**T.C.**
**GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI PARAMETRELERİN VARYASYONU VE UYGULAMALI (PRATİK) STABİLİTE

**BURAK YEŞİL**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**GEBZE**
**2015**

**T.C.**
**GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI PARAMETRELERİN VARYASYONU VE UYGULAMALI (PRATİK) STABİLİTE

**BURAK YEŞİL**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

DANIŞMANI
DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

**GEBZE**
**2015**

**T.R.**

**GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY**

**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

# INITIAL TIME DIFFERENCE PARAMETER'S VARIATIONS AND PRACTICAL STABILITY

**BURAK YEŞİL**

**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF**

**MASTER OF SCIENCE**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

THESIS SUPERVISOR

ASSOC. PROF. DR. COŞKUN YAKAR

**GEBZE**

**2015**

| GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ | **YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU** |
|---|---|

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/06/2015 tarih ve 2015/41 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 13/07/2015 tarihinde tez savunma sınavı yapılan BURAK YEŞİL'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

**JÜRİ**

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

ÜYE : YRD. DOÇ DR. YÜCEL ENGİNER

ÜYE : YRD. DOÇ DR. H. GÜLAY GÜLAY

**ONAY**

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

....../....../......... tarih ve ......./........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

# ÖZET

Bu tez çalışmasında lineer olmayan pertörb sistemin pertörb olmayan diferansiyel denklem sistemine göre başlangıç zamanı farklı stabilitesi (kararlılığı) incelenmiştir. Başlangıç zaman farklı kararlılığın klasik anlamdaki Lyapunov direct yada ikinci çeşit kararlılıklar arasındaki farklılıklar görülmüştür. Buradaki pertörb sistemin pertörb olmayan diferansiyel denklem sistemlerinde Lyapunov ve pratik kararlılıklarından hangisinin hangi durumlarda daha kullanışlı olduğu incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler: Pratik Kararlılık (Uygulamalı Stabilite), Lyapunov Kararlılık, Kararlılık, Başlangıç Zamanı Farklı (BZF).**

# SUMMARY

In this thesis, the initial time difference stability of nonlinear perturbed differential equation systems with respect to unperturbed ones is investigated. Some differences are observed between the initial time difference stability of classical Lyapunov-type stability or the secondy type stability.For the unperturbed differential equations of  these perturbed systems, Lyapunov and practical stability methods are investigated in order to identify in what conditions one method is more convenient than the other.


**Key Words: Practical Stability, Lyapunov Stability, Stability, Initial Time Difference (ITD).**

# TEŞEKKÜR

Danışman hocam olmayı kabul ederek bu çalışmayı ortaya çıkarmamı sağlayan ve her türlü konuda elinden gelen desteği esirgemeyen Gebze Teknik Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Coşkun YAKAR' a,

çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan değerli arkadaşlarım Bora ARSLANTÜRK ve Bülent MERCAN' a,

ve göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili eşim H. Nermin YEŞİL ve oğlum Mert Eren YEŞİL' e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

| **Simgeler ve Kısaltmalar** | | **Açıklamalar** |
|---|---|---|
| $B$ | : | Sınırlılık |
| BZF | : | Başlangıç Zamanı Farklı |
| $K$ | : | Kararlılık |
| $PK$ | : | Pratik Kararlılık |

# 1. GİRİŞ

Günlük hayattaki pek çok somut problemin çözümünde kararlılık (stabilite) teoremleri kullanılmaktadır. Özellikle de Lyapunov kararlılık teorisi sıklıkla kullanılmaktadır. Fakat uygulamalarda asimptotik kararlılığın daha önemli olduğu görülmüştür. Gerçekte istenen asimptotik kararlılık alanının büyüklüğüdür. Böylece incelenen sistemin uygun bir şekilde fonksiyonunu yerine getirip getiremediği ve kararlılığının gerektiğinde nasıl geliştirilebileceği konusunda bilgi sahibi oluruz. Bunun yanında incelenen sistem kararsız (unstable) olabilir. Fakat hala kabul edilebilir bir denge halinin çok yakınında hareket edebilir. Bu nedenle Lyapunov kararlılıktan daha uygun bir kararlılık kavramına ihtiyaç duymaktayız. Bu kavram ise "pratik (uygulamalı) kararlılık" olarak ifade edilmektedir [1], [8], [9], [10]-[15].

İlk bölümde pratik kararlılığa neden ihtiyaç duyulduğu belirtilmiştir [11], [17], [18], [20]. İkinci bölümde Lyapunov kararlılık ve sınırlılıkla ilgili temel kavramlar tanımlandıktan sonra pratik kararlılık incelenecektir. Her ne kadar Lyapunov kararlılığın pratik kararlılıktan daha güçlü yada daha zayıf olduğunu söyleyememekle birlikte bu kısımda pratik kararlılığın günlük hayattaki somut problemlerin çözümünde daha uygun olduğunu örnekler vasıtasıyla inceleyeceğiz [3], [11], [25]. Üçüncü bölümde ise Lyapunov-like tipi fonksiyonlara dayanan pratik kararlılık özellikleri ve diferansiyel eşitsizlikler teorisi incelenecektir. Dördüncü bölümde ise pertörb sistemler ve pertörb olmayan sistemlerde kararlılık kavramına yer verilecektir. Beşinci bölümde ise başlangıç zamanı farklı parametrelerin varyasyonu ile pratik kararlılığı incelenecektir. Altıncı bölümde ise uygulamalar başlığı altında çeşitli örneklere yer verilecektir.

# 2. KARARLILIKLA İLGİLİ TEMEL TANIM VE TEOREMLER

## 2.1. Lyapunov Kararlılık

Aşağıdaki diferansiyel denklemi ele alalım.

$$x'(t) = f\,(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \geq 0 \tag{2.1}$$

ve $f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$. Varsayalım ki $f$ fonksiyonu yeterince düzgün olsun öyleki $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ çözümlerinin teklik ve sürekliliğini sağlamış olsun.

İlk olarak Lyapunov bağlamında kararlılık kavramını açıklayalım. Bu maksatla varsayalım ki $f(t, 0) = 0$ öyleki $x(t) \equiv 0$ olsun ve buda (2.1) denkleminin aşikar çözümüdür.

Şimdi de (2.1)'in aşikar çözümü için stabilite ile ilgili tanımları ele alalım.

- $(K_1)$ *Yarı Eş (Equi) Kararlılık: Eğer herbir* $\varepsilon > 0$ , $t_0 \epsilon R_+$ *için pozitif ve* $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ *fonksiyonu mevcut ve* $t_0$ *da sürekliyse ve herhangi bir* $\varepsilon$ *için öyleki* $|x_0| < \delta$ *oluyorsa* , $t \geq t_0$ *için* $|x(t)| < \varepsilon$ *dur.*
- $(K_2)$ *Düzgün Kararlılık: Eğer* $\delta$, $(K_1)$*'deki* $t_0$*'dan bağımsız ise düzgün kararlıdır.*
- $(K_3)$ *Kuasi Yarı Eş Asimptotik Kararlılık: Eğer her* $\varepsilon > 0, t_0 \epsilon R_+$ *için* $\delta_0 = \delta_0(t_0)$ *ve* $T = T(t_0, \varepsilon)$ *pozitif sayıları var ve öyleki* $|x_0| < \delta_0$ *olduğunda* $|x(t)| < \varepsilon, t \geq t_0 + T$ *sağlanıyorsa kuasi yarı eş kararlıdır.*
- $(K_4)$ *Kuasi-Düzgün Asimptotik Kararlılık: Eğer* $(K_3)$ *'teki* $\delta_0$ *ve T sayıları* $t_0$ *' dan bağımsızsa quasi düzgün asimptotik kararlıdır.*
- $(K_5)$ *Yarı Eş Asimptotik Kararlılık: Eğer* $(K_1)$ *ve* $(K_3)$*'ün her ikiside sağlanırsa yarı eş asimptotik kararlıdır.*
- $(K_6)$ *Düzgün Asimptotik Kararlılık: Eğer* $(K_2)$ *ve* $(K_4)$*'ün her ikiside sağlanırsa düzgün asimptotik kararlıdır.*
- $(K_7)$ *Büyük Ölçüde Kuasi Eş Asimptotik Kararlılık: Her bir* $\varepsilon > 0$ , $\alpha > 0$, $t_0 \epsilon R_+$ *için pozitif* $T = T(t_0, \varepsilon, \alpha)$ *vardır ve öyleki* $|x_0| \leq \alpha$ *için* $|x(t)| < \varepsilon$, $t \geq t_0 + T$ *sağlanıyorsa büyük ölçüde kuasi eş asimptotik kararlıdır.*

- $(K_8)$ *Büyük Ölçüde Kuasi Düzgün Asimptotik Kararlılık: Eğer* $(K_7)$*'deki* $t$ *sayısı* $t_0$*'dan bağımsız ise büyük ölçüde kuasi düzgün asimptotik kararlıdır.*
- $(K_9)$ *Tamamen Kararlılık: Eğer* $(K_1)$ *sağlanıyor ve* $(K_7)$*'deki her* $\alpha$ *için* $0 \leq \alpha < \infty$ *şartı sağlıyorsa tamamen kararlıdır.*
- $(K_{10})$ *Tamamen Düzgün Kararlılık: Eğer* $(K_2)$ *sağlanıyor ve* $(K_8)$ *'deki tüm* $\alpha$ *lar için* $0 \leq \alpha < \infty$ *oluyorsa tamamen düzgün kararlıdır.*

Dikkat edilmelidir ki (2.1) denkleminin aşikar çözümünün varlığının sağlanabilmesi için $(K_3), (K_4)$, $(K_7)$ ve $(K_8)$ gerekli değildir. Ayrıca aşikar çözüm olmasa bile neticede Lyapunov kararlılığın bir genel çözümü ile kararlılık sağlanabilir.

*Tanım 2.1* **:** *(2.1) sistemi aşağıdaki özellikleri sağlar.*

- $(E_1)$ *Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *ve* $r = r(\varepsilon)$ *a pozitif sayıları vardır öyleki* $|x_0| < \delta$ *oluyorsa* $|x(t)| < \varepsilon$ *,*$t \geq t_0$ *için er geç (eventually) kararlıdır.*
- $(E_2)$ $K_4$ *ve* $E_1$ *sağlanıyorsa er geç asimptotik kararlıdır.*

Uygulamada asimptotik kararlılık, normal kararlılıktan daha önemli olduğu açık şekilde görülmektedir. Bundan dolayı asimptotik kararlılık alanının, boyutunu bilmek gerekmektedir. Böylece sistemin hangi şartlar altında istenildiği gibi çalışabileceği belirlenmiş olur. Ayrıca kararlılığın koşullarının nasıl geliştirilebileceğide kararlılık alanının büyüklüğünden belirlenebilir [10], [11].

Bu nedenle pratik maksatlar için bütün kararlılık istenmektedir. Farklı kararlılık türleri ile ilgili olarak sınırlılık ilkesini tanımlayabiliriz. Bunu yapmak için aşikar çözümün var olması şartı gerekli değildir.

*Tanım 2.2 : (2.1) diferansiyel sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.*

- $(B_1)$ *Eş Sınırlılık: Her* $\alpha > 0$ *ve* $t_0 \epsilon R_+$ *için* $\beta = \beta(t_0, \alpha)$ *pozitif ve* $t_0$*'da sürekli fonksiyonu mevcut olsun öyleki her* $\alpha$ *için* $|t_0| \leq \alpha$ *oluyorsa* $t \geq t_0$ *için* $|x(t)| < \beta$ *eşitsizliği sağlanır.*
- $(B_2)$ *Düzgün Sınırlılık: Eğer* $(B_1)$*'deki* $\beta$, $t_0$*'dan bağımsızsa düzgün sınırlıdır.*

- $(B_3)$ *Yarı-Eş Ultimately Sınırlılık: Her* $\alpha > 0$, $t_0 \epsilon R_+$ *için öyle* $N$ *ve* $T = (t_0, \alpha)$ *gibi pozitif sayılar vardır ki* $|x_0| \leq \alpha$ *iken* $|x(t)| < N$ *ve* $t \geq t_0 + T$ *eşitsizlikleri sağlanıryorsa yarı eş ultimately sınırlıdır.*
- $(B_4)$ *Yarı Düzgün Ultimately Sınırlılık : Eğer* $(B_3)$*'teki* $T$, $t_0$ *dan bağımsızsa.*
- $(B_5)$ *Eş Ultimately Sınırlılık : Eğer* $(B_1)$ *ve* $(B_3)$ *ikisi birlikte sağlanırsa.*
- $(B_6)$ *Düzgün Ultimately Sınırlılık: Eğer* $(B_1)$ *ve* $(B_4)$ *ikisi birlikte sağlanıyorsa.*
- $(B_7)$ *Eş Lagrange Karalılık: Eğer* $(B_1)$ *ve* $(S_7)$ *birlikte sağlanıyorsa.*
- $(B_8)$ *Düzgün Lagrange Kararlılık: Eğer* $(B_2)$ *ve* $(S_8)$ *birlikte sağlanıyorsa.*
- $(B_9)$ *Er Geç Sınırlılık: Her* $\alpha \geq 0$ *için öyle iki* $r = r(\alpha)$ *ve* $\beta = \beta(\alpha)$ *gibi pozitif sayıları olmak üzere* $|x_0| \leq \alpha$ *iken* $|x(t)| < \beta$, $t \geq t_0 \geq r$ *eşitsizliği sağlanır.*
- $(B_{10})$ *Er Geç Lagrange Kararlılık: Eğer* $(B_9)$ *ve* $(S_8)$ *birlikte sağlanıyorsa.*

Dikkat edilecek olursa $(B_1)$ ve $(B_2)$'de görünen $f$, $\alpha \to 0$ iken $\beta \to 0$ özelliğine sahiptir.

