T.C.

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ İÇİN MUKAYESE TEOREMLERİ

MUSTAFA ÇAKICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE

2016

T.C.

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER TEORİSİ İÇİN MUKAYESE TEOREMLERİ

MUSTAFA ÇAKICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI

PROF. DR. ENGİN HALİLOĞLU

II. DANIŞMANI

DOÇ. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE

2016

T.R.

GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

COMPARISON THEORY FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

MUSTAFA ÇAKICI

A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THESIS SUPERVISOR

PROF. DR. ENGİN HALİLOĞLU

II. THESIS SUPERVISOR

ASSOC. PROF. DR. COŞKUN YAKAR

GEBZE

2016

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ	**YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU**

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19/01/2016 tarih ve 2016/05 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 12/02/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Mustafa ÇAKICI'nın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE : Prof. Dr. Hasan SADIKOĞLU

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

....../....../......... tarih ve ..../........ sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada Fraksiyonel analiz için gerekli Gamma, Beta, Mittag-Leffler ve Wright Fonksiyonlarının özellikleri incelenmiş, Riemann Liouville (R-L) ve Grünwald Letnikov manada fraksiyonel türev ve integral kavramları üzerinde durulmuştur. Daha sonra Caputo manada fraksiyonel türev ve integral tanımı, avantajları ve diğer iki türev arasındaki ilişki incelenmiştir. Bölüm 3 fraksiyonel diferansiyel denklemlerin temel teorisine ayrılmıştır. İlk olarak Volterra tipi integral eşitsizlikler, daha sonra fraksiyonel diferansiyel eşitsizlikler ve son olarak yerel varlık ve ektremum çözümler üzerinde durulmuştur. Son bölümde ise lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemler için bazı karşılaştırma sonuçları üzerinde çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Fraksiyonel Diferansiyel Denklem, Alt Çözüm, Üst Çözüm, Karşılaştırma Teoremleri.

SUMMARY

In this study required for Fractional analysis, the characteristics of Gamma, Beta, Mittag-Leffler and Wright Functions are examined. Then it focused on the concept of Riemann Liouville (R-L) and Grunwald Letnikov fractional differentiation and integration. Then the definition of Caputo fractional derivative and integral, the benefits and the correlation between the other two differentiations are studied. Chapter 3 is devoted to the basic theory of fractional differential equations. First, Volterra type integral inequalities, then fractional differential inequalities and finally local assets and extremum solutions are focused. In the last chapter, it focused on some of the comparison results for fractional nonlinear differential equations.

Key Words: Fractional Differential Equations, Lower Solution, Upper Solution, Comparison Theorems.

TEŞEKKÜR

Başta, yüksek lisans eğitimimde desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan danışmanım Prof. Dr. Engin HALİLOĞLU'na, mühendislik fakültesi dekanı Sayın Prof. Dr. Hasan SADIKOĞLU' na, bütün çalışmam boyunca yanımda olan, bilgi ve tecrübelerini bana aktaran hocam, II. danışmanım Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a, ve göstermiş olduğu desteğinden dolayı sevgili eşim Gülnihal ÇAKICI'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bilim ve tekniğin yasaları, matematik diline aktarıldığında bir takım denklemler aracılığı ile ifade edilirler. Analiz, geometri ve cebir statik problemlerin birçoğunun çözümü için yeterli olabilmektedir. Buna karşılık, doğadaki olayları açıklayan yasaların büyük çoğunluğu, bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer bir takım büyüklüklere göre değişimini içerir. Bu değişim matematiksel olarak türev işlemi ile ifade edilir. Her bir sürecin matematik ifadesinde farklı değişim hızları, farklı türevler olarak karşımıza çıkar ve bir fiziksel süreci açıklayan yasalar, türevleri de içeren birtakım matematiksel bağıntılar halini alır. Süreci ifade eden fonksiyonların yanı sıra bunların sonlu mertebeden türevlerini de içeren matematiksel bağıntılara diferansiyel denklem denir.

Fraksiyonel diferansiyel, matematiksel analizin bir kolu olarak, kendi adından da anlaşılacağı üzere, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş bir halidir. Konu, diferansiyel analiz kadar eski olup Newton ve Leibnitz’in diferansiyel hesaplama tekniğini bulmalarına kadar uzanır.

Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü vs. türevlerinin nasıl alındığı biliyoruz fakat $3/2$ nci türevini nasıl alabiliriz? Aynı şekilde bir fonksiyon iki ya da üç defa integre edilebiliyor ama $1/2$ defa integre edebilir miyiz? Leibnitz’in 1695'te L' Hospital'a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli mertebeden türevlere genelleştirilebilir mi?" sorusu fraksiyonel diferansiyelin doğuşu olarak gösterilebilir. Leibnitz'in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan fazla bir süredir üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Leibnitz'in yanı sıra Liouville, Riemann, Weyl, Fourier, Laplace, Lagrange, Euler, Abel, Grünwald ve Letnikov gibi ünlü birçok matematikçi de bu konu üzerinde çalışmışlardır.

Fraksiyonel türev kavramının ilk kez kullanıldığı bu mektuptan sonra pek çok matematikçi bu konuda çalışmalar yapmasına rağmen, fraksiyonel operatörler bir fizik problemini çözmek için ilk kez Niels Henrik Abel tarafından 1823'te kullanılmıştır.

Abel'in uygulamalı problemlerde fraksiyonel operatörleri kullanmasından sonra Liouville tarafından kapsamlı bir çalışma yapılmış ve konuyla ilgili birçok makale yayımlanmıştır. 1847 yılında Riemann, bugün de en sık kullanılan fraksiyonel integral olan Riemann-Liouville integralinin tanımını vermiştir.

Uygulamalı problemlerde önemli yer tutmasına rağmen, Riemann-Liouville fraksiyonel integral ve türev operatörlerini geometrik ve fiziksel olarak anlamlandırmak oldukça zordur. Bu zorluktan kurtulmak için Caputo'nun 1967 yılında tanımladığı türev operatörü sonraki yıllarda uygulamalı problemlerde sıklıkla kullanılmıştır.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Çalışmamızda öncelikle fraksiyonel analiz için gerekli Gamma Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu, Mittag-Leffler Fonksiyonu ve Wright Fonksiyonlarının özellikleri, Riemann Liouville (R-L) ve Grünwald Letnikov manada fraksiyonel türev ve integral kavramları, Caputo manada fraksiyonel türev ve integral tanımı, avantajları ve diğer iki türev arasındaki ilişki incelenmiştir.
Bölüm 3 fraksiyonel diferansiyel denklemlerin temel teorisine ayrılmıştır. İlk olarak Volterra tipi integral eşitsizlikler, daha sonra fraksiyonel diferansiyel eşitsizlikler ve son olarak yerel varlık ve ektremum çözümler ele alınmıştır.

Bölüm 4 te ise lineer olmayan fraksiyonel diferansiyel denklemler için bazı karşılaştırma sonuçları üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Fraksiyonel (kesirli) türev ya da fraksiyonel integral klasik manada bilinen yüksek mertebeden türev ya da n-katlı integral kavramlarını genelleyen bir konsepttir. Burada fraksiyonel türev derken keyfi mertebeden türev kastedilmektedir.

2.1. Özel Fonksiyonlar

Bu başlığın alt bölümlerinde fraksiyonel analiz için gerekli Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, Mittag-Leffler fonksiyonu ve Wright fonksiyonlarının tanımları ve özellikleri verilecektir.

