T. C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İMPALSİF DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ VE STABİLİTE

BORA ARSLANTÜRK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2015

T. C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İMPALSİF DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ VE STABİLİTE

BORA ARSLANTÜRK
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE
2015

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

VARIATION OF PARAMETERS AND STABILITY FOR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS

BORA ARSLANTÜRK

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR

ASSOC. PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE

2015

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/06/2015 tarih ve 2015/41 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan BORA ARSLANTÜRK'ün tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

ÜYE : YRD. DOÇ DR. YÜCEL ENGİNER

ÜYE : YRD. DOÇ DR. H. GÜLAY GÜLAY

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../......... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, gittikçe önemi ve kullanım alanı artan impalsif diferansiyel denklemlerde temel tanım ve teoremler verilmiş, çözümün varlık ve teklik koşulları ortaya konmuş, parametrelerin değişimi yöntemi impalsif sistemlere uygulanmış, stabilite kriteleri, karşılaştırma sonuçları ortaya konmuştur. Tekil saptırılmış denklem sistemleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: İmpalsif Diferansiyel Denklemler, Parametrelerin Değişimi, Karşılaştırma Sonuçları, Stabilite Kriterleri.

SUMMARY

In this thesis, basic theorems and definations in impulsive differential equations are given, exintence and uniqueness of solution is declared, the variation of parameters are applied to impulsive systems, the criterias of stability and basic comparison results are shown. The singularly perturbed systems are searched with initial time difference.

Key Words: Impulsive Differential Equations, Variation Of Parameters, Stability.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a,

bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli arkadaşım Burak YEŞİL'e,

bana verdikleri enerji ile yaşam sevinci veren çocuklarım Mehmet Ali ve Berra'ya

ve göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili eşim Zuhal ARSLANTÜRK'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TEOREMLER VE TANIMLAR	2
2.1. İmpalsif Diferansiyel Denklemler	2
2.2. Sabit Zamanlı Sistemler	3
2.3. Değişken Zamanlı Sistemler	5
2.4. Varlık ve Süreklilik	6
3. PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ	10
4. STABİLİTE TANIMI	13
4.1. K ve L Sınıfı Fonksiyonlar	14
4.2. Stabilite Kriterleri	14
5. TEMEL KARŞILAŞTIRMA SONUÇLARI	19
5.1. Teorem 5.1 Sonuc	21
6. TEKİL SAPTIRILMIŞ SİSTEMLER	28
6.1. Üstel Stabilite Tanımı	29
6.2. Düzgün Üstel Stabilite Tanımı	29
7. SONUÇ	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	34

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
BZF	:	Başlangıç Zaman Farkı
BZFLS	:	Başlangıç Zaman Farklı Lipscihitz Stabilitesi
GTÜ	:	Gebze Teknik Üniversitesi
IDD	:	Impalsif Diferansiyel Denklem

1. GİRİŞ

Türev veya türevleri içeren denklemler olan diferansiyel denklemler ve diferansiyel denklem sistemleri hayatın içinde var olan, daha doğrusu hayatın içinden çıkan kavramlardır.

Akışkan hareketini, elektrik devresindeki akımı, katı bir nesnedeki ısı transferini, sismik dalgaların belirlenmesini, popülasyon artımını veya azalmasını, kalp atışlarını, türbülansa giren uçakları durumunu ve bir çok hayatla iç içe problemi anlamak, onları incelemek ve çözümler bulabilmek veya var olanları geliştirebilmek, maliyetin azaltabilmek, güvenliği arttırabilmek, daha kararlı ve kullanışlı çözümler bulabilmek için diferansiyel denklemler ve bu alanda yapılan çalışmalar oldukça önem arzetmektedirler.

Diferansiyel denklemler çok sayıda hayat problemini ifade ettiği gibi , çok sayıda türü vardır ve ifade ettiği problemi çözmek için de çok sayıda yaklaşım ve metod bulunur. Bazen sistem çözülür, bazen sistemin çözümü ile uğraşmadan çözümün varlığı ve hatta tekliği araştılır, bazen de çözümün zorluğu karşısında daha basit bir sistemle karşılaştırılarak fikir edinilmeye mümkünse çözüme gidilmeye çalışılır. Eğer basit olan sistem ile aynı karakterde ise zor olan değil basit olan çözülür [6], [7], [8].

İmpalsif diferansiyel denklemler de gittikçe popülerleşen ve kullanım alanı artan diferansiyel denklem tiplerinden biridir.

Bu tez çalışması boyunca impalsif diferansiyel denklemler ile çalışılacaktır.
Şimdi artık impalsif diferansiyel denklemleri ve denklem sistemlerini anlamaya başlayalım.

2. TEMEL TEOREMLER VE TANIMLAR

Öncelikle çalışmamızda kullanacağımız temel tanımları ve teoremleri gösterelim.

Bu temel bilgiler yardımı ile daha sonra impalsif diferansiyel denklemlerde parametlerin değişimi ve stabilite konularını inceleyeceğiz ve çözümün durumunu , varlığını , tekliğini ve kararlılığını anlamaya çalışacağız.

2.1. İmpalsif Diferansiyel Denklemler

İmpalsif diferansiyel denklem sistemleri bir çok yerde karşımıza çıkmaktadır. Hayatın içinde diğer tip diferansiyel denklemler veya denklem sistemleri gibi vardırlar [11].

Örneğin;

- ilaç sanayinde ve biyolojide patlama titreşim modelleri;
- ekonomide optimal kontrol modelleri;
- tıpta kalbin atış hareketi bunlardan bir kaçıdır [1], [2].

İmpalsif diferansiyel denklemlerde adından anlaşılacağı üzere sıçramalar söz konusudur. Dolayısı ile belli bir mantık ile oluşan bu sıçramalar alt aralıklar doğrur ve bu aralıklarda denklem çözülmeye çalışılarak ve şanslı isek bu aralıklardaki çözümler arasında bir bağ kurularak genel bir çözüme gidilebilir ama pek çok zaman bu mümkün değildir.

Sistem tanımlanırken impals koşulu da olmalıdır ki sıçrama tespit edilebilsin. İmpalsif diferansiyel denklemlerle ilgili bir çok başlıktan bahsedebilir bir kaçı;

- Sabit zaman impalslı Sistemler
- Değişken zaman impalslı Sistemler.
- Süreksiz Dinamik sistemler.
- Salınıma neden olan impals.
- İDD'de Lineer Sistemler:

- Çözümlerin genel özellikleri.
- Çözümlerin Kararlılığı.
- Eşlenik Sistemler,
- Perron teoremi.
- İDD'e Lineer Hamilton sistemleri.
- İDD'de çözümlerin kararlılığı
- Değişken katsayılı impals etkisi altındaki İDD sisteminde kararlılık.
- Direk Lyapunov metod.
- Periyodik ve hemen hemen periyodik İDD sistemleri:
- Homojen olmayan lineer periyodik sistemler.
- Lineer olmayan periyodik sistemler.
- Hemen hemen periyodik fonksiyonlar ve diziler.
- Hemen hemen periyodik İDD.
- İDD sistemlerinde integral kümeleri:
- Homojen olmayan lineer sistemlerin sınırlı çözümleri.
- Sabit olmayan impals etkisi anlarına ve hiperbolik lineer kısma sahip yarı lineer sistemlerin integral kümeleri.

