturuyorsa, $\mathbf{p}^{*\prime}$ın bir $\mathbf{x} \in S$ elemanına yapılan en iyi yaklaştırımı için $(\mathbf{x} - \mathbf{p}^*)$'ın $n+1$ noktada zayıf işaret değiştirmesi gerekir [3].*

*Örnek 4.6: 4.1'de verilen tabloda ki noktalara $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ polinomuyla yapılacak $\ell_1$ normu ile en iyi yaklaştırımda hata fonksiyonu : $e_i = e(x_i) = f(x_i) - p^*(x_i), i = 1, 2, \dots, 9$ olsun. Yaklaştırımın hata grafiği aşağıda verilmiştir.*

Burada hata aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 4.5: $\ell_1$ normunda en iyi yaklaştırımın hata grafiği

$$\| e \|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{9} e_i^2} = 0.3609. \tag{4.29}$$

Bu yaklaştırımın nasıl hesaplandığını inceleyelim. $p = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ şeklinde tanımlayalım.

$$\min \sum_{i=1}^{N} | \, p(x_i) - f(x_i) \, | \tag{4.30}$$

olacak şekilde $a_i$'leri bulmaya çalışalım.

$$| \, p(x_i) - f(x_i) \, | \leqslant U_i \tag{4.31}$$

olarak tanımlandığında problem $\min \sum_{i=1}^{N} U_i$ şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\begin{cases} | \, p(x_i) - f(x_i) \, | \leqslant U_i \Longrightarrow -U_i \leq p(x_i) - f(x_i) \leq U_i \\ -U_i - p(x_i) \leq f(x_i), \quad -U_i + p(x_i) \leq -f(x_i), \;\; U_i \geqslant 0 \end{cases} \tag{4.32}$$

Yukarıda verilen ifadelerin optimizasyon problemi şeklinde yazımı aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{cases}
\min\limits_{\mathbf{x}} \sum\limits_{i=1}^{N} U_i \\
-U_i - p(x_i) \leq f(x_i) \\
-U_i + p(x_i) \leq -f(x_i) \\
U_i \geqslant 0
\end{cases}
\tag{4.33}
$$

eşitsizlikleri geçerli olacaktır. Burada $a_0, \ldots, a_n$ ve $U_1, \ldots U_N$ bilinmeyenler olmak üzere $n+N+1$ tane bilinmeyen vardır. Buradaki verilerle “optimizasyon" yapıldığında aşağıda verilen matris yardımıyla $U_1 \ldots, U_N$ katsayılarını bulunur.

$$
\begin{bmatrix}
-1 & -x_1 & \ldots & -x_1^n & -1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-1 & -x_n & \ldots & -x_n^n & 0 & \ldots & -1 \\
1 & x_1 & \ldots & x_1^n & -1 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & \ldots & x_n^n & 0 & \ldots & -1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N
\end{bmatrix}
\leq
\begin{pmatrix}
f_1 \\ \vdots \\ f_N \\ -f_1 \\ \vdots \\ -f_N
\end{pmatrix}.
\tag{4.34}
$$

Ekler bölümünde $n = 5, N = 9$ için Tablo 4.1 de verilen noktalara karşılık gelen değerlere polinomla yaklaştırımın matlab betiği verilmiştir.

# 5. EN İYİ YAKLAŞTIRIM PROBLEMLERİNİN TEKLİĞİ

En iyi yaklaştırımın var olması bu yaklaştırımın tekliği hakkında bize garanti vermez. Şimdi en iyi yaklaştırımın var fakat tek olmadığına ilişkin bir örneği aşağıda inceleyelim.

*Örnek 5.1:* $S = (\mathbb{R}^2, \| \, . \, \|_{\infty})$ *normlu doğrusal uzayı alalım.* $M \subset$ *(*$S, \| \, . \, \|_{\infty}$*) olacak şekilde* $M$ *kümesi* $M = \{(1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_2 \leq 1\}$ *olarak tanımlanmış olsun. Çalıştığımız normda* $\| \, . \, \| = \max\{| \; x_1 \; |, | \; x_2 \; |\}$ *şeklinde olsun. Verilen bir* $\mathbf{x} = (0,0)^T$ *için* $x_2$ *noktası* $[-1,1]$ *aralığında hangi değeri alırsa alsın* $\mathbf{x}$*'ye* $M$*' den en yakın uzaklık her zaman* $1$ *olacaktır. Bu durumda* $M$*'den* $\mathbf{x}$*'ye yapılacak yaklaştırımın tekliğinden söz edemeyiz.*

En iyi yaklaştırımın hangi koşullarda tekliğinin olacağını vermeden önce bazı önemli tanımları vermemiz yararlı olacaktır.