*Örnek 2.1 :* $m, n \in C[R_+, R]$ *olmak üzere aşağıdaki denklem sistemini ele alalım*

$$\begin{cases} x' = n(t)y + m(t).x(x^2+y^2), x(t_0) = x_0 \\ \\ y' = -n(t)x + m(t).x(x^2+y^2), y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

*(2.2) sisteminin genel çözümü aşağıdaki gibidir.*

$$x(t) = \frac{x_0 \cos(\int_{t_0}^{t} n(t)dt) + y_0 \sin(\int_{t_0}^{t} n(t)dt)}{(1 - 2(x_0^2 + y_0^2).\int_{t_0}^{t} m(t)dt)^{1/2}} \tag{2.3}$$

$$y(t) = \frac{y_0 \cos(\int_{t_0}^{t} n(t)dt) - x_0 \sin(\int_{t_0}^{t} n(t)dt)}{(1 - 2(x_0^2 + y_0^2).\int_{t_0}^{t} m(t)dt)^{1/2}} \tag{2.4}$$

*şeklindedir ve buda* $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ *için aşağıdaki ifadeye indirgenebilir,*

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = r_0^2(1 - 2r_0^2 \int_{t_0}^{t} m(t)dt)^{-1} \quad (2.5)$$

*(2.5)'ten açıkça görülebileceği gibi aşikar çözüm $m(t) \leq 0, t \geq t_0$ için kararlıdır. Eğer $t \geq t_0$ için $m(t) > 0$ ise (2.2)'nin triviyal çözümü kararlı*

$$\int_{t_0}^{t} m(t)dt \quad (2.6)$$

*olduğunda integrali sınırlı ve kararsız iken (2.6) integrali de sınırsızdır.*

*Örnek 2.2 : Aşağıdaki diferansiyel denklem sistemlerini ele alalım.*

$$\phi = \begin{cases} x'(t) = -x - y + k.(x-y)(x^2+y^2)\,, x(t_0) = x_0 \\ \\ y'(t) = x - y + k(x+y)(x^2+y^2)\,, y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

*Denklemde* $k > 0$ *bir sabit olmak üzere (2.7)'nin çözümü* $\theta = 2(t - t_0) - \frac{1}{2} ln\mu$ ve $\mu = r_0^2 + \left(\frac{1}{k} - r_0^2\right)\exp\big(2(t - t_0)\big)$ *için*

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{k\mu}}(x_0 cos\theta - y_0 sin\theta) \quad (2.8)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{k\mu}}(x_0 sin\theta - y_0 cos\theta) \quad (2.9)$$

dır. *Bu çözüm aşağıdaki ifadeye indirgenebilir.*

$$(r(t))^2 = \frac{1}{k\mu} r_0^2 \quad (2.10)$$

*Buradan da açıkça görülürki eğer* $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 < \frac{1}{k}$ *(2.7)'in triviyal çözümü olarak asimptotik kararlıdır.*

*Örnek 2.3: Aşağıda tek serbestlik dereceli bir mekanik sistemin hareketinin pertörb denklemi verilmiştir.*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2h.\frac{dx}{dt} + gx = 0, (0) = x_0\,,\;\; x'(0) = y_0 \tag{2.11}$$

*ifadesi*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dy} = y & , x(0) = x_0 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = 2hy - gx & , y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

*şeklinde de $g - h^2 > 0$ için gösterilebilir.*

*$\lambda^2 - 2h\lambda + g = 0$ denkleminin karakteristik kökleri $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ olduğundan (2.12)'nin genel çözümü*

$$x(t) = \left[x_0 cos\beta t + \frac{y_0 - \alpha x_0}{\beta} sin\beta t\right] \exp(\alpha t) \tag{2.13}$$

*Sonuç olarak eğer $\alpha > 0$ , $h < 0$ ve $g > 0$ ise (2.12)'nin çözümü kararsızdır.*

*Örnek 2.4 : $\lambda \epsilon C'[R_+, R_+]$ ve $\lambda'(t) \geq 0$ için aşağıdaki diferansiyel sistemi ele alalım*

$$x' = -\lambda'(t),\; x(t_0) = x_0. \tag{2.14}$$

*$x(t) = x_0 + \lambda(t_0) - \lambda(t)$ den $|x(t)| \leq |x_0| + \lambda(t_0)$, $t \geq t_0$ dır. Burada $\beta = \propto + \lambda(t_0)$ ve $\alpha \to 0$ için $\beta$ sıfıra gitmez. Eğer $\alpha \to \infty$ ve $\lambda(t)$ azalarak sıfıra giderken pozitif $\varepsilon$ sayıları için $r(\varepsilon)$ vardır öyleki $t_0 \geq r(\varepsilon)$ iken $\lambda(t_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ eşitsizliği sağlanır. Buradan da $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ve $r(\varepsilon)$ için $(E_1)$ sağlanır.*

*Örnek 2.5: Aşağıdaki denklemi ele alalım*

$$x' = \frac{-x}{1+t}\,, x(t_0) = x_0. \tag{2.15}$$

*Bu denklemde*

$$x(t) = \frac{x_0(1+t_0)}{1+t} \tag{2.16}$$

*çözümü $t_0$'a göre düzgün bir şekilde sıfıra gitme eğiliminde değildir.*

## 2.2. Pratik (Uygulamalı) Kararlılık Tanımları

Uygulamada tam kararlılığın, asimptotik kararlılıktan daha fazla istenen bir özellik olduğu görülmüştür. Bazen kararsızlık bile daha iyi olabilir. Belki sistem matematiksel açıdan kararsız olabilir ancak istenilen halin yakın çevresinde küçük salınımlar yapabilir, ve bu durum sistemin performansı açısından kabul edilebilirdir. Örneğin bir uçak yada füze matematiksel açıdan kararsız bir durum etrafında salınmasına rağmen kullanılabilir bir halde bulunabilir [11], [19].

Bir çok problem bu kategoridedir. Örneğin iki nokta arasında yolculuk yapan uzay aracı, sıcaklığı belli sıcaklıklar arasında tutulan kimyasal işlemler gibi. Bu tür durumlarda pratik (uygulamalı) kararlılık kavramı daha kullanışlıdır.

*Tanım 2.3 : (2.1) sistemi için*

- $(PK_1)$ *Eğer verilen* $(\lambda, A)$, $0 < \lambda < A$ *için* $|x_0| < \lambda$ *oluyorsa* $t \geq t_0$ *ve bazı* $t_0 \in R_+$ *için* $|x(t)| < A$ *sağlanır. Bu durumda buna pratik kararlıdır denir.*
- $(PK_2)$ *Eğer* $(PK_1)$ *her* $t_0 \in R_+$ *için sağlanıyorsa düzgün pratik kararlıdır.*
- $(PK_3)$ *Eğer verilen* $(\lambda, B, T) > 0$ *ve bazı* $t_0 \in R_+$ *için* $|x_0| < \lambda$ *olduğunda* $|x(t)| < B$, $t \geq t_0 + T$ *oluyorsa buna pratik kuasi kararlıdır.*
- $(PK_4)$ *Eğer* $(PK_3)$ *tüm* $t_0 \in R_+$*için sağlanıyorsa düzgün kuasi kararlıdır.*
- $(PK_5)$ *Eğer* $(PK_1)$ *ve* $(PK_3)$ *sağlanıyorsa güçlü pratik kararlıdır.*
- $(PK_6)$ *Eğer* $(PK_2)$ *ve* $(PK_4)$ *sağlanıyorsa güçlü düzgün pratik kararlıdır.*
- $(PK_7)$ *Eğer* $(PK_1)$ *ve* $(S_7)$, $\alpha = \lambda$ *için sağlanıyorsa asimptotik pratik kararlıdır.*
- $(PK_8)$ *Eğer* $(PK_2)$ *ve* $(S_7)$, $\alpha = \lambda$ *için sağlanıyorsa düzgün asimptotik pratik kararlıdır.*
- $(PK_9)$ *Eğer* $(PK_1)$ *sağlanmazsa pratik kararlı değildir.*

- $(PK_{10})$ *Eğer verilen* $(\lambda, A)$, $0 < \lambda < A$ *için* $\tau = \tau(\lambda, A)$ *var ve öyleki* $|x_0| < \lambda$ *olduğunda* $t \geq t_0 \geq \tau$ *için* $|x(t)| < A$ *oluyorsa buna er geç pratik kararlıdır denir.*
- $(PK_{11})$ *Eğer* $(PK_{10})$ *ve* $(PK_3)$ *sağlanıyorsa er geç düzgün güçlü pratik kararlı şeklinde tanımlanır.*

$(\mathrm{PK}_5)$ ve $(\mathrm{PK}_6)$'da eğer $0 < \mathrm{B} < \lambda < \mathrm{A}$ oluyorsa (2.1) sistemine büzülmüş pratik kararlı ve $0 < \lambda < \mathrm{B} < \mathrm{A}$ oluyorsa sisteme genişleyen pratik kararlı denir.

Bazen fiziksel problemlerde belli zaman aralığında ve sınırlar içinde sistemin davranışı ile ilgilenilir. Sonlu zaman kararlılığı kavramı bunu açıklamak için uygun düşer.

Eğer $\lambda, A, B$ ve $T$ pozitif sayıları için $|x_0| < \lambda$ iken $|x(t)| < A$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ ve $|x(t_0 + T)| < B$ sağlanıyorsa (2.1) sistemi güçlü pratik kararlılığa dönüşür.

*Örnek 2.6: Burada* $A = 2\lambda$ *olmak şartıyla örnek 2.1'i ele alalım. (2.5)'den*

$$\int_{t_0}^{t} m(s)ds = \beta > 0 \tag{2.17}$$

*olduğunu varsayarsak*

$$\lim_{h\to\infty} r^2(t) = r_0^2(1 - 2r_0^2\beta)^{-1} \tag{2.18}$$

*elde edilir. (2.18) dikkate alındığında* $\beta \leq \frac{3}{8\lambda^2}$ *için (2.2) sistemi pratik kararlıdır ve* $\beta > \frac{3}{8\lambda^2}$ *için pratik kararlı değildir.*

*Örnek 2.7: Örnek 2.2'yi ele alalım.* $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 < \frac{1}{k}$ *nın asimptotik kararlılık bölgesi olduğunu hatırlarsak,* $A$ *ve* $\lambda$ *için* $\frac{1}{\sqrt{k}} < \lambda < A$ *için* $(x_0, y_0)$ *başlangıç değerinde* $\frac{1}{k} \leq r_0^2 < \lambda^2$ *dir ve (2.7) sistemi asimptotik kararlı olmasına rağmen pratik kararlı değildir. Asimptotik kararlılık, pratik kararlılığı sağlamak için görüldüğü gibi yeterli değildir.*

*Örnek 2.8 : Örnek 2.3'teki ve (2.12)'deki sistemi ele alalım. Bu sistemin* $\alpha > 0,\ h < 0$ *ve* $g > 0$ *için kararsız olduğu daha önce göstermiştik. Şimdi de* $\delta > 0$ *ve* $\beta = \sqrt{g - h^2}$ *olacak şeklinde* $S_0$ *ve* $S$ *kümelerini tanımlayalım*

$$S_0 = \left\{(x, y): x^2 + \left(\frac{y - hx}{\beta}\right)^2 < \lambda^2\right\}, \tag{2.19}$$

$$S = \left\{(x, y): x^2 + \left(\frac{y - hx}{\beta}\right)^2 < \delta\lambda^2\right\}. \tag{2.20}$$

$T < \frac{ln\delta}{2\alpha}$ *alırsak* $S_0$ *ve* $S$ *kümelerinde* $[t_0, t_0 + T]$ *başlangıç değeri için (2.12) sistemi pratik kararlıdır.*

Bu örnekte göstermektedir ki pratik kararlılığı bir merkezin civarında tanımlamak yerine keyfi kümeler üzerinde tanımlamak daha uygun olmaktadır. Pratik kararlılığın, Lyapunov kararlılığa göre ne daha zayıf ne de daha güçlü olduğunu daha öncede belirtmiştik. Buna ek olarak pratik kararlılık için

i) sistemin kullanılabilmesi için gerekli olan durum ne kadar yakında

ii) başlangıç kümesi ne kadar iyi kontrol edilmelidir kavramları önemlidir.

Ayrıca pratik kararlılık bir şekilde düzgün sınırlılıkla benzerlik gösterir ve bununla birlikte bir sınır olmamakla birlikte sınır önceden tanımlanmıştır. Dikkat edilecek olursa Lagrange kararlılıkta, pratik asimptotik kararlılıkla benzerlik gösterir ve mutlak sınırlılık sistemin güçlü bir uygulamalı kararlılığa sahip olması için gerekmektedir [2], [7], [11].

## 2.3. Kararlılık Kriterleri

Tanım 2.3 ile ilgili olarak, skaler diferansiyel denklem için pratik kararlılık kavramlarını tanımlayalım.

$$u' = g(t, u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{2.21}$$

$g\epsilon\left[\mathrm{R_+}^2, \mathrm{R}\right]$ olmak üzere (2.21) ifadesi aşağıdaki koşulları gerçeklerse pratik kararlıdır. Eğer verilen $0 < \lambda < A$ için

$$u_0 < \lambda \text{ iken } u(t) < A, t \geq t_0 \tag{2.22}$$

bazı $t_0 \in \mathrm{R}_+$ için sağlanır. Bu $u(t, t_0, u_0)$' da (2.21)' in çözümüdür. Şimdi de bazı pratik kararlılık sonuçlarını inceleyelim. Burada

$$[x, y]_{\pm} = \lim_{h \to 0^{\pm}} \left[\frac{1}{h}|x + hy| - |x|\right] \tag{2.23}$$

ifadesini şeklinde tanımlayalım.

