T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI İÇİN BAZI METODLAR

ŞAFAK AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARI İÇİN BAZI METODLAR

ŞAFAK AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI

YRD. DOÇ. DR. AYŞE SÖNMEZ

GEBZE

2016

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

SOME METHODS FOR FIXED POINTS OF NONEXPANSIVE MAPS

ŞAFAK AYDIN

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR

ASSIST. PROF. DR. AYŞE SÖNMEZ

GEBZE

2016

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27/06/2016 tarih ve 2016/43 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 28/06/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Şafak AYDIN'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Yrd. Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ

ÜYE : Prof. Dr. Hüseyin ÇAKALLI

ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Seher TUTDERE

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
……./……./……… tarih ve ………/……... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde sabit nokta teoremlerine ilişkin temel bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm kuramsal hazırlık olarak sabit nokta kavramı ve genişlemeyen dönüşümler için sabit nokta teoremleri içerir. Üçüncü bölümde tek değerli genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktası veya noktaları bulunurken kullanılan iterasyon ve uzanım metotları çalışıldı.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta, Genişlemeyen Dönüşümler, İterasyon Metodu, Uzanım Metodu.

SUMMARY

In the first part of this work, we give basic information on the fixed-point theorem. The second section contains fixed point concept and fixed-point theorem for nonexpansive mappings as a theoretical preparation. In the third section it is studied the iteration method and continuation method to find fixed point or points of single-valued nonexpansive mappings is studied.

Key Words: Fixed Points, Nonexpansive Mappings, Iteration Methods, Continuation Methods.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ’e, bütün çalışmam boyunca yanımda olan ve göstermiş olduğu desteklerinden dolayı sevgili babam Mustafa AYDIN’a ve sevgili annem Gülizar AYDIN’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Kısaltmalar		**Açıklamalar**
$\delta(A)$	:	A kümesinin çapı
$A(K,\{x_n\})$	:	Asimptotik merkezi
$f: B \to C$	:	B’den C’ye tanımlı dönüşüm
$B(X,Y)$	:	B’den C’ye sınırlı lineer fonksiyoneller kümesi
$\{ x_n \}$	:	Bir x_n dizisi
∂B	:	B kümesinin sınırı
$\bar{C}$	:	C kümesinin kapanışı
$\propto (C)$	:	C kümesinin nonkompaktlık ölçümü
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar
$\rightarrow$	:	Güçlü yakınsama
H	:	Hilbert uzayı
$\langle x, y \rangle$	:	İç çarpım
$\mathbb{C}$	:	Karmaşık sayılar
co(C)	:	Konveks zarf
(X,d)	:	Metrik uzay
$\mathbb{R}^n$	:	n-boyutlu Öklidyen uzay
(X, ||.||)	:	Normlu uzay
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar
FixT	:	T dönüşümünün sabit noktalar kümesi
J	:	X’in normalleşmiş dual dönüşümü
X^*	:	X uzayının duali
X^{**}	:	X uzayının dual uzayının duali
$\rightharpoonup$	:	Zayıf yakınsama

1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemlerin çözümünün varlığını, tekliğini ve bir integral denkleminin çözümünün varlığını göstermek amacıyla kurulmuş olan Sabit Nokta Teorisi çalışmalarının tarihi 19. yüzyıl başlarına dayanmaktadır.

Günümüzde pek çok araştırmacı sabit nokta teorisi ile ilgili problemleri genişleterek değişik uygulama alanları bulmaya çalışmaktadır. Özellikle fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve oyun teorisi gibi alanlarda sabit nokta teknikleri uygulanmaktadır. Genel olarak yapılan çalışmalar tam metrik uzay, lineer normlu uzay ve Hilbert uzay üzerinde tanımlı dönüşümler için sabit nokta teorisi üzerinedir.

Bir fonksiyonun sabit noktalarının varlığı ve tekliği hakkında birçok teorem verilmiştir. Sabit noktanın varlığı ve tekliği, fonksiyona ve fonksiyonun tanımlı olduğu uzaya göre değişmektedir. Bu bölüme konu ile ilgili belli başlı teoremleri vererek devam edeceğiz.

1912'de Brouwer Sabit Nokta teoremi ile B, $\mathbb{R}^n$ de birim küreyi göstermek üzere $f: B \to B$ sürekli dönüşümünün sabit noktası olduğu kanıtlanmıştır [Brouwer, 1912]. Dikkat edilirse bu teorem çözümün varlığını garanti ederken, teklik için bilgi vermemektedir. Örneğin: $f: [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = x^2$ dönüşümü sürekli bir dönüşümdür, fakat 0 ve 1 gibi iki sabit noktası vardır.

Bu teorem sonsuz boyutlu uzaylarda geçerli değildir. H sonsuz boyutlu Hilbert uzayında B birim küre olmak üzere, $f: B \to B$ sürekli fonksiyonunun sabit bir noktası olmak zorunda değil. Bu sonucu 1941'de Kakutani vermiştir [Kakutani, 1941].

1930'da Schauder tarafından, sonsuz boyutlu Banach uzaylarında ilk sabit nokta teoremi verilmiştir. Schauder, X Banach uzayı ve bu uzaydan alınan kapalı ve kompakt bir B alt kümesi için, $f: B \to B$ sürekli fonksiyonunun sabit bir noktasının olduğunu kanıtlamıştır [Schauder, 1930]. Bu teorem, oyun teorisi ve diğer mühendislik ekonomi gibi alanlarda da kullanılmıştır. Bu teoremde kompaktlık çok güçlü bir koşuldur. Schauder, ayrıca X Banach uzayının kapalı sınırlı konveks bir B alt kümesi için, $f(B)$ kompakt olacak şekilde, $f: B \to B$ sürekli dönüşümünün sabit bir noktası olduğunu da kanıtlamıştır.

1935'de Tychonoff, X yerel konveks topolojik vektör uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kompakt ve konveks bir B alt kümesi için, $f: B \to B$ sürekli dönüşümünün sabit bir noktası olduğunu göstermiştir [Tychonoff, 1935]. Ayrıca Ky Fan tarafından Tychonoff teoreminin bir genelleştirmesi verilmiştir.

(X, d) metrik uzay olmak üzere, $f: X \to X$ dönüşümüne, her $x, y \in X$ için, $d\big(f(x), f(y)\big) \leq k\, d\,(x, y)$ şartı sağlanacak şekilde bir $k \in [0,1)$ sabiti varsa, daralma dönüşümü denir . Her daralma dönüşümü sürekli bir dönüşümüdür, ama her sürekli dönüşümün daralma dönüşümü olması gerekmemektedir [Banach, 1922]. Örneğin $f(x) = x$ sürekli bir dönüşüm, fakat daralma dönüşümü değildir.

1837'de Liouville tarafından tanıtılan daha sonra 1890'da Picard ve sonra Banach tarafından geliştirilen, Banach daralma prensibi olarak bilinen teoremle, X bir tam metrik uzay olmak üzere, $f: X \to X$ daralma dönüşümünün tek sabit noktası var olduğun yani $f(x) = x$ denkleminin tek çözümünün var olduğu gösterilmiştir.

(X, d) metrik uzay olmak üzere $f: X \to X$ dönüşümüne her $x, y \in X$ için $d\big(f(x), f(y)\big) \leq d\,(x, y)$ şartı sağlanıyorsa, genişlemeyen dönüşüm denir. X tam metrik uzay ise, genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktası olmak zorunda değildir. Örneğin, k sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, ℝ üzerinde tanımlı, $f(x) = x + k$ genişlemeyen dönüşümünün sabit bir noktası yoktur.

B, H Hilbert uzayının kapalı sınırlı konveks bir alt kümesi olmak üzere, $f: B \to B$ genişlemeyen dönüşümünün sabit bir noktası olduğunu 1965'de Browder , Gohde ve Kirk kanıtlamışlardır.

X Banach uzayı ve bu uzayın kapalı, konveks ve sınırlı bir B alt kümesi için, $f: B \to B$ genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. Her bir $r_i \in [0,1)$ ve keyfi bir $y \in B$ için, $f_{r_i}\, x = r_i\, x + (1 - r_i)y$ dönüşümlerini tanımlayalım. Burada, $f_{r_i}: B \to B$ dönüşümlerinin her biri, r_i ise Lipschitz sabiti ile bir daralma dönüşümü olur. Banach daralma prensibi gereği tüm bu f_{r_i} dönüşümlerinin $f_{r_i}\, x_{r_i} = x_{r_i}$ ve $x_{r_i} = f_{r_i}\, x_{r_i} + (1 - r)y$ olacak biçimde tek bir sabit noktası vardır. Burada, $\{x_{r_i}\}$ dizisinin f nin sabit noktasına yakınsayıp yakınsamadığı sorusunun cevabı genişlemeyen dönüşümlerde genel olarak olumlu değildir. Browder, bu sorunun cevabını hangi durumda olumlu olabileceğine dair aşağıdaki teoremi vermiştir [Browder, 1967a].

Söz konusu teoreme göre, H Hilbert uzayının kapalı sınırlı konveks bir C alt kümesi olmak üzere, $f: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşümü ile $f_r\, x = rfx + (1 - r)y$ ($y \in C$ ve $r \in (0,1)$) olacak biçimde tanımlanan f_r dönüşümleri ele alınsın. $x_r = f_r\, x_r$ alalım. Böylece $\{x_{r_i}\}$ dizisi, f nin y ye yakın bir sabit noktasına yakınsar.

$f: B \to \mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümü bir nonself dönüşüm olmak üzere, $f(\partial B) \subseteq$ B şartı sağlanırsa, bu dönüşümün sabit bir noktası vardır [Rothe, 1937].

1955'te Krasnoselskii tarafından, X Banach uzayı ve bu uzayın kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesi olmak üzere, $f: C \to C$, $\overline{f(C)}$ kompakt olacak şekilde genişlemeyen bir dönüşüm verilsin. $f_{\frac{1}{2}} x = \frac{1}{2} \; fx + \frac{1}{2} \; x$ olacak biçimde verilen $(f_{\frac{1}{2}})^n \, x$ dizisi, f nin sabit noktasına yakınsar [Krasnoselskii, 1955]. Varyasyonel eşitsizlik problemlerinde çözüm bulmak için iterasyon dizileri kullanılmaktadır.

X normlu uzayının, boştan farklı bir C alt kümesi ve $x \in X$ elemanı verilsin. $d(x, C) = \inf_{y \in C} ||x - y||$ olarak tanımlanmak üzere, $y_0 \in C$ için $\left||x - y_0|\right| = d(x, C)$ olursa, $y_0 \in C$ elemanına, x e en iyi yaklaşım denir. x ten C kümesine tüm en iyi yaklaşımlar kümesini $P_C(x) = \left\{y \in C: \left||x - y|\right| = d(x, C)\ \right\}$ ile gösterelim. X kümesinden 2^C kümesine tanımlı bu P_C dönüşümüne C üzerine metrik projeksiyon denir. Ayrıca yaklaşım dönüşümü ya da en iyi yaklaşım operatörü olarakta bilinir.

H Hilbert uzayının, boştan farklı kapalı konveks bir C alt kümesini alalım $f: C \to H$ sürekli bir dönüşüm, 0 < r < 1, I birim dönüşüm ve $I - r.f$ daralma dönüşümü olsun. Böylece,

$$u_{n+1} = P_{\circ}\,(I - rf)\, u_n \ , \qquad u_0 \in C \tag{1.1}$$

iterasyon dizisi, $\langle .,. \rangle$ iç çarpım işlemi olmak üzere, her $y \in C$ için $< fu, y - u > \geq 0$ olacak biçimdeki u ya yakınsar [Singh et al., 1997].

H Hilbert uzayının, kapalı ve konveks bir C alt kümesini, $f: C \to H$ sürekli dönüşümünü ele alalım. $I - f$ genişlemeyen dönüşüm ve $(I - f)(C)$ sınırlı olsun.

$$u_{n+1} = P_{\circ}\ \ (I - f)\, u_n \ \ , \ \ n = 1,2, \dots \ , \qquad u_1 \in C \tag{1.2}$$

iterasyon dizisi $\lim_{n \to \infty} d(u_n, f) = 0$ şartıyla her $x \in C$ için, $< fu, x - u > \geq 0$ eşitsizliğinin çözümü olan u ya yakınsar. Burada F, $P_{\circ}\,(I - f): C \to C$ dönüşümlerinin sabit noktalar kümesi olur.

H Hilbert uzayında, C_1 ve C_2 iki kapalı konveks küme olsun. $g = P_1\, P_2$ yaklaşım dönüşümlerinin çarpımı olmak üzere, bir $\{x_n\}$ dizisinin, g nin bir sabit noktasına yakınsaması , C_1 ve C_2 kümelerinden biri kompakt olduğunda ya da sonlu boyutlu ve kümeler arası mesafe erişilebilir olduğunda sağlanır.

X Metrik uzayının C sınırlı alt kümesi olsun. $\propto (C)$ ile nonkompaktlığı ölçümünü tanımlayalım.

$\propto (C) = Inf\{E > 0 : C;$ çapı E'den küçük ya da eşit alt kümelerin sonlu örtülüşüne sahip olsun.}

X metrik uzayının sınırlı bir A alt kümesi için, $\propto (A) \leq \delta(A)$ olur. Burada $\delta(A)$ ile A'nın çapı gösterilmektedir. Nonkompaktlık ölçümünün bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

$$A \subseteq B \Rightarrow \propto (A) \leq \propto (B) \tag{1.3}$$

$$\propto (\overline{A}) = \propto (A) \tag{1.4}$$

$$\propto (A \cup B) = \max\{\propto (A), \propto (B)\} \tag{1.5}$$

$$\propto (A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ ön kompakt} \tag{1.6}$$

$f: X \to X$ sürekli dönüşüm , $\propto (A) > 0$ biçimde keyfi A sınırlı alt kümesi için $\propto \left(f(A)\right) < \propto (A)$ oluyorsa bu dönüşüme yoğunlaşmış dönüşüm denir.

$f: C \to C$ yoğunlaşmış bir dönüşüm olsun. X Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesi alınsın. Böylece f nin C de en az bir sabit noktası vardır.

B, $\mathbb{R}^n$ de birim küre olmak üzere, $F: B \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyon olsun. Böylece, $y \in B$ için $< fy, x - y > \geq 0$ $(\forall x \in B)$ sağlandığı 1966 da Hartmann ve Stampacchia tarafından kanıtlanmıştır [Hartman and Stampascchia, 1966].

Burada P, B üzerine metrik iz düşüm olmak üzere, yukarıdaki eşitsizliğin çözümü varsa, $P(I - f)$ dönüşümünün sabit bir noktası vardır.

X lineer uzayını ve bu uzayın, boştan farklı, kapalı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $f: C \to X$ sürekli dönüşüm olsun. Her $x \in C$ için, $|fy - y| = Inf|x - fy|$ olacak biçimde bir $y \in C$ olduğu, 1969'da Ky Fan tarafından kanıtlamıştır [Fan Ky, 1961].

$f: B \to X$ sürekli dönüşümü, B, r yarıçaplı kapalı küre olmak üzere aşağıdaki koşullardan birini sağlarsa sabit noktaya sahiptir:

i) $f(\partial B) \subseteq B$ (Rothe Şartı)

ii) $|fx - x|^2 \geq |fx|^2 - |x|^2$ (Altman Şartı)

iii) $fx = kx \quad x \in \partial B \;\; k \leq 1$ (Schauder Şartı)

iv) Eğer $f: B \to X$ ve $fy \neq y$ olursa $[y, fy]$ doğru parçası $B'nin$ en az iki elemanına sahiptir.(Fan Şartı)

1941'de Kakutani, Brouwer sabit nokta teoremini çok değerli dönüşümlere genellemiştir.

Biz de bu tezde, genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının bulunması için kullanılan iterasyon ve salınım metotlarının literatürdeki gelişimine göre bir derlemesini yaptık.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Sunulan bu tezde genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını bulma yöntemlerinden iterasyon ve uzanım metotları incelenmiştir. Tanım uzayı üzerinde hangi koşulların zayıflatılması durumunda sabit noktanın elde edilebileceği sorusu üzerine yoğunlaşmak ana problemimizi belirlemiştir.

İlk bölümde tarihsel süreç ve bu alandaki temel çalışmalar incelenmiştir. İkinci bölümde, sabit nokta probleminde karşılaşılan temel tanım, kavramlar ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktasını bulmada kullanılan iterasyon ve uzanım metodu incelenmiştir.

2. KURAMSAL HAZIRLIKLAR

Bu bölümde, Sabit Nokta Teoremlerinde karşımıza çıkacak olan bazı temel tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

2.1. Temel Kavram ve Teoremler

Tanım 2.1: X boştan farklı bir küme ve her x,y,z $\in X$ için $d\colon X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
ii) $d(x,y) = d(y,x)$
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X,d) ikilisine de metrik uzay denir.

(X,d) metrik uzayda bir $\{x_n\}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda,

i) $\forall\, \varepsilon > 0\; için\;\; n > N$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde N=N(ε) doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine x noktasına yakınsar denir ve $x_n \to x$ şeklinde gösterilir.
ii) $\forall\, \varepsilon > 0\; için\, m,\;\; n > N$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak biçimde N=N(ε) doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Herhangi bir metrik uzayda, her yakınsak dizi bir Cauchy dizisi iken tersi her zaman doğru değildir. (X,d) metrik uzayından alınan her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bu uzayda yakınsak ise, bu metrik uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.2: (X, d_1) ve (Y, d_2) birer metrik uzay olsun. $f\colon X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ için, $d_1(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ oluyorsa, ya da denk bir ifadeyle $f(D(x_0, \delta) \subseteq D(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa, f dönüşümü $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir ve eğer bu dönüşüm uzayın *her noktasında sürekli ise f, X uzayında süreklidir denir. Aslında bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması $x_n \longrightarrow x_0$ olurken $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ olması demektir [Bayraktar, 2000].*

Ayrıca her x ve y $\in X$ için, $d_1(x,y) < \delta$ olduğunda $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ olacak şekilde verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa, f dönüşümüne düzgün süreklidir denir.

X metrik uzayından başka bir Y metrik uzayına tanımlanan her Lipschitzian dönüşüm düzgün süreklidir. (X, d_1) ve (Y, d_2) birer metrik uzay olmak üzere, $T: X \to Y$ dönüşümüne her x ,y $\in X$ ve L> 0 için,

$$d_2(Tx, Ty) \leq Ld_1(x,y) \tag{2.1}$$

gerçekleşiyorsa, Lipschitzian dönüşüm denir. Burada eğer $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ olarak seçilirse, dönüşümün düzgün sürekli olduğu görülür.

$T: X \to Y,\ Tx = \frac{1}{x}$ dönüşümünün $X = (0,1]$, $Y = \mathbb{R}$ alırsak, sürekli dönüşüm olduğu, ama düzgün sürekli olmadığı görülür.

X boş olmayan bir küme ve F cisim olsun. $+: X \times X \to X$ ve $.: F \times X \to X$ işlemleri tanımlansın. X, + işlemine göre aşağıdaki şartları sağlarsa değişmeli bir gruptur:

i) Her x, y $\in X$ için x+y $\in$ X dir,
ii) Her x, y, z $\in X$ için x+ (y+z)=(x+y)+z dir,
iii)Her x $\in X$ için x +θ=x+θ =x olacak şekilde θ $\in X$ vardır,
iv)Her x $\in X$ için x + (−x)= (−x)+x=θ olacak şekilde −x$\in X$ vardır.
v) Her x, y $\in X$ için x+y=y+x dir.

Her x, y $\in X$ ve α, β ∈ F olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

i) αx$\in X$ dir,
ii) α(x+y)=ax+ay dir,

iii) (α+β)x=αx+βx dir,

iv) (αβ)x= α(βx) dir,

v) 1x = x dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

F = ℝ ise X e reel lineer uzay, F = ℂ ise X e kompleks lineer uzay adı verilir.

X lineer uzayının bir C alt kümesi için,

$$\forall\, x, y \in C \text{ ve } \lambda \in [0,1] \text{ için } (1-\lambda)x+\lambda y \in C \tag{2.2}$$

gerçekleşiyorsa C kümesine konveks küme denir. X lineer uzayının konveks olmak zorunda olmayan bir C alt kümesi için ise C yi içeren X in bütün konveks alt kümelerinin arakesitine C'nin konveks zarfı denir.

Tanım 2.3: X, K cismi üzerinde bir lineer uzay ve $f: X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu her x, y∈ X ve her $\lambda \in K$ için,

i) $||x|| = 0 \iff x = 0$

ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

özelliklerini sağlıyorsa, $||.||$ *fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve (X,* $||.||$*) ikilisine de normlu uzay denir.*

Aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $\rho: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yarı norm denir:

i) $\rho(x) \geq 0$

ii) $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

iii)Her $x, y \in X$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için $\rho(ax) = |a|\rho(x)$

$(X,\|.\|)$ normlu uzay olmak üzere, X üzerinde norm yardımıyla, $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = ||\mathrm{x}-\mathrm{y}||$ metriği tanımlansın. Normun belirlediği metriğe göre uzayımız tam ise, bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.4: Şimdi güçlü ve zayıf yakınsama tanımlarından bahsedelim:

i) $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve bu uzayda bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0\ ise$ $\{x_n\}$ dizisi x$\in X$ noktasına güçlü yakınsar denir ve $x_n \longrightarrow x$ ile gösterilir.

ii) $(X,\|.\|)$ bir normlu uzay ve bu uzayda bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Her $f\in X^*$ için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ olacak biçimde bir $x\in X$ varsa $\{x_n\}$ dizisi $x\in X$ noktasına zayıf yakınsar denir ve $x_n \rightharpoonup x$ ile gösterilir.

X Banach uzayı olmak üzere, bu uzaydan alınan bir $\{x_n\}$ dizisi, $x\in X$ noktasına zayıf yakınsasın. Bir $\{\alpha_n\}$ dizisini $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ olacak biçimde seçelim. O zaman $\{\alpha_n x_n\}$ dizisi, αx e zayıf yakınsar.

Tanım 2.5: X boştan farklı bir küme ve τ, X' in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

i) $\emptyset$ *,X bu aileye ait*

ii) τ *keyfi birleşim altında kapalı*

iii)τ *sonlu kesişim altında kapalı*

oluyorsa τ' ya X üzerinde bir topoloji denir.

X^* dual uzayından alınan her bir f fonksiyoneli ve $x\in X$ için tanımlanan $\rho_f(x) = |\langle x, f(x)\rangle|$ ifadesi, X üzerinde bir yarı norm belirtir. Buna göre, $\{\rho_f\}_{f\in X^*}$ yarı normlar ailesi X üzerinde bir zayıf topoloji oluşturur. X Banach uzayının bir C alt kümesine zayıf topolojiye göre kapalıysa, zayıf kapalıdır denir. $\{x_n\}$ dizisine, X normlu uzayında, $\mathrm{f}\in X^*$ için $\{f(x_n)\}$ dizisi bir Cauchy dizisi olursa zayıf Cauchy dizisi ve bu zayıf Cauchy dizisi X normlu uzayının bir elemanına zayıf yakınsarsa, X normlu uzayına zayıf tam uzay denir.

X ve Y Banach uzaylarında $T: X \to Y$ dönüşümünü alalım. Bu durumda aşağıdaki tanımlar verilmektedir:

i) C, X uzayında sınırlı iken T(C) de sınırlı oluyorsa T dönüşümü sınırlı dönüşüm denir.
ii) X uzayında her noktanın T(U) sınırlı olacak biçimde sınırlı bir U komşuluğu varsa T dönüşümü yerel sınırlı dönüşüm denir.
iii) X uzayında $x_n \rightharpoonup x$ iken Y uzayında da $Tx_n \rightharpoonup Tx$ oluyorsa T dönüşümüne zayıf sürekli dönüşüm denir.
iv) X uzayında $x_n \longrightarrow x$ iken Y uzayında da $Tx_n \rightharpoonup Tx$ oluyorsa T dönüşümüne yarı sürekli dönüşüm denir.
v) X uzayında $x_n \longrightarrow x$ ve Y uzayında da $Tx_n \longrightarrow y$ olurken $T(x) = y$ oluyorsa, T dönüşümüne kapalı dönüşüm denir. Eğer X uzayında $x_n \rightharpoonup x$ ve Y uzayında da $Tx_n \rightharpoonup y$ olurken $T(x) = y$ oluyorsa, T dönüşümüne zayıf kapalı dönüşüm denir. Eğer X uzayında $x_n \rightharpoonup x$ ve Y uzayında da $Tx_n \to y$ olurken $T(x) = y$ oluyorsa T dönüşümüne yarı kapalı dönüşüm denir.
vi) X içindeki her $\{x_n\}$ dizisi için, $\{Tx_n\}$ dizisinin Y içinde yakınsak bir alt dizisi varsa T dönüşümüne kompakt dönüşüm denir.