2.1.1. Gamma Fonksiyonu

Euler'in Gamma fonksiyonu fraksiyonel analizle doğrudan ilişkilidir. Bu fonksiyon sayesinde faktöriyel kavramı bütün reel sayılara ya da karmaşık sayılara genellenebilir. Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integralin yardımıyla tanımlanır. Gamma fonksiyonu bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da adlandırılır. Bunun nedeni, Gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

eşitliğini sağlamasıdır. Burada $z = n$ değerleri pozitif tam sayılar olarak alınırsa $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ olur. Oysa z nin $z > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması hâlinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O hâlde $z > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

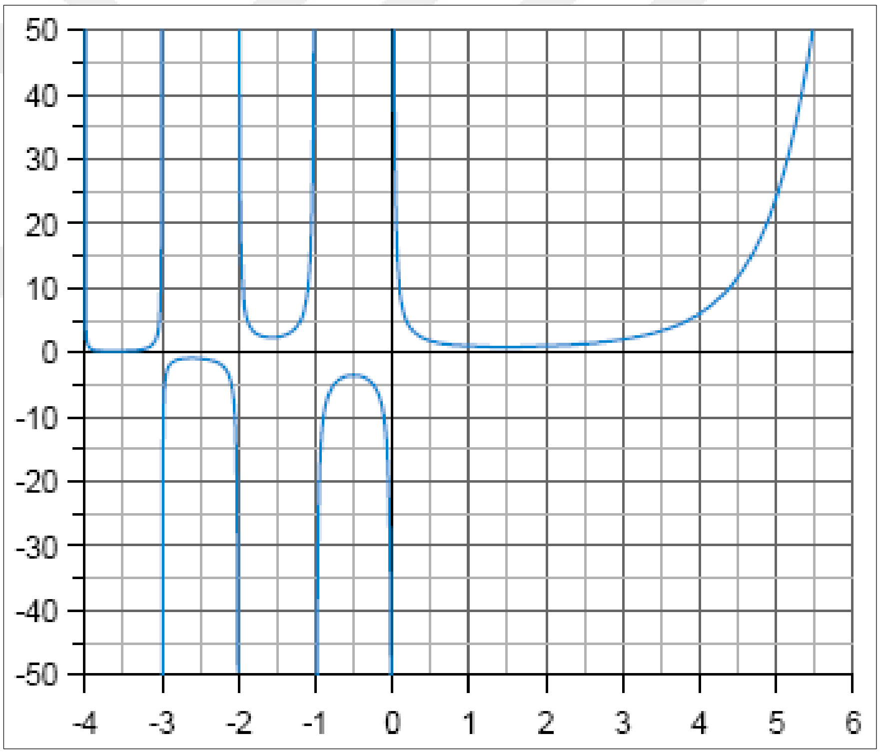
$$\int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \Gamma(z+1) \tag{2.3}$$

yazabiliriz. Yukarıdaki eşitlikten görülüyor ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür.

$z=0$ olduğu zaman faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -(0-1) = 1 \tag{2.4}$$

dir. Bu sonuç $0!$ in neden 1 olarak tanımlandığını da açıklar.



Şekil 2.1: Gamma Fonksiyonu.

Elemanter matematikte n faktöriyelin $n! = n(n-1)(n-2)...3.2.1$ çarpımı ile verildiğini biliyoruz. Bu özellik $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $z=n$ bir tam sayı ise, $\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$ yazılabilmelidir. Gerçekten aşağıda görüleceği üzere Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.5}$$

eşitliğini tüm $z > 0$ değerleri için gerçekler.

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t^z dt \\
&= \underbrace{\lim_{b\to\infty} \left(-e^{-t} t^z\right)\Big|_0^b}_{0} + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$\Gamma(z)$ fonksiyonuna karşılık gelen $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ integrali $z > 0$ için yakınsak olup, $c > 0$ olmak üzere bu integral her $[c,d]$ sonlu aralığında düzgün yakınsaktır. Ayrıca $\Gamma(z)$ ye karşılık gelen integral, her sonlu $[c,d] \subset \mathbb{R}^+$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan z değişkenine göre integral işareti altında türev alarak $\Gamma(z)$ nin türevi elde edilebilir.
Benzer şekilde Gamma fonksiyonunun yüksek basamaktan türevleri de bulunabilir. Böylece

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty (\ln t) e^{-t} t^{z-1} dt \quad \text{ve} \quad \Gamma''(z) = \int_0^\infty (\ln t)^2 e^{-t} t^{z-1} dt \tag{2.7}$$

yazılabilir.
Gamma fonksiyonu $\mathrm{Re}(z) > 0$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
ii) $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2,\ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$,
iii) $\Gamma(0) = \infty,\ \Gamma(\infty) = 0$,
iv) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
v) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

2.1.2. Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu aşağıdaki integral ile ifade edilmektedir.

$$\beta(z,w)=\int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \quad Re(z), Re(w)>0. \tag{2.8}$$

Γ ve β fonksiyonları arasındaki ilişki ise aşağıdaki gibidir:

$$\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{2.9}$$

Buradan kolaylıkla β fonksiyonunun simetrik oluşu görülebilir:

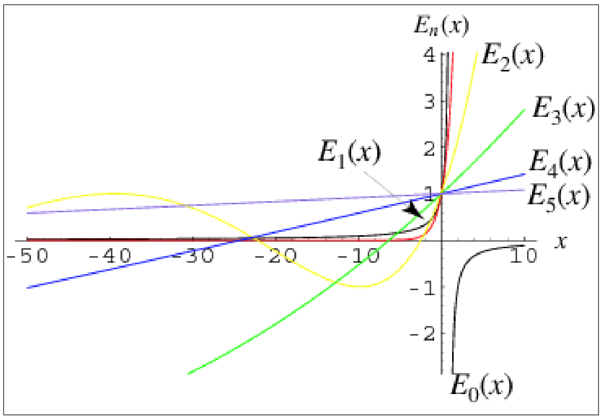
$$\beta(p,q)=\beta(q,p). \tag{2.10}$$

2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu

Klasik anlamdaki tam sayı mertebeden diferansiyel denklemler için üstel fonksiyon e^z ne kadar önemli ise bu fonksiyonun bir anlamda genellemesi olan Mittag-Leffler fonksiyonu da fraksiyonel diferansiyel denklemler için aynı öneme sahiptir. Bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(qk+1)} \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı iken iki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:



Şekil 2.2: Mittag-Leffler Fonksiyonu.

$$E_{q,r}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(qk+r)} \tag{2.12}$$

İlk defa R.P. Agarwal tarafından tanımlanması ve Humbert ile birlikte Laplace dönüşümü kullanılarak çok sayıda özellilliğinin bulunması nedeniyle bu fonksiyon Agarwal fonksiyonu olarak da adlandırılabilir.

Tanımlardan hareketle aşağıdaki eşitlikler kolaylıkla yazılabilir:

$$E_{1,1}(z)=E_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z, \tag{2.13}$$

$$E_{1,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+1)!}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{e^z-1}{z}, \tag{2.14}$$

$$E_{1,3}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+3)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(k+2)!}=\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+2}}{(k+2)!}=\frac{e^z-1-z}{z^2}. \tag{2.15}$$

Bu şekilde devam edilirse aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$E_{1,m}(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\left[e^z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{z^k}{k!}\right] \tag{2.16}$$

Hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir durumu olarak ifade edilebilir:

$$E_{2,1}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cosh(z) \tag{2.17}$$

$$E_{2,2}(z^2)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)}=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}=\frac{\sinh(z)}{z} \tag{2.18}$$

n. mertebeden hiperbolik fonksiyonlar ise aynı şekilde Mittag-Leffler fonksiyonu kullanılarak

$$h_r(z,n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{nk+r-1}}{(nk+r-1)!}=z^{r-1}E_{n,r}(z^n),\ r=1,2,\ldots,n, \tag{2.19}$$

şeklinde verilebilir. Bunun gibi n. mertebeden trigonometrik fonksiyonlar da Mittag- Leffler fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$k_r\left(z,n\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^j z^{nj+r-1}}{\left(nj+r-1\right)!}=z^{r-1}E_{n,r}\left(-z^n\right),\ r=1,2,...,n. \tag{2.20}$$

2.1.4. Wright Fonksiyonu

Dalga denklemi gibi kısmi fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümünde kullandığımız ve ilk defa İngiliz matematikçi E. M. Wright tarafından ortaya atılan Wright fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$W\left(z;q,r\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma\left(qk+r\right)} \tag{2.21}$$

Tanımdan hareketle aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$W\left(z;0,1\right)=e^z, \tag{2.22}$$

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}W\left(\mp\frac{z^2}{4};1,\nu+1\right)=\begin{cases}J_\nu\left(z\right)\\ I_\nu\left(z\right)\end{cases} \tag{2.23}$$

2.2. Fraksiyonel Türev ve İntegral

Fraksiyonel (kesirli) türev ya da fraksiyonel analiz kavramları yanlış değerlendirmelere sebep olabilmektedir. Aslnda fraksiyonel türev ifadesinden anlaşılması gereken keyfi mertebeden türevdir. Fraksiyonel analiz kavramı ise kesirlerin analizi değildir, keyfi mertebeden türev ya da keyfi katlı integral üzerine bir kavramdır.

Aşağıdaki n katlı integral ve n. mertebeden türev dizisini ele alalım:

$$...,\int_a^t d\tau_2\int_a^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1,\ \int_a^t f(\tau_1)d\tau_1,\ f(t),\ \frac{d\ f(t)}{dt},\ \frac{d^2\ f(t)}{dt^2},.... \tag{2.24}$$

Keyfi bir α reel sayısı verilsin. f fonksiyonunun α. mertebeden türevini ${}_aD_t^{\alpha} f(t)$ ile gösterirsek bu türev yukarıdaki operatörler dizisinin bir enterpolasyonu olarak yazılabilir. a ve t fraksiyonel operatörün terminal değerleridir. Çalışmamızda keyfi mertebeden integral kavramı yerine ${}_aD_t^{-\alpha} f(t)$ ile gösterdiğimiz n-katlı integral kavramını da genelleyen fraksiyonel integral operatörü kullanılacaktır. α' nın negatif olması fraksiyonel integrale işaret eder.