*Teorem 2.1: Her $(t, x) \in R_+ \times R^n$ de, $g \in C[R_+^2, R]$ için*

$$[x, f((t, x)]_+ \leq g(t, |x|) \tag{2.24}$$

*şeklinde verilsin. (2.21)'in pratik kararlılık özellikleri (2.1) sisteminin pratik kararlılık özelliklerine karşılık gelmektedir.*

*İspat 2.1: (2.21) denklemi pratik kararlıdır. Bazı $t_0 \in R_+$ ve $0 < \lambda < A$ (2.15)'de sağlansın. Bu takdirde (2.21) sisteminin $\lambda, A$ için pratik kararlı olduğu kolaylıkla gösterilir.*

*Eğer bu yanlış olsaydı, $|x_0| < x$ ve $t_1 > t_0$ için $|x(t_1)| = A$ ve $|x(t)| \leq A$ $t \in [t_0, t_1]$ olur ve $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ da (2.1)'in çözümü olurdu. (2.23)'ü ve $m(t) = |x(t)|$ eşitliğini kullanılırsak*

$$D^+ m(t) \leq g(t, m(t)), t \in [t_0, t_1] \tag{2.25}$$

*diferansiyel eşitsizlikleri elde edilir. Bu ifade de diferansiyel eşitsizlikler teorileri ile karşılaştırılarsa (2.21) 'in maksimum çözümü olan $r(t, t_0, u_0)$ için*

$$m(t) \leq r\big(t, t_0, m(t_0)\big), t \in [t_0, t_1] \tag{2.26}$$

*elde edilir. Benzer şekilde pratik kararlılığın diğer kavramlarıda açıklanabilir ve ispat tamamlanmış olur.*

Teorem 2.1 in örneği olarak aşağıdaki lineer homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini ele alalım

$$x' = A(t)x + F(t),\ x(t_0) = x_0. \tag{2.27}$$

Burada $A(t)$, $n \times n$ tipinde sürekli bir matris ve $F \in [R_+, R^n]$ dir. (2.24)'in varsayımına göre $g(t,u) = \mu[A(t)]u + |F(t)|$ ve $\mu[A(t)]$'de $A(t)$ 'nin logaritmik normu, I 'da birim matris olmak üzere

$$\mu[A(t)] = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [|\mathrm{I} + h(A(t))| - \mathrm{I}] \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır. (2.21)'in çözümünden

$$u(t, t_0, u_0) = u_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu\big(A(s)\big) ds\right) + \int_{t_0}^{t} exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu[A(\sigma)]\, d\sigma\right) |F(s)| ds \tag{2.29}$$

$t \geq t_0$ için

$$u(t, t_0, u_0) \leq u_0 + \int_{t_0}^{t} |F(s)| ds \tag{2.30}$$

dır. Buda (2.27) sisteminin pratik kararlılığını sağladığını gösterir. Bazı $t_0$'lar için

$$\int_{t_0}^{\infty} |F(s)| ds < A - \lambda \tag{2.31}$$

dır. Burada $\mu[A(t)]$ vektör ve matrislerin özel normuna bağlıdır. Örneğin eğer $|x|$

öklid normunu ifade ediyorsa $\mu[A]$, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ ' nun en büyük özdeğeridir. $A(t)$, $n \times n$ tipinde sürekli bir matris ve $F \in [R_+ \times R^n, R^n]$ için

$$x' = A(t)x + F(t,x), x(t_0) = x_0 \tag{2.32}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$x' = A(t)x \tag{2.33}$$

ifadesinin temel matris çözümü $\Phi(t, t_0)$ olsun. Bu taktirde $\alpha > 0$ , $(t,x) \in R_+ \times R^n, \eta, \mu, b \in C[R_+, (0, \infty)]$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır

$$|\Phi(t, t_0)| \le \eta(t).\mu(t_0), t \ge t_0, \tag{2.34}$$

$$|F(t,x)| \le b(t).|x|^\alpha. \tag{2.35}$$

*Teorem 2.2 : (2.18) sistemi ve (2.20),* $0 < \alpha < 1$ *için sağlansın. Bu takdir de*

$$[\eta(t).\mu(t_0)]^{1-\alpha}.[1 + (1-\alpha).(\mu(t_0)\lambda)^{\alpha-1} \times \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)\eta^\alpha(s)ds < \left(\frac{A}{\lambda}\right)^{1-\alpha} \tag{2.36}$$

$0 < \lambda < A$ *, her* $t_0 \in R_+$ *ve* $t \ge t_0$ *için (2.32) sistemi düzgün pratik kararlıdır.*

*İspat 2.2 : Bihari ve Gronwall eşitsizliklerinin özellikleri vasıtasıyla* $t \ge t_0$ *için*

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)F(s, x(s))ds \tag{2.37}$$

*ifadesi elde edilir ve buda* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *da (2.18)'in bir çözümüdür. (2.35)'den dolayı* $t \ge t_0$ *için*

$$|x(t)| < \eta(t).\mu(t_0).|x_0| + \eta(t)\int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)|x(s)|^{\alpha} ds \qquad (2.38)$$

*ifadesi elde edilir ki burada da Bihari ve Gronwall eşitsizliklerinin özel durumları kullanılırsa* $t \geq t_0$ *için*

$$|x(t)| \leq \eta(t).\mu(t_0)\,|x_0|.[1 + (1-\alpha).(\mu(t_0)|x_0|)^{\alpha-1} \times \int_{t_0}^{t} b(s)\mu(s)\eta^{\alpha}(s)ds]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad (2.39)$$

*olur.* $0 < \lambda < A$ *olmak üzere (2.36) ve (2.39) için* $|x(t)| < A\,, t \geq t_0\,, |x_0| \leq \lambda$ *dır. Buda her* $\alpha \in (0,1)$ *için (2.32) sisteminin düzgün pratik kararlılığını ispatlar.*

$\alpha \in (0,1)$ *olduğu durumlarda pratik kararlılık belli bir zaman aralığında elde edilmektedir.*

*Teorem 2.3: (2.32) sistemini ele alalım ve* $\alpha \in (0,1)$ *için (2.35)' nin sağlandığını varsayalım. Herhangi bir* $0 < \lambda < A$ *için ve her* $t_0 \in R_+$ , $t \in [t_0, t_0 + T]$ *için (2.36) sağlanmış olur. Öyleki*

$$t_0 + T < \beta = sup\left\{t \geq t_0 : (\alpha - 1).(\mu(t_0)|x_0|)^{\alpha-1} \times \int_{t_0}^{t} b(s)\mu(s)\eta^{\alpha}(s)ds < 1\right\} \qquad (2.40)$$

*dir. Buradan da (2.32) sistemi düzgün pratik kararlıdır.*

*İspat 2.3: Burada Bihari ve Gronwall eşitsizliklerini sadece* $t_0 < t < \beta$ *için sağlandığından sonuç olarak (2.39)* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ *de sağlanır. Bundan dolayı (2.32) düzgün pratik kararlıdır.*

*Sonuç 2.1: Teorem 2.2'nin varsayımlarına ek olarak, eğer aşağıdaki ifadeyi* $0 < B < A$ *için elde edersek*

$$[\eta(t).\mu(t_0)]^{1-\alpha}.[1+(1-\alpha).(\mu(t_0)\lambda)^{\alpha-1}$$

$$\times\int_{t_0}^{t}\mu(s)b(s)\eta^{\alpha}(s)\,ds] \;<\left(\frac{B}{\lambda}\right)^{1-\alpha} \tag{2.41}$$

*Bundan dolayı (2.32) sistemi düzgün güçlü uygulamalı kararlıdır.*

*Sonuç 2.2: Varsayalım ki Teorem 2.2 bütün varsayımları sağlansın.*
$\sigma(t-t_0)=\eta(t).\mu(t_0)$ , $\sigma(t)$ *ifadesi* $t$ *ile azalsın ve* $\sigma(t-t_0)<\frac{B}{A}$ *olsun. Şimdi de pratik kararlılığı ele almak için parametrelerin lineer olmayan değişim sonuçlarından faydalanalım ve (2.1) sistemi ile ilgili olarak aşağıdaki pertörb sistemi ele alalım*

$$y'=f(t,y)+R(t,y),\; y(t_0)=x_0\,, f,R\in[R_+\times R^n,R^n]. \tag{2.42}$$

*Teorem 2.4: Varasayalım ki*

*i) (2.1) sistemi* $t\geq t_0$ *için* $x(t,t_0,x_0)$ *tek çözümlerini kabul etsin.*

*ii)* $\Phi(t,t_0,x_0)=\frac{\partial x}{\partial x_0}(t,t_0,x_0)$ *mevcutsa ,* $t\geq t_0$ *için* $\Phi^{-1}(t,t_0,x_0)$ *vardır ve de süreklidir.*

*iii)* $t\geq t_0$ *için*

$$v'=\left(\Phi^{-1}(t,t_0,x_0).R(t.x\big(t,t_0,v(t)\big)\right),\; v(t_0)=x_0 \tag{2.43}$$

*ifadesinin* $v(t)$ *çözümü vardır.*

*iv)* $\left|\Phi^{-1}(t,t_0,x_0).R\big(t.x(t,t_0,x_0)\big)\right|<g(t,|x_0|),\; g\in[R_+^2,R_+]$ *ve* $(t,t_0,u_0)$, $t\geq t_0$ *vardır ve*

$$u'=g(t,u),u(t_0)=u_0\geq 0 \tag{2.44}$$

*ifadesinin maksimal çözümüdür.*

*v) verilen* $t\geq t_0+T$ , $(\lambda,A,B,T)>0,\; \lambda<A\,,\; B<A$ *ve* $\sigma(t-t_0)<\frac{B}{a(A)}$ *için*

$|x(t, t_0, x_0)| \leq a(|x_0|)\sigma(t - t_0),\ t \geq t_0\ ,\ a \in C[R_+, R_+]$ *da* $a(0) = 0$ *için kesin artan ve* $\sigma \in C[R_+, R_+]$ *azalandır .*

*vi)* (*2.44) sistemi* $(\lambda, A)$ *ya göre düzgün pratik kararlıdır. (2.42) pertörb sistemide düzgün pratik kuasi kararlıdır.*

*İspat 2.4: Diferansiyel eşitsizlik teorileriyle, (2.42)'nin,* $y(t, t_0, x_0)$ *çözümünün* $y(t, t_0, x_0) = x\big(t, t_0, v(t)\big)$ *ifadesini sağladığı kolayca görülebilir ve* $v(t)$*'de (2.43)'ün çözümüdür.* $m(t) = |v(t)|$ *eşitliği ve* $(iv)$ *koşulundan yararlanarak* $t \geq t_0$ *için* $D^+m(t) \leq g(t, m(t)$ *eşitsizliği elde edilir. Böylece diferansiyel eşitsizlik teorileri vasıtasıyla* $|v(t)| \leq r(t, t_0, |x_0|),\ t \geq t_0$ *ilişkisine ulaşılır.* $a(u)$*'nun monotonluğu kullanılarak* $t \geq t_0$ *için*

$$|y(t, t_0, x_0)| \leq a(|v(t)|)\sigma(t - t_0) \leq a\big(r(t, t_0, |x_0|)\big)\sigma(t - t_0) \qquad (2.45)$$

*elde edilir. (2.44) denklemi düzgün pratik kararlı ve* $0 < \lambda < A$*' yı verdiğinden dolayı her* $t_0 \geq 0$ *için* $u_0 < \lambda, u(t, t_0, u_0) < A$ ve $t \geq t_0$ *dır. Buradan*

$$|y(t, t_0, x_0)| \leq a(A)\sigma(t - t_0) < B\ ,\ t \geq t_0 + T \qquad (2.46)$$

*eşitsizliği elde edilir ki buda (2.23)'ün düzgün pratik kuasi kararlılığını ispatlar.*

*Sonuç 2.3: Teorem 2.4'deki varsayımlar altında eğer* $\sigma(t) \leq 1$ *olduğunda (2.42) sistemi* $(\lambda, a(A), B)$ *ya göre düzgün güçlü pratik kararlıdır.*

# 3. TEMEL KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ

Bu bölümde Lyapunov tipi fonksiyonlara dayanan pratik kararlılık özellikleri ve diferansiyel eşitsizlikler teorisi incelenecektir. Ayrıca pratik kararlılığın genel kavramları iki farklı açıdan da ele alınarak çeşitli Lyapunov tipi fonksiyonların kullanımı üzerinde durulmaktadır [6], [7], [10].

## 3.1. Temel Karşılaştırma Teoremler

Aşağıdaki diferansiyel sistemi ele alalım.$f \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ için

$$x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 \;\;, t_0 \in R_+ \tag{3.1}$$

olsun. Herhangi bir Lyapunov tipi fonksiyon için aşağıdaki fonksiyonu tanımlayabiliriz. $V \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ , $(t,x) \in R_+ \times R^n$ için

$$D^+V(t,x) = \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}\left[V\big(t+h, x+hf(t,x)\big) - V(t,x)\right] \tag{3.2}$$

Bazı durumlarda $D^+V$ nin (3.1) sistemine göre tanımlayabilmek için (3.2) fonksiyonu $D^+V_{\ (3.1)}$ şeklinde ifade edeceğiz. Burada $V$'nin diğer türevleride kullanılabilir. Örneğin $V \in C^1[R_+ \times R^n, R^n]$ olmak koşuluyla

$$D^-V(t,x) = \lim_{h\to 0^-} inf \frac{1}{h}\left[V\big(t+h, x+hf(t,x)\big) - V(t,x)\right] \tag{3.3}$$

$$V'(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x) \tag{3.4}$$

için

$$D^+V(t,x) = V'(t,x) \tag{3.5}$$

olur.

*Teorem 3.1:* $V \in C^1[R_+ \times R^n, R^n]$, *$x$'de yerel Lipschitz şartını sağlasın.* $D^+V(t,x)$*'nın* $g \in C[R_+^2, R]$ *için*

$$D^+V(t,x) \leq g\big(t, V(t,x)\big), (t,x) \in R_+ \times R^n \tag{3.6}$$

*sağladığını varsayalım.* $t \geq t_0$ *için var olan* $u' = g(t,u), u(t_0) = u_0 \geq 0$ *skaler diferansiyel denkleminin maksimum çözümü* $r(t, t_0, u_0)$ *olsun. (3.1)'in* $t \geq t_0$ *için var olan herhangi bir çözümü* $x(t, t_0, x_0)$ *olmak koşulu ile* $V(t_0, x_0) \leq u_0$ *oluyorsa*

$$V\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \leq r(t, t_0, u_0), t \geq t_0 \tag{3.7}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*İspat 3.1:* $t \geq t_0$ *için (3.1)'in var olan herhangi bir çözümü* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *olsun. Öyleki* $V(t_0, x_0) \leq u_0$ *olmak üzere* $m(t) = V\big(t, x(t)\big)$ *eşitliğinde* $h > 0$ *yeterince küçük seçilirse*

$$\begin{aligned} m(t+h) - m(t) &= V\big(t+h, x(t+h)\big) - V\Big(t+h, x(t) + hf\big(t, x(t)\big)\Big) \\ &\quad + V\big(t+h, x(t) + hf(t, x(t)\big) - V\big(t, x(t)\big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

*elde edilir.* $V(t,x)$ *$x$'de yerel Lipschitz şartını sağladığından (3.6) kullanılarak* $m(t_0) \leq u_0$ *için* $D^+m(t) \leq g\big(t, m(t)\big), t \geq t_0$*eşitsizliği elde edilir. Buradan da Bihari ve Gronwall diferansiyel eşitsizlikleri yardımıyla (3.5)'in istenen değeri bulunur.*

*Sonuç 3.1: Farzedelim ki Teorem 3.1 için* $g(t,u) \equiv 0$ *olsun.* $t \geq t_0$ *için* $V\big(t, x(t)\big)$ *artmayandır ve böylece* $t \geq t_0$ *için* $V\big(t, x(t)\big) \leq V(t_0, x_0)$ *dır.*

*Bazı durumlarda* $D^+V$ *nin* $t, x$ *ve* $V$*'nin bir fonksiyonu olarak belirlenmesi daha uygun olur.*

*Teorem 3.2:* $V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ *ve* $V(t,x)$ *x'de yerel Lipschitz şartını sağlasın* $g \in C[R_+ \times R^n \times R_+, R]$ *ve* $(t,x) \in R_+ \times R^n$ *için* $D^+V(t,x) \le g\big(t,x,V(t,x)\big)$ *olduğunu varsayalım.* $x(t) = x(t,t_0,x_0)$ *(3.1)'in* $[t_0,\infty)$ *da var olan herhangibir çözümü ve* $r(t,t_0,x_0,u_0)$*'da* $u' = g(t,x(t),u), u(t_0) = u_0 \ge 0$ *'ın* $[t_0,\infty)$ *daki var olan maksimum çözümüdür.*

Bu durumda $V(t_0,x_0)$ ifadesi $V\big(t,x(t)\big) \le r(t,t_0,x_0,u_0)$, $t \ge t_0$ şeklinde elde edilir. Bazen de uygulamalarda teorem 3.2'nin aşağıdaki türleri daha faydalıdır.