Tanım 2.6: $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde tanımlı* X *lineer uzayı göz önüne alınsın. Her* $x, y, z \in X$ *ve* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *için,*$\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *ve* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
iii)$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

özelliklerini sağlıyorsa, $(X, \langle .,. \rangle)$ *ikilisine iç çarpım uzayı ya da ön Hilbert uzayı da denir.*

Tanım 2.7: K cismi üzerinde X ve Y lineer uzayları ve bu uzaylar arası $T: X \to Y$ operatörü her x,y∈ X ve $\alpha \in K$ için,

i) T(x+y)=T(x)+T(y)
ii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

şartlarını sağlıyorsa, T operatörüne lineer operatör denir. Özel olarak Y $=\mathbb{R}$ ise, lineer fonksiyonel denir.

X uzayında $x_n \to x$ iken Y uzayında $Tx_n \to Tx$ gerçekleşiyorsa, T operatörüne sürekli operatör denir.

Her x $\in X$ için $\|Tx\| \le M\|x\|$ olacak biçimde sabit M> 0 varsa, T operatörüne sınırlı operatör denir.

Teorem 2.1: Normlu uzayda, T lineer operatörünün sürekli olması için, sınırlı olması gerek ve yeterdir.

Tanım 2.8: B(X,Y) ile $T: X \to Y$ tüm lineer sınırlı operatörler ailesini gösterelim. B(X, Y) bir lineer uzaydır ve bu uzayda tanımlı norm,

$$\|T\|_B = inf\{M: \|Tx\| \le M\|x\|, x \in X\} \tag{2.3}$$

$$=sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}, x \neq 0, x \in X\right\} \tag{2.4}$$

$$=\sup\{\|Tx\|, x \in X, \|x\| \le 1\} \tag{2.5}$$

$$=\sup\{\|Tx\|, x \in X, \|x\| = 1\} \tag{2.6}$$

biçimindedir.

Teorem 2.2: B(X, Y) normlu lineer uzayı, Y bir Banach uzayı olursa, bir Banach uzayı belirtir.

Teorem 2.3: X bir Banach uzayı ve Y bir normlu lineer uzay, $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq B(X,Y)$ bir lineer ve sınırlı operatörler ailesi olsun. Her $x \in X$ için, $\{T_i x\}$, Y içinde sınırlı bir *küme olsun. Böylece* $\{\|T_i\|_B\}$ *dizisi,* $\mathbb{R}^+$*içinde sınırlı bir küme olur. Yani* T_i *operatörleri düzgün sınırlıdır.*

Tanım 2.9: Bir X *normlu uzayı üzerinde tanımlı tüm lineer sınırlı fonksiyoneller uzayına bu uzayın dual uzayı denir ve* X^* *ile gösterilir.*

$X^* = B(X, \mathbb{R})$ uzayında tanımlı norm, S_X birim küre olmak üzere, $\|f\|_* = sup\{|f(x)|; x \in S_X\}$ dır.

Sonuç olarak diyebiliriz ki, $(X^*, \|.\|_*)$ uzayı her zaman bir Banach uzayıdır.

Bir X lineer uzayında $x \in X$ olmak üzere, j(x)=$\|f\|_*\|x\|$ ve $\|j\|_* = \|x\|$ ya da j(x)=$\|x\|$ ve $\|j\|_* = 1$ olacak şekilde j$\in X^*$ vardır.

Herhangi bir metrik uzayda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık eşdeğer kavramlardır. Metrik uzay için kompaktlığı aşağıdaki şekilde vereceğiz.

Tanım 2.10: Bir (X*,d) metrik uzayının bir* C *alt kümesinde yakınsak her dizinin yine bu küme içinde yakınsak bir alt dizisi varsa,* C *kümesine kompakt küme denir. Kapanışı kompakt olan bir kümeye ise nispeten kompakt küme denir.*

Tanım 2.11: C*, (X,d) metrik uzayının bir alt kümesi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için* $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ *olacak biçimde* $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ *sonlu elemanları varsa,* C *kümesine tamamen sınırlı küme ve* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *kümesine de sonlu* $\varepsilon - net$ *denir. Tamamen sınırlı kümelerin her alt kümeleri de tamamen sınırlıdır. Ayrıca tamamen sınırlı bir küme sınırlı bir kümedir.*

Kompakt bir metrik uzayın, bir alt kümesinin de kompakt olması için kapalı bir küme olması gerek ve yeterdir.

Ayrıca bir metrik uzayın kompakt olması, bu uzaydan alınan her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olması ve bu uzayın tam ve tamamen sınırlı olması kavramları eşdeğerdir.

Önerme 2.1: X tam metrik uzayının bir C alt kümesinin kompakt olması için C kümesinin kapalı ve tamamen sınırlı olması gerek ve yeterdir. $\bar{C}$ kümesinin de kompakt olması için C'nin tamamen sınırlı olması gerek ve yeterdir.

Eğer $\bar{C}$ kümesi kompakt ise, C kümesine bağıl kompakt küme denir. Buradan da, tam metrik uzayın kapalı bir alt kümesinin kompakt olması için bağıl kompakt küme olması gerek ve yeterdir.

Mazur teoremine göre, bir Banach uzayının kompakt bir C alt kümesinin konveks zarfının kapanışı da kompakttır.

Heine-Borel teoremine göre, $\mathbb{R}$ nin bir C alt kümesinin kompakt olması için bu kümenin kapalı ve sınırlı olması gerek ve yeterdir.

Dikkat edilirse (0,1) metrik uzayı alışılmış metrikle tamamen sınırlıdır, kompakt değildir. Ayrıca $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam uzaydır, ama tamamen sınırlı olmadığından kompakt değildir.

Normlu uzaylarda da kompaktlık tanımı benzerdir. Normlu uzaydan alınmış her sonsuz dizinin, yakınsak bir alt dizisi mevcutsa, normlu uzaya kompakt denir.

X normlu uzayının her kompakt alt kümesi kapalıdır, ama tersi doğru değildir. $\mathbb{R}^n$ kapalıdır ama kompakt değildir. Örneğin: $\mathbb{R}$ de $(-\infty, 0]$ kümesi kapalıdır, ancak kompakt değildir. Ayrıca bu normlu uzayın her kompakt alt kümesi tam ve sınırlıdır. Dikkat edersek, bir normlu uzayın kapalı ve sınırlı bir alt kümesinin kompakt olması zorunluluğu yoktur. Eğer normlu uzay sonlu boyutlu olursa, her kapalı ve sınırlı alt küme kompakt olur.

Tanım 2.12: (X,$\|.\|$) normlu uzayı ve (X^*, $\|.\|_*$) Banach uzayı olsunlar. $j\in X^*$ alalım. X^* dual uzayda $f_x(j) = \langle x, j\rangle$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu f_x fonksiyonu, lineer ve sınırlı olacağından X^*üzerinde bir sınırlı lineer fonksiyonel olur. Bu durumda X^* üzerindeki tüm sınırlı lineer fonksiyoneller uzayını X^{**} ile gösterelim. Bu uzaya X in ikinci dual uzayı denir. $\|.\|_{**}$ ile de $\|f_x\|_{**}$=$\|x\|$ normunu tanımlayalım. $\varphi: X \to X^{**}$, $\varphi(x) = f_x$ olacak şekilde, lineer ve izometri olan doğal genişleme fonksiyonu tanımlayalım. Eğer bu fonksiyon örten olursa, X uzayına yansımalı uzay denir.

Herhangi bir normlu uzayda, güçlü yakınsaklık ve zayıf yakınsaklık arasındaki ilişki aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

Önerme 2.2: (X,$\|.\|$) normlu uzay ve bu uzayda $\{x_n\}$ dizisi alalım. Eğer $\{x_n\}$ dizisi, $x \in X$ noktasına güçlü yakınsarsa, $\{x_n\}$ dizisi, $x \in X$ noktasına zayıf yakınsar.

Teorem 2.4: X sonlu boyutlu normlu uzay ise, güçlü yakınsama zayıf yakınsamaya denktir.

Önerme 2.3: X Banach uzayı ve C kümesi bu uzayın boştan farklı bir alt kümesi olsun. C kümesinde, $\{x_n\}$ dizisi, $x \in c$ noktasına zayıf yakınsasın. O zaman $x \in \overline{Co(C)}$ olur.

Teorem 2.5: X bir Banach uzayı ve bu uzayda $\{x_n\}$ dizisi alalım.

i) $x_n \rightharpoonup x$ *olması $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olmasını gerektirir ve* $\|x\| \leq lim_{n\to\infty} inf\|x_n\|$ *olur.*
ii) *X uzayında $x_n \rightharpoonup x$ olması ve X^* dual uzayında $f_n \longrightarrow f$ güçlü yakınsaması* $\mathbb{R}'de$ $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$ *olması demektir.*

Önerme 2.4: X normlu uzayının konveks C alt kümesinin zayıf kapalı olması için C kümesinin kapalı olması gerek ve yeterdir.

Önerme 2.5: X bir Banach uzayı ve C zayıf kompakt bir alt kümesi olsun. Buradan C kümesi sınırlıdır ve $\overline{Co}(C)$ zayıf kompakt olur.

Banach uzayının kapalı konveks bir C alt kümesi için, C'nin zayıf kompakt olması ile C den alınan her bir $\{x_n\}$ dizisinin, C içinde zayıf yakınsak bir alt diziye sahip olması eşdeğerdir. Zayıf kompakt bir kümenin kapalı ve konveks bir alt kümesi zaten zayıf kompakt olur. Ayrıca Kakutani teoreminden, X Banach uzayının yansımalı olması için birim kapalı kürenin zayıf kompakt olması gerek ve yeterdir. Hatta Kakutani teoremini genelleştirirsek, X Banach uzayının yansımalı olması için, her kapalı, konveks ve sınırlı alt kümesinin zayıf kompakt olması gerek ve yeterdir.

Tanım 2.13: X bir Banach uzayı ve S_X, bu uzayda birim küre olmak üzere, $x \neq y \in S_X$ alalım. Her $\lambda \in (0,1)$ için, $\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq 1$ olursa X uzayına kesin konveks denir.

X Banach uzayının kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her bir $f \in X^*$ için, $\|x\| = 1$ olan ve $\langle x, f\rangle = f(x) = \|f\|_*$ eşitliğini sağlayan en çok bir $x \in X$ noktası vardır.

Örnek olarak $X = \mathbb{R}^n$ ve norm olarak $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2)^{\frac{1}{2}}$ normunu tanımlayalım. Böylece X uzayı kesin konveks olur.

X kesin konveks Banach uzayının boştan farklı, konveks bir C alt kümesini ele alalım. $\|x\| = inf\{\|z\|: z \in C\}$ olacak biçimde en çok bir $x \in C$ noktası vardır. X yansımalı, kesin konveks bir X Banach uzayı ve bu uzayda boştan farklı, kapalı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $\|x\| = inf\{\|z\|: z \in C\}$ olacak biçimde tek bir $x \in C$ noktası vardır ve ayrıca bir $x \in X$ noktasına karşılık, $\|x - z_x\| = d(x, C)$ olacak biçimde tek bir $z_x \in C$ noktası vardır.

Tanım 2.14: X Banach uzayında, $0 < \varepsilon \leq 1$, $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ *ve* $\|x - y\| \geq \varepsilon$ *için* $\left\|\frac{x-y}{2}\right\| \geq 1 - \delta$ *olacak biçimde öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ varsa, X uzayına düzgün konveks Banach uzayı denir. Her Hilbert uzayı bir düzgün konveks uzay olurken, ℓ_1 ve ℓ_∞ uzayları düzgün konveks uzay olmazlar.*

Her düzgün konveks Banach Uzayı kesin konvekstir ve yansımalıdır. Tersinin doğru olmadığını görmek için, bir $X = c_0$ uzayını ve norm olarak $\beta > 0$ için,

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{x_i}{i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.7}$$

normunu tanımlarsak, $x \in c_0$ için $(c_0\ , \|.\|_\beta)$ uzayı kesin konveks olur ama düzgün konveks değildir. Ayrıca sonlu boyutlu her Banach uzayı yansımalıdır, ama düzgün konveks olmak zorunda değildir. $X = \mathbb{R}^n$ ve norm olarak $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ olarak tanımlarsak düzgün konveks olmaz.

Teorem 2.5: X Banach Uzayında her $\{x_n\}$ dizisi için, $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ olduğunda, $x_n \longrightarrow x$ gerçekleşirse, buna Kadec-Klee özelliği denir. Her düzgün konveks Banach uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

Tanım 2.15: X bir Banach uzayı ve $\delta_x: [0,2] \to [0,1]$,

$$\delta_X(t) = inf\left\{1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\| : x, y\epsilon X, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq t\right\} \quad (2.8)$$

fonksiyonuna konvekslik modülü denir. X Banach uzayının kesin konveks olması için $\delta_X(2) = 1$ *olması gerek ve yeterdir. Ayrıca her* $t \in (0,2]$ *için,* $\delta_X(t) > 0$ *olması da X Banach uzayının düzgün konveks olması için gerek ve yeterdir.*

Tanım 2.16: X bir Banach uzayı ve $\varepsilon > 0, x \in S_X$ *için* $\|x-y\| > \varepsilon$ *olduğunda* $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta$ *olacak biçimde* $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$ *varsa, X uzayına yerel düzgün konveks uzay denir. Her* $x \in S_X$ *ve* $\varepsilon \in (0,2]$ *için,*

$$\delta_X(x,\varepsilon) = inf\left\{1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\| : y\epsilon S_X, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\} \quad (2.9)$$

sayısına da X Banach uzayının yerel konvekslik modülü denir. Her yerel, düzgün konveks Banach uzayı Kadec Klee özelliğine sahiptir.

Tanım 2.17: X lineer uzay ve $f: X \to (-\infty, \infty]$,

i) Her $x, y \,\epsilon\, X$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *için* $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ *oluyorsa* f *ye konveks fonksiyon denir.*

ii) $\lambda \in (0,1)$ *ve* $x \neq y\epsilon X, f(x) < \infty, f(y) < \infty$ *olmak üzere*

iii)$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ *oluyorsa* f *ye kesin konveks fonksiyon denir.*

Tanım 2.18: X bir Banach uzayı her bir $x \in S_X$ *için,* $\langle x, j_x\rangle = \|x\|$ *ve* $\|j_x\| = 1$ *olacak biçimde tek* $j_x \in X^*$ *fonksiyoneli varsa, X uzayına pürüzsüz denir.* ℓ_p, L_p

$(1 < p < \infty)$ *uzayları pürüzsüz Banach uzayları olur. Ama* $\ell_\infty, L_\infty, \ell_1, L_1, c_0$ *uzayları pürüzsüz olmazlar.*

X bir normlu uzay ve $x_0 \in S_X$ noktasında her $y \in S_X$ için,

$$\frac{d}{dt}\|x_0 + ty\|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t} \tag{2.10}$$

limiti varsa X uzayının normu $x_0 \in S_X$ noktasında Gateaux diferansiyellenebilir denir. Eğer X uzayının normu, her bir $x_0 \in S_X$ noktasında Gateaux diferansiyellenebilir ise, X uzayının normuna Gateaux diferansiyellenebilirdir denir. Her bir $x, y \in S_X$ için, bu limit düzgünce yaklaşırsa X uzayının normuna düzgün Gateaux diferansiyellenebilir denir. X Banach uzayında norm olarak Gateaux differansiyellebilir (0 hariç) norm alınması pürüzsüzlük için gerek ve yeterdir.

X bir Banach uzay ve $x \in S_X$ noktasında her $y \in S_X$ için,

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.11}$$

limiti varsa, X uzayının normu $x \in S_X$ noktasında Frechet diferansiyellenebilir denir. Eğer bu limit her bir $x, y \in S_X$ için düzgünce yaklaşırsa, X Banach Uzayının normu düzgün Frechet diferansiyellenebilir denir.

X Banach uzayı için, X^* kesin konveks olursa, X uzayı pürüzsüz olur. X^* pürüzsüz olursa, X kesin konveks olur. Dikkat edilirse X yansımalı Banach uzayı alınırsa bu ifadeler gerek ve yeter koşul haline dönerler.

Tanım 2.18: X bir Banach uzayı ve $\rho_x: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$,

$$\rho_X(t) = sup\left\{\frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} : \|x\| = 1, \|y\| = t\right\} \tag{2.12}$$

$$\rho_X(t) = sup\left\{\frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} : \|x\| = \|y\| = 1\right\} \tag{2.13}$$

fonksiyonuna, X uzayının pürüzsüzlük modülü denir. Burada, ρ_X artan sürekli konveks bir fonksiyon olur.

Teorem 2.6: X bir Banach uzayı ve $\rho_0(x) = lim_{t\to 0}\frac{\rho_x(t)}{t}$ ifadesi pürüzsüzlük karakteri ve $\epsilon_0(X) = sup\{\varepsilon \in [0,2]: \delta_X(\varepsilon) = 0\}$ ifadesi konvekslik karakteri olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\rho_0(x) = \rho'_X(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\rho_x(t)}{t} = \frac{\epsilon_0(X^*)}{2} \tag{2.14}$$

Tanım 2.19: X bir Banach uzayı ve $\rho'_X(0) = lim_{t\to 0}\frac{\rho_x(t)}{t} = 0$ oluyorsa, X uzayına düzgün pürüzsüz uzay denir. Her düzgün pürüzsüz Banach uzayı pürüzsüzdür. Ayrıca X Banach uzayında X'in düzgün pürüzsüz olması için X^* dual uzayının düzgün konveks olması gerek ve yeterdir. X'in düzgün konveks olması için de X^* dual uzayının düzgün pürüzsüz olması gerek ve yeterdir. Her düzgün pürüzsüz Banach uzayı yansımalıdır.

X Banach uzayının düzgün Frechet differansiyellenebilir norma sahip olması ile X^* düzgün konveks olması eşdeğer ifadelerdir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.20: X boştan farklı bir küme üzerinde tanımlı herhangi bir $T: X \longrightarrow X$ dönüşümü için, Tx=x olacak biçimde $x \in X$ noktası varsa, bu noktaya T dönüşümünün sabit noktası denir.

Örnek 2.1: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, f(x) = x^3$ dönüşümünün sabit noktaları -1, 1 ve 0 noktalarıdır.

Örnek 2.2: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, f(x) = x + 2$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.3: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\, f(x) = ln(1 + e^x)$ dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Örnek 2.4: Düzlemin döndürülmesi tek bir sabit noktaya sahiptir. O nokta da dönme merkezidir.

Örnek 2.5: $X \neq \emptyset$ *ve* $I: X \longrightarrow X$ *birim dönüşümü için* X *kümesinin her bir noktası sabit noktadır.*

Örnek 2.6: $A = [0,2]$, $B = [3,4]$ *kümeleri için herhangi bir* $f: A \longrightarrow B$ *dönüşümünün sabit noktası yoktur.*

Tanım 2.21: (X,d) *bir metrik uzay ve* $f: X \longrightarrow X$ *herhangi bir dönüşüm olsun.* $\alpha \geq 0$ *sabiti,*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d(x,y) \ \ (\forall\, x, y \in X) \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa, bu f *dönüşümüne Lipschitzian dönüşüm denir. (2.15) eşitsizliği sağlayan en küçük* α *sabitine de Lipschitzian sabiti denir ve* α *ile gösterilir.*

Tanım 2.22: (2.15) eşitsizliğinde, f *dönüşümüne* $\alpha < 1$ *için daralma dönüşümü,* $\alpha = 1$ *için ise genişlemeyen dönüşüm denir.*

Tanım 2.23: (2.15) eşitsizliği,

$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \tag{2.16}$$

biçiminde oluyorsa, f *dönüşümüne kesin daraltan dönüşüm denir.*

Tanım 2.24: A, X *topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer* $r: X \longrightarrow A$ *dönüşümü sürekli ve her* $a \in A$ *için* $r(a) = a$ *oluyorsa,* A *kümesine* X *topolojik uzayının bir içeri çekeni denir ve r dönüşümüne de içeri çeken (büzülme)* denir.

Örnek 2.7: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x + e$ *ve* $d(x,y) = |x - y|$ *metriği tanımlansın.* $d\big(f(x), f(y)\big) = |x + e - y - e| = |x - y| = d(x,y)$ *olduğundan* her bir *x* ve *y* *reel sayıları için (2.1) eşitsizliği sağlanmış olur. Dolayısıyla f dönüşümü genişlemeyen dönüşümdür.*

Örnek 2.8: $X = (0,1]$ *ve* $f: X \longrightarrow X$ *dönüşümü,* $f(x) = \frac{x}{3}$ *şeklinde tanımlansın.* f *dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.*

Tanım 2.25: Herhangi bir X *kümesi üzerinde* $f: X \longrightarrow X$ *dönüşümü tanımlansın. Keyfi bir* $x \in X$ *için,*

$$F^0(x) = x, F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \tag{2.17}$$

olacak biçimde $F^n(x)$ *tanımlayalım. Bu* $F^n(x)$ *ifadesi,* F *altındaki* x *için n. iterasyon olarak tanımlanır.*

Tanım 2.26: X *bir Banach uzayı ve* A *bu uzayda kapalı, konveks ve sınırlı bir alt küme olsun. Eğer* $f: A \longrightarrow A$ *genişlemeyen dönüşümü, boş olmayan bir sabit nokta kümesine sahipse,* A *kümesine sabit nokta özelliğine sahiptir denir.*

2.3. Dönüşümlerin Sabit Noktaları İçin Teoremler

Teorem 2.7: $\mathbb{R}$ *de bir* $[a,b]$ *kapalı aralığı olsun.* $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *sürekli dönüşümü için,* $f(c) = c$ *olacak biçimde bir* $c \in [a,b]$ *sayısı vardır.*

İspat 2.7: Her $x \in [a,b]$ *için,* $T: [a,b] \to \mathbb{R}$, $T(x) = x - f(x)$ *dönüşümü sürekli bir dönüşüm olur. Ayrıca* $f(a) \geq a$ *ise,* $T(a) \leq 0$ *ve* $f(b) \leq b$ *ise,* $T(b) \geq 0$ *olur. Ara Değer Teoremi gereği,* $T(c) = 0$ *olacağından,* $f(c) = c$ *olacak biçimde* $c \in [a,b]$ *mevcuttur.*

Teorem 2.8: (Banach Daralma Prensibi)

(X, d) *bir tam metrik uzay,* $F: X \to X$ *bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda* F *nin,* $u \in X$ *gibi bir tek sabit noktası vardır. Dahası keyfi* $x \in X$ *için,* $lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$ *olur ve* $d(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x))$ *bulunur.*

İspat 2.8: Önce tekliği gösterelim. Aksi olsa, $x, y \in X$ *için,* $x = f(x)$ *ve* $y = f(y)$ *olsun.*

$$d(x, y) = d\big(F(x), F(y)\big) \leq L. d(x, y) \tag{2.18}$$

böylece, $d(x, y) = 0$ *elde edilir.*

Şimdi varlığı gösterelim. Bunun için, $\{F^n(x)\}$ *dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.*

$n \in \{0,1 \dots\}$ *için,* $d\big(F^n(x), F^{n+1}(x)\big) \leq L\, d\big(F^{n-1}(x) F^n(x)\big) \leq \cdots \leq L^n d(x, F(x))$ *bulunur.*

$m > n$ *için,*

$$d\big(F^n(x), F^m(x)\big) \leq \tag{2.19}$$

$$d\big(F^n(x), F^{n+1}(x)\big) + d\big(F^{n+1}(x), F^{n+2}(x)\big) + \cdots \\ \dots + d\big(F^{m-1}(x), F^m(x)\big) \tag{2.20}$$

$$\leq L^n\ d\big(x, F(x)\big) + \cdots + L^{m-1}\ d\big(x, F(x)\big) \tag{2.21}$$

$$\leq L^n\, d\big(x, F(x)\big)\,(1 + L + L^2 + \cdots) \tag{2.22}$$

$$= \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x)) \tag{2.23}$$

Böylece, $\{F^n(x)\}$ *Cauchy dizisi olur.* X *uzayı tam olduğundan bir* $u \in X$ *için* $lim_{n\to\infty} F^n(x) = u$ *olur. Dahası süreklilikten,*

$$u = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) = F(u) \tag{2.24}$$

bulunur. Yani u bir sabit nokta olacak. Son olarak $m \to \infty$ için limit alırsak (1.2) için,

$$d(F^n(x),u) \leq \frac{L^n}{1-L} \; d(x,F(x)) \tag{2.25}$$

elde edilir.