2.2.1. Grünwald-Letnikov Fraksiyonel Türevi

$y = f(t)$ sürekli fonksiyonunu ele alalım. Türevin limit tanımından $f(t)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevinin

$$f'(t) = \frac{d\ f(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.25}$$

bağıntısıyla verildiği bilinmektedir. Bu tanım $f'(t)$ fonksiyonuna birkez daha uygulanırsa ikinci mertebeden türevi elde edilir:

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \frac{d^2\ f(t)}{dt^2} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left\{ \frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.25) ve (2.26)'dan hareketle $f(t)$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevi aşağıdaki gibidir:

$$f'''(t) = \frac{d^3\ f(t)}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.27}$$

ve bu şekilde devam edilirse, tümevarımla:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(t) &= \frac{d^n f(t)}{dt^n} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh) \end{aligned} \qquad (2.28)$$

elde edilir. Burada $\binom{n}{r}$ binom katsayısını göstermektedir.

n yukarıdaki gibi bir tam sayı ve p keyfi bir tam sayı olmak üzere aşağıdaki eşitlik ile (2.25) ve (2.28)'deki bağıntıları genelleyebiliriz

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh). \qquad (2.29)$$

burada $p \le n$ olduğu açıktır. Şimdi limite geçersek aşağıdaki ifadeleri elde ederiz:

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p}, \qquad (2.30)$$

Böyle bir durumda $\binom{p}{p}$ den sonraki katsayılar sıfır olarak alınmaktadır.

Şimdi p'nin negatif tam sayı değerleri alması durumunu inceleyelim. Bunun için aşağıdaki notasyonu kullanacağız

$$\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} = \frac{p(p+1)\ldots(p+r-1)}{r!} \qquad (2.31)$$

bu takdirde aşağıdaki eşitlik doğrudur

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1)(-p-2)\ldots(-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix}. \qquad (2.32)$$

(2.30)’ da p yerine $-p$ koyarsak

$$f_h^{(-p)}(t) = h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) \tag{2.33}$$

ifadesi bulunur. Burada p pozitif bir tam sayıdır.

n’yi sabitler ve $h \to 0$ için limit alırsak $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesi açıktır ki sıfıra gider. Limiti sıfırdan farklı yapmak için $h \to 0$ için $n \to \infty$ olacağı bir durumu ele almalıyız. Bu nedenle h fonksiyonunu a bir reel sabit olmak üzere $h = \dfrac{t-a}{n}$ biçiminde yazabiliriz. Bu durumda $f_h^{(-p)}(t)$ ifadesinin limiti gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t^{-p} f(t) = D_0^{-p} f(t). \tag{2.34}$$

Bazen Grünwald-Letnikov fraksiyonel integral operatörü ${}_aD_t^{-p} f(t)$ ifadesinde terminal sınır değerleri de kaldırarak $D_0^{-p} f(t)$ ile göstereceğiz.

Bazı özel durumlar için bu formülü değerlendirelim. $p = 1$ alırsak aşağıdaki ifade bulunur;

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t - rh). \tag{2.35}$$

$t - nh = a$ olduğu göz önüne alınır ve $f(t)$'yi sürekli bir fonksiyon olarak düşünürsek bu durumda

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} f_h^{(-1)}(t) = {}_a D_t^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t - z)dz = \int_a^t f(\tau)d\tau. \tag{2.36}$$

ifadesini yazarız.

$p = 2$ için ise

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=0}^{n}(rh)f(t-rh) \tag{2.37}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \dfrac{2.3...(2+r-1)}{r!}$ olduğu göz önüne alındı.

$t+h=y$ dönüşümü ile

$$f_h^{(-2)}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh) \tag{2.38}$$

ifadesini yazarız. $h \to 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-2)}(t) = {}_aD_t^{-2}f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)\,dz = \int_a^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau, \tag{2.39}$$

sonucunu elde edriz. $h \to 0$ için $y \to t$ olduğuna dikkat edelim.

Şimdi de $p=3$ olması durumunu inceleyelim.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3.4...(3+r-1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} \tag{2.40}$$

eşitliğini dikkate alırsak bu durumda

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2 f(t-rh). \tag{2.41}$$

Yukarıda olduğu gibi $t+h=y$ dönüşümü ile

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh), \tag{2.42}$$

ifadesini ve buradan hareketle son olarak da aşağıdaki ifadeyi elde ederiz;

$$f_h^{(-3)}(t)=\frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)^2 f(y-rh)+\frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh). \qquad (2.43)$$

$h \to 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-3)}(t) = {}_aD_t^{-3} f(t) = \frac{1}{2!}\int_0^{t-a} z^2 f(t-z)\,dz = \frac{1}{2!}\int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau)\,d\tau, \qquad (2.44)$$

burada $h \to 0$ için $y \to t$ olduğu gerçeği ve bununla birlikte aşağıdaki eşitlik kullanılmıştır.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau = 0. \qquad (2.45)$$

Sonuç olarak, keyfi tam sayı mertebeden p katlı integral için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n}\begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\,d\tau. \qquad (2.46)$$

Matematiksel indüksiyonla bu sonucun doğruluğu kolayca gösterilebilir.
Aşağıda $f(t)$ sürekli fonksiyonu için tam sayı mertebeden keyfi türev (2.30) ve p katlı integral (2.46) kavramları için ortak bir formül verilmiştir

$${}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh). \qquad (2.47)$$

Eğer $p=n$ alırsak n. mertebeden türev, $p=-n$ alınırsa da n-katlı integral elde edilmiş olur.
Yukarıdaki (2.47) eşitliği bizi türev ve integral kavramlarının keyfi mertebeden herhangi bir p reel veya kompleks sayısı için de yazılabileceği fikrine götürür.
Böylece keyfi bir $p\,(p>0)$ sayısı için Grünwald-Letnikov integral formülü aşağıdaki

gibidir

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t-rh) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)\,d\tau. \qquad (2.48) $$

$[a,b]$ kümesi üzerinde $f'(t)$ fonksiyonunun sürekli olduğu biliniyorsa kısmi integrasyonla (2.48) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)\,d\tau \qquad (2.49) $$

Eğer $f(t)$ fonksiyonu $(m+1)$ kez sürekli türevlere sahipse bu takdirde aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)\,d\tau \qquad (2.50) $$

Benzer şekilde keyfi mertebeden Grünwald-Letnikov türev formülü ise

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{p} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \end{aligned} \qquad (2.51) $$

burada $f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh)$ dır.

(2.51) eşitliği bazı hesaplamalar neticesinde aşağıdaki biçimde de yazılabilir.

$$ \begin{aligned} {}_aD_t^{p} f(t) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau)\,d\tau \end{aligned} \qquad (2.52) $$

burada $f(t)$ fonksiyonu $m+1$ kez sürekli türevlere sahip ve m tamsayısı da $m > p-1$ koşulunu sağlamaktadır. Yani m tam sayısı p' den küçük en büyük tam sayıdır, $m < p < m+1$.

Teorik açıdan bahsi geçen (2.52) Grünwald-Letnikov türevin tanımlı olabilmesi fonksiyonun $m+1$ kez sürekli türeve sahip olmasını gerektirmektedir. Bu durum bir bakıma kısıtlanma gibi görünse de aslında fizik, kimya ve çeşitli disiplinlerdeki uygulamalara baktığımızda yeterince düzgün fonksiyonlar kullanılmaktadır.

Örnek 2.1: Aşağıda verilen fonksiyonun Grünwald-Letnikov manada fraksiyonel türevini hesaplayalım.

$$f(t) = (t-a)^{v} \tag{2.53}$$

İlk olarak p *nin negatif değerlerini ele alalım ki bu* $-p$ *basamaktan kesirli integralin hesaplanması anlamına geliyor. (2.48) deki formülü kullanarak*

$${}_aD_t^{p}(t-a)^{v} = \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t (t-\tau)^{-p-1}(\tau-a)^{v}\,d\tau \tag{2.54}$$

elde edilir. İntegralin yakınsaklığı için $v > -1$ *olarak alalım. (2.54) de* $\tau = a+\xi(t-a)$ *yerine koyulursa ve beta fonksiyonunun (2.8) deki tanımını kullanırsak;*

$$\frac{\tau-a}{t-a} = \xi \Rightarrow \tau = a+\xi(t-a) \Rightarrow d\tau = (t-a)d\xi \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned} &\tau = a \Rightarrow \xi = 0 \\ &\tau = t \Rightarrow \xi = 1 \end{aligned} \tag{2.56}$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_0^1 (t-a)\left(t-a-\xi(t-a)\right)^{-p-1}\left(a+\xi(t-a)-a\right)^v d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}\int_0^1 (t-a)(t-a)^{-p-1}(1-\xi)^{-p-1}\xi^v(t-a)^v d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{v-p}\int_0^1 (1-\xi)^{-p-1}\xi^v d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,v+1)(t-a)^{v-p}
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

$$
{}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-p+1)}(t-a)^{v-p} \quad (p<0, v>-1) \tag{2.58}
$$

elde edilir.