*Teorem 3.3: (3.4) eşitsizliğinin* $(t,x) \in R_+ \times R^n$ *ve* $A \in C[R_+,(0,\infty)]$

$$D^+A(t) = \lim_{h\to 0^+} sup \frac{1}{h}[A(t+h) - A(t)] \tag{3.9}$$

*için geçerli olan*

$$A(t)D^+V(t,x) + D^+A(t)V(t,x) \le g\big(t,V(t,x)A(t)\big) \tag{3.10}$$

*ile değiştirilmesi şartıyla Teorem 3.1'in hipotezlerinin geçerli olduğunu varsayalım. Bu taktirde* $V(t_0,x_0)A(t_0) \le u_0$ *ifadesi*

$$V\big(t,x(t)\big)A(t) \le r(t,t_0,u_0), t \ge t_0 \tag{3.11}$$

*olarak tanımlanabilir.*

*İspat 3.3:* $L(t,x)$ *ifadesini küçük* $h > 0$ *için* $L(t,x) = A(t)V(t,x)$ *şeklinde tanımlarsak*

$$\begin{aligned} L\big(t+h,x+hf(t,x)\big) - L(t,x) &= V\big(t+h,x+hf(t,x)\big)[A(t+h) - A(t)] \\ &\quad + A(t)\big[V\big(t+h,x+hf(t+x)\big) - V(t,x)\big] \end{aligned} \tag{3.12}$$

*ifadesi bulunur. Buradan da (3.6) ifadesi kullanılarak*

$$D^+L(t,x) \le g\big(t,L(t,x)\big) \tag{3.13}$$

*ifadesini elde ederiz. Burada da Teorem 3.1'den (3.7) ifadesi kolaylıkla bulunarak ispat tamamlanmış olur.*

*Teorem 3.4 : Teorem 3.1 hipotezlerinin geçerli olduğunu kabul ederek sadece (3.4)' ün yerine*

$$D^{+}V(t,x) + C(t,|x|) \leq g\big(t, V(t,x)\big), (t,x) \in R_{+} \times R^{n} \tag{3.14}$$

*ifadesinin geçerli olduğunu kabul edelim.* $C(t,u) \geq 0$ *ifadesi* $(t,u) \in R_{+}^{2}$ *için süreklidir. Ayrıca herbir* $t \in R_{+}$ *için* $u$*'da* $g(t,u)$ *azalmayandır. Böylece* $V(t_0,x_0) \leq u_0$ *ifadesi* $t \geq t_0$ *için*

$$\varphi(xK, yK) = V\big(t, x(t)\big) + \int_{t_0}^{t} C(s, |x(s)|)ds \leq r(t, t_0, u_0) \tag{3.15}$$

*eşitsizliği gerçeklenir.*

*İspat 3.4:* $V\big(t,x(t)\big) \leq m(t)$ *için*

$$m(t) = V\big(t, x(t)\big) + \int_{t_0}^{t} C(s, |x(s)|)ds \tag{3.16}$$

*olarak tanımlayalım. (3.8) ile beraber* $g$*'nin monoton karakteri*

$$D^{+}m(t) \leq g\big(t, m(t)\big),\ t \geq t_0 \tag{3.17}$$

*ifadesini verir ve bu diferansiyel eşitsizlikler yardımıyla ispatlanabilir. Bir sonraki karşılaştırma sonucu vektörel Lyapunov fonksiyonu kullanıldığında önemli bir rol oynar ve ispatı Teorem 3.1 ile benzerlik gösterir.*

*Teorem 3.5 :* $V \in C[R_+ \times R^n, R^N]$ *ve* $V$, $x$*' de yerel lipschitz şartlarını sağlasın. Kabul edelim öyleki* $g \in C[R_+ \times R_+^N, R^N]$ *olsun ve* $g(t,u)$ $u$*'da kuasi monoton azalmayan olsun.* $t \geq t_0$ *için var olan*

$$u' = g(t,u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \quad (3.18)$$

*ifadesinin maksimum çözümü* $r(t) = r(t, t_0, u_0)$ *olsun ve* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *ifadesi* $t \geq t_0$ *için (3.1)'in herhangi bir çözümü olsun. Bundan dolayı* $V(t_0, x_0) \leq u_0$ *ifadesi* $V(t, x(t)) \leq r(t), t \geq t_0$ *şeklinde tanımlanır.*

Vektörler arasındaki eşitsizliklerin tamamlayıcı olduğunu ve $g(t,u)$' nun yaklaşık monotonluğunun $1 \leq i \leq N$ için $u \leq v$, $u_i = v_i$ ifadesinin $g_i(t,u) \leq g_i(t,v)$ eşitsizliğini sağladığını da hatırlamak gerekmektedir.

$t \in [0,T]$ için $|x| \to \infty$ düzgün şekilde giderken herbir $T > 0$ için de $V(t,x) \to \infty$ ise $V(t,x)$ fonksiyonu hafifçe sınırsız olduğu söylenir.

$V(t,x)$' in hafif sınırsızlığının $V(t, x(t))$ sonlu olduğu zaman $|x(t)|$' nin de sonlu olması gerekmektedir. Sonuçta önceden bahsedilen teoremlerde $V(t,x)$'in hafif sınırsızlığı kabul edilirse $x(t)$ sonuçları $t \geq t_0$ için varolması varsayımını gereksiz kılar. Böyle bir çıkarım neticesinde aşağıdaki genel varlık teoremleri bulunur.

*Teorem 3.6: Teorem 3.1'in hipotezlerine ek olarak* $V(t,x)$ *hafif sınırsız olsun. (3.1)'in her bir çözümü* $t \geq t_0$ *için mevcuttur ve (3.5)'i sağlar.*

*İspat 3.6:* $t \geq t_0$ *için varsayalım ki (3.1)'in herbir* $x(t)$ *önermesi yanlış olsun. Bu durumda* $t_1 \geq t_0$ *vardır ve öyleki* $x(t)$ $[t_0, t_1]$ *kapalı aralığında sürekli olmaz.Bu ise* $t_k \to t_{\bar{1}}$ *içeren bir* $\{t_k\}$ *serisinin varlığı anlamına gelir. Teorem 3.1 kullanılarak*

$$V(t, x(t)) \leq r(t, t_0, V(t_0, x_0)), t_0 \leq t \leq t_1 \quad (3.19)$$

*elde edilir.* $V(t,x)$ *hafif sınırsız olduğu için ve* $t \geq t_0$ *için* $r(t, t_0, u_0)$ *var olduğu için* $t_k \to t_{\bar{1}}$ *için bir çelişki doğar ve* $t \geq t_0$ *için* $x(t)$ *mevcut olup (3.5) sağlanır ve ispat böylelikle tamamlanmış olur.*

## 3.2. Pratik Kararlılık Kriterleri

Öncelikle aşağıdaki fonksiyonların sınıflarını tanımlayarak başlayalım.

- $K = \{a \in C[R_+, R_+]: a(u)$ fonksiyonu $u$ için artan ve $a(u) \to \infty, u \to \infty\}$,
- $CK = \{a \in C[R_+^2, R_+]: a(t,u) \in K\ her\ t \in R_+\}$,
- $L = \{\sigma \in C[R_+, R_+]: \sigma(u)\ u$ için azalan ve $\sigma(u) \to \infty, u \to \infty\ \}$,
- $LK = \{a \in C[R_+^2, R_+]: a(t,u) \in K$ her $t \in R_+$ve $a(t,u) \in L$ her $u \in R_+\}$.

Şimdi de (3.1) sisteminin pratik kararlılık için gerekli bazı şartları ortaya koyalım.

*Teorem 3.7 : Varasayalım ki*

- $(A_0)\ \lambda, A$ *ifadeleri* $0 < \lambda < A$ *için verilsin,*

$$x(t) = x_0 + \lambda(t_0) - \lambda(t) \tag{3.20}$$

- $(A_1)\ V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ *ve* $V(t,x)$ *yerel Lipschitz şartlarını* $x$*'de sağlasın.*
- $(A_2)\ a, b \in K$ *ve* $g \in C[R_+^2, R]$, $(t,x) \in R_+ \times S(A)$ *olmak üzere*

$$b(|x|) \leq V(t,x) \leq a(|x|) \tag{3.21}$$

$$D^+V(t,x) \leq g\big(t, V(t,x)\big) \tag{3.22}$$

- $(A_3)\ a(\lambda) < b(\lambda)$ *sağlansın.*

*Burada*

$$u' = g(t,u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{3.23}$$

*ifadesinin pratik kararlılık özellikleri (3.1) sisteminin pratik kararlılık özellliklerine karşılık gelir.*

*İspat 3.7: Öncelikle (3.11) ifadesinin pratik kararlı olduğunu kabul edelim. Daha sonra verilen* $\big(a(\lambda), b(\lambda)\big)$ *nın* $(A_3)$*'den dolayı*

$$u_0 < a(\lambda) \tag{3.24}$$

*ifadesi* $u(t, t_0, u_0) < b(A),\ t \geq t_0$ *olmasını gerektirir.*

$x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *ifadesi* $|x(t)| < A, t \geq t_0$ *için* $|x_0| < \lambda$ *da bir çözüm olsun. Eğer bu önerme doğru değilse* $t_1 > t_0$ *ve (3.1)'in* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ , $|x_0| < \lambda$ *şeklinde bir çözümü olması gerekir. Öyleki* $|x_1| = A$ *ve* $t_0 \leq t \leq t_1$ *için* $|x(t)| \leq A$ *sağlanır.* $(A_2)$ *ve fonksiyonların sürekliliği vasıtasıyla*

$$V\big(t_1, x(t_1)\big) \geq b(A) \tag{3.25}$$

*bulunur.* $V(t_0, x_0) = u_0$ *seçersek ve Teorem 3.1 kullanılırsa aşağıdaki ifadeyi elde ederiz*

$$V\big(t, x(t)\big) \leq r(t, t_0, u_0), t_0 \leq t \leq t_1 \,. \tag{3.26}$$

*Yukarıdaki ifade de* $r(t, t_0, u_0)$ *(3.11) ifadesinin maksimum çözümüdür. (3.12),(3.13) ve (3.14) ile birlikte* $(A_2)$ *dikkate alındığında* $u_0 \leq a(|x_0|) < a(\lambda)$ *dan dolayı*

$$b(A) = b(|x(t_1)|) \leq V\big(t_1, x(t_1)\big) \leq r(t, t_0, u_0) < b(A) \tag{3.27}$$

*çelişkisi ortaya çıkar. Bundan dolayıda (3.1) sistemi pratik kararlıdır.*

*Şimdi de (3.1) sisteminin* $(\lambda, A, B, T) > 0$ *için güçlü pratik kararlı olduğunu gösterelim. Bunun için öncelikle (3.11) ifadesinin* $(a(\lambda), b(A), b(B), T) > 0$ *için güçlü pratik kararlı olduğunu kabul edelim. Bunun için (3.1) sisteminin pratik kuasi kararlı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. (3.11) kuasi pratik kararlı olduğundan dolayı* $t \geq t_0 + T$ *için*

$$u(t,t_0,u_0) < \ b(B) \tag{3.28}$$

*ifadesi* $u_0 < a(\lambda)$ *elde edilir.*

*Yukarıdaki ifadede ki* $u(t,t_0,u_0)$ *(3.11) sisteminin bir çözümüdür.* $|x_0| < \lambda$ *olduğunu kabul edersek (3.11)'in pratik kararlılığı ifadesinden dolayı* $t \geq t_0$ *için* $|x(t)| < A$ *elde edilir. Sonuç olarak (3.14) ifadesi* $t \geq t_0$ *için doğrudur ve böylece*

$$V\big(t,x(t)\big) \leq r(t,t_0,u_0)\ , t \geq t_0 \tag{3.29}$$

*olur ve*

$$b(|x(t)|) \leq V\big(t,x(t)\big) \leq r(t,t_0,u_0) < b(B)\ , t \geq t_0 + T \tag{3.30}$$

*anlamına gelir. Böylece herbir* $|x_0| < \lambda$, $t \geq t_0 + T$ *için* $|x(t)| < B$ *olduğu ve buna bağlı olarakta (3.1) sisteminin güçlü uygulamalı kararlı olduğu görülür. (3.1) siteminin diğer uygulamalı kararlılık özellikleri benzer şekilde ispatlanarak ispat tamamlanır.*

*Sonuç 3.2:* *Teorem 3.7'de*

*i)* $g(t.u) \equiv 0$ *düzgün pratik kararlı kabul edilir.*

*ii)* $g(t.u) = -\alpha u + k\ , \alpha, k > 0$ *güçlü düzgün pratik kararlı kabul edilir.*

*iii)* $g(t.u) = -\ \sigma'(t), \sigma \in L$ *ve* $\sigma$*'nın diferansiyellenebildiği ve neticede de pratik kararlılığı verdiği kabul edilir.*

*Teorem 3.8 : Teorem 3.7'nin* $(A_0)$ *ve* $(A_3)$ *koşulları* $(A_2)$ *ve*$(A_3)$ *aşağıdaki değişikliklerle birlikte geçerli olduğunu kabul edelim.*