Şimdi ise bir kaç tip impalsif diferansiyel denklem tipini inceleyerek başlayalım;

2.2. Sabit Zamanlı Sistemler

Sabit zamanlı diferansiyel denklemleri tanımlayalım;

Tanım 2.1: $\{t_k\}$ *bir zaman dizisi öyle ki* $k \to \infty$ *iken* $t \to \infty$ *olsun. Burada* $t = t_k$ *lar impals yani sıçrama noktalarımız olmaktadır;* $t = t_k$ *olmak üzere;*

$$\Delta x(t_k) = x\left(t_k^+\right) - x(t_k) \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır ve

$$x\left(t_k^+\right)=\lim_{h\to 0^+} x\left(t_k+h\right) \tag{2.2}$$

şeklindedir.

Bu tanımlar altında sabit zamanlı sistemimiz;

$$\begin{cases} x'=f\left(t,x\right), & t\neq t_k, k=1,2,.... \\ \Delta x=I_k\left(x\right), & t=t_k \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde olacaktır [3].

(2.3) denkleminin çözümü olan $x(t)$ aşağıdaki iki koşulu sağlamalıdır;

$$\begin{cases} x'(t)=f\left(t,x(t)\right), \quad t\in\left(t_k,t_{k+1}\right] \\ \\ \Delta x\left(t_k\right)=I_k\left(x\left(t_k\right)\right), \; t=t_k, \; k=1,2,...... \end{cases} \tag{2.4}$$

Örnek 2.1: Sabit Zamanlı Sistem

Sabit zamanlı sisteme bir örnek verelim;

$$\begin{cases} x'=0, \; t\neq k, k=1,2,.... \\ x(0)=\dfrac{1}{2} \\ \Delta x=\dfrac{1}{x-1}, \; t=k \end{cases} \tag{2.5}$$

burada $x'=0 \Rightarrow x=c$ *, denkleminde ifadenin türevi 0 olduğundan fonksiyon sabit olacaktır.* $x(0)=\frac{1}{2}$ *denklemindeki 0 daki değeri dikkate alırsak,* $c=\frac{1}{2}$ *olduğu görülür o halde buna bağlı olarak çözüm fonksiyonumuz* $x(t)=\frac{1}{2}$ *olur,* $x(t)=\frac{1}{2}$ *çözümünün geçerli olduğu aralık tabi ki* $[0,1)$ *aralığı olacaktır. Bunun sonucu olarak da;* $x\left(1^-\right)=\frac{1}{2}$ *olduğu görülür.*

$x(1^+)$ *yı bulmak için ise impals koşulunu kullanırız ;*

$$\Delta x = x(1^+) - x(1^-) = \frac{1}{x(1^-) - 1} \tag{2.5.a}$$

$$x(1^+) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \tag{2.5.b}$$

bulunur, dolayısı ile $[1,2)$ *aralığındaki çözüm* $x(t) = -\frac{3}{2}$ *fonksiyonu olacaktır ve benzer şekilde aynı yöntemle ilerlenir ise* $[2,3)$ *aralığında da çözüm fonksiyonu* $x(t) = -\frac{17}{10}$ *bulunur.*

Algoritma bu mantıkla ilerler.

2.3. Değişken Zamanlı Sistemler

Değişken zamanlı diferansiyel denklemleri tanımlayalım;

Tanım 2.2: $\{S_k\}$ *bir yüzeyler dizisi öyle ki* $S_k : t = \tau_k(x),\ k = 1,2,....$ *olsun ve aşağıdaki şartlar da sağlansın;*

$$\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x) \tag{2.6.a}$$

$$\lim_{k \to \infty} \tau_k(x) = \infty \tag{2.6.b}$$

dolayısı ile artarak sonsuza giden bir dizi söz konusudur.

Bu şartlar altında impalsif diferansiyel sistemimiz aşağıdaki şekilde olacaktır [8].

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \ t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), \ t = \tau_k(x), \ k = 1,2,.... \end{cases} \tag{2.7}$$

2.4. Varlık ve Süreklilik

Diğer diferansiyel denklem sistemlerinde olduğu gibi impalsif diferansiyel denklemlerinde veya denklem sistemlerinde de çözümün varlığı ve tekliği oldukça önemlidir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi ve $D = \mathbb{R}_+ \times \Omega$ verilsin. Her $k = 1,2,...$ ve $x \in \Omega$ için $\tau_k \in C[\Omega,(0,\infty)]$, $\tau_k(x) < \tau_{k+1}(x)$, $\lim_{k\to\infty} \tau_k(x) = \infty$ olsun. Notasyon kolaylığı için $\tau_0(x) \equiv 0$ alalım ve k nın daima 1 den ∞ a gittiğini varsayalım. $S_k : t = \tau_k(x)$ de yüzeylerdir.

Aşağıdaki BDP yi dikkate alalım;

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \ t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x), \ t = \tau_k(x) \\ x(t_0^+) = x_0, \ t_0 \geq 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

burada $f : D \to R^n$, $I_k : \Omega \to R^n$ dir.

$x:(t_0, t_0 + a) \to R^n$, $t_0 \geq 0$, $a > 0$ fonksiyonunun (2.4) sisteminin çözümü olabilmesi için aşağıdaki şartları sağlaması gerekir.

Çözüm olabilme tanımı aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.3: $t \in [t_0, t_0 + a)$ için $x(t_0^+) = x_0$ ve $(t, x(t)) \in D$ *olmalı*

i) $x(t)$ *sürekli diferansiyellenebilir olmalı ve* $t \in [t_0, t_0 + a)$, $t \neq \tau_k(x(t))$ *için* $x'(t) = f(t, x(t))$ *olmalı* *ii) Eğer* $t \in [t_0, t_0 + a)$ *ve* $t = \tau_k(x(t))$ *ise* $x(t^+) = x(t) + I_k(x(t))$ *olmalı ve herhangi bir* j, $t < s < \delta$ *ve bazı* $\delta > 0$ *için* $s \neq \tau_j(x(s))$ *ve* $x(t)$ *daima soldan sürekli farzedilecektir.*

Şimdi de bize çözümün var olabilme şartlarını veren teoremlerden bahsedelim.

Teorem 2.1 : Çözümün varlığı

Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım;

i) $f : D \to R^n$ *fonksiyonu* $t = \tau_k(x), k = 1, 2, ...$ *için sürekli ve her* $(t, x) \in D$ *için* $\ell \in L^1_{loc}$ *vardır.* (t, x) *in küçük bir komşuluğunda;*

$$|f(s, y)| \leq \ell(s) \tag{2.9}$$

yazılabilsin.

ii) Herhangi bir k için, $t_1 = \tau_k(x)$, $\delta > 0$ *ın varlığını sağlar, öyle ki* $t_1 \neq \tau_k(x)$, $0 < t - t_1 < \delta$ *ve* $|x - x_1| < \delta$ *dır.*

Bu şartlar altında her $(t_0, x_0) \in D$ *ve bazı* $\alpha > 0$ *için* $x : (t_0, t_0 + \alpha) \to R^n$ *çözümü (2.8) BDP için vardır* [9].