Teorem 2.9: (X,d) kompakt metrik uzay, $F: X \to X$ bir dönüşüm ve birbirinden farklı $x,y \in X$ için,

$$d(F(x),F(y)) < d(x,y) \tag{2.26}$$

şartı sağlanırsa bu F dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.10: (X,d) bir tam metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için,

$$B(x_0,r) = \{x \in X, d(x,x_0) < r\} \tag{2.27}$$

tanımlayalım. $F: B(x_0,r) \to \mathbb{R}$ bir daralma dönüşümü olsun. $d(F(x_0),x_0) < (1-L)r$ sağlansın. Bu durumda F dönüşümünün $B(x_0,r)$ yuvarında bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.11: E Banach uzayında, $\overline{B_r}$ sıfır merkezli ve $r > 0$ yarıçaplı kapalı bir küre olsun. $F: \overline{B_r} \to E$ daralma dönüşümü ve $F(\partial\overline{B_r}) \subseteq \overline{B_r}$ olsun. Bu durumda, F dönüşümünün, $\overline{B_r}$ kapalı yuvarında bir tek sabit noktası vardır.

Teorem 2.12: (Brouwer Sabit Nokta Teoremi) $B, \mathbb{R}^n$ de kapalı yuvar, kompakt ve konveks bir alt küme olsun. Bu durumda, $f: B \to B$ sürekli dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır [Khamsi and Kirk, 2001] .

Dikkat edersek, Brouwer teoremi sonsuz boyutlu Banach uzaylarına geçerli olamaz. B kümesi c_0 uzayında kapalı birim yuvar olsun.

$$x = \left(x_{1,}x_2 \dots\right) \in B \quad T: B \to B, T(x) = (1 - |x_1|, x_1, x_2 \dots) \tag{2.28}$$

Her $x, y \in B$ için, $||T(x) - T(y)|| \le ||x - y||$ olduğundan, T dönüşümü süreklidir, fakat sabit noktası yoktur.

Teorem 2.13: (Schauder Sabit Nokta Teoremi) B, X Banach uzayının boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda, $f: B \to B$ sürekli dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır [Khamsi and Kirk, 2001].

İspat 2.13: B kompakt olduğu için, $f(B)$ ön kompakt ve tam sınırlı olmasından her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in B$ için, $min\, ||f(x) - y_i|| \le \frac{1}{n}$, $1 \le i \le N_n$ olacak biçimde $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\} \subseteq f(B)$ vardır.

$$a_i(x) = max\{\, \frac{1}{n} - ||f(x) - y_i||, 0\} \tag{2.29}$$

olarak tanımlayalım. Böylece, her bir $x \in B$ için$a_i(x) \ne 0$ olacak şekilde en az bir $i \in \{1,2 \dots N_n\}$ vardır.

Şimdi $P_n: B \to B$,

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} \tag{2.30}$$

Schauder operatör tanımlayalım.

Dikkat edilirse, $P_n(x)$, $\{y_1, y_2, \dots, y_{N_n}\}$ elemanlarının konveks kombinasyonu olduğundan $P_n(x) \in B$ olur. F sürekli olduğundan tüm $a_i(x)$ fonksiyonları da süreklidir. B_n, $\{y_1, y_2, \dots y_{N_n}\}$ vektörleri tarafından, sonlu boyutlu Banach uzayının sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $P_n: B_n \to B_n$ olur. Brouwer Teoremine *göre, her bir P_n dönüşümünün, $x_n \in B_n \subseteq B$ gibi bir sabit noktası vardır. B kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin $x \in B$ ye yakınsak $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Herhangi bir n için,*

$$||P_n(x) - f(x)|| = \frac{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)(y_i - f(x))}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} \tag{2.31}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)}{\sum_{i=1}^{N_n} a_i(x)} = \frac{1}{n} \tag{2.32}$$

O zaman,

$$\left|\left|x_{n_k} - f(x)\right|\right| \leq \left|\left|P_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})\right|\right| + \left|\left|f(x_{n_k}) - f(x)\right|\right| \tag{2.33}$$

limit alırsak, $||x - f(x)|| \to 0$ olur. Yani x noktası, f dönüşümünün sabit noktası olur.

Teorem 2.14: (Genişlemeyen Dönüşümler için Schauder Teoremi)
E bir Normlu lineer uzay ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $F: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm ve $F(C)$, C kümesinin kompakt bir kümesinin alt kümesi olsun. Bu durumda F dönüşümünün sabit noktası vardır.

İspat 2.14: $x_0 \in C$ alalım $n = 2,3 \ldots$ için,

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F + \frac{1}{n}\ x_0 \tag{2.34}$$

tanımlayalım. C konveks ve $x_0 \in C$ olduğundan $F_n: C \to C$ daralma dönüşümü olur ve her bir F_n dönüşümünün,

$$x_n = F_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)F(x_n) + \frac{1}{n}\ x_0 \tag{2.35}$$

olacak biçimde tek bir sabit noktası vardır. $F(C)$, C *nin kompakt bir alt kümesi olduğundan, S tamsayıların bir alt dizisi var ve* $u \in C$ *için;* $n \to \infty$ *iken,* $F(x_n) \to \infty$ *olur. Bu yüzden,*

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F(x_n) + \frac{1}{n} x_0 \to u \tag{2.36}$$

olurken, dönüşümün sürekliliğinden $F(x_n) \to F(u)$ *olur. Böylece* $u = f(x)$ *elde edilir.*

Teorem 2.15: H Hilbert uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks bir C *alt kümesini ele alalım.* $F: C \to C$ *her bir genişlemeyen dönüşümünün en az bir sabit noktası vardır.*

Teorem 2.16: (X, d) *bir tam metrik uzay ve* $n \in \mathbb{N}$ *için* T^n *bir daralma dönüşümü olsun.* $T: X \to X$ *dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir [Khamsi and Kirk, 2001] .*

Teorem 2.17: (X, d) *bir kompakt metrik uzay,* $T: X \to X$ *kesin daraltan dönüşümünün tek bir* $x_0 \in X$ *sabit noktası vardır ve her* $x \in X$ *için,* $lim_{n\to\infty} T^n x = x_0$ *gerçekleşir.*

Tam olmayan metrik uzaylarda daralma dönüşümlerinin sabit noktası olması gerekmez. $X = (0,1]$, $T: X \to X$, $Tx = \frac{x}{3}$ ve alışılmış metriği ele alalım.

$$d: (Tx, Ty) = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3} d(x, y) \tag{2.37}$$

olup, T dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Ama T dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yani, $Tx = x$ denklemini sağlayan $x = 0$ noktasıdır, ama $0 \notin X$ olduğu için, T dönüşümünün sabit noktaya sahip değildir.

Ayrıca tam metrik uzayda genişlemeyen dönüşümün sabit noktası olması gerekmez. $X = \{x \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$ ve bu kümede $d(x, y) = |x - y|$ metriğini alalım.

$$T: X \to X,\ T(x) = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \tag{2.38}$$

dönüşümü genişlemeyendir.

$$d(T(x), T(y)) = |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\,| \tag{2.39}$$

$$= \left|\left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| \tag{2.40}$$

$$= \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\ |x-y| \tag{2.41}$$

$$\leq |x-y| = d(x,y) \tag{2.42}$$

($\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ için $\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}} < 1$ olacağından.)

Ama her $x \in X$ için, $T(x) = \sqrt{x^2+1} \neq x$ olduğundan bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

Teorem 2.18: (Tychonoff Sabit Nokta Teoremi)
X yerel konveks, topolojik lineer uzay ve C bu uzayın boştan farklı, kompakt ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ sürekli dönüşümünün sabit noktası vardır.

Teorem 2.19: Düzgün konveks Banach uzaylarının bazı özellikleri aşağıda ki gibidir:

i) Her düzgün konveks Banach uzayı kesin konvekstir.
ii) Her düzgün konveks Banach uzayı yansımalıdır.
iii)Her düzgün konveks Banach uzayında Kadec-Klee özelliği vardır.

Teorem 2.20: X Banach uzayında,

i) X^* kesin konveks ise X pürüzsüzdür.
ii) X^* pürüzsüz ise X kesin konvekstir.

Eğer X yansımalı Banach uzayı ise i) ve ii) koşulları gerek ve yeter olur.

Şimdi 3. Bölümde kullanacağımız bazı yakınsama teoremlerinden bahsedelim. X Banach uzayının, boştan farklı, kapalı ve konveks bir K alt kümesini ele alalım. $T: K \to K$ bir genişlemeyen dönüşüm ve $Fix\ T$ ile T dönüşümünün sabit noktalar kümesini tanımlayalım. $u \in K$ sabit bir değer olmak üzere, $t \in (0,1)$ için, $T_t: K \to K$ olmak üzere,

$$T_t(x) = tu + (1-t)\,Tx \qquad x \in K \tag{2.43}$$

şeklinde tanımlı T_t dönüşümü bir daralma dönüşümüdür. Banach daralma prensibi gereği, $y_t = t\,u + (1-t)\,Ty_t$ biçiminde $y_t \in K$ sabit noktası vardır. $Fix\,T$ kümesi boştan farklı olduğundan, $\{y_t: t \in (0,1)\}$ kümesi sınırlıdır. Bu iterasyonun yakınsamasında $t \to 0$ iken y_t nin yakınsaması kritik rol oynamaktadır.

Browder ve Halpern aynı anda $t \to 0$ iken, y_t nin yakınsamasını aşağıda ki teoremde çalışmışlardır.

Teorem 2.21: (Browder, Halpern) Reel H Hilbert uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir K alt kümesini ve bir $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. $Fix\ T$ boştan farklı, $u \in K$ bir sabit değer ve y_t üst teoremde ki gibi tanımlanmak üzere, bir $p \in Fix\ T$ için, $lim_{t\to 0}\, y_t = p$ olur ve her bir $z \in Fix\ T$ için $< p-u, p-z > \leq 0$ varyasyonel eşitsizliği sağlanır [Browder, 1967a] , [Halpern, 1967].

Bu teoremin Banach uzay versiyonu Reich tarafından aşağıda ki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.22: X düzgün, pürüzsüz Banach uzay ve K bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $Fix\,T$ boştan farklı olacak biçimde, $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümü tanımlayalım.

$u \in K$ bir sabit değer ve y_t (2.35) teki gibi tanımlanmak üzere, bazı $p \in Fix\ T$ için, $lim_{t\to 0}\, y_t = p$ ve $< p-u, J(p-z) > \leq 0$ eşitsizliği sağlanır. Burada $z \in Fix\ T$ ve J de, $X \to 2^{X^*}$ olacak şekilde X in normalleştirilmiş dual dönüşümü olsun. Normalleşmiş dual dönüşüm,

$$J(x) = \{f \in X^* \ : < x, f > = \left||x|\right|^2 = \left||f|\right|^2\} \tag{2.44}$$

biçiminde tanımlanır. [Reich, 1980].

Lemma 2.1: X bir reel Banach uzayı ve J *normalleştirilmiş dual dönüşüm. Her bir* $x, y \in X$ *ve* $j(x+y) \in J(x+y)$ *için,*

$$\left||x+y|\right|^2 \leq \left||x|\right|^2 + 2 < y, j(x+y) > \tag{2.45}$$

eşitsizliği geçerlidir [Chang, 1997].

Lemma 2.2: $\{\lambda_n\}$ *negatif olmayan reel sayıların,* $\lambda_{n+1} \leq (1 - \propto_n)\lambda_n + \beta_n \quad n \geq 0$ *özelliğini sağlayan bir dizisi olsun. Burada* $\{\propto_n\} \subseteq (0,1)$ *ve* $\{\beta_n\}$ *ise,*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = +\infty$

ii) $lim_{n\to\infty} sup \frac{\beta_n}{\propto_n} \leq 0$ *ya da* $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$

özelliklerini sağlayan reel sayılar dizisi olsun. Bu durumda, $lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ *gerçekleşir [Sangago, 2011] .*

Teorem 2.22: K*,* X *reel, düzgün ve pürüzsüz Banach uzayının, boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $T: K \to K$ *genişlemeyen dönüşümü,* $Fix\, T \neq \emptyset$ *olacak biçimde verilsin.* $(0,1)$ *aralığında alınan,* $\{\propto_n\}, \{\beta_n\}$ *ve* $\{\gamma_n\}$ *dizileri,* $u, x_0 \in K$ *için,*

i) $\propto_n + \beta_n + \gamma_n = 1 \quad ; \quad \forall n \geq 0$

ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$ *ve* $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = +\infty$

iii) $lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$

iv) $lim_{n\to\infty} |\propto_{n+1} - \propto_n| < +\infty$

v) $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < +\infty$

$$x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n T x_n \quad n \geq 0 \tag{2.46}$$

kontrol koşullarını sağlasınlar. Böylece verilen bir $u \in K$ için (2.38) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Sangago, 2011].

1967'de Opial, Hilbert uzayının geometrik özelliklerinden faydalanarak aşağıdaki kavramı geliştirmiştir:

Tanım 2.27: X bir Banach uzayı olsun. X uzayından alınan, $x \in X$ noktasına zayıf yakınsayan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi ve $y \neq x$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \sup ||x_n - x|| < \lim_{n\to\infty} \sup ||x_n - y|| \tag{2.47}$$

gerçekleniyorsa, X Opial özelliğine sahiptir denir. $1 < p < \infty$ olacak biçimde l_p uzayları bu şartı sağlarken L_p uzayları sadece $p = 2$ için sağlar [Opial, 1967].

1967'de ise Browder bir Banach uzayının, zayıf sürekli bir dual dönüşümle Opial şartını sağladığını kanıtlamıştır [Browder, 1967b] .

Tanım 2.28: X Banach uzayının, boştan farklı bir K alt kümesini alalım. K da keyfi $\{x_n\}$ dizisi için, $x_n \rightharpoonup x$ ve $Tx_n \to y$ iken, $x \in K$ ve $Tx = y$ gerçekleşiyorsa, $T: K \to X$ dönüşümüne y noktasında yarı kapalıdır denir.

Teorem 2.23: X düzgün konveks Banach uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir K alt kümesini ele alalım. $T: K \to X$ genişlemeyen dönüşüm olsun. Böylece I birim operatör olmak üzere, $I - T$ dönüşümü yarı kapalıdır [Browder, 1968].

Bu teorem Browder'in yarı kapalılık prensibi olarak adlandırılır.

Teorem 2.24: Opial özelliğini sağlayan bir X Banach uzayını ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir K alt kümesini ele alalım. $T: K \to X$ genişlemeyen *dönüşüm olsun. Böylece, I birim operatör olmak üzere,* $I - T$ *dönüşümü yarı kapalıdır [Goebel and Kirk, 1990].*

Lemma 2.3: X reel, yansımalı bir Banach uzayının, boştan farklı, kapalı ve konveks bir K *alt kümesini ele alalım. J zayıf sürekli normalleştirilmiş bir dual dönüşüm olsun.* $Fix\,T \neq \emptyset$ *olacak biçimde* $T: K \to K$ *genişlemeyen bir dönüşüm alalım. Şimdi* $\{\propto_n\}$ $\{\beta_n\}$ *ve* $\{\curlyvee_n\}$ *dizileri,*

i) $\propto_n + \beta_n + \curlyvee_n = 1 \quad (\forall n \geq 0)$
ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$
iii) $\sum_{n=0}^{\infty}{}_{i} \propto_n = +\infty$
iv) $\sum_{n=0}^{\infty} |\propto_{n+1} - \propto_n| < +\infty$
v) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$
vi) $\sum_{n=0}^{\infty}{}_{i} |\beta_{n+1} - \beta_n| < +\infty$

şartlarını sağlasınlar. Böylece, verilen bir $u \in K$ *için,* (2.38) *gibi tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.*

Önerme 2.6: X Opial şartını sağlayan Banach uzay ve bu uzayın boştan farklı ve zayıf kompakt bir C *alt kümesini ele alalım.* $T: C \to C$ *dönüşümü,* $Fix\,T \neq \emptyset$ *ve* $I - T$*, 0 da yarı kapalı olacak şekilde verilsin.* C *den alınan bir* $\{x_n\}$ *dizisi,*

i) $lim_{n\to\infty} ||x_n - p|| \; (\forall p \in Fix\,T)$ *için var olsun.*
ii) $\{x_n\}$, $lim_{n\to\infty}\left||x_n - Tx_n|\right| = 0$ *şartını sağlasın.*

Böylece $\{x_n\}$ *dizisi T'nin sabit bir noktasına zayıf yakınsar.*

Önerme 2.7: X Banach uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir C *alt kümesini ele alalım.* $Fix\,T \neq \emptyset$ *ve* $I - T$*, 0'da yarı kapalı olacak şekilde,* $T: C \to C$ *dönüşümü alalım.* C *de* D_1 *ve* D_2 *şartlarını sağlayacak biçimde seçilen* $\{x_n\}$ *dizisi, aşağıdaki özelliklerden birini sağlar:*

i) X Frechet Differansiyellenebilir normlu düzgün konveks uzay olmak üzere, $\forall p, q \in Fix\,T$ için, $lim_{n\to\infty} < x_n, J(p-q) >$ limiti vardır.

ii) X yansımalı uzay olmak üzere, X^* Kadec-Klee özelliğine sahip olsun. $\omega_\omega(\{x_n\})$ ile $\{x_n\}$ dizisinin tüm zayıf dizisel limitleri kümesini gösterelim. Bu durumda, $\forall t \in [0,1]$ ve bazı $p, q \in \omega_\omega(\{x_n\})$ için, $lim_{n\to\infty}\|t\ x_n + (1-t)p - q\|$ limiti var olsun. Böylece $\{x_n\}$ dizisi, T'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

$x = \{x_i\} \in C$ olmak üzere, $\ell: C \to \mathbb{K}$, $\ell(x) = \lim_{i\to\infty} x_i$ biçiminde tanımlı limit fonksiyoneli olsun. Boştan farklı bir S kümesi ve bu küme üzerinde tanımlı supremum normlu, sınırlı ve reel değerli tüm fonksiyonların Banach uzayını $B(S)$ ile gösterelim. X uzayı, $B(S)$ in bir alt uzayı ve X^* dual uzayından bir j elemanı alalım. e ise, X üzerinde, her $s \in S$ için $e(s) = 1$ biçiminde tanımlı sabit fonksiyon, $j(e) = j(1)$ olmak üzere $||j||_*$=j(1)=1 olursa X e ortalama denir ve her $x \in X$ için,

$$\inf_{s\in S} x(s) \le j(x) \le \sup_{s\in S} x(s) \tag{2.48}$$

sağlanır. $f \in \ell_\infty$ alalım ve $f(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}, \dots)$ ifadesini $f_n(x_{m+n})$ ile gösterelim.

Bu durumda sürekli lineer $j \in \ell_\infty$ fonksiyoneli için,

i) $||j||_*$=j(1)=1

ii) $j_n(x_n) = j_n(x_{n+1})$ şartları sağlanırsa j ye Banach limiti denir ve LİM ile gösterilir.

Önerme 2.8: X yansımalı Banach uzay ve C bu uzayda boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $\{x_n\}$, C de sınırlı bir dizi ve

i) $lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$

ii) $lim_{n\to\infty}||x_{n+1} - Tx_n|| = 0$

şartlarından birini sağlasın.

$M = \{u \in C: LİM_n \,||\, x_n - u||^2 = inf_{z \in C}\, LİM_n \,||x_n - z||^2\}$ *kümesi tanımlansın. Böylece bu M kümesi, kapalı, konveks, sınırlı ve boştan farklı T değişmeyen bir alt küme olur.*

Lemma 2.4: $\{\propto_n\}$, *negatif olmayan sayıların* $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = \infty$ *şartındaki dizisi olsun.* $\beta_n > 0$ *varsayalım.* $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n \beta_n < \infty$ *ve böylece* $lim_{n\to\infty} \, inf\, \beta_n = 0$ *gerçekleşir.*

Lemma 2.5: $\{\delta_n\}$ *dizisi,* $\{\beta_n\}$ *ve* $\{\Upsilon_n\}$ *dizileri için,* $\delta_{n+1} \le \beta_n \, \delta_n + \Upsilon_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ *şartını sağlayan negatif olmayan sayıların bir dizisi olsun. Burada* $\{\beta_n\}$ *ve* $\{\Upsilon_n\}$, $\{\beta_n\} \subseteq [1, \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta n - 1) < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \Upsilon_n < \infty$ *şartını sağlayan negatif olmayan sayılar dizisi olsun. Böylece* $lim_{n\to\infty}\, \delta_n$ *vardır. Eğer* $lim_{n\to\infty}\, inf\, \delta_n = 0$ *olursa* $lim \quad \delta_n = 0$ *olur.*

Lemma 2.6: $\{\propto_n\}, \{b_n\}$ *ve* $\{t_n\}$, $\propto_{n+1} \le (1 - t_n) \quad \propto_n + b_n \, t_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *şartını sağlayan negatif olmayan sayılar dizisi olsun. Burada* $t_n \in [0,1]$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ *,* $lim_{n\to\infty}\, b_n = 0$ *sağlansın. Böylece* $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$ *bulunur.*

Lemma 2.7: X düzgün konveks Banach uzayının $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini ele alalım.

$$x_{n+1} = (1 - \propto_n) x_n + \propto_n y_n \text{ ve } \|y_n\| \le \|x_n\| \;\; (n \in \mathbb{N}) \tag{2.49}$$

Burada $\{\propto_n\}$ *dizisi,* $[0,1]$ *aralığında ve* $\sum_{n=1}^{\infty} min\{\propto_n, 1 - \propto_n\} = \infty$ *şartını sağlayan bir dizi olsun. Böylece* $0 \in \overline{\{x_n - y_n\}}$ *olur.*

Lemma 2.8: C, *X Banach uzayının, boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun.* $\{T_n\}$, *C de tanımlı Lipschitzian öz dönüşümler dizisi olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

i) $L_n \; (\ge 1)$ T_n*'nin Lipschitzian sabiti olsun.* $\sum_{n=1}^{\infty}(L_n - 1) < \infty$
ii) $F = \cap_{n=1}^{\infty} \; Fix(T_n)$.

Verilen bir $x_1 \in C$ *alalım.* $\{x_n\}$ *dizisini,* $x_{n+1} = T_n\, x_n \quad n \in \mathbb{N}$ *biçiminde tanımlayalım. Böylece aşağıdakiler sağlanır:*

i) $lim_{n\to\infty} \|\, x_n - p\|$ *vardır* $\quad (\forall p \in Fix\, T)$

ii) Eğer X düzgün konveks olursa $\forall f_1, f_2 \in F$ *ve* $t \in [0,1]$ *için,* $lim_{n\to\infty}\, \|t\, x_n + (1-t)\, f_1 - f_2\|$ *limiti vardır.*

iii)X Frechet diferansiyellenebilir normlu, düzgün konveks uzay olsun. Böylece her $p, q \in F$ *için* $lim_{n\to\infty} < x_n - p, J(p-q) >$ *limiti vardır.*

Banach uzaylarda, bu $\{T^n x\}$ *dizisi, nonlineer operatörlerin sabit noktalarına güçlü yakınsar. Ama F genişlemeyen dönüşümlerde tek bir sabit noktası olsa bile* $\{T^n x\}$*, o noktaya yakınsamak zorunda değildir.*

Örnek 2.3: $H = l_2$ *bir Hilbert uzayı ve* $C = B_H$*,* H *da birim küre alalım* $\{\propto_n\}$*,* $[0,1]$ *aralığında* $\prod_{n=1}^{\infty} \propto_n > 0$ *olacak biçimde bir reel sayı dizisi olsun.* $T: C \to C$ *dönüşümü,* $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, \propto_1, x_1, \propto_2, x_2, \ldots)$ *olarak tanımlayalım. Orijin* T *nin tek sabit noktasıdır.* $e = (1,0,\ldots)$ *olmak üzere,* $\{T^n e\}$ *dizisi 0 a zayıf yakınsar, ama güçlü yakınsamaz.*

Teorem 2.25:X Banach uzayı ve T*,* X *de bir regüler genişlemeyen öz dönüşüm olsun.* T *nin sabit noktası olduğunu varsayalım.* $I - T$ *dönüşümü kapalı ve sınırlı kümeleri yine* X *de kapalı ve sınırlı kümelere görüntülesin. Böylece, her bir* $x \in X$ *için,* $\{T^n x\}$*,* $Fix\, T$ *nin bir elemanına güçlü yakınsar.*

Teorem 2.26: X*, Opial şartını sağlayan Banach uzay ve* C *bu uzayda boştan farklı, zayıf kompakt ve konveks bir alt küme olsun.* $Fix\, T \neq \emptyset$ *şartıyla bir* $T: C \to C$ *genişlemeyen dönüşümü tanımlansın. Eğer* $x \in X$ *için,* $T^n x - T^{n+1} x \to 0 \quad (n \to \infty)$ *oluyorsa* $\{T^n x\}$*,* $Fix\ T$ *nin bir elemanına zayıf yakınsar.*

X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ ve $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in C$ için, $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$ olduğunda, $k_n \to 1$ olacak biçimde pozitif reel sayılardan oluşan $\{k_n\}$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

Önerme 2.9: X, Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ asimptotik genişlemeyen bir dönüşümünü ele alalım. $x \in C$ için, x_0, $\{T^n x\}$ sınırlı dizisinin asimptotik merkezi olduğunu varsayalım. $\{T^{n_i} x\}$ alt dizisinin bir z zayıf limiti, T nin bir sabit noktasıysa böylece x_0, z ile çakışır.