- $(A_2{}^*)$ $(t,x) \in R_+ \times S(A)$ *için* $b(|x|) \leq V(t,x) \leq a(t,|x|)$ *ve burada* $b \in K\ , a \in CK$
- $(A_3{}^*)$ *Bazı* $t_0 \in R_+$ *için* $a(t_0,\lambda)$
  *Buradan da (3.11)'in düzgün ve düzgün olmayan pratik kararlılığının*

*özellikleri (3.1) sisteminin buna karşılık gelen düzgün olmayan pratik kararlılığının özeliklerini tanımlar.*

*Teorem 3.9:* $(A_0), (A_1), (A_2{}^*)$ *ve* $(A_3{}^*)$ *sağlansın. Ayrıca bunlara ek olarak*

- $(A_4)$ $W \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ , $W(t,x)$ *yerel Lipsthitz şartlarını* $x$*'de sağlasın.* $D^+W(t,x)$ *ifadesi*$(t,x) \in R_+ \times S(A)$ *için yukarıdan ve aşağıdan sınırlı,* $W(t,x)$ *ifadesi pozitif tanımlı ve*

$$D^+W(t,x) \leq -C\big(W(t,x)\big) \tag{3.31}$$

$C \in K$ *ifadesi için* $(t,x) \in R_+ \times S(A)$ *geçerli olsun.*

*İspat 3.9: Teorem 3.8'de* $g(t,u) \equiv 0$ *aldığımızda,* $(A_4)$*' den ötürü (3.1) sistemi pratik kararlıdır. Böylece* $|x_0| < \lambda$ *için (3.1) sisteminin in her* $x(t)$ *çözümünün* $\lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0$ *sağlaması durumunda ispat yapılmış olur.* $W(t,x)$*'nin pozitif tanımlı olduğunu kabul edersek (3.10)'un herhangi bir* $x(t)$ *çözümü için*

$$\lim_{t\to\infty} W(t,x) = 0 \tag{3.32}$$

*ifadesini göstermek yeterli olacaktır. Öncelikle*

$$\liminf_{t\to\infty} W\big(t,x(t)\big) = 0 \tag{3.33}$$

*olduğuna dikkat etmeliyiz. Aksitaktirde* $(A_4)$*'den ötürü* $t \to \infty$ *iken* $V\big(t,x(t)\big) \to -\infty$ *çelişkisi elde edilir.*

$$\limsup_{t\to\infty} W\big(t,x(t)\big) \neq 0 \tag{3.34}$$

*olduğunu varsayalım.* $\{t_n\}, \{t_n^*\}$ *ıraksayan dizileri her* $\varepsilon > 0$ *için vardır ve öyleki* $i = 1,2,3, \dots$ *için aşağıdaki ifade sağlanır.*

$$\begin{cases} W\big(t_i, x(t_i)\big) = \dfrac{\varepsilon}{2}, \qquad W\big(t_i^*, x(x_i^*)\big) = \varepsilon \\ \dfrac{\varepsilon}{2} < W\big(t, x(t)\big) < \varepsilon, t \in (t_i, t_i^*), i = 1,2,3, \dots \end{cases} \tag{3.35}$$

*elbette (3.17)'nin yerine aşağıdaki ifadeyi* de alabiliriz.

$$\begin{cases} W\big(t_i, x(t_i)\big) = \varepsilon, \qquad W\big(t_i^*, x(x_i^*)\big) = \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \dfrac{\varepsilon}{2} < W\big(t, x(t)\big) < \varepsilon, t \in (t_i, t_i^*), i = 1,2,3, \dots \end{cases} \tag{3.36}$$

$D^+W(t,x) \leq M$ *olmak üzere, (3.17) kullanılırsa* $t_i^* - t_i > \frac{\varepsilon}{2M}$ *ilişkisi kolaylıkla elde edilir.* $(A_4)$ *bakımından büyük* $n$ *değerleri için aşağıdaki çelişki elde edilir.*

$$\begin{aligned} 0 \leq V\big(t_n^*, x(x_n^*)\big) &\leq V(t_0, x_0) + \sum_{1\leq i\leq n} \int_{t_i}^{t_i^*} D^+V\big(s, x(s)\big)\, ds \\ &\leq V(t_0, x_0) - nC\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\varepsilon}{2M} < 0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$t \to \infty$ *iken* $W\big(t, x(t)\big) \to 0$, $x(t) \to 0$ *olur. Benzer yaklaşımla* $D^+W$*'nun alttan sınırlı olduğu gösterilerek ispat tamamlanır.*

*Sonuç 3.3: Teorem 3.9'da* $W(t,x)$ *aşağıdaki şekilde seçilirse aynı sonucu verdiği kabul edilsin.*

*i)* $f$ , $R_+ \times S(A)$ *da sınırlı ise* $W(t,x) = |x|$ *olur,*
*ii)* $W(t,x) = V(t,x)$ *dir.*

Eğer sadece (3.1) sisteminin pratik kararlılığının düzgünlük özellikleri ile ilgileniyorsak, teorem 3.9'un kabullerini daha kolay koşulları sağlayan Lyapunov tipi fonksiyonları kullanarak basitleştirebiliriz.

*Teorem 3.10: Varsayalım ki*

*i ) $0 < \lambda < A$*

*ii) $\in C[R_+ \times S(A) \cap S^C(\lambda), R_+]$ , $V(t,x)$ x'de yerel Lipchitz şartlarını sağlasın ve $(t,x) \in R_+ \times S(A) \cap S^C(\lambda)$, $R_+$ için $b(|x|) \leq V(t,x) \leq a(|x|), a, b \in K$, $D^+V(t,x) \leq g\big(t, V(t,x)\big)$ ifadeleri sağlanır ayrıca burada da $g \in C[R_+^2, R]$ ve $S^C(\lambda)$ da $S(\lambda)$' nın tümleyenidir.*

*iii) $a(\lambda) < b(A)$ eşitsizliği sağlansın.*

*(3.11)'in düzgün pratik kararlılığı (3.1) sisteminin düzgün pratik kararlılığını tanımlar.*

*İspat 3.10: Kabul edelim ki (3.11) denklemi düzgün pratik kararlı olsun. Daha sonra $a(\lambda) < b(A)$ için bütün $t_0 \in R_+$ için $u_0 < a(\lambda)$ ifadesiyle*

$$u(t, t_0, u_0) < b(A),\ t \geq t_0 \tag{3.38}$$

*tanımlayalım. $|x_0| < \lambda$ olmak üzere $|x(t)| < A, t \geq t_0$ dır. Eğer bu doğru olmasaydı (3.1)' in $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ şeklinde bir çözümü mevcut olup ve $t_2 > t_1 > t_0$ olurdu. Bundan dolayı da*

$$|x(t_2)| = A, |x(t_1)| = \lambda \text{ ve } \lambda \leq |x(t)| \leq A,\ t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.39}$$

*ifadesi sağlanırdı. Teorem 3.1'den dolayı*

$$V\big(t, x(t)\big) \leq r\Big(t, t_1, V\big(t_1, x(t_1)\big)\Big), t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.40}$$

*eşitsizliği elde edilir. Buradaki ifade de $r(t, t_1, u_0)$'da $r(t_1, t_1, u_0) = u_0$ için (3.11)'in maksimum çözümüdür.*

*ii) varsayımı ve (3.19), (3.20) ve (3.21) ilişkileri açısından*

$$b(A) \leq V\big(t_2, x(t_2)\big) \leq r\big(t_2, t_1, a(\lambda)\big) < b(\lambda) \tag{3.41}$$

*çelişkisi elde edilir. Bu ifade ise (3.1) sisteminin düzgün pratik kararlılığını ispat eder.*

*Sonuç 3.4:* $g(t,u) \equiv 0$ *fonksiyonu, Teorem 3.10'da (3.1) sisteminin düzgün pratik kararlılığına neden olur.*

*Teorem 3.11: Varsayalım ki Teorem 3.10'un* $(i)$ *ve* $(iii)$ *hipotezleri sağlansın. Ayrıca varsayalım ki herbir* $0 < \eta < A$ *için* $\mu_\eta > 0$ *ve* $V_\eta \in C[R_+ \times S(A) \cap S^C(\eta), R_+]$ *mevcut olsun.* $V_\eta(t,x)$ *x'de yerel Lipschitz şartlarını sağlasın,* $(t,x) \in R_+ \times S(A) \cap S^C(\eta)$ *için*

$$\begin{cases} b(|x|) \leq V_\eta(t,x) \leq a(|x|), a, b \in K\ ,\ a(0) = b(0) = 0, \\ \qquad\qquad D^+V_\eta(t,x) \leq -\mu_\eta \end{cases} \tag{3.42}$$

*sağlanır. Buradan da (3.1) sistemi düzgün pratik kararlıdır.*

*İspat 3.11: Teorem 3.10'daki* $(i)$ *ve* $(iii)$ *sağlanırsa,* $\eta = \lambda$ *ve* $g(t,u) \equiv 0$ *alırsak Sonuç 3.4'den dolayı (3.1) sisteminin düzgün pratik kararlı olduğu görülür.* $0 < \varepsilon < A$ *ve* $t_0 \in R_+$*verilmiş olsun.* $a(\delta) < b(\varepsilon)$ *için* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *seçilirse,* $|x_0| < \delta(\varepsilon)$ *için* $|x(t)| < \varepsilon,\ t \geq t_0$ *olduğu kolayca görülür.*

*Şimdi de* $T = \frac{a(\lambda)}{\mu_\eta}, \eta = \delta(\varepsilon)$ *için* $t^* \in [t_0, t_0 + T]$ *olduğunu gösterelim. Öyleki* $|x(t^*)| < \delta$ *dır ve* $|x_0| < \delta$ *için (3.1) sisteminin herhangi bir çözümü* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *dır. Varsayalım ki bu ifade doğru olmasın.* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ *için* $\delta \leq |x(t)|$ *dir.* $|x(t)| < A, t \geq t_0$ *olduğu için ,* $|x_0| < \lambda$ *olduğu yerde (3.22)'den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz*

$$V_\eta\big(t_0 + T, x(t_0 + T)\big) \leq V_\eta(t_0, x_0) - \mu_\eta T, \eta = \delta(\varepsilon). \tag{3.43}$$

*Buradan da sonuç olarak*

$$0 < b(\delta) \leq a(\lambda) - \mu_\eta T = 0 \tag{3.44}$$

*çelişkisine ulaşırız. Böylece* $|x_0| < \lambda$ *ifadesi* $|x(t)| < \varepsilon, t \geq t_0 + T$ *'yi tanımlar ve buda teoremin ispatını tamamlar.*

Bazen verilen bir sistemin belli özelliklerini yakından yansıtan $V(t,x)$ 'in uygun bir seçimi, $V(t,x)$' in $V(t,x)=|x|$ gibi çok basit bir seçimden daha doğru bir sonuca ulaşılabilir. Örnek olarak

$$x' = A(t)x + \tilde{R}(t,x),\ \ x(t_0) = x_0 \tag{3.45}$$

sistemini ele alalım. Bununla ilgili olarak aşağıdaki varsayımları inceleyelim:

i) kendinden eklenmiş ve pozitif bir sürekli diferansiyel $G(t)$ matrisi mevcuttur, öyleki $(Gx,x)$ Hermitian formu pozitif tanımlıdır ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ise $G(t)$'nin en küçük ve en büyük öz değeridir.

ii) $v \in C[R_+, R]$ fonksiyonu $G^{-1}(t)Q(t)$ matrisinin en büyük öz değeridir.

$$Q(t) = \frac{dG(t)}{dt} + G(t)A(t) + A^*(t)G(t) \tag{3.46}$$

ifadesindeki $A(t)$, $R_+$'da sürekili bir fonksiyondur ve $A^*(t)$ da $A(t)$ matrisinin transpozesidir.

iii) $\beta \in C[R_+, R_+]$ için $\tilde{R} \in C[R_+ \times S(A), R^n]$ ve $\left|\tilde{R}(t,x)\right| \leq \beta(t)|x|^\alpha$ , $0 < \alpha \leq 1$ dır.

$V(t,x) = (G(t),x)$ şeklinde tanımlanan Lyapunov fonksiyonunu seçerek

$$\begin{aligned} V'(t,x) &= \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}[A(t)x + \tilde{R}(t,x)] \\ &= (G'x,x) + (GAx,x) + (Gx,Ax) + \left(G\tilde{R},x\right) + \left(Gx,\tilde{R}\right) \\ &= (G'x,x) + (GAx,x) + (A^*Gx,x) + \left(G\tilde{R},x\right) + \left(Gx,\tilde{R}\right) \\ &= (Q(t)x,x) + \left(G\tilde{R},x\right) + \left(Gx,\tilde{R}\right) \end{aligned} \tag{3.47}$$

ifadesi elde edilir.$Q(t)$'nin tanımından dolayı

$$G^{-1}(t)Q(t) = G^{-1}\frac{dG}{dt} + A + G^{-1}A^{*}G \tag{3.48}$$

elde edilir ve böylece

$$(Qx, x) \leq v(t)(Gx, x) = v(t)V(t, x) \tag{3.49}$$

olur. Ayrıca

$$\left(Gx, \tilde{R}\right) + \left(G\tilde{R}, x\right) \leq 2\left[(Gx, x)\left(G\tilde{R}, \tilde{R}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.50}$$

ifadesi de kolayca elde edilir.

$$\lambda_1(x, x) \leq (Gx, x) \leq \lambda_2(x, x) \tag{3.51}$$

olduğundan dolayı $(iii)$ bakımından

$$\begin{aligned} \left(G\tilde{R}, \tilde{R}\right) \leq \lambda_2\left(\tilde{R}, \tilde{R}\right) \leq \lambda_2\left(\beta(t)\right)^2 (x, x)^{\alpha} & \\ = \lambda_2 {\lambda_1}^{-\alpha}\left(\beta(t)\right)^2 {\lambda_1}^{\alpha}(x, x)^{\alpha} & \\ \leq \lambda_2 {\lambda_1}^{-\alpha}\left(\beta(t)\right)^2 \left(V(t, x)\right)^{\alpha} & \end{aligned} \tag{3.52}$$

olur. Bu eşitsizlikleri kullanarak

$$V'(t, x) \leq v(t)V(t, x) + h(t)[V(t, x)]^{p} \tag{3.53}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadedeki

$$\phi = h(t) = 2\beta(t)(\lambda_2 {\lambda_1}^{-\alpha})^{\frac{-1}{2}}, 0 < \alpha \leq 1, p = \frac{1+\alpha}{2} \tag{3.54}$$

dir.Buna karşılık gelen karşılaştırma denklemi ise böylece

$$u' = v(t)u + h(t)u^p \, , u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{3.55}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki ifadenin çözümü ise $t \geq t_0$ , $q = 1 - p$ için aşağıdaki gibidir.

$$u(t) = \left[ u_0^q + q \int_{t_0}^{t} h(s) exq \left( q \int_{t_0}^{s} v(\xi) d\xi \right) ds \right]^{\frac{1}{q}} \times exp\left( \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right) \tag{3.56}$$

$u(t)$ fonksiyonunun tanımını hesaba katarak çeşitli pratik kararlılık özelliklerini uygulamak için Teorem 3.7, Teorem 3.8 ve Teorem 3.9'u kullanabiliriz. Örneğin $0 < \lambda < A$ için eğer $v$ ve $h$ fonksiyonları

$$\left[ \lambda_2^q \lambda^{2q} + q \int_{t_0}^{t} h(s) exp \left( q \int_{t_0}^{s} v(\xi) d\xi \right) \right]^{\frac{1}{q}} \times exp\left( \int_{t_0}^{t} v(s) ds \right) < \lambda_1 A^2 \tag{3.57}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa (3.23) sistemi pratik kararlıdır.