Teorem 2.2 : Çözümün varlığı 2

Aşağıdaki koşulları göz önüne alalım;

i) $f : D \to R^n$ *fonksiyonu sürekli,*

ii) $\tau_k : \Omega \to (0, \infty)$ *diferansiyellenebilir*

iii) Eğer bazı $(t_1, x_1) \in D$ *ve* $k \geq 1$ *için* $t_1 = \tau_k(x)$ *ise öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki;*

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} \cdot f(t,x) \neq 1 \tag{2.10}$$

$(t,x) \in D$ *için öyle ki* $|x - x_1| < \delta$ *ve* $0 < t - t_1 < \delta$ *dır.*

Tüm bu şartlar altında her $(t_0, x_0) \in D$ *ve bazı* $\delta > 0$ *için (2.4) BDP in bir* $x : [t_0, t_0 + \alpha) \to R^n$ *çözümü vardır.*

(2.4) sisteminin çözüm için aşağıdaki maddeleri de dikkate almalıyız.

i) Eğer $t_0 \neq \tau_k(x_0)$ ise $x(t)$ klasik anlamda bir çözümdür

ii) Eğer $t_0 = \tau_k(x_0)$ ise $x(t)$ çözümü genişletilmiş anlamda f in düzgünlüğüne bağlıdır.

Bu şartlar altında çözüm fonksiyonunu tanımlayalım;

Tanım 2.4: Çözüm Fonksiyonu

$(t,x) \in D$ *olduğu yerde öyle dir ki* $|x - x_1| < \delta$ *ve* $0 < t - t_1 < \delta$ *dır.* *(2.4) ün çözümü olan* $x(t, t_0, x_0)$ *fonksiyonu bazı* $[t_0, t_0 + a)$ *aralıklarında* $\{t_i\}, t_0 < t_i < t_0 + a,\ t_i < t_j,\ i < j$ *impals noktaları için aşağıdaki gibi tanımlanır;*

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{cases} x(t, t_0, x_0),\ t_0 \le t \le t_1 \\ x(t, t_1, x_1^+),\ t_1 \le t \le t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x(t, t_i, x_i^+),\ t_i \le t \le t_{i+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{2.11}$$

$x_i^+ = x_i + I_k(x_i)$ *ve* $x_i = x(t_i)$ *impals koşulları ile aralıklar ve bu aralıklara ait çözüm parçaları elde edilir.*

Teorem 2.3 : Maksimal varlık aralığı

Farzedelim ki $\Omega = R^n$ *ve*

$$f : D \to R^n \text{ süreklidir} \tag{2.12.a}$$

$$I_k \in C\left[\Omega, R^n\right],\ \tau_k \in C[\Omega, \infty],\ k \geq 1 \tag{2.12.b}$$

O halde maksimal varlık aralığı $[t_0, b)$ *de (2.8) in çözümü olan* $x(t)$ *için;*

$$\lim_{t \to b-} |x(t)| = \infty \tag{2.13}$$

olacaktır.

Aşağıdaki 3 koşul sağlansın;

i) Herhangibir $k \geq 1$ için, $t_1 = \tau_k(x_1)$ nın sağladığı öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $t \neq \tau_k(x_1)$ olan tüm (t, x) ler için $0 < t - t_1 < \delta$ olmak üzere $|x - x_1| < \delta$ olur.

ii) Tüm $k \geq 1$ için, $t_1 = \tau_k(x_1)$ tüm $j > 1$ için $t_1 \neq \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ sağlanır.

iii) Tüm $k \geq 1$ için, $\tau_k \in C^1[\Omega, (0, \infty)]$ ve bazı $j \geq 1$ için $t_1 = \tau_k(x_1)$ olduğunda $t_1 = \tau_j(x_1 + I_k(x_1))$ sağlanır ve $x_1^+ = x_1 + I_k(x_1)$ olduğu yerlerde

$$\frac{\partial \tau_j(x_1^+)}{\partial x} \cdot f\left(t_1, x_1^+\right) \neq 1 \tag{2.14}$$

3. PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ

Aşağıdaki BDP impalsif diferansiyel denklemini dikkate alalım;

$$\begin{cases} x' = A(t)x + f(t,x),\ t \neq t_k \\ \Delta x = B_k x + I_k(x),\ t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Aşağıdaki varsayımlar altında;

i) $0 < t_2 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots,\ \lim\limits_{k\to\infty} t_k \to \infty$

ii) $A(t)$ nxn tipinde $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ parçalı sürekli bir matris, $t = t_k$, $k = 1,2,\ldots$ noktalarında 1. tip süreksizliği var ve $A(t)$ bu noktalarda solda sürekli.

iii) $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n$ de sürekli ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $t > t_k$ için $k = 1,2,\ldots,$ $\lim\limits_{(t,y)\to(t_k,x)} f(t,y)$ vardır.

iv) $\forall k$ için B_k nxn tipinde bir matris ve $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ süreklidir [4], [5], [13].

Teorem 3.1: Lineer olmayan Parametrelerin Değişimi Formülü

Yukarıdaki (i) ve (iv) elimizde olsun. $x(t)$ *(3.1) sisteminin* $[t_0, \infty)$ *var olan herhangibir çözümü,* $W(t,s)$ *ise*

$$\begin{cases} x' = A(t)x,\ t \neq t_k \\ \Delta x = B_k x,\ t = t_k \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

sisteminin fundamental matris çözümü olsun. O halde $x(t)$ *aşağıdaki denklemi* $t > t_0$ *için sağlar;*

$$x(t)=W(t,t_0^+)x_0+\int_{t_0}^{t}W(t,s)f(s,x(s))ds+\sum_{t_0<t_k<t}W(t,t_k^+)I_k(x(t_k)) \tag{3.3}$$

Artık Alekseevin lineer olmayan parametrelerin değişimi formülünü tartışabiliriz. Bu amaçla aşağıdaki BDP ni göz önüne alalım;

$$\begin{cases} y'=f(t,y)+R(t,y),\ t\neq t_k, \\ \Delta y=h_k(y),\ t=t_k, \\ t(t_0^+)=x_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Teorem 3.2: Benzer Sistemler

i) $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *fonksiyonu* $(t_{k-1},t_k]\times\mathbb{R}^n$ *üzerinde sürekli ve tüm k lar için* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *kısmü türevi de süreklidir.*

ii) $I_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *sürekli diferansiyellenebilir*

koşulları gerçeklenmek üzere aşağıdaki şartları da göz önüne alalım;

iii) $R:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *fonksiyonu* $(t_{k-1},t_k]\times\mathbb{R}^n$ *üzerinde sürekli ve tüm k lar ve* $t>t_k$ *için* $\lim\limits_{(t,y)\to(t_{k-1},x)}R(t,y)$ *limiti vardır.*

iv) $h_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *süreklidir.*

$$\begin{cases} x'=f(t,x)\ t\neq t_k, \\ \Delta x=I_k(x),\ t=t_k, \\ x(t_0^+)=x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Denklem sistemini de dikkate alalım;

Eğer $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ *fonksiyonu (3.5) sisteminin* $[t_0,\infty)$ *üzerindeki bir çözümü ise (3.3) ün herhangibir çözümü olan* $y(t)=y(t,t_0,x_0)$ *ise aşağıdaki eşitliği* *sağlar* [12].

$$t \geq t_0 \text{ , } \Phi(t,t_0,x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0) \tag{3.6}$$

olmak üzere;

$$y(t) = x(t) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s,y(s)) \cdot ds + \sum_{t_0 < t_k < t} \int_{0}^{l} \Phi[t,t_k,y(t_k) + sh_k(y(t_k))] \tag{3.7}$$

şeklindedir.