Şimdi $0 \le m \le p < m+1$ *olma durumunu ele alalım. (2.52) formülünü uygulayabilmek için, (2.52) deki integralin yakınsaklığı için* $v > m$ *olması gerekmektedir. Buradan*

$$
{}_aD_t^p(t-a)^v = \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}}d\tau \tag{2.59}
$$

bulunur. Çünkü integral olmayan bütün toplamlar sıfıra eşit olmaktadır.

$$
\frac{d^{m+1}(\tau-a)^v}{d\tau^{m+1}} = v(v-1)\ldots(v-m)(\tau-a)^{v-m-1} = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)}(\tau-a)^{v-m-1} \tag{2.60}
$$

olduğu göz önüne alınırsa ve $\tau = a+\xi(t-a)$ *değişken değişimi yapılırsa;*

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p(t-a)^v &= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}\int_a^t (t-\tau)^{m-p}(\tau-a)^{v-m-1}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}(t-a)^{v-p}\int_0^1 (1-\xi)^{m-p}\xi^{v-m-1}d\xi \\
&= \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-m)\Gamma(-p+m+1)}B(-p+m+1, v-m)(t-a)^{v-p}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

$_{a}D_{t}^{p}\left(t-a\right)^{v}=\dfrac{\Gamma\left(v+1\right)}{\Gamma\left(-p+m+1\right)}\left(t-a\right)^{v-p}$ *eşitliği elde edilir. (2.57) deki ifade ile (2.58) deki ifade birbiriyle aynıdır. Böylece $f(t)=\left(t-a\right)^{v}$ kuvvet fonksiyonunun Grünwald-Letnikov kesirli türevini aşağıdaki şekilde elde ederiz.*

$$
\begin{gathered}
_{a}D_{t}^{p}\left(t-a\right)^{v}=\frac{\Gamma\left(v+1\right)}{\Gamma\left(-p+v+1\right)}\left(t-a\right)^{v-p} \\
\left(p<0, v>-1\right) \text{ veya } \left(0\leq m\leq p<m+1, v>m\right)
\end{gathered}
\tag{2.62}
$$

2.2.2. Riemann-Liouville (R-L) Fraksiyonel Türev

Riemann ve Liouville'den adını alan ve literatürde en çok bilinen fraksiyonel türev kavramı aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$
_{a}D_{t}^{p}f\left(t\right)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-p}f\left(\tau\right)d\tau,\quad \left(m\leq p<m+1\right). \tag{2.63}
$$

Yukarıdaki (2.52) eşitliği art arda kısmi integrasyon alarak tabiki f 'nin $m+1$ kez sürekli türeve sahip olması koşuluyla (2.54) teki R-L türev tanımından kolayca elde edilebilir. Yani

$$
\begin{aligned}
_{a}D_{t}^{p}f\left(t\right)&=\left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-p}f\left(\tau\right)d\tau \\
&=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma\left(-p+k+1\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(-p+m+1\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{m-p}f^{(m+1)}(\tau)d\tau \\
&=D_{0}^{p}f\left(t\right),\quad \left(m\leq p<m+1\right),
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

burada $D_{0}^{p}f\left(t\right)$ ile Grünwald-Letnikov fraksiyonel türev kast edilmektedir.

Böylece $t\geq a$ için $m+1$ kez sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar sınıfını ele aldığımızda (2.51) Grünwald-Letnikov tanımı ile (2.54) Riemann-Liouville tanımı birbirine özdeş olur. Uygulamaya baktığımızda çalışılan fonksiyonlar yeterince düzgün ve sürekli fonksiyonlardır ve bu anlamda büyük bir avantajdır.

Şimdi (2.63) deki Riemann-Liouville tanımının tam sayı mertebeden türev ve *n*-katlı integral tanımlarının doğal bir sentezi olduğunu görmeye çalışalım.

Kabul edelim ki $f(\tau)$ sürekli ve her sonlu (a,t) aralığında integrallenebilir olsun. Yalnız $f(\tau)$ fonksiyonun $\tau = a$ noktasında r. mertebeden $(r<1)$ integral tekilliği bulunabilir yani

$$\lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r \, f(t) = \text{sbt}(\neq 0) \tag{2.65}$$

olur. Bu durumda

$$f^{-1}(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau \tag{2.66}$$

integrali mevcut ve sonlu bir değere sahiptir. Şöyle ki $t \to a$ için integralin değeri sıfırdır. Gerçekten $\tau = a + y(t-a)$ dönüşümü yapılır ve $\varepsilon = t - a$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to a} f^{-1}(t) &= \lim_{t \to a} \int_a^t f(\tau) d\tau \\
&= \lim_{t \to a} (t-a) \int_0^1 f(a + y(t-a)) dy \qquad (2.67) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-r} \int_0^1 (\varepsilon y)^r \, f(a + y\varepsilon) y^{-r} dy = 0
\end{aligned}$$

burada $r<1$ olmasına dikkat edelim. Şimdi de $f(\tau)$ fonksiyonunun iki katlı integral durumunu ele alalım.

$$f^{-2}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} f(\tau) d\tau = \int_a^t f(\tau) d\tau \int_\tau^t d\tau_1 = \int_a^t (t-\tau) \, f(\tau) d\tau \tag{2.68}$$

Bu son ifadeyi bir kez daha integre edersek $f(\tau)$ fonksiyonunun üç katlı integralini elde ederiz:

$$f^{(-3)}(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau) d\tau$$

$$= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} (\tau_1 - \tau) f(\tau) d\tau \tag{2.69}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau.$$

Matematiksel tümevarım yöntemiyle bu şekilde devam edilirse genel durumdaki Cauchy formülünü buluruz:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \tag{2.70}$$

Şimdi $n \geq 1$ olsun ve n' yi sabitleyelim ve $k \geq 0$ şeklinde bir k tam sayısı ele alalım. Açıktır ki bu durumda

$$f^{(-k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{-k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.71}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada D^{-k} ile k katlı integral işaretlenmiştir.

Diğer taraftan $n \geq 1$ olsun. n' yi sabitler ve bir $k \geq n$ tam sayısı seçersek, $f(t)$ fonksiyonunun $(k-n)$. mertebeden türevini aşağıdaki biçimde yazmış oluruz.

$$f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^{k} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \tag{2.72}$$

burada D^k sembolü k defa türevi göstermektedir.

(2.67) deki n-katlı integral formülünü genelleyip tam sayı olmayan bir n değeri için yazmak gerekirse bu durumda verilen eşitlikte n-tam sayısını ve $p>0$ reel sayısı ile değiştirmemiz yeterlidir.

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau \qquad (2.73)$$

(2.67) de n tam sayısı için $n \geq 1$ olması gerekli iken, p' nin sadece $p>0$ şartını sağlaması yeterlidir.
Yukarıda ki (2.70) integralinde $a=0$ olduğunda Riemann, $a=-\infty$ olduğunda ise Liouville manada keyfi mertebeden integral tanımları söz konusu olmaktadır. Ayrıca (2.73) integrali sol-fraksiyonel integral olarak bilinmektedir. Sağ-fraksiyonel integral ise

$$ {}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_t^T (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \; t<T. \qquad (2.74)$$

Aşağıda (2.63) deki R-L fraksiyonel türev operatörü ve (2.73) deki R-L fraksiyonel integral operatörü için bazı özellikler verilmiştir:

$i)$ Mertebe sıfır olursa fonksiyon değişmeden aynen kalır.

$$ \lim_{p \to 0} {}_aD_t^{-p} f(t) = {}_aD_t^{0} f(t) = f(t). \qquad (2.75)$$

$ii)$ Fraksiyonel operatör lineer bir operatördür.

$$ {}_aD_t^{-p} \left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha\, {}_aD_t^{-p} f(t) + \beta\, {}_aD_t^{-p} g(t). \qquad (2.76)$$

$iii)$ Fraksiyonel integral operatörü için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$ {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) = {}_aD_t^{-p-q} f(t). \qquad (2.77)$$

$iv)$ R-L fraksiyonel türev operatörü, R-L fraksiyonel integral operatörünün soldan ters operatörüdür.