*Tanım 5.1:* $M$*,* $S$ *normlu doğrusal uzayında bir küme olsun.* $x, y \in M$ *ve* $0 \leq \lambda \leq 1$ *olacak şekilde* $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$ *oluyorsa* $M$ *kümesi konvekstir denir [6].*

*Tanım 5.2:* $S$ *normlu doğrusal uzayında merkezi* $a$ *yarıçapı* $r$ *olan bir yuvar tanımlayalım.* $(\{x \in S : \| x - a \| \leq r\})$. $x_1, x_2 \in S$ *bu yuvar üzerinde seçilen noktalar olmak üzere* $\| \; \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - a \; \| < r$*,* $0 < \lambda < 1$ *sağlanıyorsa* $S$ *kesin konvekstir denir. Yani normlu uzayda kapalı sınırlı bir yuvarda seçilen herhangi iki noktayı birbirine bağlayan doğru yuvarın tamamının içinde kalıyorsa o uzaya kesin konveks denir.*

*Teorem 5.1:* $M$*, kesin konveks* $S$ *normlu doğrusal uzayında sonlu boyutlu bir alt uzay olsun. Her* $x \in S$ *için* $M$ *kümesinden* $x$ *noktasına yapılan en iyi yaklaştırım tektir [6].*

*Tanım 5.3:* $S$ *normlu doğrusal uzay olsun.* $x, y \in S$ *için* $\| \, x \, \| = \| \, y \, \| = \| \, \frac{1}{2}(x+y) \, \| = 1 \Rightarrow x = y$ *sağlanıyorsa* $S$ *kesin konvekstir [1].*

Aşağıda, bu koşulu sağlayan ve sağlamayan örnekler verilmektedir.

*Örnek 5.2:* $S = (\mathbb{R}^2,\ \ell_2)$ *olsun.* $x, y \in S$ *için,*

$$\| x \|_2 = \| y \|_2 = 1 \ \| x \|_2 = \| y \|_2 = \| \frac{1}{2}(x + y) \|_2 \tag{5.1}$$

*eşitlikleri tanımlansın. Burada*

$$\begin{cases} \| x + y \| = \| x \|_2 + \| y \|_2 \\ \| (x + y) \|_2^2 = \| x \|_2^2 + 2 \| x \|_2 \| y \|_2 + \| y \|_2^2 \end{cases} \tag{5.2}$$

*yazılabilir.* (5.2) *eşitliğin sol tarafi,*

$$\| (x + y) \|_2^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^T + 2\mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} \tag{5.3}$$

(5.2) *eşitliğin sağ tarafi aşağıdaki şekilde yazılabilir.*

$$\| x \|_2^2 + 2 \| x \|_2 \| y \|_2 + \| y \|_2^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}^T + 2\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{y}} + \mathbf{y}^T\mathbf{y} \tag{5.4}$$

(5.3), (5.4) *eşitlikleri ancak* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *ya da* $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *veya* $\mathbf{x} = k\mathbf{y}$ $k > 0$ *için sağlanır. Buradan da* $\| x \|_2 = \| y \|_2$ *olur. Sonuç olarak* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *olduğu görülür.* $(\mathbb{R}^2, \ell_2)'$*nin kesin konveks olduğu buradan görülür.*

*Örnek 5.3:* $S = (\mathbb{R}^2, \ell_\infty)$ *olsun.* $\mathbf{x} = (0, 1)^T, \mathbf{y} = (1, 1)^T$ *noktaları* $\| x \|_\infty = \| y \|_\infty = \| \frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \| = 1$ *koşulunu sağladıkları halde* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *olduğundan* $S = (\mathbb{R}^2, \ell_\infty)$*'nin kesin konveks olmadığı görülmüs olur.*

*Örnek 5.4:* $S = (\mathbb{R}^2, \ell_1)$ *için ise* $\mathbf{x} = (1, 0)^T$*,* $\mathbf{y} = (0, 1)^T$ *noktaları* $\| x \|_1 = \| y \|_1 = \| \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \| = 1$ *olduğu halde* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *olduğundan* $S = (\mathbb{R}^2, \ell_1)$*'nin kesin konveks olmadığı görülmüs olur.*

## 5.1. Sürekli Fonksiyonlar İçin En İyi Yaklaştırımın Tekliği

### 5.1.1. $L_\infty$ Normu

$S = (C[a,b], L_\infty)$ tanımlansın. $S$ yukarıdaki örnekte de görüldüğü üzere kesin konveks olmadığından dolayı en iyi yaklaştırımdaki tekliği veren (5.1) teoremdeki koşula uymaz. $S$ uzayının tekliğinden söz edilebilmesi için ek koşula ihtiyaç vardır.