4. STABİLİTE TANIMI

Aşağıdaki BDP impalsif diferansiyel denklemini dikkate alalım

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\ t \neq \tau_k(x) \\ \Delta x = I_k(x),\ t = \tau_k(x) \\ x(t_0^+) = x_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

(3.5) in $t \geq t_0$ da çözümü olan $x_0(t) = x(t,t_0,y_0)$ fonksiyonu verilsin. $x_0(t)$ ler t_k noktalarında $S_k : t = \tau_k(x)$ yüzeylerine değsin öyle ki $t_k < t_{k+1}$ ve $t_k \to \infty,\ k \to \infty$ olsun.

Tüm bu bilgiler ışığında $x_0(t) = x(t,t_0,y_0)$ çözümünü verilen tanımlar ışığında nitelemek mümkün olacaktır;

Tanım 4.1: $(S_{1\eta})$ *stabildir, eğer her* $\varepsilon > 0, \eta > 0$ *ve* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *için öyle bir* $\delta = \delta(t_0,\varepsilon,\eta) > 0$ *vardır ki* $|x_0 - y_0| < \delta$ *iken* $t \geq t_0$ *için* $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ *olsun*

Tanım 4.2: $(S_{2\eta})$ *düzgün stabildir, eğer* $(S_{1\eta})$ *deki* δ t_0 *dan bağımsız ise*

Tanım 4.3: $(S_{3\eta})$ *atraktiv dir, eğer her* $\varepsilon > 0, \eta > 0$ *ve* $t_0 \in \mathbb{R}_+$ *için öyle bir* $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$ *ve* $T = T(t_0,\varepsilon,\eta) > 0$ *vardır ki* $t > t_0 + T$ *ve* $|t - t_k| > \eta$ *için* $|x_0 - y_0| < \delta_0$ *olması* $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$ *olmasını sağlar.*

Tanım 4.4: $(S_{4\eta})$ *düzgün attractive dir, eğer* $(S_{3\eta})$ *deki* δ_0 *ve T* t_0 *dan bağımsız ise*

Tanım 4.5: $(S_{5\eta})$ *asimptotik stabildir, eğer* $(S_{1\eta})$ *ve* $(S_{3\eta})$ *gerçeklenir ise*

Tanım 4.6: $(S_{6\eta})$ *düzgün asimptotik stabildir, eğer* $(S_{2\eta})$ *ve* $(S_{4\eta})$ *gerçeklenir ise* [10].

Dikkat edersek $f(t,0)\equiv 0$ ve tüm k lar için $I_k(0)\equiv 0$ ise (3.5) sistemi triviyal çözüme sahiptir. Hatta eğer $\tau_k(x)=t_k$ yani $\tau_k(x)$ x den bağımsız ise, o halde tüm çözümler için impalsif efekt aynı zamanda ortaya çıkar.

Sonuç olarak bu gibi durumlarda stabilite notasyonları standart tanımlara denk gelir. Örneğin $(S_{1\eta})$ maddesi (S_1) haline gelir, yani (3.5) sisteminin triviyal çözümü eğer harhangibir ; $\varepsilon>0$ ve $t_0\in\mathbb{R}_+$ ise stabildir ve bir $\delta=\delta(t_0,\varepsilon)>0$ vardır öyle ki $|x_0|<\delta$ olması $|x(t)|<\varepsilon,\ t\geq t_0$ olmasını sağlar.

4.1. K ve L Sınıfı Fonksiyonlar

K ve L sınıfı fonksiyonların tanımını verelim;

Tanım 4.7: a fonsiyonuna, $a\in C[R_+,R_+]$, $a(0)=0$ *ve* $a(u)$ *kesin artan ise K sınıfına aittir denilir.*

Tanım 4.8: σ *fonksiyonuna,* $\sigma\in C[R_+,R_+]$, $\sigma(u)$ *kesin azalan ve* $u\to\infty\Rightarrow\sigma(u)\to 0$ *ise L sınıfına aittir denir.*

4.2. Stabilite Kriterleri

Aşağıdaki sabit zamanlı impalsif efektli diferansiyel dikkate alalım. Daha önce ifade ettğimiz (4.1) denklemi aşağıdakine indirgenir;

$$\begin{cases} x'=f(t,x),\ t\neq t_k \\ \Delta x=I_k(x),\ t=t_k(x) \\ x(t_0^+)=x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

i) $0<t_1<t_2<\ldots<\ldots$ ve $k\to\infty$ iken $t_k\to\infty$,

ii) $f:R_+\times S(\rho)\to R^n, I_k:S(\rho)\to R^n, f$ fonksiyonu $(t_{k-1},t_k]\times S(\rho)$ aralığında sürekli, $S(\rho)=\left[x\in R^n;|x|<\rho\right]$ elde edilir.

Tüm k lar için; $f(t,0)\equiv 0,\ I_k(0)=0$ farzeder isek elimizde (4.2) triviyal çözümü olur.

$$[x,y]=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\left[|x+hy|-|x|\right] \tag{4.3}$$

olduğunu kabul edersek aşağıdaki sonucu ispatlayabiliriz.

Teorem 4.1: Benzer Sistemler

i) $g\in C[R_+\times R_+,R],\ g(t,0)\equiv 0$ *olmak üzere*

$$[x,f(t,x)]_+\le g(t,|x|),\ t\ne t_k,\ (t,x)\in R_+\times S(\rho) \tag{4.4}$$

dir.

ii) $G_k:[0,\rho_0)\to[0,\rho),\ G_k\in K$ *olmak üzere;* $[x+I_k(x)]\le G_k(|x|)$ *dir.*

O halde;

$$\begin{cases} u'=g(t,u),\ t\ne t_k \\ u(t_k^{\ +})=G_k(u(t_k)), \\ x(t_0)=u_0\ge 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

sisteminin $u=0$ *triviyal çözümünün özellikleri,*

$$\begin{cases} x'=f(t,x),\ t\ne t_k \\ \Delta x=I_k(x),\ t=t_k(x) \\ x(t_0^{\ +})=x_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

sisteminin $x\equiv 0$ *triviyal çözümünün özelliklerine karşılık gelmesinin sağlar.*

İspat 4.1: Benzer Çözümler

(4.2) sisteminin $x \equiv 0$ *çözümünün stabilitesini ve asimptotik stabilitesini ispatlayabiliriz.*

Farzedelim ki; (4.3) ün $u \equiv 0$ *çözümü stabildir ve* $\rho^* = \min(\rho_0, \rho)$ *o halde verilen* $0 < \varepsilon < \rho^*$ *ve* $t_0 \in R_+$ *için bir* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ *vardır öyle ki;* $u_0 < \delta$ *olması* $u(t, t_0, u_0) < \varepsilon$, $t \geq t_0$ *olmasını* $u(t, t_0, u_0)$ *ın (4.3) sisteminin herhangi bir çözümü olduğu yerde sağlar.*

Biz iddia ediyoruz ki; (4.2) denklem sisteminin triviyal yani önemsiz çözümü olan $x \equiv 0$ *da stabildir.*

Eğer bu doğru değil ise $x(t, t_0, x_0)$ *gibi öyle bir çözüm olmalı ki* $|x_0| < \delta$ *ve bir* $t^* > t_0$ *iken bazı k lar için* $t_k < t^* < t_{k+1}$ *olması,* $t_0 \leq t \leq t_k$ *için* $\left|x\left(t^*, t_0, x_0\right)\right| \geq \varepsilon$ *ve* $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ *olmasını sağlar.*

Dikkate alınarak elimizde $\left|x\left(t_k^+, t_0, x_0\right)\right| \leq G_k(\varepsilon) < G_k(\rho_0) < \rho$ *olur onun için biz öyle bir* t^0 *seçebiliriz ki* $t_k < t^0 < t^*$ *iken* $\in \leq \left|x\left(t^0, t_0, x_0\right)\right| < \rho$ *olur.*
$m(t) = |x(t, t_0, x_0)|$ *ayarlayarak ve (a) yı kullanarak;*

$$\begin{cases} D^+ m(t) \leq g(t, m(t)),\ t \neq t_i,\ \ t_i \in \left[t_0, t^0\right), \\ m(t_i) \leq G_k(m(t_i)) \\ m(t_0) = |x_0| \end{cases} \tag{4.6}$$

elde ederiz.