## 3.3. Pertörb Lyapunov Fonksiyonları

*Teorem 3.12: Varsayalım ki*

*i )* $0 < \lambda < A$

*ii)* $V_1 \in C[R_+ \times S(A), R_+]$ , $V_1(t, x)$ $x$ *'de yerel Lipschitz şartlarını sağlasın ve* $(t, x) \in R_+ \times S(A), a_1 \in CK, g_1 \in C[R_+^2, R]$ *için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

$$V_1(t,x) \leq a_1(t,|x|), \tag{3.58}$$

$$D^+V_1(t,x) \leq g_1\big(t, V_1(t,x)\big). \tag{3.59}$$

*iii)* $V_2 \in C[R_+ \times S(A) \cap S^C(\lambda), R_+], V_2(t,x)$ $x$ *'de yerel Lipschitz şartlarını sağlasın ve* $(t,x) \in R_+ \times S(A) \cap S^C(\lambda)$ $, b, a_1 \in K, g_2 \in C\big[R_{+,}^2 R\big]$ *için aşağıdaki ifadeler sağlanır*

$$b(|x|) \leq V_2(t,x) \leq a_2(|x|), \tag{3.60}$$

$$D^+V_1(t,x) + D^+V_2(t,x) \leq g_2\big(t, V_1(t,x) + V_2(t,x)\big). \tag{3.61}$$

*iv) Bazı* $t_0 \in R_+$ *için* $a_1(t_0, \lambda) + a_2(\lambda) < b(A)$ *dır.*

*v)* $t \geq t_0$ *için* $u_0 < a_1(t_0, \lambda)$ *ifadesi* $u(t, t_0, u_0) < a_1(t_0, \lambda)$ *şeklinde ifade edilir ve burada* $u(t, t_0, u_0)$ *ifadesi*

$$u' = g_1(t,u),\ u(t_0) = u_0 \tag{3.62}$$

*ifadesinin herhangi bir çözümüdür. Ayrıca her* $t_0 \in R_+$ *için*

$$v_0 < a_1(t_0, \lambda) + a_2(\lambda) \tag{3.63}$$

*ifadesi*

$$v\,(t, t_0, v_0) < b(A), t \geq t_0 \tag{3.64}$$

*şeklinde ifade edilir ve buradaki* $v(t, t_0, v_0)$ *da*

$$v' = g_2(t,v), v(t_0) = v_0 \geq 0 \tag{3.65}$$

*denkleminin herhangi bir çözümüdür. Buradan da (3.1) sistemi pratik kararlıdır].*

# 4. PERTÖRB SİSTEMLER

Bu bölümde pratik kararlılık konusunu pertörb sistemleri de içeren lineer olmayan sistemler açısından ele alacağız. Bu bölümde özellikle Lyapunov tipi fonksiyonlar ve ilgili eşitsizlik teorileri önemli rol oynar.

Öncelikle pertörb olmayan sistemlerin uygun kararlılık özellikleri olması halinde sonuç veren pertörb diferansiyel denklemleri ele alacağız. Pertürbüsyonlar sınır koşulları olarak doğrudan ele alınabileceği gibi, çoğu zaman pertürbüsyonları pratik kararlılık tanımının içine dahil etmek daha doğru olur. Ayrıca pertürbüsyon teorisinde ise pertörb ve pertörb olmayan diferansiyel sistemlerin uygun çözümlerini uygun bir şekilde birbirine bağlayan karşılaştırma teorisinin geliştirilmesini içerecektir. Bu iki yaklaşımın varyasyonel parametreler metodu ile Lyapunov metodudur. Sonuç olarak karşılaştırma yöntemi pertürbasyonlar vasıtasıyla pratik kararlılık problemlerinin çözümü için daha uygundur [4], [5], [11], [14], [16], [17].

## 4.1. Pertörb Sistemlerin Kararlılığı

Pertörb diferansiyel denklem sistemlerinin pratik kararlılık özelliklerinin bir bütün halinde incelemek için teorem 3.2 deki eşleşmiş karşılaştırma fonksiyonların-dan yararlanmak uygun olur. Kesinlikle pertörb sistemlerin kararlılığının incelenmesinde eşleşmiş fonksiyonlar önemli rol oynarlar. Çünkü $t, x$ ve $V(t,x)$ fonksiyonu vasıtasıyla $D^+V(t,x)$ 'in hesaplanması sadece $t$ ve $V(t,x)$'den oluşan bir fonksiyona göre kullanımı daha kolay ve avantajlıdır.

Şimdi de 3.1 pertörb sistemi ile $f, R \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ iken

$$x' = f(t,x) + R(t,x), x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

pertörb diferansiyel sistemini ele alalım. Buradaki pertürbasyon terimi $R(t,x)$ sisteme değişik yollardan girebilir. Örneğin,

$$x' = f\big(t, x, R(t,x)\big), \tag{4.2}$$

$$x' = f(t,x)R_0(t,x) + R_1(t,x) \tag{4.3}$$

burada $R_0(t,x), n \times n$ kare matris ve $R_1(t,x)$ de $n-$boyutlu vektördür. Burada öncelikle (4.1) sistemini ele alalım. Bu yaklaşımda $x(t) = x(x,t_0,x_0)$ (4.1)'in herhangi bir çözümü ve $g \in C[R_+ \times R^n, R_+, R]$ için

$$u' = g(t,x(t),u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{4.4}$$

eşleşmiş karşılaştırma denklemini ele alalım.

*Tanım 4.1: Eğer verilen* $0 < \lambda < A$ , $a,b \in K$ *için* $a(\lambda) < b(A)$,$|x_0| < \lambda$ *ve* $u_0 < a(\lambda)$, *oluyorsa ve aşağıdaki koşulları sağlarsa (4.2) eşleşmiş sistemine koşullu pratik kararlıdır denir.*

*i)* $u(t,t_0,x_0,u_0) < b(A),\ t \geq t_0$
*ii)* $u(t,t_0,x_0,u_0) < b(A)$, *herhangi bir* $t_0 \leq t \leq t_1$ *aralığında* $|x(t)| \leq A$ *iken* $u(t,t_0,x_0,u_0)$ *(4.2)'nin herhangi bir çözümüdür.*

Burada $(i)$ koşulu $u$ bileşenine bağlı olan (4.1) ve (4.2) eşleşmiş sisteminin pratik stabilitesi olarak düşünülebilir.

*Teorem 4.1: Varsayalım ki Teorem 3.7'nin* $A_0, A_1$ *ifadeleri aşağıdaki koşullar dışında sağlansın, (3.10) yerine* $g \in C[R_+ \times R^n, R_+, R]$ *için*

$$D^+V(t,x) \leq g\big(t,x,V(t,x)\big), (t,x) \in R_+ \times S(A) \tag{4.5}$$

*eşitsizliği yazılabilir. Burada (4.2) eşleşmiş denklemin koşullu pratik kararlılık özellikleri (4.1) pertörb sisteminin ona karşılık gelen pratik kararlılık özelliklerini ifade eder.*

*İspat 4.1: Bu teoremin ispatı Teorem 3.7'nin ispatına benzemektedir. Tek fark ise ispatlama sırasında Teorem 3.1 yerine Teorem 3.2'nin kullanılmasıdır. Sonuç* *olarak, eğer tanım 4.1'in* $(i)$ *maddesini kullanırsak,* $|x_0| < \lambda$ *ve* $u_0 < a(\lambda)$ *için* $u(t, t_0, x_0, u_0) < b(A), t \geq t_0$ *ifadesi sağlanır. Teorem 3.2' den dolayı da*

$$V\big(t, x(t)\big) \leq r(t, t_0, x_0, u_0)\ ,\ t_0 \leq t \leq t_1 \tag{4.6}$$

*ifadesi elde edilir. Bu ise (4.1) sisteminin pratik kararlılığını ispatlayan bir çelişki elde edilir. Eğer (3.1) pertörb sistemi* $C \in \mathcal{K}$ *için* $D^+V(t,x) \leq -C\big(V(t,x)\big)$, $(t,x) \in R_+ \times S(A)$ *ifadesini sağlar ve eğer* $V(t,x)$ *ifadesi Lipschitz şartlarını* $x$*'de sağlıyor ise,* $x \in S(A)$ *için,* $L(t) \geq 0$ *dır. Buradan da kolayca aşağıdaki ifade elde edilir.*

$$D^+V(t,x) \leq -C\big(V(t,x)\big) + L(t)|R(t,x)|\ ,\ (t,x) \in R_+ \times S(A) \tag{4.7}$$

*sonuç olarak eşlenmiş denklemler*

$$w(t,x) = L(t)|R(t,x)| \tag{4.8}$$

*iken aşağıdaki ifadeye indirgenebilir.*

$$u' = -C(u) + w\big(t, x(t)\big),\ u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{4.9}$$

*Şimdi de varsayalım ki* $|w(t,x)| \leq \sigma$ *iken* $|x| \leq A$ *ve* $t \to \infty$ *için* $\int_t^{t+1} \sigma(s)ds \to 0$ *olsun. Buradan da (4.3) ifadesinin düzgün pratik kararlı olduğu görülür.* $0 < \lambda < A$ *verilsin ve varsayımlar σ üzerinde uygulandığında*

$$G(t) = \int_t^{t+1} \sigma(s)ds \tag{4.10}$$

*olmak üzere*

$$\int_{t_0}^{t} \sigma(s)ds = \int_{t_0}^{t} \left[ \int_{s-1}^{s} \sigma(\xi)d\xi \right] ds \leq \int_{t_0-1}^{t} \left[ \int_{s-1}^{s} \sigma(\xi)d\xi \right] ds$$

$$= \int_{t_0-1}^{t} G(s)ds \tag{4.11}$$

*elde edilir.* $Q \in L$ *için* $Q(t)$ *yi*

$$Q(t) = sup\{G(a): t-1 \leq s < \infty\} \tag{4.12}$$

*şeklinde tanımlayalım. Eğer* $\tau$*'yu* $\tau = \tau(\lambda, A) > 0$ *şeklinde seçersek*

$$Q(\tau) < min\left[C\big(a(\lambda)\big), b(A) - a(\lambda)\right] \tag{4.13}$$

*olur ve* $|x_0| < \lambda$ *iken* $t_0 \geq \tau$ *dir. Mümkünse*

$$u(t_1) = u(t_1, t_0, x_0, u_0) \geq b(A) \tag{4.14}$$

*seçilmelidir. Eğer* $t_2 > t_0$ *mevcutsa* $u(t_2) = a(\lambda)$ *ve* $a(\lambda) \leq u(t_2) \leq b(A)$, $t_2 \leq t \leq t_1$ *olur ki burada (4.3)'den de*

$$b(A) \leq u(t_1) \leq u(t_2) - \int_{t_2}^{t_1} C\big(u(s)\big)ds + \int_{t_2}^{t_1} \big|w\big(s, x(s)\big)\big|ds$$

$$\leq a(\lambda) - C\big(a(\lambda)\big)(t_1 - t_2) + \int_{t_2-1}^{t_1} G(s)ds$$

$$\leq a(\lambda) - (t_1 - t_2)\left[-C\big(a(\lambda)\big) + Q(\tau)\right] + Q(\tau) \tag{4.15}$$

$$\leq a(\lambda) + Q(\tau) < b(A)$$

*olur ve buda bir çelişkidir. Böylece (4.2) düzgün pratik kararlıdır ve bundan dolayı da (4.1) pertörb sistemide düzgün pratik kararlıdır.*

*Tanım 4.2: Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa (4.1) pertörb sistemini etkileyen pertürbasyonlar altında pratik kararlıdır.* $S_0, S, P \in C[R_+, \Omega]$ *olmak üzere* $t \in R_+$ *iken* $S_0(t) \subset S(t), S_0(t) \cap S(t) = \emptyset$ *oluyorsa* $x \in S(A)$ *için* $x_0 \in S_0(t)$ *ve* $R(t,x) \in P(t)$ *öyleki* $x(t) \in S^0(t), t \geq t_0$ *dır ve buraki* $x(t)$ *de 4.1 sisteminin herhangi bir çözümüdür.*

Şimdi de (4.1) pertörb sisteminin pratik kararlılıkla ilgili olan tipik sonuçlarını ispatlayalım.