*Teorem 5.2:* $S = (C[a,b], L_\infty)$ *ve* $M \subset S$ *kümesi* $M = P_n$ *olarak tanımlansın.* $g_i$, (3.4)*'de verilen taban fonksiyonları, Chebyshev kümesi ise her* $f \in S$ *elemanına* $M$ *den en iyi yaklaştırım tektir [6].*

Buna ait örnek vermek yerinde olacaktır.

*Örnek 5.5:* $[0,1]$*'de* $f(x) = 1$, $n = 1$, $\phi_1(x) = x$ *verilsin. Burada* $\phi_1(x)$ *Chebyshev kümesi değildir.* $a_1x$ *ile* $f(x) = 1$*'e* $a_1x$ *şeklinde bir polinomla yapılan en iyi yaklaştırım bulmak istediğimizde,* $0 \leq a_1 \leq 1$ *koşunu sağlayan tüm* $a_1$*'ler için* $a_1x$*'i* $f$*'ye yapılan en iyi yaklaştırım olduğunu görürüz. Bu durumda yaklaştırımın tekliğinden söz edemeyiz.*

Eğer (3.2.)'de taban fonksiyonu olan $g_i$ fonksiyonları Chebyshev kümesi değilse teklik yok denilmez. Buna ait örnek aşağıda verilmiştir.

*Örnek 5.6:* $[0,1]$*'de* $f(x) = x^2$, $n = 1$, $\phi_1(x) = x$ *olsun. Chebyshev kümesi oluşturmamasına rağmen* $f$*'ye en iyi yaklaştırım tektir ve* $(-2 + 2\sqrt{2}x)$ *polinomudur.*

### 5.1.2. $L_2$ Normu

*Teorem 5.3:* $S = (C[a,b], L_2)$, $M \subset S$ *kümesi* $P_n$ (3.4) *olarak tanımlansın. Bilindiği üzere* $(S, L_2)$ *kesin konvekstir.* $M$ *kümesi de* $S$ *kümesinin sonlu boyutlu normlu altuzayı olduğundan teorem* (5.1) *uyarınca verilen her* $f \in S$*'ye* $M$*'den en iyi yaklaştırım tektir [6].*

### 5.1.3. $L_1$ Normu

*Teorem 5.4:* $S = (C[a,b], L_1)$ *olsun.* $M \subset S$ *kümesi* $M = P_n$ *olarak tanımlansın.* $g_i$*,* (3.4) *taban fonksiyonları Chebyshev kümesi ise verilen her* $f \in S$ *elemanına* $M$*'den en iyi yaklaştırım tektir [6].*

*Örnek 5.7:* $[0,2]$*'de* $f(x) = 2$*,* $n = 1$*,* $\phi_1(x) = 1$ *olsun. Burada* $\phi_1(x)$ *Chebyshev kümesi oluşturduğundan* $f$*'ye en iyi yaklaştırım tektir.* $a_1\phi_1(x)$ *polinomu ile* $f$*'ye yapılan* $a_1 = 2$ *sabit polinomudur.*

## 5.2. Ayrık Fonksiyonlar İçin En İyi Yaklaştırımın Tekliği

### 5.2.1. $\ell_\infty$ Normu

$S = (\mathbb{R}^N, \ell_\infty)$ kesin konveks olmadığını bir örnekle göstermiştik. Bundan dolayı verilen her $\mathbf{x} \in S$ noktasına en iyi yaklaştırımda teklikten söz edilebilmesi için ek koşula ihtiyaç vardır. Bunun için aşağıdaki tanımın verilmesi yerinde olacaktır.

*Tanım 5.4:* $\mathbf{A}$*,* $r \times s$ *şeklinde* $(r \geq s)$ *bir matris olsun. Eğer herbir* $s \times s$ *alt matrisinin determinantı sıfırdan farklı ise* $\mathbf{A}$ *matrisi Haar koşulunu sağlar denir [6].*

*Teorem 5.5:* $S = (\mathbb{R}^N, \ell_1)$ *tanımlansın.* $M \subset S$ *kümesi* (3.2.)*'de verilen* $P_n^G$ *olarak tanımlansın. Eğer* $\mathbf{G}$, $(N \times s)$ *matrisi Haar koşulunu sağlıyorsa her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ *noktasına* $M$*'den yapılan en iyi yaklaştırım tektir [6].*