Sonuç olarak impalsif diferansiyel konusu bağlamındaki eşitsizlikleri ile ; $r(t, t_0, u_0)$ *ın (4.3) ün maksimal çözümü olduğu yerde;*

$$m(t) \le r(t, t_0, |x_0|), \; t_0 \le t \le t^0 \tag{4.7}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

O halde;

$$\varepsilon \le m(t^0) \le r(t^0, t_0, |x_0|) < \varepsilon \tag{4.8}$$

çelişkisini elde ederiz. sonuç olarak (4.2) nin $x = 0$ *çözümünün stabil oluşu ispatlanmış olur.*

İspatın sıradaki bölümüne geçelim şimdi de (4.5) in çözümü olan $u = 0$ *ın asimptotik stabil olduğunu varsayalım;*

Bu (4.2) nin $x = 0$ *çözümünün stabil olmasını sağlar.*

Sonuç olarak $\varepsilon = \rho_0^*$ *alır ve* $\delta_0^* = \delta(t_0, \rho^*)$ *seçersek elimizde;*

$$|x_0| < \delta_0^* \; \textit{iken} \; |x(t, t_0, x_0)| < \rho, \; t \ge t_0 \tag{4.9}$$

olur.

$x = 0$ *ın atraktifliğini ispatlamak için* $0 < \varepsilon < \rho^*$ *alalım ve* $t_0 \in R_+$ *verilmiş olsun.*

Verilen $0 < \varepsilon < \rho^*$ *ve* $t_0 \in R_+$ *için* $u = 0$ *attraktiftir,* $\delta_{10} = \delta(t_0) > 0$ *ve* $T = T(t_0, \varepsilon) > 0$ vardır öyle ki ; $u_0 < \delta_{10}$ iken $u(t, t_0, u_0) < \varepsilon, \; t \ge t_0 + T$ olur.

$\delta_0 = \min(\delta_0^*, \delta_{10})$ *seçelim ve* $|x_0| < \delta_0$ *kabul edelim. (4.9) in argümentleri (4.7) e gider bunun sonucunda ;*

$$|x(t, t_0, x_0)| < r(t, t_0, |x_0|), \; t \ge t_0 \tag{4.10}$$

elde edilir.

Bunun sonucunda (4.2) nin çözümü olan $x=0$ *çözümünü atraktif olur. Dolayısı ile (4.2) nin çözümü olan* $x=0$ *asimptotik stabildir ve ispat tamamlanmış olur.*

5. TEMEL KARŞILAŞTIRMA SONUÇLARI

Aşağıdaki impalsif diferansiyel denklemini dikkate alalım;

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\ t \neq t_k \\ \Delta x = I_k(x),\ t = t_k \\ x(t_0^{+}) = x_0,\ t_0 \geq 0,\ k = 1,2,.... \end{cases} \tag{5.1}$$

Aşağıdaki şartlar altında;

- (A_0)

 i) $0 < t_1 < t_2 ... < t_k < ...,$ ve $k \to \infty$ iken $t_k \to \infty$

 ii) $(t_{k-1},\ t_k] \times R^n$ aralığında $f : R_+ \times R^n \to R^n$ süreklidir ve her

 $x \in R^n,\ k = 1,2,....,\ \lim_{(t,y)\to(t_k^+,x)} f(t,y) = f(t_k^+,x)$ vardır.

 iii) $I_k : R^n \to R^n$ $V : R_+ \times R^n \to R_+$ kabul edelim.

Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanması sonucunda V fonksiyonu V_0 sınıfına aittir denilir;

i) Her $x \in R^n$ için $(t_{k-1}, t_k] \times R^n$ aralığında V sürekli

$k = 1,2,...,\ \lim_{(t,y)\to(t_k^+,x)} V(t,y) = V(t_k^+,y)$ vardır.

ii) $(t,x) \in (t_{k-1},\ t_k] \times R^n$ aralığında V fonksiyonu x için lokal Lipschitz şartlarını sağlasın,

$$D^{+}V(t,x) = \lim_{h\to 0^{+}} \sup \frac{1}{h}\left[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)\right] \tag{5.2}$$

$$D\_V(t,x) = \lim_{h\to 0^{-}} \inf \frac{1}{h}\left[V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)\right] \tag{5.3}$$

Eğer $V \in C^1[R_+ \times R^n,\ R_+]$ o halde $V'(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x) \cdot f(t,x)$ olduğu yerde

$$D\_V(t,x) = D^+V(t,x) = V'(t,x) \tag{5.4}$$

olur [3].

Şimdi sıradaki karşılaştırma sonucunu formülize edebiliriz;

Teorem 5.1:Maksimal Çözüm

$V : R_+ \times R^n \to R_+$ *ve* $V \in V_0$ *alınsın;*

farz edelim ki; $g : R_+ \times R_+ \to R$ *fonksiyonu* $(A_0\ ii)$ *sağladığı ve* $\Psi_k : R_+ \to R_+$ *fonksiyonunun azalmayan olduğu yerde;*

$$\begin{cases} D^+V(t,x) \le g(t,\ V(t,x)),\ t \ne t_k \\ V(t,\ x + I_k(x)) \le \Psi_k(V(t,x)),\ t = t_k \end{cases} \tag{5.5}$$

$r(t) = r(t,t_0,u_0)$ *fonksiyonunu skaler diferansiyel denklemin maksimal çözümü kabul edelim;*

$$\begin{cases} u' = g(t,\ u),\ t \ne t_k \\ u(t_k^{\ +}) = \Psi_k(V(t_k)) \\ u(t_0^+) = u_0 \ge 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

sistemi $[t_0, \infty)$ *aralığında vardır.*

O halde $V(t_0^+, x_0) \le u_0$ *olması,* $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ *fonksiyonu (5.1) in çözümü olduğu yerde;*

$$V(t,x(t)) \le r(t),\ t \ge t_0 \tag{5.7}$$

gerçeklenir.

İspat 5.1: Maksimal Çözüm

$x(t)=x(t,t_0,x_0)$ *fonksiyonu* $t\geq t_0$ *için (5.1) in çözümü kabul edelim öyle ki* $V\left(t_0^+,x_0\right)\leq u_0$ *olsun;* $t\neq t_k$, $m(t)=V(t,x(t))$ *tanımlayalım böylece yeterince küçük* $h>0$ *için elimizde*

$$\begin{aligned} m(t+h)-m(t)=V(t+h,x(t+h))-V(t+h,x(t)+hf(t,x(t))) \\ +V(t+h,x(t)+hf(t,x(t)))-V(t,x(t)) \end{aligned} \tag{5.8}$$

olur.