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = f(t) \tag{2.78}$$

burada $p > 0$ ve $t > a$ dır.

$v)$ Eğer ki $f(t)$ fonksiyonunun fraksiyonel türevi ${}_aD_t^p f(t)$, $(k-1 \le p < k)$ integrallenebilen ise bu takdirde

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}. \tag{2.79}$$

Şayet $0 < p < 1$ ise o zaman

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = f(t) - \left[{}_aD_t^{p-1} f(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-1}}{\Gamma(p)}. \tag{2.80}$$

Örnek 2.2:. Aşağıda verilen fonksiyonun Riemann-Liouville manada fraksiyonel türevini hesap edelim.

$$ f(t) = (t-a)^w \tag{2.81}$$

burada w *gerçel bir sayıdır. Öncelikle* α *sayısını* $\alpha = m - p$ *olacak biçiminde yazalım. Burada* m *sayısı* α' dan *büyük en küçük tam sayıdır ve* $0 \le p < 1$. *Bu durumda keyfi mertebeden fraksiyonel türev aşağıdaki gibi hesaplanır.*

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\alpha} f(t) &= {}_aD_t^{m-p} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\, {}_aD_t^{-p} f(t) \qquad (2.82) \\ &= \frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-s)^{p-1}(s-a)^w \, d\tau\right] \end{aligned}$$

$s = a + y(t-a)$ *değişken dönüşümüyle*

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{\alpha}(t-a)^w &= \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{d^m}{dt^m}\left[(t-a)^{p+w}\int_0^1 (1-y)^{p-1}y^w dy\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{d^m}{dt^m}\left[(t-a)^{p+w}\beta(p,w+1)\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{\Gamma(p)\Gamma(w+1)}{\Gamma(p+w+1)}\frac{d^m}{dt^m}(t-a)^{p+w} \\
&= \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(p+w+1)}\frac{\Gamma(p+w+1)}{\Gamma(p+w-m+1)}(t-a)^{p+w-m} \\
&= (t-a)^{w-\alpha}\frac{\Gamma(1+w)}{\Gamma(1-\alpha+w)}.
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

Bu örneğin doğal bir sonucu olarak $f(t)=1$ *olması durumunu kolayca hesaplayabiliriz.*

$$
{}_aD_t^{\alpha}1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}\Gamma(1)}{\Gamma(1-q)} = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-q)}. \tag{2.84}
$$

Benzer biçimde $f(t)=(t-a)^w$ *fonksiyonunun fraksiyonel integrali ise*

$$
{}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^w = (t-a)^{w+\alpha}\frac{\Gamma(1+w)}{\Gamma(1+w+\alpha)}. \tag{2.85}
$$

Burada $f(t)=(t-a)^w$ *foksiyonunun integrallenebilen olmasına yani* $w>-1$ *olmasına dikkat edilmelidir.*

2.2.3. Caputo Fraksiyonel Türev

Riemann-Liouville fraksiyonel türev tanımı, fraksiyonel türev ve integral teorisinin gelişiminde ve fraksiyonel analiz konusunun ilerlemesinde önemli bir rol oynadığı reddedilemez bir gerçektir. Bununla birlikte çeşitli çalışmalardaki matematiksel modellemelerde karşımıza çıkan fraksiyonel başlangıç değer problemlemlerinde aşağıdaki gibi bir başlangıç koşulu, fiziksel olarak bir anlam ifade etmeyebilir.

$$\lim_{t \to t_0} {}_{t_0}D_t^{q-n} x(t) = b_n, \; n = 1, 2, .. \tag{2.86}$$

Burada b_n sayıları verilen sabitlerdir. Her ne kadar bu problemleri teorik olarak çözebiliyorsak da bulunan çözümlerin pratikte bir anlam ifade etmeyeceği düşünülmüştür.

Caputo tarafından verilen aşağıdaki fraksiyonel türev tanımı bu durumun ortadan kalkmasını sağlamıştır.

$$ {}_{t_0}^{c}D_t^{q} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s)ds, \quad n-1 < q < n \tag{2.87}$$

$q \to n$ için Caputo türevi klasik manada $x(t)$ fonksiyonunun *n.* türevini verir. Gerçekten, $0 \le n-1 < q < n$ olduğunu ve $x(t)$ fonksiyonu $[t_0, T]$ kümesi üzerinde $n+1$ kez sürekli ve sınırlı türevlere sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{q \to n} \left({}_{t_0}^{c}D_t^{q} x(t) \right) &= \lim_{q \to n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-q-1} x^{(n)}(s)ds \right) \\
&= \lim_{q \to n} \left(\frac{x^{(n)}(t_0)(t-t_0)^{n-q}}{\Gamma(n-q+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-q+1)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-q} x^{(n+1)}(s)ds \right) \\
&= x^{(n)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} x^{(n+1)}(s)ds \\
&= x^{(n)}(t),
\end{aligned} \tag{2.88}$$

burada $n = 1,2,...$.

Caputo türevin en önemli avantajı; bu türevle oluşturulan fraksiyonel diferansiyel denklemlerin başlangıç koşullarının, klasik anlamda bilinen diferansiyel denklemlerde kullandığımız başlangıç koşulları ile aynı olmasıdır. Diğer taraftan bir C sabitinin Caputo manada türevi sıfır iken, aynı C sabitinin Riemann-Lioville türevi sıfırdan farklıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır

$$ {}_{t_0}D_t^q C = C\frac{(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \tag{2.89} $$

Bundan sonra R-L manada fraksiyonel operatörü ${}_{t_0}D_t^q$ yerine terminal değerleri kaldırarak kısaca D^q ile ${}_{t_0}^{c}D_t^q$ Caputo fraksiyonel operatörü de kısaca ${}^{c}D^q$ ile göstereceğiz. Ayrıca Grünwald-Letnikov fraksiyonel operatörü D_0^q ile gösterdiğimizi daha önce belirtmiştik.

Eğer $0 < q < 1$ ise (2.87) deki formül aşağıdaki biçime dönüşür

$$ {}^{c}D^q x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{-q}\,x'(s)\,ds, \tag{2.90} $$

ve buradan

$$ {}^{c}D^q x(t) = D^q\left[x(t) - x(t_0)\right] \tag{2.91} $$

ya da

$$ {}^{c}D^q x(t) = D^q x(t) - \frac{x(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \tag{2.92} $$

Özel olarak $x(t_0) = 0$ seçilirse bu durumda

$$ {}^{c}D^q x(t) = D^q x(t). \tag{2.93} $$

Bu da gösteriyor ki Riemann-Liouville fraksiyonel türevi mevcut olan her fonksiyon için Caputo manada fraksiyonel türev de tanımlıdır.

Bu noktada aşağıda ki önemli eşitliği vermeden geçemeyeceğiz:

$$D^q E_q(\lambda(t-t_0)^q) = \lambda E_q(\lambda(t-t_0)^q),\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.94}$$

burada E_q ile (2.11) deki bir parametreli Mittag-Leffler function fonksiyon kast edilmektedir.

Eğer $x(t)$ sürekli ve $\frac{dx(t)}{dt}$ fonksiyonu mevcut ve integrallenebilen ise bu takdirde Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov türevleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$D^q x(t) = D_0^q x(t) = \frac{x(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} + \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-q} x'(s) ds. \tag{2.95}$$

(2.91) eşitliğini de göz önüne alacak olursak

$$\begin{aligned} {}^c D^q x(t) &= D^q\left[x(t) - x(t_0)\right] \\ &= D_0^q\left[x(t) - x(t_0)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-q} \frac{d}{ds} x(s) ds. \end{aligned} \tag{2.96}$$

Bu son yazdığımız eşitlikler fraksiyonel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kualitatif özelliklerinin çalışılmasında önemli bir yere sahiptir.

3. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İLE İLGİLİ BAZI TEOREMLER

3.1. Volterra Fraksiyonel İntegral Eşitsizlikler

Kabul edelim ki $0 < q < 1$ olsun. Bu durum da

$$D^q\left(x(t)-x_0\right)= f\left(t,x\right),\ x(0)=x_0 \quad , \quad f \in C\left(\left[0,T\right]\times R,R\right) \tag{3.1}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. *f* sürekli olduğundan başlangıç değer problemi

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f\left(s,x(s)\right)ds \quad ,0\le t\le T \tag{3.2}$$

Volterra kesirli integraline denktir. İlk olarak fraksiyonel integral eşitsizliklerle ilgili temel bir sonucu görelim.