Teorem 2.27: X Opial şartını sağlayan düzgün konveks bir Banach uzay ve C bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ yarı sürekli, neredeyse asiptotik genişlemeyen dönüşüm ve $x \in C$ olsun . Böylece $\{T^n x\}$, T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsaması için, T nin x noktasına asimptotik regüler olması gerek ve yeterdir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. İterasyon Metodu

Bir dönüşümünün sabit noktası veya noktalarını bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları vardır. Bu bölümde, bu metotların tarihsel gelişimi incelenip, bazı tanım, teorem ve örnekler verilmiştir.

Sabit noktalara yaklaşım teorisi uygulamalar için çok önemlidir. Çoğu zaman, bir problemin çözümü sabit noktaya dönüştürülebilir. Sabit noktanın varlığı bazı kontrol şartlarıyla garanti altına alınabilir. Genel olarak iterasyon oluşumlarını inceleyelim.

İlk iterasyon oluşumu Halpern tarafından verilmiştir. X Banach uzayının, boştan farklı, kapalı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \to C$ bir dönüşüm olsun. Halpern iterasyonu, $u \in C$ sabit bir değer ve $\{\propto_n\}$, $(0,1)$ aralığından bir dizi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \propto_n u + (1 - \propto_n) T(x_n) \ (n \geq 0) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır [Halpern, 1967] .

Bir diğer iterasyon Mann tarafından, $x_0 \in C$ bir başlangıç değeri ve $\{\propto_n\}$, $(0,1)$ aralığından bir dizi olmak üzere,

$$x_{n+1} = \propto_n x_n + (1 - \propto_n) T(x_n) \ (n \geq 0) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır [Mann, 1953].

Ishikawa tarafından verilen iterasyon ise
$x_0 \in C$ bir başlangıç değeri ve $\{\propto_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ $(0,1)$ aralığında diziler olmak üzere,

$$x_{n+1} = \propto_n \; x_n + (1 - \propto_n)\, T\big(\beta_n x_n + (1-\beta_n)T(x_n)\big) \;\; (n \geq 0) \qquad (3.3)$$

şeklinde verilmiştir [Ishikawa, 1964] .

3.1.1 Halpern İterasyon Algoritması

3.1.1.1. Hilbert Uzaylarda Halpern İterasyon Algoritması

K, H Hilbert uzayının boştan farklı, kapalı, konveks bir alt kümesi ve $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $Fix\ (T)$ ile bu dönüşümün sabit noktaları kümesini tanımlayalım. $u \in K$ sabit bir değer alalım. $x_0 \in K$ başlangıç değeri ve $\{\propto_n\}$, $(0,1)$ aralığında bir dizi olmak üzere, $\{x_n\}$ iterasyon algoritmasını aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{n+1} = \propto_n u + (1 - \propto_n)\; Tx_n \;\; ; \;\; n \geq 0 \qquad (3.4)$$

1967 yılında Halpern aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 3.1: K, H reel Hilbert uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. $(0,1)$ aralığından alınan $\{\propto_n\}$ dizisi,

- $C_1)$ $\lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$
- $C_2)$ $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = +\infty$ ya da $\prod_{n=0}^{\infty}(1 - \propto_n) = 0$

kontrol şartlarını sağlasın.

Varsayalım ki,

i) $lim_{j\to\infty} \frac{\propto_{j+n_j}}{\propto_j} = 1$

ii) $lim_{j\to\infty} n_j \propto_j = +\infty$ *şartlarını sağlayan negatif olmayan tam sayıların kesin artan* $\{n_j\}$ *dizisi olduğunu varsayalım. Böylece* (3.4) *de tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi* T *dönüşümün bir sabit noktasına güçlü yakınsar.*

Halpern, C_1 *ve* C_2 *koşullarının mutlaka sağlanması gerektiği belirtmiştir [Halpern, 1967].*

1977 de Lions, Halpern' nin kontrol şartlarını geliştirmiştir.

Teorem 3.2: K*,* H *reel Hilbert uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $T: K \to K$ *genişlemeyen dönüşümünü ve Halper'in* C_1 *ve* C_2 *kontrol şartlarını sağlayan* $\{\propto_n\} \subset (0,1)$ *dizisini alalım. Yukarıda ki* C_1 *ve* C_2 *kontrol şartlarına ek olarak,*

- $C_3)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\propto_{n+1} - \propto_n}{\propto_{n+1}^2} = 0$

kontrol koşulu sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ *dizisi,* T*'nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Lions, 1977].*

1992'de Wittmann, ek kontrol koşulu koymuştur.

Teorem 3.3: K*,* H *reel Hilbert uzayının boştan farklı, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $T: K \to K$ *genişlemeyen bir dönüşüm olsun.* $(0,1)$ *aralığından* C_1 *ve* C_2 *koşullarını sağlayan bir* $\{\propto_n\}$ *dizisi alalım. Bu kontrol koşullarına ek olarak,*

- $C_4)\ \sum_{n=0}^{\infty} |\propto_{n+1} - \propto_n| < \infty$

sağlansın. Bu durumda (3.4) *de tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi* T*'nin sabit bir noktasına güçlü yakınsar [Wittmann, 1992] .*

Örnek 3.1:

$$\propto_n = \frac{1}{n+1} \tag{3.5}$$

dizisi C_4 şartını sağlar, ama C_3 şartını sağlamaz [Sangago, 2011] .

Örnek 3.2:

$$\propto_n = \begin{cases} (k+1)^{\frac{-1}{4}} & : \quad n = 2k \\ (k+1)^{\frac{-1}{4}} + \dfrac{1}{k+1} & : \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{3.6}$$

dizisi C_3 sağlar, ama C_4 ü sağlamaz [Bauschke, 1996] .

2003 yılında Xu C_3 ve C_4 şartlarını düzenleyerek yeni kontrol şartları geliştirmiştir.

- C_5) $\lim_{n\to\infty} \frac{\propto_{n+1} - \propto_n}{\propto_{n+1}} = 0$ ya da $\lim_{n\to\infty} \frac{\propto_n}{\propto_{n+1}} = 1$

Örnek 3.1'de tanımladığımız dizi C_5'i sağlar. Dikkat edersek C_5 şartı, C_3 şartındaki paydada olan kare ifadeyi kaldırmaktadır. Aşağıdaki örnekler C_1 ve C_2 şartıyla C_4 ve C_5 şartlarının karşılaştırılabilir olmadığını ortaya çıkarmaktadır.

Örnek 3.3: $\{\propto_n\}$ dizisi $\propto_n = e^{-n^2}, n \geq 1$ için, C_1, C_2 ve C_4 şartlarını sağlarken C_5'i sağlamaz [Xu, 2002].

Örnek 3.4:

$$\propto_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & : \quad n \ \ tek \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} & : \quad n \ \ çift \end{cases} \tag{3.7}$$

C_1, C_2 ve C_5 i sağlarken, C_4 sağlamaz [Xu, 2002].

2009'da Suzuki C_1 ve C_2 şartlarının güçlü yakınsama için yeterli olmadığı sonucunu aşağıdaki örnekte vermiştir.

Örnek 3.5: $X = R,\ K = [-1,1]$ *ve* $u = 1$ *alalım.* $T: K \to K,\ Tx = -x\ ,\ x \in K$ *genişlemeyen dönüşümünü göz önüne alalım.* $p = 0$ *noktası,* T *nin* K *daki tek sabit noktasıdır. Sabit* $\delta > 1$ *için* $(0,1)$ *aralığında bir* $\{\propto_n\}$ *dizisini,*

$$\propto_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n.\delta} & : \ n\,tek \\ \dfrac{1}{n} & : \ n\,çift \end{cases} \tag{3.8}$$

olacak biçimde tanımlayalım. $\{\propto_n\}$, C_1 *ve* C_2 *koşullarını sağlar.* $x_1 = \frac{\delta-1}{\delta+1}$ *başlangıç noktası alalım. Her bir* $n \geq 1$ *için,* $x_{2n+1} = \frac{\delta-1}{\delta+1}$ *bulunur. Bu nedenle* $\{x_n\}$ *dizisi,* T *nin tek sabit noktası olan 0 sabit noktasına yakınsamaz [Suzuki, 2009] .*

Teorem 3.4: $[0,\infty)$ *aralığında bir* $\{b_n\}$ *dizisini,*

i) $B_n = \sum_{i=0}^{n} bi \to \infty \qquad (n \to \infty)$
ii) $\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} |b_i - b_{i-1}| \to 0 \qquad (n \to \infty)$

şartlarını sağlayacak biçimde seçelim. K, H Hilbert uzayının bir alt kümesi, $T: K \to K$ *genişlemeyen bir dönüşüm ve* $Fix\ T$ *boştan farklı* olsun. *Keyfi* $x \in K$ *için* (3.4) *deki gibi verilen* $\{x_n\}$ *dizisi,* $\propto_n = \frac{b_n}{B_n}$ *ve* $x_0 = x$ *alınarak P en yakın nokta projeksiyon dönüşümü olmak üzere, tek* $P(x) \in FixT$ *ye güçlü yakınsar [Wittmann, 1992], [Halpern, 1967].*

İspat 3.4: *Geneli bozmadan,* $0 \in Fix\ T$ *varsayalım. Kesin konveks bir Banach uzayda* $Fix\ T$ *kümesi konveks olur. Yani* $Fix\ T$, H *uzayının kapalı ve konveks bir alt kümesi olur. Böylece en yakın nokta projeksiyon dönüşümü vardır ve* $P: H \to Fix\ T$ *tanımlanır.*

$$\left|\left|x - P(x)\right|\right| \le \left|\left|x - y\right|\right| : y \in Fix\ T \tag{3.9}$$

Burada $P(x)$, $< y - P(x)\,,\ x - P(x) > \ \le 0\ \ y \in Fix\ T$ *tarafından karakterize edilmektedir.*

Belli bir $x \in H$ *alalım.* $0 \in Fix\, T$ *olduğundan, keyfi* $z \in H$ *için* $\left|\left|T(z)\right|\right| \le \left|\left|z\right|\right|$ *ve buradan da* $n \ge 0$ *için* $\left|\left|x_n\right|\right| \le \left|\left|x\right|\right|$ *sonucuna varılan* $\{x_n\}$ *dizisi,* (3.1) *deki gibi belirlensin. İndüksiyonla,*

$$\left|\left|x_n - x_{n-1}\right|\right| \ \le 2\ \frac{\left|\left|x\right|\right|}{B_n}\left(\sum_{i=0}^{n}\left|b_i - b_{i-\iota}\right| + \sum_{i=\iota}^{n}\frac{b_i\, b_{i-\iota}}{B_{i-\iota}}\right)\ (n \ge 0) \tag{3.10}$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin $n = 0$ *için sağlandığı açıktır.* $n \ge 0$ *için sağladığını varsayalım. Bu durumda,*

$$\begin{aligned}\left|\left|x_{n+1} - x_n\right|\right| \ \le \left|\propto_{n+1} - \propto_n\right| \left|\left|x\right|\right| + \left|\propto_{n+1} - \propto_n\right|\ \left|\left|T(x_{n-1})\right|\right| + \\ [1 - \propto_{n+1}]\ \left|\left|T(x_n) - T(x_{n-1})\right|\right|\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\le \left|\propto_{n+1} - \propto_n\right| \left|\left|x\right|\right| \ + \left|\propto_{n+1} - \propto_n\right| \left|\left|x_{n-1}\right|\right| + (1 - \propto_{n+1}) \left|\left|x_n - x_{n-1}\right|\right| \tag{3.12}$$

$$\le 2\ \ \left|\propto_{n+1} - \propto_n\right| \left|\left|x\right|\right| + (1 - \propto_{n+1}) \left|\left|x_n - x_{n-1}\right|\right| \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}\le 2\ \left(\frac{\left|b_{n+1} - b_n\right|}{B_{n+1}} + \frac{b_n\ \ b_{n+1}}{B_n B_{n+1}}\right)\left|\left|x\right|\right| + \\ \frac{B_n}{B_{n+1}}\ \ \frac{2\ \left|\left|x\right|\right|}{B_n}\ \ (\sum_{i=0}^{n}\left|b_i - b_{i-\iota}\right| + \sum_{i=\iota}^{n+1}\frac{b_i b_{i-1}}{B_{i-\iota}})\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$= \ \frac{2\left|\left|x\right|\right|}{B_{n+1}}\ \ \left(\sum_{i=0}^{n+1}\left|b_i - b_{i-\iota}\right| + \sum_{i=\iota}^{n+1}\frac{b_i\ \ b_{i-\iota}}{B_{i-\iota}}\right) \tag{3.15}$$

gerçeklendiği, yani $n+1$ *için sağlandığı gösterilmiş oldu.*

$\{b_n\}$ *dizisi üzerine varsayımımızdan,* $\propto_n \rightarrow 0$ *ve* $lim_{n\to\infty}||x_n - x_{n-1}|| = 0$ *sonuçlarına varırız. Bundan dolayı,*

$$||x_n - T(x_n)|| \leq ||x_n - (1-\propto_n)\, T(x_{n-1})|| + (1-\propto_n)\ ||T(x_{n-1}) - T(x_n)|| + \propto_n\ ||T(x_n)|| \tag{3.16}$$

$$\leq \propto_n\ ||x|| + ||x_n - x_{n-1}|| + \propto_n ||x|| \tag{3.17}$$

bulunur ve buradan da $lim_{n\to\infty}||x_n - T(x_n)|| = 0$ *elde edilir.*

Şimdi $lim\ sup_{n\to\infty} < T(x_n) - P(x), x - P(x) > \ \leq\ 0$ *olduğunu gösterelim. Aksini varsayarsak,* $D > 0$ *için,* $\{x_n\}$ *in bir* $\{x_{\Psi(n)}\}$ *alt dizisi için,* $< T(x_{\Psi(n)} - P(x), x - P(x) > \geq D\ ;\ (n \geq 1)$ *olur. Bu* $\{x_{\Psi(n)}\}$ *alt dizisinin,* $y \in K$ *noktasına zayıf yakınsadığını varsayalım. Böylece T yarı kapalı olur, yani* $y \in\ Fix\ T$ *vardır ki* $\{T(x_{\Psi(n)})\}$ y *ye zayıf yakınsar. Yani*$< y - P(x), x - P(x) > \geq D > 0$ *çelişkisine ulaşılır. Buradan da* $lim\ sup_{n\to\infty}(T(x_n) - P(x)\ ,\ x - P(x)) \leq 0$ *bulunur. Dahası, Dini-Abel Teoremi kullanılarak,* $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = +\infty$ *elde edilir [Knopp, 1929]. Yani* $m \in \mathbb{N}$ *için* $lim_{n\to\infty} \prod_{i=m}^{n} (1-\propto_i) = 0$ *bulunur. Belli* $\varepsilon > 0$ *için* $n_0 \geq 0$ *var ki keyfi bir* $n \geq n_0$ *için* $< T(x_n) - P(x), x - P(x) > \leq\ \varepsilon$ *ve* $\propto_n ||x - P(x)||^2 \leq \varepsilon$ *bulunur.*

Buradan da,

$$\|x_{n+1} - P(x)\| = \propto_{n+1}^2\ ||x - P(x)||^2 = \tag{3.18}$$

$$2 \propto_{n+1}\ (1-\propto_{n+1})\langle T(x_n) - P(x), x - P(x)\rangle + (1-\propto_{n+1})^2\ ||T(x_n) - P(x)||^2 \tag{3.19}$$

$$\leq \propto_{n+1}^2\ ||x - P(x)||^2 + 2 \propto_{n+1} \varepsilon\ + (1-\propto_{n+1})\ ||T(x_n) - P(x)\ ||^2 \tag{3.20}$$

$$\leq \propto_{n+1} 3\varepsilon + (1-\propto_{n+1})||T(x_n) - P(x)||^2 \tag{3.21}$$

$$\leq 3 \propto_{n+1} \varepsilon + (1 - \propto_{n+1}) ||x_n - P(x)||^2 \tag{3.22}$$

elde edilir.

Bu nedenle,

$$||x_m - P(x)||^2 \leq 3\varepsilon + ||x_{n_0} - P(x)||^2 \prod_{i=n_0+1}^{m} (1 - \propto_i) : m > m_0 \tag{3.23}$$

limiti alınarak, $limsup_{n\to\infty} ||x_n - P(x)||^2 \leq 3\,\varepsilon$, *böylece* $lim_{n\to\infty}\left||x_n - P(x)|\right| = 0$ *bulunur.*

3.1.1.2 Banach Uzaylarda Halpern İterasyon Algoritması

1980'de Reich, Halpern iterasyon algoritmasının Banach uzaylarda yakınsama versiyonunu araştırmıştır.

Teorem 3.5: X düzgün, pürüzsüz bir Banach uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi K olsun. $T: K \to K$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $Fix\ T$ boştan farklı olsun. $(0,1)$ aralığında $\{\propto_n\}$ dizisini, $0 < a < 1$ olmak üzere, $\propto_n = (n+2)^{-a}$ biçiminde tanımlayalım. Böylece belli bir $u \in K$ sabit değeri ve $x_0 \in K$ başlangıç noktası için, (3.4) deki $\{x_n\}$ dizisi gibi iterasyon dizisi tanımlayalım. Böylece $\{x_n\}$, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Reich, 1983] .

1983'te Reich aşağıdaki problemi ortaya çıkarmıştır:

X bir Banach uzayı ve bir K kümesi, X in zayıf kompakt, konveks bir alt kümesi sabit olsun. Böylece (3.4) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, $T: K \to K$ tanımlanan her genişlemeyen dönüşüm için, T nin sabit bir noktasına yakınsamasını sağlayan $\{\propto_n\}$ dizisi var mıdır ?

1997'de, Shioji ve Takahashi, Wittmann sonuçlarını düzgün Gateaux diferansiyellenebilir normlu Banach uzaylara genişletmiştir.

2002'de Xu aşağıdaki teoremi ispat etmiştir.

Teorem 3.6: K, X düzgün pürüzsüz bir Banach uzayının boştan farklı kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: K \to K$, $FixT$ boştan farklı olacak biçimde genişlemeyen dönüşüm olsun. u, $x_0 \in K$ verilsin. $\{\propto_n\} \subseteq (0,1)$ dizisinin C_1, C_2 ve C_5 şartlarını sağladığını varsayalım. Böylece (3.4) gibi tanımlanan bir $\{x_n\}$ iterasyon dizisi, T nin sabit noktasına güçlü yakınsar [Xu, 2002] .

Şimdi de "Hu" ve "Yao et al" Halpern iterasyon algoritmasını aşağıdaki şekilde modifiye etmişlerdir:

$$x_0 \in K, \; x_{n+1} = \propto_n u + \beta_n x_n + \curlyvee_n Tx_n, n \geq 0 \quad (3.24)$$

$u \in K$ belirli bir değer ve $\{\propto_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\curlyvee_n\}$ dizileri, $(0,1)$ aralığında tanımlı $\propto_n + \beta_n + \curlyvee_n = 1$ biçimli diziler olsun.

Teorem 3.7: X düzgün Gateaux diferansiyellenebilir normlu reel Banach uzayı ve K X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümünün sabit noktalar kümesi boştan farklı olsun. $\{\propto_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\curlyvee_n\}$, $(0,1)$ aralığında

i) $\propto_n + \beta_n + \curlyvee_n = 1 \;\; n \geq 0$
ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$ *ve* $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = \infty$
iii) $lim_{n\to\infty} \curlyvee_n = 0$

şartlarını sağlayan diziler olsun. Verilen belli bir $u \in K$ ve Z_t, K nın $Z_t = t.u + TZ_t$ $(t \in (0,1))$ şartını sağlayan tek elemanı ve $p \in FixT$ olmak üzere, $lim_{n\to\infty} Z_t = p$ elde edilir. Böylece keyfi $x_0 \in K$ başlangıç noktası için, (3.24) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T'nin sabit noktasına güçlü yakınsar [Hu, 2008] .

Teorem 3.8: X düzgün pürüzsüz bir Banach uzayı ve K, X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun $T: K \to K$ genişlemeyen dönüşümü $Fix\, T \neq \emptyset$ olacak biçimde tanımlansın. $(0,1)$ aralığında tanımlı $\{\propto_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\curlyvee_n\}$ dizileri, *i)* $\propto_n + \beta_n + \curlyvee_n = 1$ *(her* $n \geq 0$ *için)*

ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$

iii)$\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = +\infty$

iv) $lim_{n\to\infty} \curlyvee_n = 0$

şartlarını sağlasınlar. Bu durumda $u \in K$ *ve keyfi* $x_0 \in K$ *başlangıç noktası için,* (3.24) *deki gibi tanımlanan* $\{x_n\}$ *dizisi,* T'*nin sabit bir noktasına güçlü yakınsar [Yao et al., 2009].*

Örnek 3.6: $X = \mathbb{R}$, $K = [-1,1]$ *ve* $u = 1$ *alalım.* $T: [-1,1] \to [-1,1]$ $Tx = -x$, $x \in K$ *tanımlayalım. T sabit noktası sadece 0 olan genişlemeyen bir dönüşüm olur.*

$\{\propto_n\}$ *ve* $\{\curlyvee_n\}$ *dizileri* $\left(0,\frac{1}{3}\right)$ *aralığında,*

i) $\propto_n = \curlyvee_n$ $\forall n \geq 0$

ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = \infty$

$\{\beta_n\}$ *dizisine de* $\left(\frac{2}{3},1\right)$ *aralığında,* $\propto_n + \beta_n + \curlyvee_n = 1$ *olacak biçimde seçelim. Her bir* $n \geq 0$ *için,* $\{\propto_n\}$, $\{\beta n\}$ *ve* $\{\curlyvee n\}$,

i) $\curlyvee_n + \beta_n + \propto_n = 0$ $(her\ n \geq 0)$

ii) $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$

iii)$\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = \infty$

iv) $lim_{n\to\infty} \curlyvee_n = 0$

şartlarını sağlarlar. Şimdi $\{ x_n\}$ *dizisini,*

$$x_0 = \frac{1}{3} \quad x_{n+1} = \propto_n\ u + \beta_n\, x_n + \curlyvee_n\ Tx_n\ (n \geq 0) \tag{3.25}$$

biçiminde tanımlayalım.

Buradan,

$$x_{n+1} = \propto_n \ u + \beta_n \, x_n + \gamma_n T x_n \tag{3.26}$$

$$= \propto_n + \beta_n \, x_n - \gamma_n x_n \tag{3.27}$$

$$= \propto_n + (\beta_n - \gamma_n) x_n \tag{3.28}$$

$$= \propto_n + (1 - \propto_n - 2\gamma_n) x_n \tag{3.29}$$

$$= \propto_n + (1 - 3 \propto_n) x_n \tag{3.30}$$

elde edilir. İndüksiyon yöntemiyle $x_n = \frac{1}{3}$ $(\forall n \geq 1)$ *bulunur. Sonuç olarak* $\{x_n\}$ *dizisi, 0 a yakınsamaz [Sangago, 2011].*

Örnek 3.7: X, K, T, u *Örnek 3.6. gibi olsun.* $\{\propto_n\}$, $\{\beta_n\}$ *ve* $\{\gamma_n\}$ *dizilerini tüm pozitif tamsayılar için,* $\propto_n = \frac{n}{n+5}$, $\beta_n = 1 - \frac{3}{n+5}$, $\gamma_n \ \frac{2}{n+5}$ *biçiminde seçelim. Bu şekilde seçilen bu diziler kontrol koşullarını sağlar.* $\{x_n\}$ *dizisini,*

$$x_0 = \frac{1}{5}, \qquad x_{n+1} = \propto_n . u + \beta_n \ x_n + \gamma_n \, T x_n \quad (n \geq 0) \tag{3.31}$$

biçiminde tanımlayalım.