Madem $V(t,x)$ *fonksiyonu* $t\in(t_k,t_{k+1}]$ *için x e göre lokal lokal Lipschitz şartlarını sağlıyor, (5.5) i kullanarak;*

$$\begin{aligned} D^+m(t)\leq g(t,m(t)),\ t\neq t_k,\ m\left(t_0^+\right)\leq u_0, \\ m\left(t_k^+\right)=V\left(t_k^+,x(t_k)+I_k(x(t_k))\right)\leq \Psi_k(m(t_k)) \end{aligned} \tag{5.9}$$

elde ederiz.

5.1. Sonuç (Teorem 5.1 in Bir Sonucu)

Teorem 5.1 in sonucu olarak aşağıdakiler gerçeklenir.

i) Tüm k lar için; $g(t,u)\equiv 0$, $\Psi_k(u)=u$, o halde $V(t,x(t))$ t için artmayandır

$$V(t,x(t))\leq V\left(t_0^+,x_0\right),\ t\geq t_0 \tag{5.10}$$

olur.

ii) Tüm k lar için; $g(t,u)\equiv 0,\ \Psi_k(u)=d_k u,\ d_k\geq 0$, o halde $V(t,x(t))$ t için

$$V(t,x(t))\leq V\left(t_0^+,x_0\right)\prod_{t_0<t_k<t} d_k,\ t\geq t_0 \tag{5.11}$$

olur.

iii) Tüm k lar için; $g(t,u)\equiv -\alpha u, \alpha>0,\ \Psi_k(u)=d_k u,\ d_k\geq 0$, o halde $V(t,x(t))$ t için

$$V(t,x(t))\leq\left[V\left(t_0^+,x_0\right)\prod_{t_0<t_k<t} d_k\right]\exp[-\alpha(t-t_0)],\ t\geq t_0 \tag{5.12}$$

olur.

iv) Tüm k lar için; $\lambda\in C^1\left[R_{+,}R_+\right]$ olduğu yerde $g(t,u)\equiv\lambda'(t)u,\ \Psi_k(u)=d_k u,\ d_k\geq 0$, o halde $V(t,x(t))$ t için ;

$$V(t,x(t))\leq\left[V\left(t_0^+,x_0\right)\prod_{t_0<t_k<t} d_k\right]\exp[\lambda(t)-\lambda(t_0)],\ t\geq t_0 \tag{5.13}$$

olur.

Teorem 5.2: Çözüm Karşılaştırma

$V:R_+\times R^n\to R_+$ *ve* $V\in V_0$ *alınsın; farz edelim ki;* $g:R_+\times R_+^N\to R^N$ *fonksiyonu* $(A_0\ ii)$ *sağladığı ve* $g(t,u)$ *fonksiyonu u ya göre kuazimonoton azalmayan ve* $\Psi_k:R_+^N\to R_+^N$ *azalmayan olduğu yerde;*

$$D^+V(t,x)\leq g(t,\ V(t,x)),\ t\neq t_k \tag{5.14.a}$$

ve

$$V\left(t, x+I_k(x)\right) \le \Psi_k\left(V(t,x)\right),\ t=t_k \tag{5.14.b}$$

olsun.

$r(t): r(t,t_0,u_0)$ *fonksiyonunu* $[t_0,\infty)$ *aralığında aşağıdaki (5.15) sisteminin maksimal çözümü kabul edelim.*

$$\begin{cases} u' = g(t, u),\ t \ne t_k \\ u\left(t_k^{+}\right) = \Psi_k\left(u(t_k)\right) \\ u\left(t_0^{+}\right) = u_0 \ge 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

O halde $V\left(t_0^{+}, x_0\right) \le u_0$ *olması* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *nin 53.1) in çözümü olduğu yerde* $t \ge t_0$ *için* $V(t, x(t)) \le r(t)$ *olmasını sağlar.*

$g(t,u)$ *fonksiyonunun bu durumda olması şu anlama gelir ki;* $u \le v,\ u_i = v_i$ *bazı i ler için* $g_i(t,u) \le g_i(t,v)$ *olur.*

Sıradaki impalsif diferansiyel sistemi göz önüne alalım;

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\ t \ne \tau_k(x),\ k = 1,2,..., \\ \Delta x = I_k(x), \\ x\left(t_0^{+}\right) = x_0 \end{cases} \tag{5.16}$$

takip eden koşullara tabidir;

- *(*B_0*)*

   i) Tüm k lar için $\tau_k \in C^1\left[R^n,(0,\infty)\right],\ \tau_k < \tau_{k+1}(x)$ *ve her* $x \in R^n$ *için*

$\tau_k \to \infty$ iken $t_k \to \infty$

ii) $f \in C\left[R_+ \times R^n, R^n\right]$ *ve* $f : R_+ \times R^n \to R^n$ *süreklidir ve (5.8) in çözümleri olan x(t) vardır ve* $t \geq t_0$ *için tektir.*

iii) $I_k \in C\left[R^n, R^n\right]$ *ve (5.8) in her bir çözümü için herhangi bir verilen* $S_k : t = \tau_k(x)$ *yüzeyine tam olarak bir kez değer.*

$x_t(t)$ *ve (5.16) nın öngörülmüş bir çözümü olsun öyle ki* $[t_0, \infty)$ *aralığında* $x_0(t_0^+) = y_0$ *olsun ve* $t_k^*, k = 1,2,.....,$ *moment noktalarında* S_k *yüzeyleri ile buluşsun; İki çözüm arasındaki farklıları gösteren karşılaştırma sonuçlarını ispatlamakta ilerleyebilmek için aşağıdaki şartlara intiyacımız vardır.*

- (B_1) *Bazı* $\rho > 0$ *lar için* $S[x_0, \rho] = \left[x \in R^n : |x - x_0(t)| < \rho\right]$ *olduğu yerde* $R_+ \times S(x_0, \rho)$ üzerinde $|f(t,x)| \leq C$ *dır.*
- (B_2) $(t,x) \in R_+ x S(x_0, \rho)$ *ve tüm k lar için;*

$$\frac{\partial \tau_k(x)}{\partial x} f(t,x) \leq 0 \text{ ve } |\tau_k(x) - \tau_k(y)| \leq N_k |x - y|,\ N_k \geq 0 \tag{5.17}$$

- (B_3) $V \in C\left[R_+ x R^n, R_+\right]$, $V(t,x)$ *fonksiyonu x için lokal Lipschitz şartlarını sağlasın ve* $(t,x) \in R_+ \times S(x_0, \rho)$ *için;* $\tau_k \in K$, $g \in C[R_+ \times R_+, R]$ *olduğu yerde;*

$$D^+ V(t, x - x_0(t)) \leq g(t, V(t, x - x_0(t))),\ t \neq t_k^*,\ t \neq \tau_k(x) \tag{5.18}$$

$$V(t, x - y + I_k(x) - I_k(y)) \leq \tau_k(V(t, x - y)),\ t = \tau_k(x),\ t = \tau_k(y) \tag{5.19}$$

olur.

$\bullet(B_4)$ $V(t,x)$ *fonksiyonu t için artmayan,* $b(|x|) \le V(t,x)$ *ve*

$$(t,x) \in R_+ \times S(x_0,\rho) \text{ için } |V(t,x) - V(t,y)| \le L|x-y| \tag{5.20}$$

dir.