Teorem 3.1: *v,w* $C\left(\left[0,T\right],R\right)$, $f \in C\left(\left[0,T\right]\times R,R\right)$ *olsun.*

$i)$ $v(t)\le v(0)+\dfrac{1}{\Gamma(q)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{q-1} f\left(s,v(s)\right)ds$

$ii)$ $w(t)\ge w(0)+\dfrac{1}{\Gamma(q)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{q-1} f\left(s,w(s)\right)ds$, $0\le t\le T$

eşitsizliklerinden, bir tanesi kesin eşitsizlik olacak şekilde sağlansın. Aynı zamanda $f\left(t,x\right)$, x *e göre azalmayan ve*

$$v(0)<w(0) \tag{3.3}$$

olsun. Bu durumda $0\le t\le T$ *için*

$$v(t)<w(t) \tag{3.4}$$

dir [9].

İspat 3.1: Kabul edelim ki $v(t)<w(t)$ *sağlanmasın.* $v(0)<w(0)$ *ve fonksiyonların sürekliliğinden bir* $t_1 \in (0,T)$ *vardır öyle ki,* $0<t<t_1$ *için*

$$v(t) < w(t) \ \ ve \ \ v(t_1) = w(t_1) \tag{3.5}$$

dir. Kabul edelim ki, (i) de ki eşitsizlik kesin eşitsizlik olsun. Yani;

$$\begin{aligned} v(t_1) &< v(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, v(s)) ds \\ &< w(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{q-1} f(s, w(s)) ds \\ &\leq w(t_1) \end{aligned} \tag{3.6}$$

olur ki bu kabulümüz ile çelişir. O hâlde $v(t) < w(t)$ *dir. ii) nin kesin eşitsizlik olması durumunda da ispat benzer şekilde yapılır.* ■

Aşağıda kesin olmayan eşitsizliklerle ilgili teorem tek taraflı Lipschitz koşulunu gerektirir.

Teorem 3.2: Teorem 3.1 in koşulları (i) ve (ii) kesin olmayan eşitsizlik olacak şekilde sağlansın. Ayrıca

$$f(t,x) - f(t,y) \leq \frac{L}{1+t^q}(x-y), \quad x \geq y \ , \ L > 0 \tag{3.7}$$

olsun. Eğer $v(0) \leq w(0)$ *ve* $L < \Gamma(q+1)$ *ise*

$$v(t) < w(t), \ t \in [0,T] \ dir \ [9]. \tag{3.8}$$

İspat 3.2: $w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon(1+t^q)$ *alalım.* $\varepsilon > 0$ *yeterince küçük olduğunda;*

$$w_\varepsilon(0) = w(0) + \varepsilon > w(0) \tag{3.9}$$

ve

$$w_\varepsilon(t) > w(t) \ \ , t \in [0,T] \tag{3.10}$$

dir.

$$w_\varepsilon(t)=w(t)+\varepsilon\left(1+t^q\right)\geq w(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w(s)\right)ds+\varepsilon\left(1+t^q\right)$$

$$w_\varepsilon(t)\geq w(0)+\varepsilon+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w(s)\right)ds+\varepsilon t^q \tag{3.11}$$

$$f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)-f\left(s,w(s)\right)\leq\frac{L}{1+s^q}\left(w_\varepsilon(s)-w(s)\right)$$

$$=\frac{L}{1+s^q}\varepsilon\left(1+s^q\right)=L\varepsilon$$

olduğundan

$$f\left(s,w(s)\right)\geq f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)-L\varepsilon \tag{3.12}$$

olup, bu ifade (3.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
w_\varepsilon(t)&\geq w(0)+\varepsilon+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\left(f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)-L\varepsilon\right)ds+\varepsilon t^q\\
&=w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}L\varepsilon ds+\varepsilon t^q\\
&=w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds+\frac{1}{\Gamma(q)}\frac{(t-s)^{q-1+1}}{q}L\varepsilon+\varepsilon t^q\\
&=w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds-\frac{1}{\Gamma(q)}\frac{t^q}{q}L\varepsilon+\varepsilon t^q\\
&=w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds-\frac{1}{\Gamma(q+1)}L.\varepsilon t^q+\varepsilon t^q\\
&=w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds+\varepsilon t^q\left(1-\frac{1}{\Gamma(q+1)}L\right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$L<\Gamma(q+1)$ *o hâlde* $1-\dfrac{L}{\Gamma(q+1)}>0$ *olur.*

$$w_\varepsilon(t)>w_\varepsilon(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f\left(s,w_\varepsilon(s)\right)ds \tag{3.14}$$

Teorem 3.1 deki eşitsizliklerden biri kesin oldu. O hâlde

$v(0) < w_\varepsilon(0)$ *olduğundan* $t \in [0,T]$ *için* $v(t) < w_\varepsilon(t)$ *dir. Şu durumda* $\varepsilon > 0$ *keyfi olduğundan;*

$$v(t) < w(t) + \varepsilon(1+t^q) \Rightarrow v(t) \le w(t)\ . \blacksquare \tag{3.15}$$

Uyarı 3.1: () *Eğer teoremdeki eşitsizlik yerine tek taraflı Lipschitz koşulu*

$$f(t,x) - f(t,y) \le L(x-y)\ ,\ x \ge y\ ,\quad L > 0\ . \tag{3.16}$$

alınırsa Teorem, $\Gamma(q+1) > L$ *yerine* $\Gamma(q+1) > LT^q$ *koşulu ile sağlanır. Burada* $w_\varepsilon(t) = w(t) + 2\varepsilon$ *alınmalıdır* [8].

3.2. Fraksiyonel Diferansiyel Eşitsizlikler

Bu bölümde fraksiyonel diferansiyel denklemler ve eşitsizlikler üzerine bazı teoremler verilecektir.

Aşağıda başlangıç koşuluyla verilen fraksiyonel diferansiyel denklemi ele alalım.

$$D^q x(t) = f(t,x),\quad x(t_0) = x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0},\ t_0 \le t \le T, \tag{3.17}$$

burada $f \in C[[t_0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$, D^q ise R-L manada *q.* mertebeden $0 < q < 1$ fraksiyonel türevi göstermektedir.

Yukarıdaki probleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x^0(t) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} f(s, x(s))\, ds, \tag{3.18}$$

burada $x^0(t) = \dfrac{x^0 (t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$ dir.

Öncelikle ileriki bölümler için esas teşkil etmesi bakımından fraksiyonel diferansiyel eşitsizlikler üzerinde duracağız. Bu doğrultuda ilk olarak aşağıdaki notasyon ve lemmaları vereceğiz.

Bir $m(t)$ fonksiyonu için $m \in C_p([t_0,T],\mathbb{R}), 1-q=p$ olarak verilmiş olsun. Burada $C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ kümesi aşağıda ki gibi tanımlanmıştır:

$$C_p([t_0,T],\mathbb{R}) = \left[u \in C([t_0,T],\mathbb{R}) \text{ ve } u(t)(t-t_0)^p \in C([t_0,T],\mathbb{R})\right]. \quad (3.19)$$

Lemma 3.1: Kabul edelim ki $m \in C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ *fonksiyonu* λ*.mertebeden lokal Hölder sürekli olsun öyle ki* $0<\lambda<1$ *ve* $\lambda > q$*. Ayrıca bir* $t_1 \in (t_0,T]$ *için*

$$m(t_1)=0 \;\; ve \;\; m(t) \le 0, \;\; t_0 \le t \le t_1, \quad (3.20)$$

ifadesi gerçeklensin.
Bu takdirde,

$$D^q m(t_1) \ge 0 \text{ [9]}. \quad (3.21)$$

İspat 3.1: Bildiğimiz gibi

$$D^q m(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{p-1} m(s)\, ds. \quad (3.22)$$

Bir $H(t) = \int_{t_0}^{t} (t-s)^{p-1} m(s)\, ds$ *fonksiyonu tanımlayalım. Çok küçük* $h>0$ *değerleri için aşağıdaki ifadeyi ele alalım;*

$$\begin{aligned} H(t_1) - H(t_1-h) &= \int_{t_0}^{t_1-h} \left[(t_1-s)^{p-1} - (t_1-h-s)^{p-1}\right] m(s)\, ds \\ &+ \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1-s)^{p-1} m(s)\, ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$t_0 \le s \le t_1-h$ *için* $\left[(t_1-s)^{p-1} - (t_1-h-s)^{p-1}\right] < 0$ *ve teoremin hipotezinden de kolayca* *görüleceği gibi* $m(s) \le 0$ *dır. Böylece açıktır ki ilk verilen integral* $I_1 \ge 0$ *dır.*

Buradan

$$H(t_1) - H(t_1 - h) \ge \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1} m(s) ds. \tag{3.24}$$

$m(t)$ *lokal Hölder sürekli olduğundan bir* $k(t_1) > 0$ *sayısı mevcuttur öyle ki* $t_1 - h \le s \le t_1 + h$ *için*

$$-k(t_1)(t_1 - s)^{\lambda} \le m(t_1) - m(s) \le k(t_1)(t_1 - s)^{\lambda} \tag{3.25}$$

burada $0 < \lambda < 1$ *ve* $\lambda > q$. *Bu son eşitsizlik ve (3.20) ifadesinden,*

$$I_2 \ge -k(t_1) \int_{t_1-h}^{t_1} (t_1 - s)^{p-1+\lambda} ds = k(t_1) \frac{h^{p+\lambda}}{p+\lambda}. \tag{3.26}$$

Buradan yeterince küçük $h > 0$ *için* $H(t_1) - H(t_1 - h) - k(t_1) \dfrac{h^{p+\lambda}}{p+\lambda} \ge 0$ *ifadesine buluruz. Son olarak* $h \to 0$ *için* $\dfrac{d}{dt} H(t_1) \ge 0$ *olduğu yani* $D^q m(t_1) \ge 0$ *gerçeğine ulaşırız. Böylece ispat tamamlanmıştır.* ■

Caputo manada fraksiyonel türevlerle verilmesi durumunda da bu teoremin iddiasının geçerli olacağı aşağıdaki Lemma'da gösterilmiştir.