Dikkat edilirse,

$$x_{n+1} = \propto_n u + \beta_n \ x_n + \gamma_n \, T x_n = \propto_n + (\beta_n \ \ \gamma_n) \, x_n \tag{3.32}$$

$$= \propto_n + \beta_n \ x_n - \gamma_n \, T x_n \tag{3.33}$$

$$= \frac{1}{n+5} + \left(1 - \frac{5}{n+5}\right) x_n \quad (\forall n \geq 0) \tag{3.34}$$

gerçekleşir. İndüksiyon ile her $n \geq 1$ *için,* $x_n = \frac{1}{5}$ *bulunur.* $\{x_n\}$ *dizisinin* T *nin sabit noktası olan 0 a yakınsamadığı görülmektedir [Sangago, 2011] .*

Sonuç 3.1: Örnek 3.6. ve Örnek 3.7. den görülüyor ki Teorem 3.7.ve Teorem 3.8. deki kontrol koşulları, (3.24) deki modifiyeli Halpern isterasyonu algoritması için güçlü yakınsamayı garanti etmez.

3.1.2 Mann İterasyon Algoritması

X lineer uzayının, boştan farklı ve konveks bir C alt kümesini alalım $T: C \to C$ bir dönüşüm ve $A = [a_{i,j}]$ sonsuz reel matrisi,

i) A matrisi $\forall n, i \in \mathbb{N}$ için, $a_{n,i} \geq 0$ ve $\forall i > n$ için $a_{n,i} = 0$ olacak biçimli alt üçgen matris olsun.

- $A = \begin{pmatrix} a_{1,1}\ 0\ 0 & \cdots & 0\ 0 \\ a_{2,1}\ a_{2,2} & & 0\ 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} a_{n,2} a_{n,3} & \cdots & 0\ 0 \end{pmatrix}$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\sum_{i=\iota}^{n} a_{n,i} = 1$

iii)$\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = 0 \quad (\forall\ i \in \mathbb{N})$

$$x_1 \in C \text{ ve } x_{n+1} = T\left(\sum_{i=\iota}^{n} a_{n,i}\, x_i\right) (n \in \mathbb{N}) \tag{3.35}$$

olacak biçimde $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine Mann iterasyonu denir.

Örnek 3.8: X lineer uzay ve C, X'in boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun.

- $A = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 0 & \cdots & \ldots \\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} 0\ 0 & & \\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0 & \cdots & \ldots \\ \frac{1}{n}\frac{1}{n} \ldots \frac{1}{n} \ldots 0 & \cdots & \ldots \end{pmatrix}$

Cesaro matrisini göz önüne alalım. Bu matris yukarıdaki tüm şartları sağlar. Böylece C'de tanımlanan $\{x_n\}$ *dizisi,* $x_{n+1} = T(\frac{1}{n}\sum_{i=\iota}^{n} x_i) \colon (n \in \mathbb{N})$ *dir. Bu A matrisi en genel haldedir.* $a_{ni} = (1 - a_{nn})a_{n-1,i}$ $(\, i = 1,2 \dots n),\ n = 2,3 \dots$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için,* $a_{nn} = 1$ *ya da* $a_{nn} < 1$ *şeklinde A matrisi seçerek, bu matrisin girdileriyle* $[0,1]$ *aralığında negatif olmayan sayıların* $0 \leq \propto_n < 1$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = \infty$ *şartını sağlayan* $\{\propto_n\}$ *dizisini kuralım. Şimdi* C *de aşağıdaki gibi* $\{x_n\}$ *dizisi tanımlayalım.*

$$x_1 \in C,\ x_{n+1} = M(x_n, \propto_n, T),\ n \in \mathbb{N} \tag{3.36}$$

Burada, $M(x_n, \propto_n, T) = (1 - \propto_n)x_n + \propto_n \ Tx_n$ *olmak üzere bu* $\{x_n\}$ *dizisine Mann iterasyonu denir.*

Şimdi bir metrik uzayda bezer tanımı yapalım. X konveks metrik uzay C de X in boştan farklı, konveks bir alt kümesi olsun. $\{\propto_n\}$, yukarıda bahsedildiği gibi $\{x_n\}$ dizisindeki $x_1 \in C,\ x_{n+1} = W(Tx_n, x_n, \propto_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ biçiminde tanımlarsak $\{x_n\}$ bir Mann iterasyonu olur.

Teorem 3.9: C*,* X *Banach uzayının boştan farklı, kapalı bir konveks alt kümesi ve* $T\colon C \to C$ *sürekli dönüşüm olsun.* $\{x_n\}$ *dizisi, (3.3) gibi tanımlansın. Eğer* $\{x_n\}$ *dizisi,* $p \in C$ *noktasına güçlü yakınsıyor ise, T'nin bir sabit noktası* p *dir.*

Örnek 3.9: $X = C = [0,1],\ T\colon C \to C$ *ve*

$$Tx = \begin{cases} 0: & x = 0 \\ 1: & 0 < x < 1 \\ 0: & x = 1 \end{cases} \tag{3.37}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $T0 = 0$ *ve (3.3) gibi tanımlanan* $\{x_n\}$ *Mann iterasyonu,* $x_1 \in (0,1)$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için,* $\propto_n = \frac{1}{n}$*, 1 e güçlü yakınsar fakat 1,* T *nin sabit noktası değildir.*

Önerme 3.1: X normlu uzay ve C kümesi uzayın boştan farklı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ dönüşümü, her $x \in C$ için,

$\|Tx - p\| \leq \|x - p\|$ *koşulunu sağlayan, C içinde sabit bir p noktasına sahip olan bir dönüşüm olsun. Bu durumda (3.36) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ Mann iterasyon dizisi için, $lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ limiti vardır.*

Önerme 3.2: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve C kümesi uzayın boştan farklı ve konveks bir alt kümesi olsun. $Fix\, T$ boştan farklı olmak üzere, $T: C \to C$ dönüşümü, $\|Tx - p\| \leq \|x - p\|, (\forall x \in C$ ve $p \in Fix\, T)$ şartını sağlasın. Böylece (3.34) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ Mann iterasyon dizisi için, $\sum_{n=1}^{\infty} min\{\propto_n, 1 - \propto_n\} = \infty$ kısıtlama koşuluyla, $lim_{n\to\infty}\, inf\|x_n - Tx_n\| = 0$ bulunur.

C, X bir düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Ayrıca T, C den C nin kompakt bir alt kümesine genişlemeyen dönüşüm olsun. $x_1 \in C$ alalım ve $\{x_n\}$ dizisini,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + Tx_n) = M\left(x_n, \frac{1}{2}, T\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.38}$$

şeklinde tanımlayalım. $\{x_n\}$ dizisi, C de T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Krasnoselskii, 1995] .

Örnek 3.10: $X = \mathbb{C}$ ve alışılmış mutlak değer metriği ile beraber, $C = \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ tanımlayalım. $T: C \to C, Tz = iz$ $(z \in C)$ dönüşümü tanımlayalım. $0 \in C$, T'nin bir sabit noktasıdır.

Picard iterasyonu uygularsak,

$$z_{n+1} = Tz_n = i^{n+1} \quad z_0 \quad n = 0,1,,2\, ... \tag{3.39}$$

ve

$$|T^n z_0 - T^{n+1} z_0| = |i^n z_0 - i^{n+1} z_0| = \\ |i^n|\,|1-i|\,|z_0| = \sqrt{2}\,|z_0| \nrightarrow 0 \tag{3.40}$$

elde edilir. Ama,

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + Tz_n) = \frac{1+i}{2}\, z_n = (\frac{1+i}{2})^{n+1}\; z_0 \tag{3.41}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n - z_{n+1}| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1+i}{2}\right)^n \right| \left| 1 - \frac{1+i}{2} \right| \; |z_0| = \\ \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{n+1} |z_0| \tag{3.42}$$

$$= \left(\sqrt{2}+1\right)|z_0| \; < \infty \tag{3.43}$$

bulunur. Yani $\{z_n\}$ *Cauchy dizisi olur.* $lim_{n\to\infty} z_n = p$ *alalım.* $z_n - Tz_n \to 0$ *olduğundan* $p = 0$ *bulunur. Bu yüzden* $\{z_n\}$, 0*'a güçlü yakınsar.*

Teorem 3.10: X bir Banach uzay ve C, *bu uzayın boştan farklı, kapalı bir alt kümesi olsun.* T, C *den* X *in kompakt bir alt kümesine genişlemeyen dönüşüm olsun.* $x_1 \in C$ *alalım.*

i) $0 \leq \propto_n \leq 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = \infty$, $\{\propto_n\}$ *reel sayılar dizisi*

ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n \in C$ *ve* $x_{n+1} = M(x_n, \propto_n, T)$

şartları sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ *dizisi* $Fix\,T$ *nin bir elemanına güçlü yakınsar [Ishikawa, 1974] .*

Teorem 3.11: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve C, *bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $T: C \to C$ *genişlemeyen dönüşümü en az bir sabit noktaya sahip olsun.* $\{\propto_n\}$ *dizisi,* $0 \leq \propto_n < 1$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n (1 - \propto_n) = \infty$ *olacak biçimde, negatif olmayan sayılar dizisi olsun.* $I - T$ *dönüşümü* C *nin kapalı, sınırlı* *alt kümelerini C nin kapalı kümelerine dönüştürsün. Böylece,* (3.36) *gibi tanımlanan* $\{x_n\}$ *Mann iterasyonu, T nin sabit noktasına güçlü yakınsar [Groetsch, 1974].*

Tanım 3.1: X normlu uzay ve C bu uzayın boştan farklı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ dönüşümünün C içinde en az bir p sabit noktası olsun. Eğer $||Tx - p|| \leq ||x - p||$ $(\forall x \in C)$ oluyorsa, T dönüşümüne quasi-genişlemeyen dönüşüm denir.

Örnek 3.11:

$X = l_\infty$ *ve* $C = B_x = \left\{x \in l_\infty : ||x||_\infty \leq 1\right\}$ *olsun.* $T : C \to C$ *dönüşümü,*

$$Tx = (0, x_1^2, x_2^2 \dots), x = (x_1, x_2 \dots) \in C \tag{3.44}$$

biçimde tanımlayalım. $0 = (0,0,\dots,0,\dots)$ *T nin sabit noktasıdır. Ayrıca,*

$$\begin{aligned} ||Tx - 0||_\infty = ||(0, x_1^2, x_2^2 \dots)||_\infty \leq \\ ||(0, x_1, x_2 \dots)||_\infty = ||x - p|| \; (\forall x \in C\,) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Yani, T quasi-genişlemeyen dönüşüm olur. T, genişlemeyen dönüşüm değildir. Çünkü,

$$||Tx - Ty||_\infty = |\left|0, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}, \dots\right||_\infty = \frac{5}{16} > \frac{1}{4} = ||x - y||_\infty \tag{3.46}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.12: X düzgün konveks Banach *uzay ve C, bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi* olsun. *$T: C \to C$, p gibi en az bir sabit noktası olan quasi-genişlemeyen dönüşüm olsun.*

$$x_{n+1} = T_{\propto_n} x_n = M(x_n, \propto_n, T) \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.47}$$

biçimde $\{x_n\}$ *Mann iterasyonunu kuralım. Burada* $\{\propto_n\}$*, negatif olmayan sayılar dizisi olsun. Böylece* $\{x_n\}$ *dizisi için,*

i) $\lim_{n\to\infty}||x_n - p||$ vardır.
ii) $\lim_{n\to\infty}||x_n - Tx_n|| = 0$

şartlarını sağlanır. Ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T_{\propto_n}T_{\propto_{n-1}}\dots T_{\propto_1}x_1 - T_{\propto_{n-1}}T_{\propto_{n-2}}\dots T_{\propto_1}x_1\right\| = 0 \tag{3.48}$$

gerçekleşir.

Örnek 3.12:
$X = C = [0,1]$ *üzerinde alışılmış metrik ile göz önüne alınsın.* $T: C \to C$ *dönüşümü,*

$$Tx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

şeklinde tanımlansın. T dönüşümü sürekli değildir. Eğer $\{x_n\}$ *dizisi,* $x_n - Tx_n \to 0$ *olacak biçimde* C *de sınırlı dizi olursa,* Bolzano-*Weierstrass teoremi gereği yakınsak alt dizisi vardır.*

Tanım 3.2: X bir Banach uzayı ve C uzayın boştan faklı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ dönüşümü *için,* $Fix\ T \neq \emptyset$ *gerçekleşsin.*

"şart 1": $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ $f(0) = 0$, $f(t) > 0$ $t \in (0,\infty)$ *azalmayan fonksiyonu her* $x \in C$ *için,* $||x - Tx|| \geq f(d(x, Fix\ T))$ *şartını sağlayacak biçimde varsa T dönüşümü "şart 1" i sağlar denir.*

"şart 2": $c > 0$ *sabiti için,* $||x - Tx|| \geq c.d(x, Fix\ T)$ *oluyorsa T dönüşümü "şart 2"yi sağlar denir.*

Örnek 3.13: X Banach uzayının boştan faklı bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \to C$ dönüşümü,

$$||Tx - Ty|| \leq a||x - y|| + b||x - Tx|| + c||y - Ty|| \quad (\forall x, y \in C) \tag{3.50}$$

şartını sağlasın. Burada $a, b, c \geq 0$ ve $a + b + c \leq 1$ geçerlidir. Eğer $Fix\, T \neq \emptyset$ oluyorsa, T dönüşümü "şart 2"yi sağlar.

Önerme 3.3: X Banach uzayının, boştan faklı, kapalı ve sınırlı bir C alt kümesini alalım. $Fix\, T \neq \emptyset$ olacak biçimde, $T: C \to C$ dönüşümü tanımlayalım. Eğer $I - T$ dönüşümünü C'nin kapalı sınırlı alt kümelerini X'in kapalı alt kümelerine dönüştürüyorsa, T "şart 1"i sağlar.

Teorem 3.13: X düzgün konveks bir Banach uzayı, C , bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun $T: C \to C$ sürekli quasi-genişlemeyen dönüşüm alalım. Eğer T "şart 1"i sağlarsa, $x_1 \in C$ keyfi değeriyle, (3.36) gibi tanımlanan Mann iterasyon dizisi $\{x_n\}$, $\{\propto_n\}$ negatif olmayan sayıların $[0,1]$ aralığında 0 ve 1 de uzak sınırlı dizisi olacak şekilde T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

Burada $\{x_n\}$ dizisinin 0 da uzak sınırlı olması 0 dan kesin büyük bir alt sınıra sahip olması veya buna karşılık olarak 0 dan kesin küçük bir üst sınıra sahip olması demektir. $\{x_n\}$ dizisinin 1 de uzak sınırlı olması da benzer şekilde ifade edilir.

Sonuç 3.2: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve C, bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm alalım.

$$t \in (0,1) \text{ için } T_t = t\ I + (1 - t)T \tag{3.51}$$

alalım. $I - T$, C nin kapalı, sınırlı kümelerini X in kapalı alt kümelerine dönüştürüyorsa ve $Fix\, T \neq \emptyset$ oluyorsa, her bir $x \in C$ için, $\{T_t^n x\}$, T nin her bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Browder and Petryshyn, 1966].

Teorem 3.14: X, Opial şartını sağlayan bir Banach uzayı olsun. C, X in zayıf kompakt bir alt kümesi olsun. $T: C \to X$ genişlemeyen dönüşümü ele alalım. (3.36) *gibi, C de verilen bir $\{x_n\}$ dizisi düşünelim. Burada $\{\propto_n\}$, $0 \leq \propto_n \leq 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = \infty$ biçiminde negatif olmayan sayıların dizisi olsun. Böylece $\{x_n\}$ dizisi, T'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.*

Teorem 3.15: X düzgün konveks Banach uzayı, Frechet diferansiyellenebilir normlu ve C , bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun Her bir $x_1 \in C$ için, (3.36) gibi $\{x_n\}$ Mann iterasyonunu tanımlayalım. Bu dizi, $\sum_{n=1}^{\infty} min \ \{\propto_n, 1 - \propto_n\} = \infty$ kısıtlama koşuluyla T'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Örnek 3.14: $X = \mathbb{R}^2$ ve $||x|| = \sqrt{||x||_1^2 + ||x||_2^2}$ ve $Y = L_p[0,1]$ $1 < p < \infty$ alalım. $(p \neq 2)$ XxY Kartezyen çarpımı Opial şartını sağlamaz. Düzgün konveks olur ve normu da Frechet diferansiyellenebilir norm değildir. Ama dualinin Kadec-Klee özelliği vardır.

Teorem 3.16: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve duali Kadec-Klee özelliğine sahip olsun. C, bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşüm olsun. (3.36) *deki gibi $\{x_n\}$ Mann iterasyonu tanımlayalım. $\sum_{n=1}^{\infty} min\{\propto_n, 1 - \propto_n\} = \infty$ kısıtıyla, T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.*

Burada dikkat edersek, genişlemeyen dönüşümler için iterasyonun yakınsaması Hilbert uzaylarda bile zayıf yakınsamadır. Bu sorunu çözebilmek için Mann iterasyonunu modifiye edilir. C, bir X lineer uzayının boştan farklı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ bir dönüşüm ve her $n \in \mathbb{N}$ için, $\{\propto_n\}$ reel sayı dizisi, $0 < a \leq \propto_n \leq b < 1$ şartını sağlasın. C'de bir $\{x_n\}$ dizisini,

$$x_1 \in C, \qquad x_{n+1} = M(x_n, \propto_n, T^n), \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.52}$$

biçimde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanmış forma modifiye Mann iterasyonu denir.

X Banach uzayının boştan farklı, konveks bir C alt kümesi olsun. $T: C \to C$ bir asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ olacak biçimde $\{k_n\}$ dizisi alalım. (3.52) gibi Modifiye Mann iterasyonu tanımlayalım. Bu durumda,

i) p, T'nin bir sabit noktası olursa $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ vardır.
ii) $\lim_{n\to\infty}\|x_n - T^n x_n\| = 0$ ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0$ olur.

Teorem 3.17: X düzgün konveks Banach uzayı Opial şartını sağlasın ve C, *bu uzayın kapalı, sınırlı, konveks ve boştan farklı bir alt kümesi olsun.* $T : C \to C$ *asimptotik genişlemeyen dönüşümünü ve* $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ *olacak biçimde* $\{k_n\}$ *dizisini ele alalım.* $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ *aralığında negatif olmayan, ayrıca 0 ve 1 de uzak sınırlı bir dizi olsun. Böylece (3.52) gibi tanımlanan modifiye Mann iterasyonu,* T *nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.*

Teorem 3.18: X Frechet diferansiyellenebilir normlu, düzgün konveks bir Banach uzayı ve C, *bu uzayın boştan farklı, kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun.* $T: C \to C$ *asimptotik genişlemeyen bir dönüşüm ve* $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n - 1) < \infty$ *koşulunu sağlayan* $\{k_n\}$ *dizisi alınsın. (3.52) ile verilen* $\{x_n\}$ *modifiye Mann iterasyonu tanımlayalım ve* $\{\alpha_n\}$, $(0,1)$ *aralığında negatif olmayan sayıların 0 ve 1 de uzak sınırlı bir dizisi olsun. Böylece* $\{x_n\}$ *dizisi,* T *nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar. Ayrıca X düzgün konveks bir Banach uzayı ve dual uzayı* X^* *Kadec-Klee özelliğini sağlasın.* C, *bu uzayda boştan farklı, konveks ve sınırlı bir alt küme olsun.* $\{k_n\}$, $\{\alpha_n\}$ *ve* $\{x_n\}$ *teoremdeki gibi tanımlansın. Böylece* $\{x_n\}$ *dizisi de T'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.*

Güçlü yakınsama için, Yao ve arkadaşları tarafından, Krasnaselskii-Mann iterasyonu modifiye edilmiştir.

Teorem 3.19: H Hilbert uzayı ve $T: H \to H$ dönüşümü, $FixT$ *boştan farklı olan genişlemeyen bir dönüşüm olsun.*

$[0,1]$ *aralığından,*

- $C_1)\ lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$
- $C_2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = \infty$
- $C_3)\ \beta_n \in [a,b] \subseteq (0,1)$

şartlarını sağlayan $\{\propto_n\}$*ve* $\{\beta_n\}$ *dizileri alalım.*

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri,

$$y_n = (1 - \propto_n)x_n$$
$$x_{n+1} = (1-\beta_n)y_n + \beta_n T y_n \quad n \geq 0 \tag{3.53}$$

olacak biçimde tanımlansın. Böylece $\{x_n\}$ *ve* $\{y_n\}$ *dizileri,* T *de bir sabit noktaya güçlü yakınsar [Yao et al., 2009b] .*

C kümesi, E nin kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olmak üzere, $d(C) = \sup\{||x-y||: x,y \in C\}$ ile C nin çapını, $r(x,C) = \sup\{||x-y||, y \in C\}$ olmak üzere, $r(C) = \inf\{r(x,C): x \in C\}$ ile C nin Chebyshev yarıçapını gösterelim. $N(E) = \inf\left\{\frac{d(C)}{r(C)} : d(C) > 0\right\}$ ile E nin normal yapı sabitini tanımlayalım.

Lemma 3.1: E düzgün konveks bir reel Banach uzayı, $r > 0$ *olmak üzere* $B_r(0) = \{x \in E: ||x|| \leq r\}$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *olsun.*

$g: [0,2r] \to R$, $g(0) = 0$ *ve* $x, y \in B_r(0)$ *olmak üzere,*

$$||\lambda x + (1-\lambda)y||^2 \leq \lambda ||x||^2 + (1-\lambda)||y||^2 - \lambda(1-\lambda)\, g(||x-y||) \tag{3.54}$$

eşitsizliğini sağlayan, sürekli, kesin artan ve konveks g fonksiyonu vardır [Zalinescu, 1983].

Lemma 3.2: E düzgün konveks bir Banach uzayı, C *de bu uzayın kapalı, konveks bir alt kümesi olsun. Sabit noktası olan* $T: C \to C$ *genişlemeyen dünüşümü ele alalım.* C

kümesinde, $x_n \rightharpoonup x$ *ve* $x_n - Tx_n \to y$ *olsun. Böylece* $x - Tx = y$ *bulunur [Browder, 1965] [Goebel and Kirk, 1990].*

Lemma 3.3:

i) $\{\propto_n\} \subseteq [0,1],\ \sum \propto_n = \infty$
ii) $limsup \sigma_n \leq 0$
iii)$\curlyvee_n \geq 0\ (n \geq 0) ve\ \sum \curlyvee_n\ < \infty$

şartını sağlayan diziler ile

$$\propto_{n+1} \leq (1 - \propto_n) \propto_n + \propto_n \sigma_n + \curlyvee_n :\ n \geq 0 \tag{3.55}$$

biçimde $\{\propto_n\}$ *negatif olmayan reel sayılar dizisi alalım. Böylece* $\{\propto_n\} \to 0$ $(n \to \infty$ *olurken) gerçekleşir.[Xu, 2002]*

Lemma 3.4: $(x_0, x_1, \ldots) \in l_\infty$ *ve* μ *tüm Banach limitleri olmak üzere* $\mu_n . x_n \leq 0$ *olsun. Eğer* $lim_{n\to\infty} sup(x_{n+1} - x_n) \leq 0$ *olursa* $lim_{n\to\infty} sup\, x_n \leq 0$ *olur. [Shioji and Takahashi, 1997]*

Lemma 3.5: E *düzgün normal yapılı bir Banach uzayı ve* C*, bu uzayın boştan farklı, sınırlı bir alt kümesi olsun.* $\omega_w(x_n)$ *ile* $\{x_n\}$ *dizisinin zayıf-* ω *limit kümesini belirtilsin.* $T: C \to C$ *düzgün* L*-Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Burada,* $L < N(E)^{\frac{1}{2}}$*,* C *nin boştan farklı, kapalı, sınırlı ve konveks bir* K *alt kümesi için,* $x \in K$ *demek* $\omega_w(x) \in K$ *demektir.*

Burada, $\omega_w(x))$ T'nin dönüşümü için x noktasında zayıf ω-limit kümesidir ki bu küme $\{y \in E:\ y = zayıf - \lim\ \ T^{n_j}\ x\}$ biçimindedir. Böylece T nin K da sabit noktası vardır [Lim and Xu, 1994].