$\Psi_k(u) \equiv \tau_k\left(u + LCN_k b^{-1}(u)\right) + LCN_k b^{-1}(u)$ alalım; o halde alttaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.2: Maksimal Çözüm

Farzedelim ki (B_1) ve (B_4) *gerçeklensin; x(t) fonksiyonu* $[t_0,\infty)$ *daki* $x\left(t_0^+\right) = x_0$ *olmak üzere (5.16) in bir çözümü olsun ve* $t = t_k$, $k = 1,2,....,$ *noktalarında* S_k *ile buluşsun. Bu halde elimizde;* $V\left(t_0^+, x_0 - y_0\right) \le u_0$ *gerçeklendiği,*

$J = [t_0,\infty) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (\underline{t}_k \overline{t}_k] = \min\left(t_k^*, t_k\right)$ *olduğu yerde*

$$V(t, x(t) - x_0(t)) \le r(t, t_0, u_0),\ t \in J \tag{5.21}$$

olur.

$\overline{t}_k = \max\left(t_k^*, t_k\right)$ ve $r(t,t_0,u_0)$ *aşağıdaki (5.22) nin* $[t_0,\infty)$ *daki maksimal çözümüdür;*

$$\begin{cases} u' = g(t,u), & t \notin [\underline{t}_k, \overline{t}_k] \\ u\left(\overline{t}_k^+\right) = \Psi_k(u(\underline{t}_k)) \\ u\left(t_0^+\right) = u_0 \ge 0 \end{cases} \tag{5.22}$$

İspat 5.2:Maksimal Çözüm

$m(t) = V(t, x(t) - x_0(t))$ *seçelim* x_0 *öyle ki* $m\left(t_0^+\right) = V\left(t_0^+, x_0 - y_0\right)$ *olsun. O halde (5.18) gerçeklenir ve V Lipscihitz koşulunu sağlar, sonuçta;*

$$D^{+}m(t)\leq g(t,m(t)),\ t\neq t_k,\ \overline{t}_k \tag{5.23}$$

elde edilir.

Sıradaki tahmin;

$$m(\overline{t}_k^{+})=V(\overline{t}_k^{+},x(\overline{t}_k^{+})-x_0(\overline{t}_k^{+})) \tag{5.24}$$

Üzerinde düşüneceğimiz iki iddia var;

Birinci varsayımımız $\underline{t}_k=t_k$ *o halde* (B_1) *ve* (B_4) *kullanırsak elimizde;*

$$m(\overline{t}_k^{+})\leq LC(\overline{t}_k,\underline{t}_k)+\tau_k\left[V(\overline{t}_k^{+},x(\underline{t}_k)-x_0(\overline{t}_k))\right] \tag{5.25}$$

olur.

Hatta (B_4) *de kullanırsak;*

$$V(\overline{t}_k^{+},x(\underline{t}_k)-x_0(\overline{t}_k))\leq m(\underline{t}_k)+LC(\overline{t}_k-\underline{t}_k) \tag{5.26}$$

elde edilir.

Üstelik (B_2) *ve* (B_4) *ü de kullanırsak;*

$$0\leq\overline{t}_k-\underline{t}_k=\tau_k(x_0(\overline{t}_k)-\tau_k x(\underline{t}_k))\leq N_k\left|x_0(\underline{t}_k)-x(\underline{t}_k)\right|\leq N_k b^{-1}\left[m(\underline{t}_k)\right] \tag{5.27}$$

elde edilir.

(5.5),(5.26) ve (5.27) *bağıntıları kullanılarak sonuçta;*

$$m\left(\overline{t}_k^{\,+}\right) \le \tau_k\left[m\left(\underline{t}_k\right) + LCN_k b^{-1}\left(m\left(\underline{t}_k\right)\right)\right] + LCb^{-1}m\left(\underline{t}_k\right) \equiv \Psi_k\left(m\left(\underline{t}_k\right)\right) \tag{5.28}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\overline{t}_k = t_k^*$ *, aynı argümanlar ile hareket edip ve aynı tahminde (5.28) bulunup sonunda elimizde;*

$$\begin{aligned} &D^+m(t) \le g(t, m(t)), \quad t \notin \left[\underline{t}_k, \overline{t}_k\right] \\ &m\left(\overline{t}_k^{\,+}\right) \le \Psi_k\left(m\left(\underline{t}_k\right)\right) \\ &m\left(t_0^+\right) \le u_0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

olur.

6. TEKİL SAPTIRILMIŞ SİSTEMLER

Aşağıdaki impalsif tekil saptırılmış diferansiyel denklem sistemini dikkate alalım;

$$\begin{cases} x' = f(t,x,y) \\ \mu y' = g(t,x,y),\ t \neq \tau_k \\ \Delta x = I_k(x,y) \\ \Delta y = J_k(x,y),\ t = \tau_k,\ k = 1,2,3,.... \end{cases} \tag{6.1}$$

$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 ... < \tau_k ......$ ve $k \to \infty$ iken $\tau_k \to \infty$

Bu sistemde üstel stabiliteye bakacağız. $\mu \in (0,\mu_0]$ küçük parametresi ek olarak aşağıdaki şartlarla f, g, I_k ve J_k fonksiyonlarını bağlar.

- (A_1) $f \in C\left[R_+ \times S^n(\rho), R^n\right]$, $g \in C\left[R_+ \times S^n(\rho), R^m\right]$, $f(t,0,0) \equiv 0$, $g(t,0,0) \equiv 0$ ve f_x, f_y, g_t, g_x, g_y vardır, süreklidir ve $R_+ \times S^n(\rho) \times S^m(\rho)$ üzerinde sınırlıdır.
- (A_2) $I_k \in C\left[S^n(\rho) \times S^m(\rho), R^n\right]$, $I_k \in C\left[S^n(\rho) \times S^m(\rho), R^m\right]$, $I_k(0,0) = J_k(0,0) = 0$ ve $I_k(0,0) = J_k(0,0) = 0$ ve $\frac{\partial I_k}{\partial x}, \frac{\partial I_k}{\partial y}, \frac{\partial J_k}{\partial x}, \frac{\partial J_k}{\partial y}$ vardır, süreklidir ve $k = 1,2,....$ için $S^n(\rho) \times S^m(\rho)$ üzerinde düzgün sınırlıdır.
- (A_3) Sürekli ve diferansiyellenebilir $h : R_+ \times S^n(\rho) \to S^m(\rho)$ fonksiyonu vardır öyle ki; $(t,x) \in R_+ \times S^n(\rho)$ için $h(t,0) \equiv 0$, $g(t,x,h(t,x)) = 0$ ve $(t,x,y) \in R_+ \times S^n(\rho) \times S^m(\rho)$ ve $y \neq h(t,x)$ için $g(t,x,y) \neq 0$,
- (A_4) Tüm k lar için; $\tau_k - \tau_{k-1} \geq \theta > 0$

(6.1) sistemindeki $x = 0, y = 0$ çözümünün satabilite özellikleri aşağıdaki sistemin $x = 0$; için stabilite özelliklerine indirgenebilir;

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,h(t,x)),\ t \neq \tau_k \\ \Delta x = I_k(x,h(\tau_k,x)),\ t = \tau_k,\ k = 1,2,3,.... \end{cases} \tag{6.2}$$

ve $y = h(\alpha,\beta)$ çözümünün stabilite özellikleri $(\alpha,\beta) \in R_+ \times S^n(\rho)$ olduğu yerde;

$$\frac{dy}{ds} = g(\alpha,\beta,y) \tag{6.3}$$

şeklindedir.