### 5.2.2. $\ell_p$ Normu

*Teorem 5.6:* $S = (\mathbb{R}^N, \ell_p)$ *tanımlansın.* $M \subset S$ *kümesi* (3.2.)*'de verilen* $P_n^G$ *olarak tanımlansın. Bilindiği üzere* $S$ *kesin konvekstir.* $M$ *kümesi de* $S$ *kümesinin sonlu boyutlu normlu altuzayı olduğundan verilen her* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ *noktasına* $M$*'den yapılan en iyi yaklaştırım tektir [6].*

### 5.2.3. $\ell_1$ Normu

$\ell_1$ normunda (3.2.)'de verilen $\mathbf{G}$ Haar koşulunu sağlasa bile en iyi tek türlü yaklaştırımının tek olmadığını aşağıdaki örnekte gösterelim.

*Örnek 5.8:* $N = 2$, $n = 1$, $X = \{1, -1\}$ *ve* $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ *verilsin.* $g_1(x) = x$ *alındığında* (3.2.)*'de verilen* $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *olacaktır. Bu matris Haar koşulunu sağlar. Fakat,*

$$\| \mathbf{x} - p^* \|_1 = \sum_{1 \le i \le 2}^{N} | \mathbf{x}(x_i) - p^*(x_i) | = | 1 - a_1 | + | 2 + a_1 | \qquad (5.5)$$

*olacaktır. Bu hata tüm* $-2 \le a_1 \le 1$ *değeri için minimize olacaktır [1].*

# 6. $L_1$ NORMUNDA EN İYİ YAKLAŞTIRIMIN HESAPLANMASI

$[a, b]$ aralığından alınan $x_1, \ldots, x_n$ noktaları ve buna karşılık gelen $c_1, \ldots, c_n$ ağırlıkları,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \tag{6.1}$$

integraline yaklaştırım için hatayı minimize edecek şekilde seçilirler ise (6.1) yaklaştırımına Gauss kuadratür denir.

Burada $x_1, \ldots, x_n$ noktaları ve $c_1, \ldots, c_n$ ağırlıkları olmak üzere $2n$ tane bilinmeyen vardır. Bu da en fazla $(2n-1)$. dereceden bir polinomun ($2n$ tane katsayı) kesin olarak integre edilebileceği anlamına gelir.

$[-1, 1]$ aralığında verilen integrasyona $n = 2$ için uygun noktaların nasıl verildiğini araştıralım. $n = 2$ olduğundan dolayı (6.1) aşağıdaki şekilde

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) \tag{6.2}$$

olacaktır. Polinomun derecesi $2(2) - 1 = 3$ ve daha az olduğunda ifade tam çözümü verecektir. $n = 3$ için $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, olur ve buradan

$$\int_a^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3)dx = a_0 \int_a^b 1dx + a_1 \int_a^b xdx + a_2 \int_a^b x^2 dx + a_3 \int_a^b x^3 dx. \tag{6.3}$$

Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$c_1.1 + c_2.1 = \int_{-1}^{1} 1dx = 2, \qquad c_1.x_1 + c_2.x_2 = \int_{-1}^{1} xdx = 0, \tag{6.4}$$

$$c_1.x_1^2 + c_2.x_2^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, \qquad c_1.x_1^3 + c_2.x_2^3 = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0. \tag{6.5}$$

Buradaki eşitliklerden aşağıdaki sonuçlar çıkacaktır.

$$\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_2 = 1, \\ x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Böylece integrasyona yaklaştırım aşağıdaki şekilde olur.

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}). \tag{6.7}$$

Bu şekilde daha yüksek dereceli polinomlar için de noktalar ve katsayılar belirlenebilir.

*Teorem 6.1:* $x_1, \ldots, x_n$, $n$. *dereceden Legendre polinomunun kökleri olsun ve* $c_i, i = 1, \ldots, n$ *katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlansın.*

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \tag{6.8}$$

*Eğer* $P(x)$ *derecesi* $2n'$*den daha düşük dereceli polinom ise aşağıdaki gibidir [8].*

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i)dx. \tag{6.9}$$

# 7. SONUÇLAR

Tezimizde en iyi yaklaştırım teoremini sürekli ve ayrık fonksiyonlar için farklı normlar üzerinde ele aldık. Bir fonksiyona polinomlar üzerinden en iyi yaklaştırımın olması için hangi koşulları sağlaması gerektiğini öğrenmiş olduk. Ayrık fonksiyonlarda $\ell_1$ normunda matlab çalışmasını ekler bölümünde verdik. Sürekli fonksiyonlarda $L_1$ normu üzerinde "Gauss Quadrature " yardımı ile ayrık fonksiyonlardaki matlab çalışmasına benzeterek iyi bir hata grafiği elde ettik.