Teorem 3.20: E, *Gateaux diferansiyellenebilir normlu, reel ve düzgün konveks Banach uzayı olsun.* $Fix\, T \neq \emptyset$ *olacak biçimde bir* $T: E \to E$ *genişlemeyen dönüşümünü ele alalım.* $[0,1]$ *aralığında,*

- $C_1)\ lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$
- $C_2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \propto_n = \infty$
- $C_3)\ \beta n \in [a,b] \ \subset\ [0,1]$

olacak biçimde $\{\propto_n\}\, ve\, \{\beta_n\}$ *dizileri alalım.* $x \in E$ *olacak biçimde* $\{x_n\}\, ve\, \{y_n\}$ *dizilerini,*

$$\begin{aligned} y_n &= (1 - \propto_n) x_n \\ x_{n+1} &= (1-\beta_n) y_n + \beta_n\, T\, y_n \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{3.56}$$

şeklinde seçelim. Böylece $\{x_n\}$ *dizisi,* T *nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Shehu, 2013].*

Bu teorem, Teorem 3.19. un reel Hilbert uzaydan, reel düzgün konveks Banach uzaya genişlemesidir. Burada dikkat edersek, her düzgün, pürüzsüz Banach uzayının düzgün Gateaux differansiyellenebilir normu vardır.

Sonuç 3.3: Dahası bu sonuçlar l_p *uzaylarında da* $(1 < p < \infty)$ *uygulanabilir. Krasnoselskii-Mann algoritması,* T *dönüşümünün bir sabit noktasına zayıf yakınsarken, modifiye edilmiş yöntemi, genişlemeyen dönüşümler için düzgün Gateaux diferansiyellenebilir normlu reel düzgün konveks Banach uzaylarda güçlü yakınsamaya sahiptir [Shehu, 2013].*

Nakajo ve Takahashi, H Hilbert uzayında Mann iterasyonunu, P bir metrik projeksiyon olmak üzere,

$$x_0 = x \in C, \quad y_n = \propto_n x_n + (1 - \propto_n) T x_n \tag{3.57}$$

$$C_n = \{z \in C : \left||y_n - z|\right| \leq \left||x_n - z|\right| \} \tag{3.58}$$

$$Q_n = \{z \in C :< x_n - z, \ x_0 - x_n > \geq 0\} \tag{3.59}$$

$$x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0) \tag{3.60}$$

şeklinde modifiye ederek güçlü yakınsamayı garanti etmişlerdir.
Eğer $\{\propto_n\}$ dizisi sınırlı olursa, bu tanımladıkları $\{x_n\}$ dizisi $x_0 = x \in C$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} y_n &= \propto_n x_n + (1 - \propto_n) \ Tx_n \\ x_{n+1} &= \beta_n . u + (1 - \beta_n) \, y_n \end{aligned} \tag{3.61}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $u \in C$ belli bir nokta, $\{\propto_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ $dizileri$ $(0,1)$ aralığından birer dizi olsun. Böylece $\{x_n\}$, T'nin bir sabit noktasına yakınsar [Cioranescu, 1990].

X reel Banach uzayı olsun. $J: X \to X^*$

$$J(x) = \left\{x^* \in X^* : < x, x^* > = \left||x|\right|^2 = \left||x^*|\right|^2\right\}, x \in X \tag{3.62}$$

normalleştirilmiş dual dönüşümü tanımlayalım.

Lemma 3.6: X Banach uzayının düzgün pürüzsüz olması için gerek ve yeter koşul J dual dönüşümünün X in sınırlı kümelerinde, tek değerli ve normdan norma düzgün sürekli olmasıdır.

Lemma 3.7: J ile X reel Banach uzayından X^* dual uzayına normalleştirilmiş dual dönüşümü tanımlayalım.
$x, y \in X$ *için,*

$$||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2 < y, j(x+y) > \ \forall j \in (x+y) \in J(x+y) \tag{3.63}$$

[Takahashi W., 2000]

Tanım 2.24.'e benzer biçimde, X Banach uzayında $C\ ve\ D$ boştan farklı alt kümeler olmak üzere, C kapalı, konveks ve $D \subset C$ olsun. $Q: C \rightarrow D$ dönüşümüne, $\forall x \in D$ için $Q(x) = x$ oluyorsa C'den D'ye büzülme (içe çeken) denir.

Eğer bu büzülme $x + t(x - Q(x)) \in C$ için $Q\left(x + t(x - Q(x))\right) = Q(x)$ eşitliğini $\forall x \in C$ ve $t \geq 0$ için sağlıyorsa buna parlak (sunny) denir.

X pürüzsüz Banach uzayı, $Q: C \rightarrow D$ genişlemeyen parlak dönüşüm olsun. Her x ve $y \in D$ için, $< x - Qx, J(y - Qx) > \leq 0$ sağlanırsa, büzülmedir [Bruck, 1973], [Goebel and Reich, 1984], [Reich, 1973].

Lemma 3.8: X düzgün pürüzsüz bir Banach uzayı ve $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her bir sabit $u \in C$ için ve her $t \in (0,1)$ için, $x \rightarrow t\,u + (1-t)\,Tx$ şeklinde tanımlanan daralma dönüşümünün tek sabit noktası $x_t \in C,\ t \rightarrow 0$ iken T'nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Reich, 1980].

$\{\propto_n\}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan negatif olmayan reel sayılar dizisi olsun.

$$\propto_{n+1} \leq (1 - \gamma_n) \propto_n + \gamma_n\, \sigma_n \ \ (n \geq 0) \tag{3.64}$$

burada $\{\gamma_n\} \subset (0,1)$ ve $\{\sigma_n\}$ dizisi,

i) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = +\infty$
ii) $\lim_{n\to\infty} sup\, \sigma_n \leq 0$ veya $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n\, \sigma_n| < \infty$

şartlarını sağlayan diziler olsunlar. Böylece $\{\propto_n\} \rightarrow 0$ olur.

Kim ve Xu Mann iterasyonunu modifiye etmişlerdir.

Teorem 3.21: Düzgün pürüzsüz bir X Banach uzayının, kapalı, konveks bir C alt kümesini ele alalım. $Fix\,T$ boştan farklı olmak şartıyla, $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşümü alalım. $u \in C$ ve $(0,1)$ aralığından $\{\propto_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri alalım. Bu diziler,

i) $\propto_n \to 0$, $\beta_n \to 0$
ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n = \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$
iii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\propto_{n+1} - \propto_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$

koşullarını sağlasın. Şimdi C de $\{x_n\}$ dizisini, $x_0 = x \in C$ olmak üzere,

$$y_n = \propto_n x_n + (1 - \propto n) T x_n \; : \; n \geq 0$$
$$x_{n+1} = \beta_n u + (1 - \beta n) y_n : \; n \geq 0 \tag{3.65}$$

Böylece $\{x_n\}$, T dönüşümünün bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Kim and Xu, 2005] .

Şimdi Mann modifiye iterasyonu ile Moudafi'nin akışmazlık yaklaşım yönteminin bir kombinasyonu yapılacaktır.

X bir Banach uzay, C, bu uzayın kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere, $T: C \to C$ genişlemeyen dönüşümü tanımlansın. π_C ile C üzerindeki tüm daralma dönüşümleri kümesini tanımlayalım. $f \in \pi_C$ ve $x_0 = x \in C$ için,

$$y_n = \propto_n x_n + (1 - \propto_n) T x_n \;\; (n \geq 0)$$
$$x_{n+1} = \beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n) y_n \;\; (n \geq 0) \tag{3.66}$$

Burada $\{\propto_n\}$ *ve* $\{\beta_n\}$, $(0,1)$ aralığından olmak üzere bazı şartlar altında $\{x_n\}$ dizisi, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

Lemma 3.9: X Banach uzayının, $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ sınırlı dizilerini ele alalım. $[0,1]$ aralığından $\{\curlyvee_n\}$ dizisini, $0 < \lim_{n\to\infty} \inf \curlyvee_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup \curlyvee_n < 1$ olacak şekilde seçelim.

$$x_{n+1} = \curlyvee_n\, x_n + (1 - \curlyvee_n) z_n \;(n \geq 0 \tag{3.67}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left(\left\|z_{n+1} - z_n\right\| - \left\|x_{n+1} - x_n\right\|\right) \leq 0 \tag{3.68}$$

varsayalım. Böylece $lim_{n\to\infty}\left\|z_n - x_n\right\| = 0$ *gerçekleşir [Suzuki, 2005].*

Lemma 3.10: $\{\curlyvee_n\} \subseteq (0,1)$ *ve* $\{\delta_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *dizileri,*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \curlyvee_n = \infty$
ii) $lim \quad sup \frac{\delta_n}{\curlyvee_n} \leq 0$ *ya da* $\sum_{n=0}^{\infty} |\delta_n| < \infty$

şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, $\{\propto_n\}$ *dizisi için,* $\propto_{n+1} \leq (1 - \curlyvee_n) \propto_n + \delta_n \quad (n \geq 0)$ *gerçeklendiğini varsayalım. Bu durumda* $lim_{n\to\infty} \propto_n = 0$ *gerçekleşir [Xu, 2002].*

Lemma 3.11: X düzgün pürüzsüz bir Banach uzayı, C *ise bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun* $Fix\, T \neq \emptyset$ *olacak biçimde,* $T: C \to C$ *genişlemeyen bir dönüşüm ve* $f \in \pi_C$ *alalım.* $\{ x_t\}$ *dizisini,*

$$x_t = t.f(x_t) + (1 - t)Tx_t \tag{3.69}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\{x_t\}$*,* $Fix\; T$ *de bir sabit noktaya güçlü yakınsar [Xu, 2004].*

Teorem 3.21: X düzgün pürüzsüz bir Banach uzayı ve C*, bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere,* $Fix\, T \neq \emptyset$ *şartıyla,* $T: C \to C$ *genişlemeyen dönüşümü ve* $f \in \pi_C$ *daralma dönüşümünü ele alalım* (0,1) *aralığında tanımlı* $\{\propto_n\}$ *ve* $\{\beta_n\}$ *dizileri,*

- $C_1)\; \beta n \to 0$
- $C_2)\; \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$

- $C_3)$ $0 < lim_{n\to\infty} \, inf \propto_n \leq lim_{n\to\infty} \, sup \propto_n < 1$

şartlarını sağlasınlar. O zaman (3.65) teki gibi verilen $\{x_n\}$ dizisi, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Yao et al., 2008].

Sonuç 3.4: Eğer bu $\{\propto_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri, C_1 ve C_2 şartlarını sağlarsa, keyfi $x_0 \in C$ için, (3.65) gibi tanımlanan $\{x_n\}$ dizisi, T nin sabit bir noktasına güçlü yakınsar [Yao et al., 2008].

3.1.3 Ishikawa İterasyon Algoritması

X bir normlu uzay ve D, bu uzayın bir alt kümesi olsun. $T: D \to X$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. D de verilen $\{x_n\}$ dizisi, aşağıdaki şartları sağlayan $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ reel sayı dizileri yardımıyla,

$$x_{n+1} = t_n \, T(s_n \, Tx_n + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n : \; n = 1,2 \ldots \tag{3.70}$$

biçiminde tanımlansın.

i) $0 \leq t_n \leq t < 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = +\infty$
ii) $0 \leq s_n \leq 1$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$.

Eğer $\{x_n\}$ sınırlı diziyse, $\lim_{n\to\infty} ||Tx_n - x_n|| = 0$ bulunur. D, X ve T üzerinde oluşan şartlar güçlü ve zayıf yakınsamayı verir.

1974 de Ishikawa, X normlu uzayı ve D, bu uzayın bir alt kümesi olmak üzere, $T: D \to X$ genişlemeyen dönüşümünü alarak,

$$x_{n+1} = t_n \, T(s_n \; Tx_n + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n : n = 1,2 \ldots \tag{3.71}$$

iterasyonunu tanımlamıştır. Burada $\{t_n\}\ ve\ \{s_n\}$ dizileri, $[0,1]$ aralığında belirli kısıtlamaları sağlayan diziler olsun. Dikkat edersek Mann iterasyonu aslında $s_n = 0\ (n \geq 1)$ için seçilmiş halidir.

H bir Hilbert uzay olmak üzere, $T: H \to H$ dönüşümü her $x, y \in H$ için,

$$||Tx - Ty||^2 \leq \left||x - y|\right|^2 + ||(I - T)x - (I - T)y||^2 \qquad (3.72)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu dönüşüme sahte daralma dönüşümü denir.

K, H Hilbert uzayının kapalı, kompakt bir alt kümesi ve $T: K \to K$ Lipschitz sahte daralma dönüşümü olsun. $x_0 \in K$ keyfi noktası alalım.
$\{\propto_n\}\ ve\ \{\beta_n\}$ dizileri,

i) $0 \leq \propto_n \leq \beta_n < 1$
ii) $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$
iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \propto_n \beta_n = \infty$

şartlarını sağlayan pozitif sayı dizisi olmak üzere $\{x_n\}$ dizisini,

$$\begin{aligned} y_n &= (1 - \propto_n)x_n + \propto_n T\, x_n \\ x_{n+1} &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n\ T\, y_n \end{aligned} \qquad (3.73)$$

olacak biçimde tanımlarsak $\{x_n\}$, T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar.

Teorem 3.22: X bir normlu uzay ve uzayın bir D alt kümesi için, $T: D \to X$ genişlemeyen dönüşümü gözönüne alınsın. D den alınan $\{x_n\}$ dizisi ve $\{t_n\}$ reel sayılar dizisi,

i) $0 \leq t_n \leq 1$
ii) $x_{n+1} = (1 - t_n)x_n + t_n\, Tx_n\ ,\ n = 1,2, \ldots$

koşulları sağlansın. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olursa, $\left||Tx_n - x_n|\right| \to 0\ \ (n \to \infty)$ *gerçekleşir [Ishikawa, 1976] .*

1976'da Ishikawa Banach uzayının konveksliğini varsaymadan bu teoremi ispat etmiştir. Yapılacak ilk iş bu teoremi Ishikawa iterasyon algoritmasına genişletmek olacaktır. Daha sonra Banach uzaylarda zayıf ve güçlü yakınsama incelenecektir.

Lemma 3.12: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ negatif olmayan iki dizi olsunlar.
Her $n \geq 1$ için, $a_{n+1} \leq a_n + b_n$ gerçekleşsin. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsak ise, $lim_{n\to\infty}\, a_n$ limiti vardır [Tan and Xu, 1993] .

Lemma 3.13: X normlu uzayında $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri alınsın. Eğer öyle bir $\{t_n\}$ reel sayı dizisi,

i) $0 \leq t_n \leq 1$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$
ii) $a_{n+1} = (1 - t_n)a_n + t_n\, b_n \quad (\forall n \geq 1)$
iii) $lim_{n\to\infty}||a_n|| = d$
iv) $lim_{n\to\infty}\, sup||b_n|| \leq d$ *ve* $\{\sum_{i=1}^{n} t_i\, b_i\}$ *dizisi sınırlı*

şartlarını sağlarsa, $d = 0$ bulunur.

Lemma 3.14: X normlu uzay ve bu uzaydan alınan bir D alt kümesi için $T: D \to X$ genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. D kümesinde verilen bir $\{x_n\}$ dizisi, $0 \leq s_n,\ t_n \leq 1$ olmak üzere her $n \geq 1$ için,

$$x_{n+1} = t_n\, T(s_n\, Tx_n + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n \quad n = 1,2,3, \dots \tag{3.74}$$

şartını sağlasın. Bu durumda her $n \geq 1$ ve her $p \in Fix\, T$ için, $||x_{n+1} - p|| \leq ||x_n - p||$ gerçekleşir [Tan and Xu, 1993] .

Teorem 3.23: X normlu uzayının bir D alt kümesi için, $T: D \to X$ genişlemeyen dönüşümü tanımlayalım. D de bir $\{x_n\}$ dizisini ele alalım. $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$ iki reel sayı dizisi olsun. Bu diziler, *i)* $0 \leq t_n \leq 1$ *ve* $\sum t_n = +\infty$

ii) $0 \leq s_n \leq 1$ *ve* $\sum s_n < +\infty$

iii)$x_{n+1} = t_n \; T(s_n \; Tx_n + (1 - s_n)x_n) + (1 - t_n)x_n \quad n = 1,2, \ldots$

şartlarını sağlasınlar. Eğer $\{x_n\}$ *sınırlıysa,* $||Tx_n - x_n|| \to 0$ *gerçekleşir. [Deng, 1996].*

Dikkat edersek yukarıdaki teorem Lemma 3.13'ün bir genellemesidir.

Teorem 3.24: Opial şartını sağlayan bir X *Banach uzayı olsun.* D *zayıf kompakt,* T *ve* $\{x_n\}$ *dizisini Teorem 3.23 teki gibi belirlensin. Böylece* $\{x_n\}$ *dizisi,* T *nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.*

X *bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan bir* D *alt kümesini ele alalım.* $Fix\,T \neq \emptyset$ *olacak biçimde* $T: D \to X$ *dönüşümünü ele alalım.* $d(x, Fix\,T) = inf\{||x - z||: z \in Fix\,T\}$ *olsun. Her* $x \in D$ *için,*

$$||x - Tx|| \geq f\big(d(x, Fix\,T)\big) \tag{3.75}$$

olacak biçimde, $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ *azalmayan ve* $f(0) = 0$ *,* $f(r) > 0, r \in (0, \infty)$ *olacak biçimde bir* f *fonksiyonu varsa* T *dönüşümüne "Şart A" sağlar denir [Deng, 1996].*

Teorem 3.25: X *bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan kapalı bir* D *alt kümesini ele alalım.* T*,* D *den* X *in kompakt alt kümesine tanımlı genişlemeyen dönüşüm olsun. Eğer* $\{x_n\}$ *dizisi, Teorem 3.23 teki gibi ise,* T *nin bir sabit noktasına yakınsar [Deng, 1996].*

Teorem 3.26: X, D *ve* $\{x_n\}$*, Teorem 3.25 de verilen şartları sağlasınlar.* $Fix\,T \neq \emptyset$ *olacak biçimde* $T: D \to X$ *genişlemeyen bir dönüşüm tanımlansın. Eğer bu* T *dönüşümü "Şart A " yı sağlarsa,* $\{x_n\}$ *dizisi,* $Fix\,T$*'nin bir üyesine yakınsar [Deng, 1996].*

Teorem 3.27: X bir Banach uzayı ve D kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. T dönüşümü $D \rightarrow D$ ve

i) $||Tx - Ty|| \leq ||x - y|| \quad (\forall x, y \in D)$
ii) $\propto > 0$ *değerleri için* $||Tx - Ty|| \leq \propto \left(||x - Tx|| + ||y - Ty||\right) \quad (\forall x, y \in D)$

şartlarını sağlasın. O zaman $\{x_n\}$ dizisi, Teorem 3.23 teki gibi verilsin. O zaman $\{x_n\}$, T dönüşümünün tek sabit noktasına yakınsar.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.24 ün düzgün konveks Banach uzaylara genişlemesidir [Deng, 1996].

Teorem 3.28: X düzgün konveks bir Banach uzayı, normuda Frechet differansiyellenebilir norm olsun. C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere, $T: C \rightarrow C$ sabit noktalı genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. $\{x_n\}$ dizisi Teorem 3.23 teki gibi tanımlansın. O zaman $\{x_n\}$, T nin sabit bir noktasına zayıf yakınsar [Deng, 1996].

X, Opial şartını sağlayan veya Frechet diferansiyellenebilir normlu, düzgün konveks bir Banach uzayı olsun. C, X in kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi ve $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Keyfi bir $x_0 \in C$ başlangıç değeri için, $\{x_n\}$ Ishikawa iterasyonu, $\overline{\lim_{n\to\infty} s_n} < 1$ kısıtı ve $\{n\}$ dizisinin $\sum_{i=0}^{n} t_{n_k}(1 - t_{n_k})$ ıraksak olacak biçimde $\{n_k\}$ alt dizisi için, bu $\{x_n\}$ dizisi T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Eğer X uzayı düzgün konveks olursa, her $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen dönüşümünün sabit bir noktası vardır. Tan ve Xu aşağıdaki teoremi ispat etmiştir.

Teorem 3.29: X Opial şartını sağlayan veya Frechet differansiyellenebilir normlu düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_0 \in C$ başlangış değeri ve [0,1] aralığından alınan $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ dizileri için, Ishikawa iterasyonu $\overline{lim_{n\to\infty} s_n} < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(1 - t_n)$ ıraksak ve $\sum_{n=0}^{\infty} s_n(1 - t_n)$ yakınsak olmak kısıtlamalarıyla T'nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar.

Yukarıdaki teoremdeki gibi belirlenen $X, C\ ve\ T$ için keyfi $x_0 \in C$ başlangıç değeriyle $\{x_n\}$ Ishikawa iterasyonu, $\{n\}$ dizisinin $\{n_k\}$ alt dizisi için, $\overline{\lim}_{n\to\infty} s_n < 1\ ve\ \sum_{k=0}^{\infty} t_{n_k}(1-t_{n_k})$ ıraksak olmak şartıyla T nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar [Tan and Xu, 1993].

Lemma 3.15: X, Opial şartını sağlayan veya Frechet differansiyellenebilir normlu düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her bir $f \in Fix\ T$ için $\{\|x_n - f\|\}$ artmayan olur ve $lim_{n\to\infty}\|x_n - f\|$ vardır [Tan and Xu, 1993] .

Lemma 3.16: X, Opial şartını sağlayan veya Frechet differansiyellenebilir normlu düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Keyfi $x_0 \in C$ başlangış değeri ve Teorem 3.29 da verildiği gibi [0,1] aralığından alınan $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ dizilerini ele alalım. $\overline{lim}_{n\to\infty} s_n < 1$ varsayalım. $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\sum_{k=0}^{\infty} t_{n_k}(1 - t_{n_k}) = +\infty$ koşulunu sağlayacak şekilde $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ alt dizisi varsa, $lim_{\underline{k\to\infty}} \|Tx_{n_k} - x_{n_k}\| = 0$ gerçekleşir.

Lemma 3.17: X, Frechet differansiyellenebilir normlu, düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzaydan alınan kapalı, sınırlı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Her $f_1, f_2 \in Fix\ T$ ve $0 < t < 1$ için, $lim\|tx_n + (1-t)\, f_1 - f_2\|$ vardır [Tan and Xu, 1993] .

1991'de Garnicki sıraki lemmayı vermiştir.

Lemma 3.18: X konveks Banach uzayı ve C sınırlı, kapalı ve konveks bir alt küme olsun. $\daleth$ ile $\Upsilon: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $\Upsilon(0) = 0$ biçimli, kesin artan ve konveks fonksiyonlar kümesini gösterelim. $S: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm olduğunu varsayalım. Bu dönüşüm,

$$\underset{\curlyvee \in \daleth}{V} \quad \underset{x,y \in C}{\wedge} \quad \underset{0 \le c \le 1}{\wedge} \curlyvee\left(\left|\left|c\, Sx + (1-c)Sy - S(cx + (1-c)y)\right|\right|\right) \le \left|\left|x-y\right|\right| - \left|\left|Sx - Sy\right|\right| \tag{3.76}$$

biçiminde "tip $\curlyvee$*" olarak adlandırılan özelliği sağlasın. Eğer* $y_n \to y$ *zayıf yakınsarsa,* $y_n,\ y \in C$ *için öyle bir* $g \in \daleth$ *vardır ki,* $g\left(\left|\left|y - Sy\right|\right|\right) \le lim_{n\to\infty}\, inf\left|\left|y_n - Sy_n\right|\right|$ *özelliğini sağlar [Gorrnicki, 1991].*

Not 3.1: X düzgün konveks bir Banach uzayı ve $T{:}\,C \to C$ *her bir genişlemeyen dönüşümü Lemma 3.18 deki gibi tanımlanan"tip* $\curlyvee$*" olarak adlandırılan özelliği sağlasın.* $\curlyvee$ *fonksiyonu T dönüşümüne bağlı olmadan* sadece C *nin çapına bağlı olarak seçilebilir [Bruck, 1979].*

Sonuç 3.5: X düzgün konveks bir Banach uzayı, C*, bu uzayın kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $S{:}\,C \to C$ *genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. Eğer* $y_n, y \in C$ *için,* $y_n \to y$ *zayıf yakınsarsa, öyle bir* $g{:}\,\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *kesin artan, konveks fonksiyon vardır. Bu* g *için* $g(0) = 0$ *olmak üzere,*

$$g\left(\left|\left|y - Sy\right|\right|\right) \le \lim_{n\to\infty} \inf\left|\left|y_n - Sy_n\right|\right| \tag{3.77}$$

koşulları sağlanır.