6.1. Üstel Stabilite

Üstel stabilite tanımını verelim;

Tanım 6.1: Eğer $\rho > 0$, $A \geq 1$ *ve* $\gamma > 0$ *sabitler var öyle ki* $t_0 \in R_+$ *ve* $(x_0,y_0) \in S^n(\rho) \times S^m(\rho)$ (6.1) *sisteminin çözümleri olan* $x(t) = x(t;t_0,x_0,y_0)$, $y(t) = y(t;t_0,x_0,y_0)$ *fonksiyonları* $t > t_0$ *için ;*

$$|x(t)| + |y(t)| \leq A(|x_0| + |y_0|)e^{-\gamma(t-t_0)} \tag{6.4}$$

kestirimini sağlar ise; (6.1) *sisteminin* $x = 0$, $y = 0$ *çözümlerine üstel stabildirler denilir.*

6.2. Düzgün Üstel Stabilite

Düzgün üstel stabilite tanımını verelim;

Tanım 6.2: Eğer $\rho > 0$, $A \geq 1$ *ve* $\gamma > 0$ *sabitler var öyle ki herhangi bir* $(\alpha,\beta) \in R_+ \times S^n(\rho)$ *ve* $\mu \in S^m(\rho)$, $|\eta - h(\alpha,\beta)| < \rho$ *(6.3) sisteminin çözümü olan* $\psi(s;\alpha,\beta;\eta)$ *fonksiyonu* $s > 0$ *için ;*

$$\left|\psi(s:\alpha,\beta:\mu)-h(\alpha,\beta)\right|\leq A(\left|\mu-h(\alpha,\beta)\right|)e^{-\gamma s} \tag{6.4}$$

kestirimini sağlar ise; (6.1) *sisteminin* $y=h(\alpha,\beta)$ *çözümü* $(\alpha,\beta)\in R_+\times S^n(\rho)$ *iken düzgün üstel stabildir denilir.*

Teorem 6.1: Triviyal Çözüm Stabilitesi

Aşağıdaki şartlar gerçeklensin;

i) (A_1) *den* (A_4) *kadar koşullar sağlansın*

ii) $a>0, b>0, c>0, k>0,$ *sabitleri ve*

$$V:R_+\times S^n(\rho)\to R_+,\ V\in V_0,\ W\in C^1\left[R_+\times S^n(\rho)\times S^m(\rho),R_+\right] \tag{6.5}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım öyle ki; $t\in R_+, x, x_1\in S^n(\rho)$ ve $y\in S^m(\rho)$ *aşağıdaki koşullar sağlansın;*

$$
\begin{cases}
a|x| \le V(t,x) \le b|x| \\
D^{+}_{(6.2)}V(t,x) \le -c|x|,\ t \ne \tau_k \\
V(\tau_k + 0, x + I_k(x, h(\tau_k, x))) \le V(\tau_k, x) \\
|V(t,x) - V(t,x_1)| \le K|x - x_1| \\
a|y - h(t,x)|^2 \le W(t,x,y) \le b|y - h(t,x)|^2 \\
W'_{(6.3)}(t,x,y) \le -c|y - h(t,x)|^2 \\
\left|\dfrac{\partial W}{\partial t}(t,x,y)\right| \le K|y - h(t,x)|(|x| + |y - h(t,x)|) \\
\left|\dfrac{\partial W}{\partial x}(t,x,y)\right| \le K|y - h(t,x)| \\
\left|\dfrac{\partial W}{\partial y}(t,x,y)\right| \le K|y - h(t,x)|
\end{cases}
\tag{6.6}
$$

Bu şartlar altında μ *yeterince küçük olmak üzere (6.1) sisteminin çözümü olan* $x = 0,\ y = 0$ *triviyal çözümü üstel olarak stabildir.*

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, impalsif diferansiyel denklemlerde temel tanım ve teoremler verilmiş, çözümün varlık ve teklik koşulları ortaya konmuş, parametrelerin değişimi yöntemi impalsif sistemlere uygulanmış, stabilite kriteleri, karşılaştırma sonuçları ortaya konmuştur. Tekil saptırılmış denklem sistemleri incelenmiştir. Ve görülmüştür ki karşılaştırma sonuçları ile referans alınan lineer sistemlerden farklı bir davranışı söz konusu değildir.

KAYNAKLAR

[1] Özbekler A., (2005), "İmpalsif Diferansiyel Denklemlerde Sturm Karşılaştırma Teorileri" 3 Equations: An Introduction", 2nd. Edition, Dover Publications, INC.

[2] Lakshmikantham V., Vatsala A. S. (1999), "Differential inequalities with initial time difference and applications," Journal of Inequalities and Applications, 3,(3), 33–244.

[3] Jankowski T. (2004), "Systems of differential inequalities with initial time difference," Ukrainian Mathematical Journal, 56, (1), 139–145.

[4] Yakar C., Deo S. G. (2006), "Variation of parameters formulae with initial time difference for linear integrodifferential equations," Applicable Analysis, 85, (4), 333–343,.

[5] Shaw M. D., Yakar C. (1999), "Generalized variation of parameters with initial time difference and a comparison result in term Lyapunov-like functions," International Journal of Non-Linear Differential Equations-Theory Methods and Applications, 5, 86–108.

[6] Bao J. Y., Wang P. G., Gao C. X. (2012), "Stability criteriafor differential equations with initial time difference," Acta MathematicaeApplicatae Sinica, 35, (4), 608–616.

[7] Yakar C. (2009), Shaw M. D., "Practical stability in terms of two measures with initial time difference," Nonlinear Analysis:Theory, Methods and Applications, 71, (12), 781–785.

[8] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (1999), "Differential inequalities with initial time difference and applications", Journal of Inequalities and Applica, 3,233-244.

[9] Zhang Y., Zhang B. (2002), "Impulsive differential equations with initial time difference and applications," Dynamics of Continuous, Discrete&Impulsive Systems A.Mathematical Analysis, 9, (3), 439–447,.

[10] McRae F.A. (2001), "Perturbing Lyapunov functions and stability criteria for initial time difference," Applied Mathematics and Computation, 117, (2-3), 313–320.

[11] Jankowski T. (2003), "Integro-differential inequalities with initial time difference and applications," Acta Mathematica Hungarica, 100, (4), 329–342.

[12] Lakshmikantham V., Vatsala, A.S., (1999), Theory of Differential and Integral Inequalities with Initial Time Difference and Applications. Analytic and Geometric Inequalities and Applications Kluwer Academic Publishers, 191-203.

[13] Yakar C., Deo S.G., (1999), Variation of Parameters Formulae with Initial Time Difference for Linear Integrodifferential Equations. Journal of Applicable Analysis 85, 333-343.

ÖZGEÇMİŞ

Bora ARSLANTÜRK 17 Aralık 1974 de İstanbulda doğru. Marmara Üniversitesi Matematik Bölümünü ve daha sonra Ahmet Yesevi Üniversitesinde Bilgisayar Mühendisliği Yüksek Lisans Programını tamamladı. Gebze Teknik Üniversitesindeki Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans eğitimini de bu tez ile 2015 yılında tamamlamış olacaktır.

Halen matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olan Bora ARSLANTÜRK biri kız biri erkek iki çocuk babasıdır.