Şimdi Caputo tipinde verilen aşağıdaki fraksiyonel diferansiyel denklemi ele alalım.

$${}^c D^q x(t) = f(t, x), \;\; x(t_0) = x_0, \;\; t_0 \le t \le T. \tag{3.27}$$

burada $f \in C\left[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$, ${}^c D^q$ ile q. mertebeden $0 < q < 1$ Caputo manada fraksiyonel türev anlaşılmaktadır.

Yukarıda ki probleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{q-1} f\left(s, x(s)\right) ds. \tag{3.28}$$

Lemma 3.2: Kabul edelim ki $m \in C_p\left(\left[t_0, T\right], \mathbb{R}\right)$ *fonksiyonu* λ*. mertebeden lokal Hölder sürekli olsun öyle ki* $0 < \lambda < 1$ *ve* $\lambda > q$*. Ayrıca bir* $t_1 \in (t_0, T]$ *için*

$$m(t_1) = 0 \;\; ve \;\; m(t) \le 0, \;\; t_0 \le t \le t_1. \tag{3.29}$$

Bu takdirde,

$$^{c}D^{q} m(t_1) \ge 0. \tag{3.30}$$

İspat 3.2: (2.91) ilişkisi göz önüne alınacak olursa,

$$^{c}D^{q} m(t) = D^{q}\left[m(t) - m(t_0)\right] \tag{3.31}$$

yazılabilir. Hipotezden $m(t_0) \le 0$ *olduğunu biliyoruz. Böylece*

$$D^{q} m(t_0) = \frac{m(t_0)(t-t_0)^{-q}}{\Gamma(1-q)} \le 0 \tag{3.32}$$

bulunur. Buradan

$$^{c}D^{q} m(t) \ge D^{q} m(t) \tag{3.33}$$

gerçeğine, Lemma 3.1' den de istenilen sonuca ulaşırız,

$$^{c}D^{q} m(t_1) \ge D^{q} m(t_1) \ge 0. \;\blacksquare \tag{3.34}$$

Lemma 3.3: Kabul edelim ki $\{x_\varepsilon(t)\}$ *dizisi* $\left[t_0, T\right]$ *kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyon dizisi olsun. Ayrıca her bir* $\varepsilon > 0$ *için* $D^{q} x_\varepsilon(t) = f(t, x_\varepsilon)$ $\; x_\varepsilon(t_0) = x_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0}$, *ve* $\left|f(t, x_\varepsilon(t))\right| \le M$ *,* $t_0 \le t \le T$ *ifadeleri gerçeklensin. Bu durumda* $\{x_\varepsilon(t)\}$*dizisi* $\left[t_0, T\right]$*kümesi üzerinde eş süreklidir.*

İspat 3.3: Burada $t_0 \le t_1 \le t_2$ *için aşağıdaki ifadeleri yazacak olursak;*

$$\left|x_\varepsilon(t_1)-x_\varepsilon^0(t_1)-x_\varepsilon(t_2)+x_\varepsilon^0(t_2)\right|$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_{t_0}^{t_1}(t_1-s)^{q-1}f(s,x_\varepsilon(s))ds-\int_{t_0}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f(s,x_\varepsilon(s))ds\right|$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left[(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right]f(s,x_\varepsilon(s))ds-\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f(s,x_\varepsilon(s))ds\right| \tag{3.35}$$

$$\leq\frac{M}{\Gamma(q)}\left|\int_{t_0}^{t_1}\left((t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\right)ds-\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}ds\right|$$

$$\leq\frac{M}{\Gamma(q+1)}\left[(t_1-t_0)^q-(t_2-t_0)^q+2(t_2-t_1)^q\right]\quad\leq\frac{2M}{\Gamma(q+1)}(t_2-t_1)^q\quad<\varepsilon$$

burada δ' yı $|t_2-t_1|<\delta=\left[\frac{\varepsilon\Gamma(q+1)}{2M}\right]^{\frac{1}{q}}$ *şeklinde seçtiğimizde istenileni elde etmiş oluruz. Ayrıca* $x_\varepsilon^0(t)=\frac{x_\varepsilon^0(t-t_0)^{q-1}}{\Gamma(q)}$ *olduğuna da dikkat edelim.* ■

Benzer şekilde Lemma 3.3'te ki ispatı Caputo manada türevli olması durumunda da kolaylıkla ispatlayabiliriz.

Şimdi fraksiyonel eşitsizliklerle ilgili önemli bir teorem verilecektir. Farklı koşullara sahip mukayese teoremleri sırasıyla Caputo manada türevli fraksiyonel denklemler ve klasik türevli adi diferansiyel denklemler için [21], [22] çalışmalarında verilmiştir. Diğer yandan bu mukayese teoremleri kararlılık analizinde önemli yere sahiptir [19], [20].

Teorem 3.3: Kabul edelim ki $v,w\in C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ *fonksiyonları* λ*. mertebeden lokal Hölder sürekli fonksiyonlar ve öyle ki* $0<\lambda<1$ *ve* $\lambda>q$ *olsun. Ayrıca* $f\in C[[t_0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R}]$ *ve*

$i)$ ${}^cD^q\alpha(t)\leq f(t,\alpha(t)),\ t_0\leq t\leq T,$

$ii)$ ${}^cD^q\beta(t)\geq f(t,\beta(t)),\ t_0\leq t\leq T,$

olmak üzere $i)$ *ve* $ii)$ *eşitsizliklerinden herhangi biri kesin eşitsizlik olsun. Bu takdirde* $\alpha(t_0) \leq \beta(t_0)$ *olduğunda,*

$$\alpha(t) < \beta(t),\ t_0 \leq t \leq T \tag{3.36}$$

olur.

İspat 3.3: Farz edelim ki (3.36) eşitsizliği yanlış olsun. Bu takdirde bir $t_1 \in (t_0, T]$ *sayısı mevcuttur öyle ki*

$$\alpha(t_1) = \beta(t_1) \text{ ve } \alpha(t) \leq \beta(t),\ t_0 \leq t \leq t_1. \tag{3.37}$$

Şimdi bir $m(t)$ *fonksiyonunu* $m(t) = \alpha(t) - \beta(t),\quad t_0 \leq t \leq T$ *şeklinde tanımlarsak açıktır ki* $m(t_1) = 0$ *and* $m(t) \leq 0$ *for* $t_0 \leq t \leq t_1$ *olacaktır. Lemma 3.2 göz önüne alındığında* ${}^cD^q m(t_1) \geq 0$ *eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca* $ii)$*deki eşitsizliğin kesin eşitsizlik olduğunu kabul edersek,*

$$f(t_1, \beta(t_1)) < {}^cD^q \beta(t_1) \leq {}^cD^q \alpha(t_1) \leq f(t_1, \alpha(t_1)). \tag{3.38}$$

Bu sonuç ise (3.37) daki eşitlikten dolayı çelişki verir. Neticede (3.36) ifadesinin doğru olması gerektiği sonucuna ulaşırız bu da ispatı tamamlar. ■

Sıradaki teorem yine bir karşılaştırma teoremi fakat fonksiyonun Lipschitz şartını sağlaması koşuluyla verilmiştir. Bu durumda $i)$ ve $ii)$ de ki eşitsizliklerden herhangi birinin kesin eşitsizlik olması gerekmeyecektir.