Teorem 3.30: Opial şartını sağlayan veya Frechet differansiyellenebilir normlu X düzgün konveks bir Banach uzayı ve bu uzayın kapalı, sınırlı ve konveks bir C *alt kümesini ele alalım.* $T{:}\,C \to C$ *genişlemeyen dönüşüm ve keyfi* $x_0 \in C$ *başlangıç değeriyle,* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyonu tanımlansın.* $\overline{lim_{n\to\infty}\, s_n} < 1$ *ve* $\{n\}_{n=0}^{\infty}$ *dizisinin keyfi* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *alt dizisi için,* $\sum_{k=0}^{\infty} t_{n_k}(1 - t_{n_k})$ *ıraksak olursa bu* $\{x_n\}$ *dizisi,* T *nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar [Zeng, 1998].*

Teorem 3.31: Düzgün konveks bir X Banach uzayında $T,\ C$ *ve* $\{x_n\}$ *Teorem 3.30 gibi tanımlansın.* C *nin* T *altında görüntüsü X in kompakt alt kümesi tarafından içerilirse,* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyonu güçlü yakınsar [Zeng, 1998] .*

Teorem 3.32: X düzgün konveks Banach uzayı T ve C Teorem 3.30 gibi olsunlar. Eğer bu T dönüşümü "şart A "yı sağlarsa, keyfi $x_0 \in C$ başlangıç değeri için, $\{x_n\}$ Ishikawa iterasyonu, $\overline{lim_{n\to\infty} s_n} < 1$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} t_n(1-t_n)$ serisinin ıraksak olması kısıtlamalarıyla T nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Zeng, 1998].

Şimdi düzgün konveks Banach uzaylarda güçlü ve zayıf yakınsama üzerinde duralım.

Lemma 3.19: X bir reel lineer normlu uzay ve C, bu uzayın boştan farklı, konveks bir alt kümesi olsun. $T: C \to C$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$, [0,1] aralığında alınan diziler olsun. $\{x_n\}$, Ishikawa iterasyon dizisi olsun. Böylece $\tau_n = min\ \{t_n, 1-t_n\} s_n$ olmak üzere,

$$||x_{n+1} - Tx_{n+1}|| \leq (1 + 2\tau_n)\, ||x_n - Tx_n|| \ (\forall n \geq 1) \tag{3.78}$$

gerçekleşir. Ayrıca, eğer $s_n = 0$ ve $lim_{n\to\infty}||x_n - Tx_n||$ limiti varsa, $||x_{n+1} - Tx_{n+1}|| \leq ||x_n - Tx_n||$ elde edilir.

Lemma 3.20: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ negatif olmayan reel sayıların iki dizisi olsunlar ve her $n \geq 1$ için, $a_{n+1} \leq (1 + b_n)a_n$ şartını sağlasınlar. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yakınsarsa, $lim_{n\to\infty} a_n$ vardır. Yani $\{a_n\}$ dizisnin 0 a yakınsayan bir alt dizisi varsa, $a_n \to 0$ bulunur.

X reel Banach uzayının konvekslik modülü her $\epsilon \in [0,1]$ için,

$$\delta_X(\epsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| : ||x||, ||y|| \leq 1\ , ||x-y|| \geq \epsilon\right\} \tag{3.79}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $0 < \epsilon \leq 2$ için, $\delta_X(0) = 0$ ve $\delta_X(\epsilon) > 0$ oluyors,X e düzgün konveks denir.

Lemma 3.21: X düzgün konveks bir Banach uzayı, δ_X konvekslik modülü olsun $\delta_X: [0,2] \rightarrow [0,1]$ sürekli, artan fonksiyon ve $\delta_X(0) = 0$, $\delta_X(t) > 0$ $(t > 0\ için)$ olsun.

$0 \leq c \leq 1$ *ve* $||u||, ||v|| \leq 1$ *için,*

$$||cu + (1-c)v|| \leq 1 - 2\min\{c, 1-c\}\, \delta_X\left(||u - v||\right) \tag{3.80}$$

olur [Bruck, 1979].

Lemma 3.22: X düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir C alt kümesini ele alalım. X Frechet diferansiyellenebilir normlu ve $\{T_n: n \geq 1\}$ C deki öz genişlemeyen dönüşümler ailesi olsun. $Fix\ T \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $n \geq 1$ için, $x \in C$ alıp $\{x_n\}$ dizisini, $x_{n+1} = T_n\, x_n$ biçiminde tanımlarsak, $f_1, f_2 \in Fix\ T$ ve $f_1 \neq f_2$ olmak üzere, $lim_{n\to\infty} < f_1 - f_2\ , x_n >$ vardır [Reich, 1979].

Teorem 3.33: X reel, düzgün konveks bir Banach uzayı ve bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir C alt kümesini ele alalım. $T: C \rightarrow C$ genişlemeyen dönüşümü olsun. $\{x_n\}$ Ishikawa iterasyonunu, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n(1 - t_n) = \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \infty$ biçiminde tanımlayalım. Burada τ_n Lemma 3.19. gibi alınsın. Böylece $x_1 \in C$ başlangıç değeriyle $\{||x_n - Tx_n||\}$ dizisi benzer $r_C(T)$ değerine yakınsar. Eğer $\tau_n = 0$ olursa $r_C(T) = inf\{||x - Tx|| : x \in C\}$ olur [Zhou et al., 2002].

İspat 3.33: Lemma 3.19 ve Lemma 3.20 den $lim_{n\to\infty}||x_n - Tx_n||$ vardır. Bu limiti $r(x_1)$ ile işaretleyelim. $\{x_n\}$ dizisine benzer kısıtlamalarla başka bir $\{x_n{}^*\}$ Ishikawa iterasyonu tanımlayalım. $x_1{}^* \in C$ başlangıç değeri için, $r(x_1{}^*) = lim_{n\to\infty}||x_n{}^* - Tx_n{}^*||$ olmak üzere $r(x_1) = r(x_1{}^*)$ olduğunu gösterelim.

$$||x_{n+1} - x_{n+1}^*|| \leq ||x_n - x_n{}^*|| \tag{3.81}$$

olduğundan $lim_{n\to\infty}\left||x_n - x_n{}^*|\right|$ *vardır. d ile işaretleyelim.* $d > 0$ *varsayarsak,*

$$x_{n+1} - x_{n+1}{}^* = t_n\,(Ty_n - Ty_n{}^*) + (1 - t_n)(x_n - x_n^*) \tag{3.82}$$

$$\left||Ty_n - Ty_n{}^*|\right| \leq \left||x_n - x_n{}^*|\right| \tag{3.83}$$

bulunur. Lemma 3.21 kullanarak,

$$\left||x_{n+1} - x_{n+1}{}^*|\right| \leq \left[1 - 2\,t_n(1 - t_n).\,\delta_X\left(\frac{\left||x_n - x_n{}^* - (Ty_n - Ty_n{}^*)|\right|}{\left||x_n - x_n{}^*|\right|}\right)\right]\,\left||x_n - x_n{}^*|\right| \tag{3.84}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n(1 - t_n)\;\delta_X\left(\frac{\left||x_n - x_n{}^* - (Ty_n - Ty_n{}^*)|\right|}{\left||x_n - x_n{}^*|\right|}\right) < \infty \tag{3.85}$$

gerçeklenir. $t_n(1 - t_n)s_n \leq \tau_n$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n < \infty$ *olduğundan,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n(1 - t_n)\,s_n < \infty \tag{3.86}$$

bulunur ve böylece,

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n(1 - t_n)\left[\delta_x\left(\frac{\left||x_n - x_n{}^* - (Ty_n - Ty_n{}^*)|\right|}{\left||x_n - x_n{}^*|\right|}\right) + s_n\right] < \infty \tag{3.87}$$

elde edilir.

Buradan $\sum_{n=1}^{\infty} t_n(1 - t_n) = \infty$ *olduğundan dolayı,*

$$\lim_{n\to\infty}\inf\left[\delta_x\left(\frac{\|x_n - x_n{}^* - (Ty_n - Ty_n{}^*)\|}{\|x_n - x_n{}^*\|}\right) + s_n\right] = 0 \tag{3.88}$$

bulunur. δ_X *kesin artan ve sürekli olduğu ve* $lim_{n\to\infty}\|x_n - x_n{}^*\| = d > 0$ *olduğu için,*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|x_n - x_n{}^* - \left(Ty_{n_k} - Ty^*{}_{n_k}\right)\right\| = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} s_{n_k} = 0 \tag{3.89}$$

elde edilir.

Yani,

$$\begin{aligned}\left|\left\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\right\| - \left\|x^*{}_{n_k} - Tx^*{}_{n_k}\right\|\right| &\leq \\ \left\|\left(x_{n_k} - Tx_{n_k}\right) - \left(x^*{}_{n_k} - Tx^*{}_{n_k}\right)\right\| &\leq \\ \left\|x_{n_k} - x^*{}_{n_k} - \left(Ty_{n_k} - Ty^*{}_{n_k}\right)\right\| &+ \\ s_{n_k}\left(\left\|x_{n_k} - Tx_{n_k}\right\| + \left\|x^*{}_{n_k} - Tx^*{}_{n_k}\right\|\right)&\end{aligned} \tag{3.90}$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\,\|x_n - Tx_n\| - \|x_n{}^* - Tx_n{}^*\|\,\right| = 0 \tag{3.91}$$

böylece $r(x_1) = r(x_1{}^*)$ *elde edilir.*

Eğer $\tau_n = 0$ *ise* $\|x_{n+1} - Tx_{n+1}\| \leq \|x_n - Tx_n\|$ *yani,* $r(x_1) \leq \|x_1 - Tx_1\|$ *bulunur. Buradan da* $r_CT = inf\{\|x - Tx\| : x \in C\}$ *sonucu çıkar.*

Teorem 3.34: X, C *ve* T *Teorem 3.33 gibi olsunlar. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) $Fix\,T \neq \emptyset$

ii) $x_1 \in C$ *için,* $\{x_n\}$ *Picard iterasyon dizisini* $x_n = T^n x_1$ *biçimde tanımlayalım. Bu dizi* C *de sınırlıdır.*

iii)Her $x_1 \in C$ *için* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyon dizisi,* $t_n \to t > 0$ ve $s_n \to s < 1$ *kısıtlamaları altında sınırlıdır.*

iv) $\{y_n\} \subset C$ *sınırlı dizisi vardır ki* $y_n - Ty_n \to 0$ *olsun* $(n \to \infty)$

v) Her bir $x_1 \in C$ *için* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyon dizisi,* $0 \leq t_n \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty$ *ve* $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$ *kısıtlamaları altında sınırlıdır.*

Bu şartlardan birisi sağlanırsa Teorem 3.33 gibi alınan bir $\{x_n\}$ *dizisi için,* $||x_n - Tx_n|| \to 0$ $(n \to \infty)$ *gerçekleşir [Zhou et al, 2002].*

Teorem 3.35: X Banach uzayı, reel, düzgün konveks ve Frechet diferansiyellenebilir normlu olsun ve Opial şartını sağlasın. C *de bu uzayın kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun .* $Fix\, T \neq \emptyset$ *şartıyla,* $T: C \to C$ *genişlemeyen dönüşümü tanımlayalım.* $x_1 \in C$ *başlangıcıyla,* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyonu,* $\sum t_n (1 - t_n) = \infty$ *ve* $\sum \tau_n < \infty$ *kısıtlamalarıyla,* T *nin bir sabit noktasına zayıf yakınsar [Zhou et al, 2002] .*

İspat 3.35:

$$T_n x = t_n\ T(s_n\, Tx + (1 - s_n)x) + (1 - t_n)x \tag{3.92}$$

alalım. $T_n: C \to C$ *genişlemeyen bir dönüşüm ve* $\{x_n\}$ *Ishikawa iterasyonu,*

$$x_{n+1} = T_n\, x_n \tag{3.93}$$

biçimde yazılabilir. Dahası $Fix(T) \subset Fix(T_n)$ *elde ederiz.* $\omega_\omega(x_n)$ *ile* $\{x_n\}$ *dizisinin zayıf* $\omega - lim$ *kümesini işaretleyelim.* $Fix\, T \neq \emptyset$ *olduğundan, Teorem 3.34 ten* $x_n - Tx_n \to 0$ *buluruz.*

Geneli bozmadan $x_n \rightharpoonup p$ *varsayalım. Browder'in yarı kapalılık prensibinden,* $Tp = p$ *iddia ediyoruz. Buradan da* $\omega_\omega(x_n) \subseteq FixT$ *sonucuna varırız.*

$\omega_\omega(x_n)$ *ile* $\{x_n\}$ *dizisinin zayıf-* ω *limit kümesini belirtilsin. Bu durumda* $\{x_n\}$, T *nin sabit bir noktasına zayıf yakınsandığını göstermek için,* ω_ω (x_n) *kümesinin kesinlikle bir tek noktadan oluştuğunu göstermek yeterlidir.* X, *Opial şartını sağlasın.* $p, q \in \omega_\omega(x_n)$, $p \neq q$ *olacak biçimde varsayalım. Böylece*

$x_{n_k} \to p,\ x_{n_k} \to q$ *olsun. Keyfi* $z \in Fix\, T$ *için* $lim_{n\to\infty}||x_n - z||$ *var olduğundan, Opial şartını kullanarak,*

$$\lim_{n\to\infty}||x_n - p|| = \lim_{k\to\infty}\left||x_{n_k} - p|\right| < \lim_{k\to\infty}\left||x_{n_k} - q|\right| = \lim_{j\to\infty}\left||x_{mj} - q|\right| < \lim_{j\to\infty}\left||x_{mj} - p|\right| = \lim_{n\to\infty}||x_n - p|| \tag{3.94}$$

çelişkisi elde edilir. Şimdi de Frechet differansiyellenebilir normdan $f_1, f_2 \in \omega_\omega(x_n)$*,* $f_1 \neq f_2$ *varsayalım. Lemma 3.22'den,*

$$< f_1 - f_2\, , f_1 > = < f_1 - f_2\, , f_2 > \tag{3.95}$$

yani $f_1 = f_2$ *bulunur.*

Teorem 3.36: X, C, T *ve* $\{x_n\}$ *Teorem 3.33 gibi olsunlar. Ek olarak* $Fix\, T \neq \emptyset$ *ve* T *dönüşümü için "şart A" sağlansın. Böylece* $\{x_n\}$ *iterasyonu,* T *nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Zhou et al., 2002] .*

Sonuç 3.6: Eğer $T(C)$ *nispeten kompakt olursa,* $\{x_n\}$ *iterasyonu* T *nin bir sabit noktasına güçlü yakınsar [Zhou et al., 2002].*

İspat 3.6: Schauder'in sabit nokta teoreminden, T *nin* C *de en az bir sabit noktası vardır.* $Fix\, T \neq \emptyset$ *bulunur.* T *yarı kompakttır. Yani* $\{x_n\} \subset C$ *sınırlı ve* $\{x_n - Tx_n\}$ *güçlü yakınsaktır. Böylece, güçlü yakınsayan* $\{x_{nj}\}$ *alt dizisi vardır.* T *nin yarı kompakt ve sürekli olmasından Opial şartına göre* $(I - T)$ *dönüşümü,* C *nin kapalı ve sınırlı alt kümelerini,* X *in kapalı alt kümelerine dönüştürür.* T *dönüşümü,* $\{x_n\}$ *dizisine bağlı olarak "şart A"yı sağlayacaktır. Teorem 3.36 dan ispat tamamlanır [Senter and Dotson, 1974].*

3.2. Uzanım Metodu

U , E Banach uzayının orijini içeren sınırlı bir bölgesi olmak üzere, $f: \overline{U} \to E$ daralma dönüşümünün bir sabit noktası vardır ya da $\lambda \in (0,1)$ için, λf dönüşümünün U nun sınırlarında bir sabit noktası vardır. Daralma dönüşümleri için sabit noktaya sahip olma özelliği homotopi tarafından değişmez özelliktir. Ama genişlemeyen dönüşümler için bu durum sağlanmaz.

(X, d) metrik uzayı, $B(x, r)$, X de açık küre ve C kümesi bu uzayın bir alt kümesi olsun. $\cup_{x \in C}\ B(x, r)$ ifadesini $B(C, r)$ ile gösterelim. X metrik uzayının boştan farklı, kapalı C ve K alt kümelerini ele alalım.

$$D(C, K) = \inf\{\epsilon > 0: C \subset B(K, \epsilon), K \subset B(C, \epsilon)\} \in [0, \infty] \tag{3.96}$$

ile de genelleşmiş Hausdorff mesafesini gösterelim.

$F: C \to X$ dönüşümü,

$$D\big(F(x), F(y)\big) \leq \propto\ d(x, y) \tag{3.97}$$

eşitsizliği, $\propto < 1$ olursa bir daralma dönüşümüdür ve $\propto = 1$ olursa da bir genişlemeyen dönüşümdür.

f ve $g: \overline{U} \to X$ birer daralma dönüşümü olsun. Eğer $H: \overline{U} x[0,1] \to X$,

i) $H(\,.\,,1) = f \quad H(\,.\,,0) = g$
ii) $H(x, t) \neq x \quad \forall x \in \partial U$ ve $t \in [0,1]$
iii) $\propto < 1$ için $d\big(H(x, t), H(y, t)\big) \leq \propto d(x, y) \quad \forall x, y \in \overline{U}$ ve $t \in [0,1]$
iv) $M \geq 0$ sabiti için $x \in \overline{U}$ ve $t, s \in [0,1]$ için $d\big(H(x, t), H(x, s)\big) \leq M|t - s|$

şartlarını sağlıyorsa f ve g homotopiktir denir.

Teorem 3.37: f ve $g : \overline{U} \to X$ homotopik iki daralma dönüşümü olsun. f in sabit noktası olması için g nin de bir sabit noktası olması gerek ve yeterdir. Hatta aralarında $\lambda \to x_\lambda$ ve $x_\lambda = H(x_\lambda, \lambda)$ homotopisi vardır [Frigon, 1996].

İspat 3.37: $Q =\{ \lambda \in [0,1]: H(\,.\,, \lambda)$ bir sabit noktası olsun$\}$ kümesini H, f ile g arasında homotopi olacak şekilde tanımlayalım. g nin sabit noktası $0 \in Q$ olsun. Herşeyden önce Q nun $[0,1]$ aralığında açık olduğunu gösterelim. $\lambda_0 \in Q$ ve x noktası $H(.\,, \lambda_0)$ ın sabit noktası olsun. $B(x,r) \subset U$ olacak biçimde belli bir $r > 0$ için, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ ve $M|\lambda - \lambda_0| < (1-a)r$ olacak şekilde $\delta > 0$ alalım. Burada, M ve a homotopi tarafından verilen sabitler olsun. Böylece $H(\,.\,, \lambda)$, $\overline{B(x,r)}$ yi kendine dönüştürür. Aslında her bir $y \in \overline{B(x,r)}$ için,

$$d\big(x, H(y,\lambda)\big) \leq d\big(H(x,\lambda_0), H(y,\lambda_0)\big) + d\big(H(x,\lambda_0), H(y,\lambda)\big) \tag{3.98}$$

$$\leq a\, d(x,y) + M|\lambda - \lambda_0| \tag{3.99}$$

$$< ar + (1-a)r = r \tag{3.100}$$

gerçekleşir. Banach daralma prensibinden, $H(.,\lambda)$, her bir $\lambda \in B(\lambda_0, \delta) \cap [0,1]$ için bir sabit noktaya sahiptir.

Q nun kapalı olduğunu göstermek için $\lambda_1, \lambda_2 \in Q$ alalım ve x_1 ve x_2 de $H(.,\lambda_1)$ ve $H(.,\lambda_2)$ nin sabit noktaları olsunlar.

$$d(x_1,x_2) \leq d\big(H(x_1,\lambda_1), H(x_1,\lambda_2)\big) + d\big(H(x_1,\lambda_2), H(x_2,\lambda_2)\big) \tag{3.101}$$

$$\leq M|\lambda_1 - \lambda_2| + a.\, d(x_1,x_2) \tag{3.102}$$

Buradan da,

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{M|\lambda_1 - \lambda_2|}{1-a} \tag{3.103}$$

elde edilir.

Böylece $Q = [0,1]$ *bulunmuş olur. Böylece* $\lambda \to x_\lambda$ *sabit nokta yüzeyi bir Lipschhitzian olur.*

Dikkat edersek tanımdaki $iv)$ *şartını,*

$\emptyset: [0,1] \to \mathbb{R}$ *için* $x \in \overline{U}\,, s, t \in [0,1]$ $\quad d\big(H(x,t), H(x,s)\big) \leq |\emptyset(t) - \emptyset(s)|$ *olacak biçimde sürekli fonksiyonu vardır şeklinde değiştirebiliriz.*

Sonuç 3.7: U, *E Banach uzayının orijini içeren sınırlı bir bölgesi olsun.* $f: \overline{U} \to E$ *bir daralma dönüşümünü ele alalım.* $f(\overline{U})$ *sınırlı olmak üzere, her* $x \in \partial U$ *için, aşağıdaki şartlardan birisi sağlansın:*

i) $\big||f(x)|\big| \leq \big||x|\big|$ *(E. Rothe)*

ii) $\big||f(x)|\big| \leq \big||x - f(x)|\big|$

iii) $\big||f(x)|\big| \leq \left(\big||x|\big|^2 + \big||x - f(x)|\big|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *(M. Altman)*

iv) $\big||f(x)|\big| \leq max\left\{\big||x|\big|, \big||x - f(x)|\big|\right\}$

v) $-x \in \overline{U}$ *ve* $f(x) = -f(-x)$

Bu durumda, f *nin tek bir sabit noktası vardır. Şimdi bu daralma dönüşümleri için sağlanan şartların genişlemeyen dönüşümler için sağlanıp sağlanmadığı sorusu gündeme gelir [Frigon, 1996].*

Teorem 3.38: U, E *düzgün konveks Banach uzayının orijini içeren sınırlı ve konveks bir bölgesi olsun.* $f: \overline{U} \to E$ *genişlemeyen dönüşümünü ele alalım. Böylece* $\lambda^* \in (0,1]$, $[0, \lambda^*]$ *üzerinde tanımlı* $\lambda \to x_\lambda$ *dönüşümü için,* $[0, \lambda^*] \cap [0,1)]$ *üzerinde yerel Lipschitzian olan, ayrıca* $(\lambda^*, x_{\lambda^*}) \in [0,1]xU$ *sınırları üzerinde olacak biçimde,* λf *in sabit noktalar yüzeyi vardır [Frigon, 1996].*

Lemma 3.23: E düzgün konveks bir Banach uzayı ve C, *bu uzayın kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesi olsun.* $f: C \to E$ *genişlemeyen bir dönüşüm olmak üzere, bir* $\{x_n\}$ *dizisi,* C *içinde* x *noktasına zayıf yakınsarsa ve* $(I - f)(x_n) \rightharpoonup y$ *gerçeklenirse,* $(I - f)(x) = y$ *olur [Frigon, 1996].*

Örnek 3.15: $X = l_2$ *alalım.* $U = B(0,1)$ *ve* $H: \overline{U}\, x[0,1] \to X$,

$$H(x,t) = (ta, x_1, x_2, \dots) \quad (a \in \mathbb{R} - \{0\}) \tag{3.104}$$

olsun ve $x = \{x_n\}$ *olsun.* $s\,,t\ \in [0,1]$ *olsun. Her* t *için* $H(.,t)$ *genişlemeyen dönüşümdür.*

$\left||H(x,t) - H(x,s)|\right| \leq |a|.|t-s| \quad (\forall x \in \overline{U})$ *ve* $s\,,t$ *için sağlanır. Yani başka ifadeyle,*

$$x = H(x,t) \iff ta = x_1 = x_2 = \cdots \tag{3.105}$$

$$\iff t = 0\ ve\ x = 0 \tag{3.106}$$

gerçekleşir. Böylece, $H(.,t)$ *sabit noktası olması için* $t = 0$ *olması gerek ve yeterdir [Frigon, 1996].*

Örnek 3.16: $X = l_2$, $U = B(0,1)$ *ve* $H: \overline{U}\, x[0,1] \to X$ $(\, a \in R - \{0\})$ *olacak şekilde,*

$$H(x,t) = (ta, \frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_2, \dots) \tag{3.107}$$

tanımlayalım. Bir önceki örnekte olduğu gibi,

$$\left||H(x,t) - H(y,t)|\right| < ||x - y|| \tag{3.108}$$

bulunur. Üstelik $t \in [0,1]$ *ve* $x, y \in \overline{U}$ *için,*

$$x = H(x,t) \iff ta = x_1, \frac{ta}{\sqrt{2}} = x_2, x_3 = \frac{ta}{\sqrt{3}}, \dots \tag{3.109}$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \;\; ve \;\; x = 0 \tag{3.110}$$

gerçekleşir. Böylece $H(.,t)$, $t = 0$ *olmak şartıyla sabit bir noktaya sahiptir [Frigon, 1996].*

Tanım 3.2: E düzgün konveks Banach uzay ve bu uzayda bir $\{x_n\}$ *sınırlı dizisini ele alalım. K kümesinde* $\{x_n\}$ *dizisinin asimptotik yarı çapı,*

$$r(K, \{x_n\}) = \inf \; \left\{x \in K : \; \lim_{n\to\infty} \sup\left||x - x_n|\right|\right\} \tag{3.111}$$

ve $\{x_n\}$ *dizisinin* K *daki asimptotik merkezi,*

$$A(K, \{x_n\}) = \left\{x \in K : \; \lim_{n\to\infty} \sup\left||x - x_n|\right| \leq r(K, \{x_n\})\right\} \tag{3.112}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $\{x_n\}$ *dizisinin her* $\{x_{n_k}\}$ *alt dizisi için,* $r(K, \{x_n\}) = r\left(K, \{x_{n_k}\}\right)$ *oluyorsa,* $\{x_n\}$ *dizisine K ya regüler relatif denir.*

Lemma 3.24: K, *Tanım 3.2 deki gibi alınsın. Bu durumda her sınırlı dizinin, K ya regüler relatif bir alt dizisi vardır [Frigon, 1996].*

Lemma 3.25: E düzgün konveks bir Banach uzayı ve K kümesi, bu uzayın boştan farklı, konveks, kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olsun. E uzayında $\{x_n\}$ *sınırlı bir dizi olmak üzere,* $A(K, \{x_n\})$ *bir tek öğeli kümedir [Frigon, 1996].*

Teorem 3.39: E düzgün konveks Banach uzayının boştan farklı, sınırlı ve konveks bir U bölgesini alalım. $F: \overline{U} \to E$ *kompakt değerli olan çok değerli genişlemeyen dönüşüm olsun.*
$H: \overline{U} \to E$ *dönüşümü,*

i) $H(.,1) = F$
ii) $H(.,0)$ *sabit noktaya sahip*

iii)Her $t \in [0,1]$ *için,* $\overline{U}$*'dan alınan her* x *ve* y*,* $[0,t]$ *den alınan her* s *için,* $D\big(H(x,s),H(y,s)\big) \le a\|x-y\|$ *olacak biçimde* $a < 1$ *vardır.*

iv)$\forall x \in \overline{U}$ *ve* $\forall t,s \in [0,1]$ *için,* $D\big(H(x,t),H(x,s)\big) \le |\emptyset(t) - \emptyset(s)|$ *olacak biçimde* $\emptyset: [0,1] \to \mathbb{R}$ *sürekli fonksiyonu vardır.*

şartlarını sağlansın. Bu durumda aşağıdakilerden biri sağlanır:

i) F'nin bir sabit noktası vardır.

ii) $x \in H(x,t)$ *olacak biçimde* $t \in [0,1)$ *için,* $x \in \partial U$

durumlarından biri sağlanır [Frigon, 1996].