# KAYNAKLAR


[1] Cheney E. W., (1996), “Introduction to Approximation Theory”, 1st Edition, McGraw-Hill .

[2] Erwin Kreyszig., (1978), “Introductory Functional Analysis with Applications”, 1st Edition, Jhon Wiley&Sons.

[3] Rice J. R., (2007), “Approximations of Functions”, 1st Edition, Addison Wesley.

[4] Rivlin T. J., (1969), “An Introduction to the Approximation of Functions” 1st Edition, Blaisdell Publising Company in Waltham.

[5] Powel M. J. D., (1981), “Approximation Theory and Methods”, 1st Edition, Cambridge University Press.

[6] Watson G. A., (1980), “Approximation Theory and Numerical Methods”, 1st Edition, Jhon Wiley.

[7] Watson G. A., (2000), “Approximation In Normed Linear Space”, J of Computational and Applied Mathematics 121(1-2), 1-36.

[8] Richard L. Burden, J Douglas Faires., (2010), “Numerical Analysis”, U.S. 9th Edition, Richard Stratton.

# ÖZGEÇMİŞ

Yakup HACIALİOĞLU 1989 yılında İstanbul'da doğdu. 2007 yılında başladığı Lisans eğitimini Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Fen Fakültesi Matematik Bölümünü 2012 yılında başarıyla tamamladı. Aynı yıl Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2012 yılından bu yana özel sektörde çalışmaktadır. 2014 yılında evlendi.

# EKLER

## Ek A: Matlab Programları

Ayrık ve sürekli fonksiyonlarda sırasıyla $\ell_1$ ve $L_1$ normu üzerindeki matlab çalışmaları

- n = 5; N = 9
- X=[0, 0.05, 0.10, 0.25, 0.40, 0.55, 0.70, 0.85, 1.00]’
- f=[0,0.7142,0.8060,0.8670,0.8633,0.8272,0.7641,0.6815,0.5896]’;
- [nod,weight]=legpts(N);
- A1 = zeros(2*N,N+n+1);
- for i=1:N;
- A1(i, n+1+i) = -1;
- for j=1:n+1;
- A1(i, j) = -X(i)^(j-1);
- end; end;
- for i=N+1:2*N;
- A1(i, n+1+i-N) = -1;
- for j=1:n+1;
- A1(i, j) = X(i-N)^(j-1);
- end; end;
- A1
- b = zeros(2*N,1);
- for i=1:N;
- b(i) = -f(i);
- end;
- for i=N+1:2*N
- b(i) = f(i-N);
- end; b
- c = zeros(N+n+1,1);
- for i=n+2:N+n+1;
- c(i) = 1; end c

- sol = linprog(c, A1, b)
- kat=ones(1,n+1);
- for i=1:n+1
- kat(i)=sol(n+2-i);
- end; kat
- c1=zeros(1,N);
- for i=1:N
- c1(i)=polyval(kat,X(i)); end
- f1=zeros(1,N);
- for i=1:N
- f1(i)=f(i)-c1(i); end
- sumt=0;
- for i=1:N
- sumt=sumt+abs(f1(i)); end
- plot(X,f1,'r+')
- Sürekli fonksiyonlar için
- n = 5; N = 9;
- [nod,weight]=legpts(N,[0,1]);
- A=[nod]
- B=[weight]
- f=[exp(nod)]
- A1 = zeros(2*N,N+n+1);
- for i=1:N;
- A1(i, n+1+i) = -1;
- for j=1:n+1;
- A1(i, j) = -A(i)^(j-1);
- end; end;
- for i=N+1:2*N;
- A1(i, n+1+i-N) = -1;
- for j=1:n+1;
- A1(i, j) = A(i-N)^(j-1);
- end end A1

- b = zeros(2*N,1);
- for i=1:N;
- b(i) = -f(i); end
- for i=N+1:2*N
- b(i) = f(i-N); end
- c = zeros(N+n+1,1);
- for i=n+2:N+n+1;
- c(i) = B(i-(n+1)); end
- sol = linprog(c, A1, b)
- kat=ones(1,n+1);
- for i=1:n+1
- kat(i)=sol(n+2-i); end
- for i=1:N
- c1(i)=polyval(kat,A(i)); end
- f1=zeros(1,N);
- for i=1:N
- f1(i)=f(i)-c1(i); end
- sumt=0;
- for i=1:N
- sumt=sumt+abs(f1(i));
- xl=linspace(-1,1,100)
- app=polyval(kat,xl);
- fun=exp(xl);
- plot(xl,fun-app)
- axis tight