*Teorem 4.2: Varsayalım ki*

*i)* $V \in C[R_+ \times S(t), R_+]$ *ve* $V(t,x)$ *yerel Lipschitz şartlarını* $x$*'de sağlasın.* $R(t,x) \in P(t), x \in S(t)$ *ve* $t \in R_+, g \in C[R_+^2, R]$ *için* $D^+V(t,x) \leq g\big(t, V(t,x)\big)$ *eşitsizliği sağlanır.*

$ii)$ $u' = g(t,u), u(t_0) \geq 0$ *ifadesinin maksimum çözümü* $r(t, t_0, u_0)$ *ise* $u_0 < V_M^{S_0}(t_0)$ *ve* $r(t, t_0, u_0) < V_M^{\partial S}(t)$ *,* $t \geq t_0$ *eşitsizlikleri sağlanır. Bunlardan dolayı da (4.1) sistemi pratik kararlıdır.*

*İspat 4.2:* $R(t,x) \in P(t)$ *alırsak* $x \in S(t), t \in R_+$ *ve* $x_0 \in S_0(t_0)$ *olsun. Burada ki iddiamız* $x(t) \in S^0(t), t \geq t_0$ *olduğudur. Eğer bu doğru olmasaydı, öyle bir* $t_1 \geq t_0$ *olacakti ki ve (4.1) sisteminin bir çözümü olan* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *için*

$$x(t_1) \in \partial S(t_1) \text{ ve } (t) \in \partial S(t)\ ,\ t_0 \leq t \leq t_1 \tag{4.16}$$

*sağlanır. Bundan dolayı Teorem 3.1'i verir, (4.5)'den dolayı da (4.4)'ün maksimal çözümü olan* $r(t_1, t_0, u_0)$ *için* $V\big(t, x(t)\big) \leq r(t, t_0, u_0), t_0 \leq t \leq t_1$ *eşitsizliği sağlanır. Şimdi de* $r(t, t_0, u_0)$ *üzerindeki koşulara bakacak olursak*

$$\begin{aligned} V_M^{\partial S}(t) &\leq V\big(t_1, x(t_1)\big) \leq r(t_1, t_0, u_0) \\ &\leq r\left(t_1, t_0, V_M^{S_0}(t_0)\right) \leq V_M^{\partial S}(t_1) \end{aligned} \tag{4.17}$$

*çelişkisi elde edilir.*

## 4.2. Pertürbasyon Teorisi Tekniği

Aşağıdaki iki diferansiyel denklem sistemlerini ele alalım. $f, F \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ olmak üzere

$$y' = f(t, y), y(t_0) = x_0 \tag{4.18}$$

$$x' = F(t, x), x(t_0) = x_0 \tag{4.19}$$

(4.6) sistemine göre aşağıdaki $(H)$ varsayımı sağlansın.

- $(H)$: $y(t, t_0, x_0)$ *(4.6) sisteminin her* $t \geq t_0$ *için sürekli bir çözümü, ve başlangıç değerleri ile* $|y(t, t_0, x_0)|$ *ifadesi yerel Lipschitz şartlarını* $x_0$*'da sağlasın. Herhangi bir* $V \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ *ve herhangibir* $t \in [0, \infty)$ *için* $t_0 < s < t$ *ve* $x \in R^n$ *olmak üzere*

$$D\_V(s, y(t, s, x)) \equiv \lim_{h \to 0^-} inf \frac{1}{h}\Big[V\Big(s + h, y\big(t, s + h, x + hF(s, x)\big)\Big) - V\big(s, y(t, s, x)\big)\Big] \tag{4.20}$$

*Şeklinde tanımlanır.*

*Teorem 4.3: Kabul edelim ki* $(H)$ *varsayımı sağlansın. Bu takdirde*

$i)$ $V \in C[R_+ \times R^n, R^n]$ için $V(s, x)$ *yerel Lipschitz şartını* $x$*' de sağlamak üzere* $t_0 < s < t$ *ve* $x \in R^n$ *için aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir*

$$D\_V(s, y(t, s, x)) \leq g\Big(t, V\big(s, y(t, s, x)\big)\Big). \tag{4.21}$$

$ii)$ Her $t \geq t_0$ ve $g \in C[R_+^2, R]$ *olmak üzere* $r(t, t_0, u_0)$ *ifadesi*

$$u' = g(t, u), u(t_0) = u_0 \geq 0 \tag{4.22}$$

*denkleminin maksimal çözümü olsun. Eğer* $x(t) = x(t, t_0, u_0)$ *de (4.7)' nin herhangibir çözümü ise* $t \geq t_0$ *için*

$$V\big(t, x(t, t_0, x_0)\big) \leq r(t, t_0, u_0) \tag{4.23}$$

*eşitsizliği sağlanır ve*

$$V\big(t_0, y(t, t_0, x_0)\big) \leq u_0 \tag{4.24}$$

*olur.*

*Teorem 4.4: Kabul edelim ki* $(H)$ *varsayımı ve Teorem 4.3' ün* $(i)$ *hipotezi sağlansın. Bu takdir de* $g \in C[R_+^2, R]$ *ve* $(t, x) \in R_+ \times R^n$ *için*

$$b(|x|) \leq V(t, x) \leq a(|x|)\,,\ a, b \in \mathcal{K} \tag{4.25}$$

*eşitsizliği sağlanır. Ayrıca* $0 < \lambda < A$ *ve* $a(\lambda) < b(A)$ *verilmek şartıyla, eğer (4.6) pertörb olmayan sistemi* $(\lambda, \lambda)$ *için pratik kararlıysa, 4.6' nın pratik kararlılık özelliği nedeniyle (4.7) pertörb sistemi de pratik kararlılık özelliklerini sağlar.*

# 5.BAŞLANGIÇ ZAMANI FARKLI PARAMETRELERİN PRATİK KARARLILIĞI

## 5.1. Temel Tanım ve Teoremler

Aşağıdaki verilen başlangıç değer problemleri için

$$t \geq t_0 \geq 0, t_0 \in R \text{ için } x' = f(t,x), x(t_0) = x_0 \tag{5.1}$$

$$t \geq \tau_0 \geq 0 \text{ için } x' = f(t,x), x(\tau_0) = y_0 \tag{5.2}$$

diferansiyel sistemleri ile

$$t \geq \tau_0 \text{ için } y' = F(t,y), y(\tau_0) = y_0 \tag{5.3}$$

$$t \geq \tau_0 \text{ için } w' = H(t,w), w(\tau_0) = y_0 - x_0 \tag{5.4}$$

pertörb sistemlerini ele alalım. Burada $F, H \in C[R_+ \times R^n, R^n]$, $R_+ \times S(\rho)$ ve $S(\rho) = \{x \in R^n : \|x\| < \rho < \infty\}$ kümesinde yerel lipschitz şartlarını sağlasın. $(t_0, x_0)$ ve $(\tau_0, y_0)$ ile yukarıdaki varsayımlar çözümün varlığını ve tekliğini sağlar Başlangıç zanamı farklı parametreler ile iligi temel tanımlar aşağıda verilmiştir [21]-[24].

*Tanım 5.1: Eğer $\phi \in [(0,\rho), R_+], \phi(0) = 0$ ise $\phi(r)$ fonksiyonuna $\mathcal{K}$ sınıfına aittir denir ve burada ki $\phi(r)$ fonksiyonu r' de kesin monoton artandır.*

*Tanım 5.2: Eğer herbir $t \in R_+$ için $a \in [R_+^2, R_+], a(t,u) \in \mathcal{K}$ ise $a(t,u)$ fonksiyonuna $\mathcal{CK}$ sınıfına aittir denir.*

*Tanım 5.3: Eğer bütün $(t,x) \in R_+ \times R^n$ için $h \in [R_+ \times R^n, R_+]$,*

$$inf_{(t,x)} h(t,x) = 0 \tag{5.5}$$

*oluyorsa* $h(t,x)$ *fonksiyonuna* $\Gamma$ *sınıfına aittir denir.*

*Tanım 5.4: Eğer* $x \in R^n$ *için* $h \in \Gamma$, $sup_{t \in R_+} h(t,x)$ *varsa* $h(t,x)$ *fonksiyonuna* $\Gamma_0$ *sınıfına aittir denir.*

*Tanım 5.5:* $t > 0$ *için* $R_+ \times S(\rho)$ *kümesinde* $V(t,0) = 0$ *ile tanımlanan reel değerli* $V(t,x)$ *fonksiyonları için eğer* $(t,x) \in R_+ \times S(\rho)$ *için* $\phi(r) \in \mathcal{K}$ *var ve* $\phi(\|x\|) \leq V(t,x)$ *bağıntısı gerçekleşiyorsa bunlara pozitif tanımlanmıştır denir. Ayrıca eğer* $-V$ *pozitif tanımlı ise* $V$ *negatif tanımlanmıştır denir.* $(t,x) \in R_+ \times S(\rho)$ *için* $\psi \in \mathcal{K}$ *fonksiyonu var ve* $V(t,x) \leq \psi(\|x\|)$ *bağıntısı sağlanırsa* $V(t,x)$ *fonksiyonu azalan bir fonksiyondur.*

*Tanım 5.6:* $V \in [R_+ \times R^n, R_+]$ *için* $V$ *reel değerli fonksiyonlarının Dini-like türevlerleri aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.*

$$D_*^+ V(t,s,x) = \lim_{h \to 0^+} sup \frac{1}{h}\Big[V\Big(s+h, y\big(t, s+h, x+hf(s,x)\big)\Big) - V\big(s, y(t,s,x)\big)\Big] \tag{5.6}$$

$$D_{*-} V(t,s,x) = \lim_{h \to 0^-} inf \frac{1}{h}\Big[V\Big(s+h, y\big(t, s+h, x+hf(s,x)\big)\Big) - V\big(s, y(t,s,x)\big)\Big] \tag{5.7}$$

*Tanım 5.7:* $t \geq \tau_0 \geq 0, t_0 \in R_+$ *için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü* $x(t,t_0,y_0)$ *iken, (5.3) sisteminin* $y(t,\tau_0,y_0)$ *çözümü* $(h_0,h)$ *başlangıç zamanı farklı uygulamalı kararlılığıyla çözümü* $x(t-\eta,t_0,x_0)$ *dır ancak ve ancak her* $(\lambda, A)$, $0 < \lambda < A$ *ve herhangi bir* $\tau_0 \in R_+$ *için öyleki* $h_0(\tau_0, y_0 - x_0) \leq \lambda$ *ifadesi* $h\big(t, y(t,\tau_0,y_0) - x(t-\eta,t_0,x_0)\big) \leq A$ , $t \geq \tau_0$ *ifadesini tanımlar.*

*Eğer her* $\tau_0 \in R_+$ *için tanım (5.7) sağlanıyorsa, (5.3) sisteminin* $y(t,\tau_0,y_0)$ *çözümü,* $x(t-\eta,t_0,x_0)$ *çözümüne göre başlangıç zamanı farkı* $(h_0,h)$ *pratik kararlılığına eşittir.*

*Tanım 5.8:* $t \geq \tau_0 \geq 0, t_0 \in R_+$ *için (5.1) sisteminin herhangi bir çözümü* $x(t, t_0, y_0)$ *iken, (5.3) sisteminin* $y(t, \tau_0, y_0)$ *çözümü, başlangıç zaman farkı* $(h_0, h)$ *olan kuasi pratik kararlıdır* $x(t-\eta, t_0, x_0)$ *çözümü için. Burada* $t \geq \tau_0 \geq 0, t_0 \in R$ *ve* $\eta = \tau_0 - t_0$ *için* $x(t, t_0, x_0)$ *ifadesi (5.1)'in herhangi bir çözümü olmak üzere ancak ve ancak verilen herhangi bir* $(\lambda, B, T) > 0$ , $0 < \lambda < B$ *ve bazı* $\tau_0 \in R_+$ *için* $h_0(\tau_0, y_0 - x_0)$ *iken* $t \geq \tau_0 + T$ *için* $h\big(t, y(t, \tau_0, y_0) - x(t-\eta, t_0, x_0)\big) \leq B$ *eşitsizliği sağlanır.*

*Eğer Tanım 5.8 her* $\tau_0 \in R_+$ *için gerçekleniyorsa (5.3) sisteminin* $y(t, \tau_0, y_0)$ *çözümüne başlangıç zamanı farkı* $(h_0, h)$ *olan düzgün pratik kuasi kararlıdır denir ve çözümüde* $x(t-\eta, t_0, x_0)$ *şeklindedir.*

*Teorem 5.1: Kabul edelim ki*

*i)* $V \in C[R_+ \times R^n, R_+]$, $V(t,z)$ *ve* $|w(t,s,z)|$ *ifadeleri z'de her bir* $(t,s)$ *için yerel Lipschitz şartlarını sağlasınlar. Burada* $t \geq s \geq \tau_0$ *için* $w(t) = w(t, \tau_0, y_0 - x_0)$ *da (5.4) denklemin çözümü oluyorsa,* $\tilde{x}(t) = x(t-\eta, t_0, x_0)$ *için* $x(t, t_0, x_0)$ *ifadesi (5.1) denkleminin çözümü,* $y(t) = y(t, \tau_0, y_0)$ *ifadesi de (5.3) sisteminin çözümü olur ve ayrıca* $z(t) = y(t) - \tilde{x}(t)$ *dir.*

*ii) Aşağıdaki ifadeler gerçeklenmek üzere,*

$$D_{*-}V(t,s,z) = \lim_{h\to 0^-} inf \frac{1}{h}\Big[V\Big(s+h, w\big(t, s+h, z+hF(s,y)\big)\Big) - V\big(s, w(t,s,z)\big)\Big] \tag{5.8}$$

$$D_{*-}V(t,s,z) \leq g\Big(t, s, V\big(s, w(t,s,z)\big)\Big) \tag{5.9}$$

*iii)* $g \in [R_+^2 \times R_+^n, R^n]$, $g(t,s,u)$ *fonksiyonu herbir* $(t,s)$ *için kuasi monoton azalmayandır ve* $\tau_0 \leq s \leq t < \infty$ *için*

$$\frac{du(s)}{ds} = g\big(t, s, u(s)\big), u(\tau_0) = u_0 \geq 0 \tag{5.10}$$

*ifadesinin maksimum çözümü* $r(t,s,\tau_0,y_0)$ *dır. Buradan da*

$$V\big(\tau_0, w(t,\tau_0,y_0-x_0)\big) = u_0 \tag{5.11}$$

*iken* $r_0(t,\tau_0,u_0) = r(t,s,\tau_0,u_0)$ *olduğunda*

$$V\big(t, z(t,\tau_0,y_0-x_0)\big) \le r_0\Big(t,\tau_0, V\big(\tau_0, w(t,\tau_0,y_0-x_0)\big)\Big) \tag{5.12}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*İspat 5.1: Şimdi de* $m(t,s)$*' yi*

$$m(t,s) = V\Big(s, w\big(t,s,z(s)\big)\Big) \tag{5.13}$$

*şeklinde alalım. Bu taktirde* $(i)$ *ve* $(ii)$ *varsayımlarını ele alalım. Karşılaştırma sonucu aşağıdaki diferansiyel eşitsizlik bulunur.* $\tau_0 \le s \le t$ *için*

$$D_{*-}m(t,s) \le g\big(t,s,m(t,s)\big) \tag{5.14}$$

*dir. Buradan da* $\tau_0 \le s \le t$ *için*

$$m(t,s) \le r\Big(t,s,\tau_0, V\big(\tau_0, w(t,\tau_0,y_0-x_0)\big)\Big) \tag{5.15}$$