İspat 3.39: ii) nin olmadığını varsayalım. $\forall t \in [0,1)$ *için* $H(.,t)$ *nin* U *de sabit noktası vardır. Böylece* $x_n \in H(x_n,t_n)$ *ve* $t_n \to 1$ *olacak biçimde* $\{x_n\}$*,* $\{t_n\}$ *dizileri alabiliriz ve* $t_n \to 1$ *olsun.* F *kompakt değerli olduğundan* $\{x_n\}$ *dizisi, sınırlı ve* $\overline{U}$ *regüler relatif olur .Lemma 3.24 den,* $\{x\} = A\big(\overline{U}, \{x_n\}\big)$ *ve* $r = r\big(\overline{U}, \{x_n\}\big)$ *alalım.* $\|x_n - y_n\| \le D\big(H(x_n,t_n),F(x)\big)$ *olacak biçimde* $y_n \in F(x)$ *alalım.* $F(x)$ *kompakt olduğundan,* $\{y_n\}$ *dizisinin* $y \in f(x)$ *e yakınsayan* $\{y_{n_k}\}$ *alt dizisi vardır.*

$$\begin{aligned}\left\|x_{n_k} - y\right\| &\le \left\|x_{n_k} - y_{n_k}\right\| + \left\|y_{n_k} - y\right\| \le \\ &\left|\emptyset\big(t_{n_k}\big) - \emptyset(t)\right| + \left\|x_{n_k} - x\right\| + \left\|y_{n_k} - y\right\|\end{aligned} \tag{3.113}$$

gerçekleşir. Böylece $\lim_{k\to\infty} \sup \left\|y_{n_k} - y\right\| \le \lim_{k\to\infty} \sup \left\|x_{n_k} - x\right\| = r$ *bulunur. Lemma 3.25 ten* $y = x$*, yani* $x \in F(x)$ *elde edilir.*

Teorem 3.40: X Banach uzay ve U*, bu uzayın açık bir alt kümesi olsun* $F: \overline{U} \to X$ *bir daralma olsun.* $F\big(\overline{U}\big)$ *sınırlı olsun. Bu durumda,*

- $A_1)$ F nin $\overline{U}$ içinde sabit noktası vardır
- $A_2)$ $\lambda \in (0,1)$ için, $u = \lambda F(u)$, $u \in \partial\overline{U}$

özelliklerinden birisi sağlanır [Saber and Zafar, 2014] .

İspat 3.40: $A_2)$ *sağlanmasın ve* F *in* ∂U *da sabit noktası olmasın. Böylece* $u \neq \lambda F(u)$ *elde ederiz. Her* $u \epsilon \partial U$ *ve* $\lambda \epsilon [0,1]$ *için,*

$$H: \overline{U}\, x\, [0,1] \to X, \quad H(x,t) = t\ F(x) \tag{3.114}$$

homotopisi alalım.

G *sıfır dönüşüm olsun.* G U *da sabit noktaya sahiptir. Yani* $G(0) = 0$ *olur.* F *ve* G *birer homotopik daralma dönüşümü olduklarından Teorem 3.39 dan,* $x \in U$ *için,* $x = F(x)$ *elde ederiz. Yani* $A_1)$ *sağlanır.*

Teorem 3.41: X *düzgün konveks bir Banach uzay ve bu uzayın açık, sınırlı ve konveks bir* U *alt kümesini alalım.* $0 \in U$ *ve* $F: \overline{U} \to X$ *bir genişlemeyen bir dönüşüm olsun. Bu durumda,*

- $A_1)$ *F nin U'da sabit noktası vardır.*
- $A_2)$ $u = \lambda F(u)$ *olacak biçimde* $\lambda \epsilon (0,1)$ *ve* $u \in \partial \overline{U}$ *vardır.*

özelliklerinden birisi sağlanır [Saber and Zafar, 2014] .

İspat 3.41: $A_2)$ *sağlanmadığını varsayalım. Her bir* $n \in \{2,3,\dots\}$ *için,*

$$F_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) F : \overline{U} \to X \tag{3.115}$$

dönüşümü alalım. F_n , $(1 - \frac{1}{n})$ *sabitiyle bir daralma dönüşümüdür.*

Teorem 3.40 dan ya F_n, U *da bir sabit noktaya sahiptir ya da* $u = \lambda F_n(u)$ *olacak biçimde* $\lambda \in (0,1)$ *ve* $u \in \partial U$ *vardır. Sonuncusunun doğru olduğunu varsayalım. Yani* $u \in \partial U$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için* $u = \lambda\, F_n(u)$ *olsun.*

Böylece,

$$u = \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right) F(u) = \mu\ F(u) \tag{3.116}$$

elde edilir. Burada μ *değeri,* $0 < \mu = \lambda\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1$ *şeklindedir. Bu durumda* A_2) *sağlanmadığından bir çelişki bulunur. Bunun sonucunda* F_n, *her bir* $n \in \{2,3,\ldots\}$ *için* U *da* $u_n \in U$ *gibi bir sabit noktaya sahiptir.*

Eğer E yansımalı bir Banach uzayı olursa, keyfi norm sınırlı bir dizi, zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir. $\overline{U}$, *kapalı, sınırlı ve konveks olduğu için zayıf kapalıdır.* $u \in \overline{U}$ *için S tam sayıların bir alt dizisi olmak üzere S dee* $u_n \rightharpoonup u$ *olur*

Ayrıca $u_{n=}\left(1 - \frac{1}{n}\right) F(u_n)$ *olduğundan,*

$$\begin{aligned}||(I-F)(u_n)|| = \frac{1}{n}\ ||F(u_n)|| \leq \frac{1}{n}\ ||F(u_n) - F(0)|| + ||F(0)|| \leq \\ \frac{1}{n}\ ||(u_n) - F(0)|| \leq \frac{1}{n}(||(u_n)|| + ||F(0)||)\end{aligned} \tag{3.117}$$

gerçekleşir. Böylece $(I-F)\,(u_n)$ *0 a güçlü yakınsar.* $(I-F)$ *dönüşümünün yarı kapalılığından* $u = F(u)$ *bulunur. Yani* A_1 *sağlanır.*

Dugundji-Granas Hilbert uzaylarda aşağıdaki sonucu vermiştir.

Önerme 3.4: H bir Hilbert uzayı ve B, *bu uzayda kapalı bir küre olsun* $T: B \to H$ *genişlemeyendönüşümünü ele alalım.* $B = \{x \in H : |x| \leq R\}$ *olsun.* $|x| = R$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için* $x \neq \lambda\, T(x)$ *oluyorsa, T, B de en az bir sabit noktaya sahiptir [Dugundji and Granas, 1982].*

Bu sonuç, [Precup, 1996] tarafından aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir:

Teorem 3.42: E düzgün konveks bir Banach uzay ve U, *bu uzayda sınırlı açık konveks bir alt küme ve* $0 \in U$ *olsun* $T: \overline{U} \to E$ *genişlemeyen dönüşümü alalım.* $\forall x \in \partial U$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için,* $x \neq \lambda T(x)$ *oluyorsa,* T *nin* $\overline{U}$ *da en az bir sabit noktası vardır [Precup, 1996].*

Teorem 3.43: $(H, <.,.>)$ *bir Hilbert uzay ve bu uzayda orijini içeren, konveks olmak zorunda olmayan, sınırlı ve açık bir* U *alt kümesini ele alalım.* $T: \overline{U} \to H$ *genişlemeyen dönüşümü verilsin. Her* $x \in \partial U$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için,* $x \neq \lambda T(x)$ *oluyorsa* T *dönüşümünün,* $\overline{U}$ *da en az bir sabit noktası vardır [Precup, 1996] .*

İspat 3.43: Her $x \in \partial u$ *ve* $\lambda \in (0,1)$ *için,* $x \neq \lambda T(x)$ *olsun. Her bir* $\lambda \in (0,1)$ *için,* λT *bir daralma dönüşümü olur.*

$h: \overline{U}\ x\ [0,1) \to H$ *için* $h(x, \mu) = \mu\, \lambda\, T$ *tanımlarsak bu h dönüşümü,*

i) *Her* $x, y \in \overline{U}$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *için* $d\big(h(x,\lambda), h(y,\lambda)\big) \leq l d(x,y)$ *olacak şekilde* $l \in [0,1)$ *vardır.*

ii) *Her* $x \in \partial U$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *için* $h(x,\lambda) \neq x$

iii) h *,* λ*'da süreklidir ve* $x \in \overline{U}$ *için düzgün süreklidir.Yani her* $\epsilon > 0$ *ve* $\lambda \in [0,1]$ *için,* $x \in \overline{U}$ *ve* $|\lambda - k| < p$ *olduğunda* $d\big(h(x,\lambda), h(x,k)\big) < \epsilon$ *olacak şekilde* $p > 0$ *vardır. Bu nedenle* $x_\lambda - \lambda T x_\lambda = 0$ *olacak şekilde tek* $x_\lambda \in U$ *vardır.*

$$\lambda = 1 - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{3.118}$$

şartını sağlayan x_λ *ları* x_n *ile işaretleyelim. Her* $n, m > 1$ *tamsayıları için,*

$$\begin{aligned} &< (n-1)^{-1} x_n - (m-1)^{-1} x_m\,,\ x_n - x_m >= \\ &\qquad\qquad < T(x_n) - T(x_m), x_n - x_m > - |x_n - x_m|^2 \leq 0 \end{aligned} \tag{3.119}$$

özdeşliği elde edilir. $(n-1)^{-1} = r_n$ *diyelim. Özdeşliği kullanarak,*

$$\begin{aligned} &2 < r_n x_n - r_m x_m, x_n - x_m > (r_n + r_m)|x_n - x_m|^2 + \\ &\qquad\qquad (r_n - r_m)\,(|x_n|^2 - |x_m|^2) \end{aligned} \tag{3.120}$$

bulunur. Buradan da,

$$0 \leq (r_n + r_m)|x_n - x_m|^2 \leq (r_n - r_m)(|x_m|^2 - |x_n|^2) \tag{3.121}$$

sonucu çıkarırız.

$\{r_n\}$ *azalan dizi olduğu için,* $\{x_n\}$ *artan olur ve* U *sınırlı olduğundan,* $\{x_n\}$ *sınırlı ve yakınsaktır. Böylece,*

$$|x_n - x_m|^2 \leq (|x_m|^2 - |x_n|^2)\ (r_n - r_m)/(r_n + r_m) \tag{3.122}$$

elde edilir. Buradan $\{x_n\}$ *dizisi, yakınsak bulunur ve limiti* T *nin bir sabit noktasıdır.*

4. SONUÇ

Giriş bölümünde, sabit nokta kavramının tarihsel gelişimi, daha önceki yıllarda yapılan çalışmaların bir derlemesi yapılarak incelenmiştir. İkinci bölümde ise, bazı temel kavram ve sabit nokta teoremlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise, iterasyon ve uzanım metodu incelenmiştir.

İterasyon incelemesi, Halpern, Mann ve Iskikawa iterasyonları üzerinde yapılmıştır. Yöntemlerde izlenen ilk yol, (0,1) aralığında belli şartları sağlayan $\{\alpha_n\}$ dizisi tanımlayıp, bu dizi yardımıyla $\{x_n\}$ iterasyon dizisinin kurulmasıdır. Daha sonra izlenecek yol, Banach uzay ya da Hilbert uzayın bir alt kümesi üzerinde, sabit noktalar kümesi boştan farklı olacak şekilde genişlemeyen bir dönüşüm tanımlanmasıdır. Son olarak, tanım uzayları ve onların geometrik yapıları ile (0,1) aralığından seçilen dizilerin sağladığı bazı şartlara göre, bu iterasyon dizisinin, genişlemeyen dönüşümün sabit bir noktasına, güçlü ya da zayıf yakınsaması incelenir.

Uzanım metodu ise homotopi dönüşümü üzerine kurulmuştur. Burada çıkarılan ilk sonuç, iki daralma dönüşümü homotopik olursa, sabit noktaya sahip olma özelliği homotopi altında değişmez bir özelliktir. Ama genişlemeyen dönüşümler için bu durum sağlanmamaktadır.

KAYNAKLAR

Agarwal R. P., Meehan M., O'Regan D., (2004), ''Fixed Point Theory and Applications'', 1th Edition, Cambridge University Press.

Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R., (2009), ''Fixed Point Theory for Lipschitzian type Mappings with Applications'', 1th Edition, Springer.

Banach S., (1922), ''Sur les operations dans les ensembles abstrits et leur applications aux equations integrals'', Fundamenta Mathematicae, 3, 133 - 181.

Bauschke H. H., (1996), ''The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert space'', Journal of Mathematical Analysis and Applications, 202 (1), 150–159.

Bayraktar M., (2000), ''Fonksiyonel Analiz'', 1. Baskı, Gazi kitabevi.

Benavides T. D., Frigon M., (1996), ''Recent Advances On Fixed Point Theory'', 1th Edition, Universidad de Sevilla.

Brouwer L. E. J., (1912), ''Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten'', Mathematische Annalen, 71, 97 – 115.

Browder F.E., (1965), ''Nonexpansive nonlinear mappings in a Banach space'', Proceedings of the National Academy of Sciences, 54 (4), 1041–1044.

Browder F. E., (1967a), ''Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive maps in Banach spaces'', Archive for Rational Mechanics and Analysis, 24, 82-90.

Browder F. E., (1967b), ''Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces'', Mathematische Zeitschrift, 100 (3), 201–225.

Browder F. E., (1968), ''Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces'', Bulletin of the American Mathematical Society, 74, 660–665.

Browder F. E., Petryshyn W. V., (1966), ''The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces'', Bulletin of the American Mathematical Society, 72(3), 571–575.

Bruck R. E., (1973), ''Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces'', Pacific Journal of Mathematics, 47 (2), 341–355.

Bruck R. E., (1979), ''A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces'', Israel Journal of Mathematics., 32, 107-116.

Chang S. S., (1997), ‘‘On Chidume’s open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216 (1), 94–111.

Cioranescu I., (1990), ‘‘Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems’’, 1th Edition, Kluwer Academic Publishers.

Deng L., (1996), ‘‘Convergence of the Ishikawa iteration process for nonexpansive mappings’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 199 (3), 769-775.

Dugundji J., Granas A., (1982), ‘‘Fixed Point Theory I’’, 1th Edition, Polish Scientific Publishers.

Fan Ky, (1969), ‘‘Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder’’, Mathematische Zeitschrift., 112, 234 – 240.

Goebel K., Kirk W. A., (1990), ‘‘Topics in metric fixed point theory’’, 1th Edition, Cambridge University Press.

Goebel K., Reich S., (1984), ‘‘Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings’’, 13th Edition, CRC Press.

Gornicki J., (1991), ‘‘Nonlinear ergodic theorems for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces satisfying Opial’s condition’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 161 (2), 440-446.

Groetsch C. W., (1974), ‘‘A nonstationary iterative process for nonexpansive mappings’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 43 (1), 155–158.

Halpern B., (1967), ‘‘Fixed points of nonexpanding maps’’, Bulletin of the American Mathematical Society, 73 (6), 957–961.

Hartman P., Stampascchia G., (1966), ‘‘On some nonlinear elliptic differential equations’’, Acta Mathematica, 115, 271 – 310.

Hu L. G., (2008), ‘‘Strong convergence of a modified Halperns iteration for nonexpansive mappings’’, Applied Mathematics Letters, 23 (7), 791-795.

Ishikawa S. (2008), ‘‘Fixed points by a new iteration method’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 44, 147–150.

Ishikawa S., (1976), ‘‘Fixed points and iterations of a nonexpansive mapping in a Banach space’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 59 (1), 65-71.

Kakutani S., (1941), ‘‘A generalization of Brouwer fixed point theorem’’, Duke Mathematical Journal, 8 (3), 457 – 459.

Khamsi M. A., Kirk W. A., (2001), ‘‘An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory’’, 1th Edition, Wiley interscience Publication.

Kızıltunç H., (2007), ‘‘Genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarının iterasyon metotlarıyla elde edilmesi’’, Doktara Tezi, Atatürk Üniversitesi.

Kim T.H., Xu H. K., (2005), ‘‘Strong convergence of modified Mann iterations’’, Nonlinear Analysis, 61 (1), 51 – 60.

Knopp K., (1928), ‘‘Infinite Series’’, 1th Edition, Blackie and Son Limited.

Krasnoselskii M. A., (1955), ‘‘Two remarks on the method of successive approximations’’, Uspehi Matematicheskikh Nauk, 10, 123–127.

Lions P. L., (1977), ‘‘Approximation de points fixes de contractions’’, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 284, 1357–1359.

Lim T.C., Xu H. K., (1994), ‘‘Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings., Nonlinear Analysis., 22, 1345–1355.

Mann W. R., (1953), ‘‘Mean value methods in iteration’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 4, 506–510.

Opial Z., (1967), ‘‘Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings’’, Bulletin of the American Mathematical Society, 73 (4), 591-597.

Precup R., (1996), ‘‘On the continuation principle for nonexpansive maps’’, Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica, 41 (3), 85-89.

Reich S., (1973), ‘‘Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 44 (1), 57–70.

Reich S., (1979), ‘‘Weak convergence theorem for nonexpansive mappings in Banach spaces’’. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 67 (2), 274–276.

Reich S., (1980), ‘‘Strong convrgence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 75 (1), 287-292.

Reich S., (1983), ‘‘Some problems and results in fixed point theory’’, Contemporary Mathematics, 21, 179–187.

Rothe E., (1937), ‘‘Zur Theorie der topologischen Ortnung und der Vektorfelder in Banachschen Raumen’’, Compositio Mathematica, 5, 177-197.

Saber M., Zafar M., (2014), ‘‘Continuation Methods for Contractive and Non Expansive Mappings’’, Research Vistas, 3 (6), 11-18.

Sangago M. G., (2011), Modified Halpern iterative algorithms for nonespansive mappings’’, Journal of Applied Mathematics and Informatics, 29(5-6), 1363 – 1379.

Schauder J., (1930), ‘‘Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen’’, Studia Mathematica, 2 (1), 171- 180.

Senter H. F., Dotson W. G., (1974), ‘‘Jr, Approximating fixed points of nonexpansive mappings’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 44 (2), 375–380.

Shehu Y., (2013), ‘‘Modified Krasnoselskii–Mann iterative algorithm for nonexpansive mappings in Banach spaces’’, Arabian Journal of Mathematics, 2 (2), 209–219.

Shioji S., Takahashim W., (1997), ‘‘Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 125 (12), 3641–3645.

Singh S. P., Watson B., Srivadtava P., (1997), ‘‘Fixed Point Theory and Best Approximation, The KKM map principle’’, 1th Edition, Kluwer Academic Publishers.

Suzuki T., (2005), ‘‘Strong convergence of Krasnoselskii and Mann’s type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 305 (1), 227–239.

Suzuki T., (2009), ‘‘Reichs problem concerning Halperns convergence’’, Archiv der Mathematik, 92 (6), 602–613.

Takahashi W., (2000), ‘‘Nonlinear Functional Analysis’’, 1th Editiom, Yokohama Publishers.

Tan K. K., Xu H. K., (1993), ‘‘Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 178 (2), 301-308.

Tychonoff A., (1935), ‘‘Ein Fixpunktsatz’’, Mathematische Annalen, 111 (1), 767-776.

WittMann R., (1992), ‘‘Approximation of fixed points of nonexpansive mappings’’, Archiv der Mathematik, 58 (5), 486-491.

Xu H. K., (1991), ‘‘Inequalities in Banach spaces with applications’’. Nonlinear Analysis, 16 (12), 1127–1138.

Xu H. K., (2002), ‘‘Iterative algorithms for nonlinear operators’’. Journal of the London Mathematical Society., 66 (2), 240–256.

Xu H. K., (2002), ‘‘Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings’’, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 65 (1), 109–113.

Xu H. K., (2004), ‘‘Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 298 (1), 279–291.

Yao Y., Liou Y. C., Zhou H., (2009a), ‘‘Strong convergence of an iterative method for nonex-pansive mappings with new control conditions’’, Nonlinear Analysis, 70 (1), 2332–2336.

Yao Y., Chen R., Yao J. C., (2008), ‘‘Strong convergence and certain control conditions for modified Mann iteration’’, Nonlinear Analysis, 68, 1687–1693.

Yao Y. Zhou H. Liou Y. C., (2009b), ‘‘Strong convergence of a modified Krasnoselskii–Mann iterative algorithm for nonexpansive mappings’’, Journal of. Applied Mathematics and Computing, 29, 383–389.

Zalinescu C., (1983), ‘‘On uniformly convex functions’’. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 95 (2), 344–374.

Zalinescu C., (2002), ‘‘Analysis in General Vector Spaces’’, 1th Edition, World Scientific.

Zeng C., (1998), ‘‘A note on approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process’’, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 226 (1), 245-250.

Zhou H., (1998), ‘‘Nonexpansive Mappings and Iterative Methods In Uniformly Convex Banach Spaces’’, Georgian Mathematical Journal, 9 (3), 591–600.

ÖZGEÇMİŞ

Şafak AYDIN 1986 yılında Salihli'de doğdu. 2004 yılında başladığı Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2009 yılında başarıyla tamamlayarak 2013 yılında yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladı. 2010 yılından bu yana Milli Eğitim Bakanlığı'nda Matematik Öğretmeni olarak çalışmaktadır.