*eşitsizliği elde edilir. Eğer* $s = t$ *seçersek (5.7)' de istenen eşitsizlik elde edilir.*

*Teorem 5.2: Teorem 5.1'deki varsayımlara ek olarak* $N = 1$ *ve* $g(t,s,u) \equiv 0$ *ile* $t \ge \tau_0$ *için*

$$V\big(t, z(t,\tau_0,y_0-x_0)\big) \le V\big(\tau_0, w(t,\tau_0,y_0-x_0)\big) \tag{5.16}$$

*sağlansın. Bu takdir de* $c \in \mathcal{K} = \{\phi\colon \phi(0) = 0 \ ve\ \phi(s)'de\ s'de\ azalan\ , \phi \in C[R_+, R_+]\}$ *ve* $h_1 \in C[R_+ \times R^n, R_+]$ *olmak üzere* $t \ge s \ge \tau_0$ *için*

$$V\big(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big)V\big(\tau_0, w(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big)$$

$$- \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right)\right) ds \tag{5.17}$$

*eşitsizliği sağlanır.*

*İspat 5.2 : Aşağıdaki ifadeyi alacak olursak*

$$W\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right) \equiv V\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right)$$

$$+ \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right)\right) ds \tag{5.18}$$

*ve bu ifadenin her iki yanını da hipoteze göre Dini türevini alırsak, bu taktirde yukarıdaki ifade*

$$D_{*-}W\big(s, z(s)\big) \leq D_{*-}V\big(t, s, z(s)\big) + c\left(h_1\left(s, y\big(t, s, z(s)\big)\right)\right) \leq 0 \tag{5.19}$$

*olur. Ayrıca* $t \geq \tau_0$ *için W 'nun tanımından*

$$W\big(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big) \leq W\big(\tau_0, w(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big) \tag{5.20}$$

*eşitsizliği sağlanır ki buradan da* $t \geq \tau_0$ *için*

$$V\big(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big) + \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right)\right) ds$$

$$\leq V\big(\tau_0, w(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big) \tag{5.21}$$

*dır, buradaki integral terimini eşitsizliğin diğer tarafına atarsak*

$$V\big(t, z(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big) \leq V\big(\tau_0, w(t, \tau_0, y_0 - x_0)\big)$$

$$- \int_{\tau_0}^{t} c\left(h_1\left(s, w\big(t, s, z(s)\big)\right)\right) ds \tag{5.22}$$

*ifadesi elde edilir ki buda zaten aranılan durum olduğundan ispat tamamlanmış olur.*

# 6. UYGULAMALAR

Bu bölümde kararlılık, Lyapunov kararlılık ve Pratik kararlılıkla ilgili çeşitli örneklendirmeler yapılmıştır [3], [11], [24], [25].

*Örnek 6.1: Aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemini ele alarak bunun Lyapunov kararlılığını inceleyim.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 + ax_1x_2^2 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - bx_1^2x_2 \end{cases} \tag{6.1}$$

*Sisteminin öncelikle kritik noktalarını bulalım. Bu sistem için kritik nokta* $(0,0)$ *dır. Bu sistemin lineerleştirilmiş hali bu kritik nokta için*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_2^2 & -1 + 2ax_1x_2 \\ 1 - 2bx_1x_2 & -bx_1^2 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

*şeklindedir. Bu sistemin* $(0,0)$ *noktasındaki değeri ise*

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

*olur. Şimdi de A matrisinin öz değerlerini bulalım.* $|A - \lambda I| = 0$ *tanımını kulanırsak* $\lambda^2 + 1 = 0$ *dır ve buradan da* $\lambda_1 = i$ *ve* $\lambda_2 = -i$ *bulunur. Dolayısıyla* $(0,0)$ *noktası lineer sistemin kararlı merkez noktasıdır, fakat nonlinear sistemin kararlılığı ile ilgili birşey söyleyemeyiz. Bundan dolayı Lyapunov fonksiyonu bulup, Lyapunov teorilerini kullanarak sistemin kararlılığını inceleyeceğiz. Enerji yaklaşımından, kinetik ve potansiyel enerjiler toplamından dolayı*

$$\phi = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \tag{6.4}$$

*Lyapunov fonksiyonunu seçelim. Burada Lyapunov teorilerini kullanırsak*

$$\dot{\phi} = (\nabla\phi)^T F(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} [F_1(x) \quad F_2(x)]^T$$

$$= [x_1 \quad x_2][-x_2 + a x_1 x_2^2 \quad x_1 - b x_1^2 x_2]^T \tag{6.5}$$

$$= (a-b)x_1^2 x_2^2$$

*elde edilir. Eğer burada* $a < b$ *alırsak* $\dot{\phi} < 0$ *olur ki burada ki* $\phi$ *fonksiyonu Lyapunov fonksiyondur ve* $(0,0)$ *noktasında kararlıdır, ayrıca asimptotik kararlılık özelliklerini de sağlıyacağından asimtotik kararlıdır. Eğer* $b < a$ *seçilirse bu nokta için kararsızdır.*

*Örnek 6.2: Aşağıdaki lineer olmayan denklem sisteminin kararlılığını inceleyelim.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{6.6}$$

*Şimdi de bu lineer olmayan sistemin kritik noktalarını bulalım. Sistemin kritik noktası* $(0,0)$ *dır. Sistemi lineerleştirirsek*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3x_1^2 + x_2^2 & 1 + 2x_1x_2 \\ 1 + 2x_1x_2 & -1 + 3x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

*ifadesi elde edilir. Burada kritik noktanın değeri yazılırsa*

$$A = \left.\frac{df}{dx}\right|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

*elde edilir. Buradan A matrisinin özdeğerini hesaplayacak olursak* $|A-\lambda I|=0$ *olduğundan* $\lambda^2+2\lambda+2=0$ *denklemi elde edilir. Bununda kökleri bulunacak olursa* $\lambda_1=-1+i$ *ve*$\lambda_1=-1-i$ *dir. Kompleks köklerin reel kısımları negatif olduğundan dolayı* $(0,0)$ *kritik noktasında hem lineerleştirilmiş hemde lineer olmayan denklem sistemleri kararlıdır, aynı zamanda asimptotik kararlıdır.*

*Örnek 6.3 : Aşağıdaki lineer olmayan denklem sisteminin kararlılığını inceleyelim.*

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-x_2+ax_2^2x_1 \\ \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1 \end{cases} \tag{6.9}$$

*denkleminin öncelikle kritik noktalarını bulalım. Kritik noktaları* $(0,0)$ *dır. Şimdi de sistemi lineerleştirelim.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ax_2^2 & -1+2ax_1x_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

*lineerleştirilmiş sisteminde kritik noktayı yerine yazarsak*

$$A=\left.\frac{df}{dx}\right|_{(0,0)}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

*ifadesi elde edilir. Buradan da A matrisinin özdeğerleri bulalım.* $|A-\lambda I|=0$ *için matrisin özdeğerleri* $\lambda_1=i$ *ve* $\lambda_2=-i$ *dir. Buradaki kritik nokta için lineerleştirilmiş sistem kararlıdır fakat lineer olmayan sistem için birşey söyleyemeyiz. Bu nedenle Lyapunov fonksiyonu yardımıyla sistemin kararlılığına bakacağız.*

$$\phi=\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \tag{6.12}$$

*fonksiyonunu alalım. Bu takdir de*

$$F_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + F_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -x_1 x_2 + \alpha x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 = \alpha x_1^2 x_2^2 \qquad (6.13)$$

*dir. Eğer burada $\alpha$ negatif ise $\phi$ Lyapunov fonksiyonudur ve kritik değerde kararlıdır.*

*Örnek 6.4 : Aşağıdaki denklem sistemini ele alalım*

$$y' = e^{-t} y^2, y(t_0) \qquad (6.14)$$

*ve bu sistemin*

$$(t, t_0, x_0) = \frac{x_0}{1 + x_0(e^{-t} - e^{-t_0})} \qquad (6.15)$$

*çözümü verilsin. Burada varyasyonel denkleme uyan temel matris çözümü*

$$\emptyset(t, t_0, x_0) = \frac{1}{[1 + x_0(e^{-t} - e^{-t_0})]^2} \qquad (6.16)$$

*dir. Sonuç olarak $V(t, x) = x^2$ seçersek buradan*

$$D\_V = 2y(t, s, x)\emptyset(t, s, x)R(s, x) \qquad (6.17)$$

*olur ve buradaki $R(t, x)$ pertürbüsyon terimidir.*

$$R(t, x) = \frac{-x^2}{2} \qquad (6.18)$$

*olarak alırsak pertörb denklemimiz*

$$x' = e^{-t}x^2 - \frac{x^2}{2}, x(t_0) = x_0 \tag{6.19}$$

*olur. Buradan da*

$$g(t,u) = -u^{\frac{3}{2}} \tag{6.20}$$

*ve çözümü de*

$$u' = -u^{\frac{3}{2}}, u(t_0) = u_0 \geq 0, \tag{6.21}$$

$$u(t,t_0,u_0) = \frac{4u_0}{\left[2 + u_0^{\frac{1}{2}}(t - t_0)\right]^2} \tag{6.22}$$

*dir.*

# 7. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında saptırılmamış lineer olmayan diferansiyel denklem sistemin ve pertörb lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin pertörb olmayan lineer olmayan diferansiyel denklem sistemine göre stabilite özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu sistemlerin Lyapunov ve pratik kararlılıkları farklı koşullar altında incelenmiştir.

# KAYNAKLAR


[1] Bohner M., Martynyuk A. A., (2007), “ Elements of Lyapunov stability theory for dynamic equations on time scale”, Internationals Applied Mechanics, 43, (9), 949-970.

[2] Brauer F., Nohel John A., (1989), “ The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: An Introduction”, 2nd Edition, Dover Publications.

[3] Drazin P.G., (1992), “Nonlinear Systems”, 1st Edition, Cambridge University Press.

[4] Gordon S P., (1972), “A stability theory for perturbed difference equations”, Society for Industrial and Apliplied Mathematics Journal on Control, 10, 671-678.

[5] Gordon S P. (1979), “A stability theory for perturbed differential equations”, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2, 283-297.

[6] Hahn W.,(1967), “Stability of Motion”,1st Edition, Springer-Verlag.

[7] Hahn W., (1963), “Theory and Application of Liapunov's Direct Method”, 2nd Edition, Prentice-Hall.

[8] Lakshmikantham V., Leela S., (1969), “Differential and Integral Inequalities Volume-1”, 1st Edition, Academic Press.

[9] Lakshmikantham V., Trigiante D., (2002), “Theory of Difference Equations-Numerical Methods and Applications”, 1st Edition, Marcel Dekker.

[10] Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A., (1989), “Stability Analysis of Nonlinear Systems”, 1st Edition, Marcel Dekker.

[11] Lakshmikantham V., Leela S. , Martnyuk A.A., (1990), “Practical Stability of Nonlinear Systems”,1 st. Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd..

[12] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (1999), “Differential inequalities with initial time difference and applications”, Journal of Inequalities and Applications, 3, 233-244.

[13] Lakshmikantham V., Leela S., Devi V. J., (1999), “Stability criteria for solutions of differential equations relative to initial time difference”, International Journal of Nonlinear Differential Equations Theory-Methods and Application, 5 (1-2), 109-114.

[14] Lakshmikantham V., Leela S., (1981), “Nonlinear Differantial Equations in Abstract Spaces”, 1st Edition, New York Permagon Press.

[15] Lakshmikantham, V., Leela, S. and Vasundhara Devi, J., (1999), " Another Approach to the Theory of Differential Inequalities Relative to Changes in the Initial Times". Journal of Inequalities and Applications. 4, 163-174.

[16] Lakshmikantham, V., Vatsala, A.S., (1999), " Theory of Differential and Integral Inequalities with Initial Time Difference and Applications". Analytic and Geometric Inequalities and Applications, Kluwer Academic Publishers, 191-203.

[17] Laksmikantham V., Matrosov V.M, Sivasundaram S.,(1991), "Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems", 1st Edition, Kluwer Academic Publishers.

[18] Lakshmikantham V., Liu X.,(1993), "Stability Analysis in Two Measures", 1st Edition, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[19] Li A., Feng E., Li S., (2009), "Stability and boundedness criteria for nonlinear differential systems relative to initial time difference and applications", Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10, 1073-1080.

[20] Liu X., Dhaw M.D., (2001), "Boundedness in Terms of Two Measures for Perturbed Systemsby Generilized Variation of Parameters", Communicatiions in Applied Analysis 5, 435-444.

[21] Shaw M. D., Yakar C., (2000), "Stability criteria and slowly growing motions with initial time difference". International Journal of Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems, 6 (1), 50-66.

[22] Shaw M. D., Yakar C., (1999), "Generalized variation of parameters with initial time difference and a comparison result in terms of Lyapunov-like functions", International Journal of Nonlinear Differential Equations Theory-Methods and Applications, 5 (1-2), 86-108.

[23] Yakar C., Shaw M.D., (2005), "A comparison result and Lyapunov stability criteria with initial time difference", Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. A: Mathematical Analysis, 12 (6), 731-741.

[24] Yakar C., Shaw M. D., (2009), "Practical Stability in Terms of Two Measures with Initial Time Difference", Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 71, 781-785.

[25] Winggins S., (1990), "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", 1st Edition, Springer-Verlag.

# ÖZGEÇMİŞ

Burak YEŞİL, Adapazarı'nda doğmuş ve ilk, orta ve lise eğitimini Pendik 'teki çeşitli okullarda tamamlamıştır. Lisans eğitimini 1996-2000 yıllarında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde tamamlamıştır. 2003-2005 yılları arasında Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enst. Eğitim Yönetimi, Denetimi, Planlaması ve Ekonomisi alanında Yüksek Lisans eğitimini tamamlamıştır. Gebze Yüksek Teknoji Enstitüsünde Matematik Anabilim Dalında 2015 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlamıştır. 2000 yılından bu yana çeşitli eğitim kurumlarında Matematik Öğretmenliği yapmaktadır. Halen Pendik 80. Yıl Nuh Çimento Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmenliği yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.