Teorem 3.4: Kabul edelim ki Teorem 3.3 de verilen şartlar $i)$ *ve* $ii)$ *deki eşitsizliklerden herhangi birinin kesin eşitsizlik olmasını gerektirmeyecek şekilde sağlansın.*

Ayrıca $f \in C[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}]$ *fonksiyonu da Lipschitz şartını sağlasın,*

$$f(t,x) - f(t,y) \leq L(x-y),\ x \geq y \text{ ve } L > 0; \tag{3.39}$$

Bu takdirde başlangıç koşulları da $\alpha(t_0) \le \beta(t_0)$ *ilişkisine sağlarsa,*

$$\alpha(t) \le \beta(t), t_0 \le t \le T \tag{3.40}$$

olur.

İspat 3.4: Bir $\beta_\varepsilon(t)$ *fonksiyonunu* $\beta_\varepsilon(t) = \beta(t) + \varepsilon\lambda(t)$ *şeklinde tanımlayalım, burada* $\lambda(t) = E_q\left(2L(t-t_0)^q\right)$ *olarak belirlenmiştir. Bu durumda,*

$$\beta_\varepsilon(t_0) = \beta(t_0) + \varepsilon > \beta(t_0) \tag{3.41}$$

olacaktır. Buradan $\beta_\varepsilon(t_0) > \beta(t_0) \ge \alpha(t_0)$ *ve* $\beta_\varepsilon(t) > \beta(t)$ *bulunur.*

Şimdi de (3.39) daki Lipschitz şartı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} {}^cD^q\beta_\varepsilon(t) &= {}^cD^q\beta(t) + \varepsilon\, {}^cD^q\lambda(t) \\ &\ge f\left(t, \beta(t)\right) + 2L\varepsilon\lambda(t) \\ &\ge f\left(t, \beta_\varepsilon(t)\right) - L\varepsilon\lambda(t) + 2L\varepsilon\lambda(t) \\ &> f\left(t, \beta_\varepsilon(t)\right), t_0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Yukarıda $\lambda(t)$ *fonksiyonunun aşağıda ki başlangıç değer probleminin (BDP) bir çözümü olduğunu kullandık*

$${}^cD^q\lambda(t) = 2L\lambda(t),\ \lambda(t_0) = 1. \tag{3.43}$$

$\alpha(t)$ *ve* $\beta_\varepsilon(t)$*fonksiyonları için Teorem 3.3 uygulanırsa, bu bizi herhangi bir* ε *değeri için* $\alpha(t) < \beta_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, T]$ *ifadesine götürür. Bu da* $\varepsilon \to 0$ *için* $\alpha(t) \le \beta(t)$, $t_0 \le t \le T$, *olduğu sonucunu verir.* ■

Sonuç 3.1: $f \in C\left[[t_0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right]$ *fonksiyonu* $f(t, \alpha) = \sigma(t)u$ *ilişkisini sağlasın.*

Burada $\sigma(t)\le L$ *Teorem 3.4' de ki gibi kabul edilmek üzere,*

$$u(t)\le 0,\ \ t_0\le t\le T. \tag{3.44}$$

3.3 Yerel Varlık ve Ekstremum Çözüm Koşulları

Öncelikle Peano tipli varlık koşullarını ele alacağız.

Teorem 3.5: $f\in C[R_0,R], R_0=\{(t,x):0\le t\le a,\ \text{ve } |x-x_0|\le b\}$, $|f(t,x)|\le M$ *olsun.*

Bu durumda (3.1) başlangıç değer problemi

$0\le t\le \alpha,\ \alpha=\min\left(\alpha,\left[\frac{b}{M}\Gamma(q+1)\right]^{\frac{1}{q}}\right),\ 0<q<1,$ *için en az bir* $x(t)$*çözümüne sahiptir* [8].

İspat 3.5: Kabul edelim ki $x_0(t),[-\delta,0]$ $\delta>0$ *aralığında*

$x_0(0)=x_0,$ $|x_0(t)-x_0|\le b$ *koşullarını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.*

$0<\varepsilon<\delta$ *için* $x_\varepsilon(t)=x_0(t),\ t\in[-\delta,0]$

(t *verilen aralıkta bir sayı ve* $[0,\alpha_1=\min(\alpha,\varepsilon)]$ *de tanımlı)*

$$x_\varepsilon(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\ f(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon))ds \tag{3.45}$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon tanımlayalım. Bu durumda;

$$|x_\varepsilon(t)-x_0|=\left|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\ f(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon))ds\right| \tag{3.46}$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\underbrace{\left|f(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right|}_{\leq M}ds$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}ds = \frac{M}{\Gamma(q)}\frac{-(t-s)^{q-1+1}}{q} \tag{3.47}$$

$$= \frac{M}{\Gamma(q)}\frac{t^q}{q} = M.\frac{t^q}{\Gamma(q+1)}$$

$$\left(t\in[0,\alpha_1],\ \alpha_1=\min(\alpha,\varepsilon)\ddot{o}yleyse\,\alpha_1\leq\alpha\right)$$

$$\leq M\,\frac{\alpha^q}{\Gamma(q+1)}\leq b \tag{3.48}$$

dir. Sonuç olarak;

$$\left|x_\varepsilon(t)-x_0\right|\leq b \tag{3.49}$$

elde edilir.

Eğer $\alpha_1<\alpha$ *ise yine (3.45) kullanarak* $[-\delta,\alpha_2];\alpha_2=min(\alpha,2\varepsilon)$ *üzerinde sürekli fonksiyon olarak genişletilebilir. Burada ki koşul yine,* $\left|x_\varepsilon(t)-x_0\right|\leq b$ *dir. Buna devam edersek,* $x_\varepsilon(t)$ *yi* $\left|x_\varepsilon(t)-x_0\right|\leq b$ *sağlanacak şekilde* $[-\delta,\alpha]$ *üzerinde tanımlayabiliriz.* $0\leq t_1\leq t_2\leq\alpha$ *için;*

$$\left|x_\varepsilon(t_1)-x_\varepsilon(t_2)\right|$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds-\int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds\right|$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\begin{array}{l}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds-\int_0^{t_1}(t_2-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds-\\ \int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds\end{array}\right| \tag{3.50}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds-\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds\right|$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(q)}\left[\begin{array}{l}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\, f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds\right|+ \\ \left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\, f\left(s,x_\varepsilon(s-\varepsilon)\right)ds\right|\end{array}\right]$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(q)}\left[\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\, ds\right|+\left|\int_{t_2}^{t_1}(t_2-s)^{q-1}\, ds\right|\right]$$

$$= \frac{M}{\Gamma(q)}\left[\left|\left(-\frac{(t_1-s)^{q-1+1}}{q}+\frac{(t_2-s)^{q-1+1}}{q}\right)\right|+\left|\left(-\frac{(t_2-s)^{q-1+1}}{q}\right)\right|\right] \tag{3.51}$$

$$= \frac{M}{\Gamma(q)}\frac{1}{q}\left[\left|t_1^{\,q}+(t_2-t_1)^q-t_2^{\,q}\right|+\left|(t_2-t_1)^q\right|\right]$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(q+1)}((t_2-t_1)^q+(t_2-t_1)^q)$$

$$\left|x_\varepsilon(t_1)-x_\varepsilon(t_2)\right| \leq \frac{2M}{\Gamma(q+1)}(t_2-t_1)^q \tag{ 3.52}$$

$|t_2-t_1|<\delta_0=\left[\dfrac{\varepsilon.\Gamma(q+1)}{2M}\right]^{\frac{1}{q}}$ *olarak alınırsa (3.52) ifadesi* ε *dan küçük kalır.* $\{x_\varepsilon(t)\}$ *ailesi eş sürekli ve düzgün sınırlı fonksiyonlardan oluşur. Arzela-*Ascoli Teoreminden *bir* $\{x_{\varepsilon_n}\}$ *dizisi vardır.* $x_{\varepsilon_n}(n\to\infty)\to x(t)$ *mevcuttur.* $[-\delta,\alpha]$ *da fonksiyon düzgün sürekli olduğundan* $f\left(t,x_{\varepsilon_n}(t-\varepsilon_n)\right)\to f\left(t,x(t)\right)$, *(3.47) den* $\varepsilon\to\varepsilon_n$ *alıp limit alınırsa, (3.1) başlangıç değer probleminin çözümü olan;*

$$x(t)=x_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}\, f\left(s,x(s)\right)ds \tag{3.53}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6: Teorem 3.1' in koşulları sağlansın. f *fonksiyonu* x *göre azalmayan ise, başlangıç değer probleminin*

$0\leq t\leq\alpha_0$, $\alpha_0=\min\left(\alpha,\left[\dfrac{b}{2M+b}\Gamma(q+1)\right]^{\frac{1}{q}}\right)$, *aralığında ekstremal (maksimum-*

minimum) çözümleri vardır [8].

İspat 3.6: Maksimal çözümün varlığı $0 < \varepsilon \le \frac{b}{2}$ *aralığında var olsun. Öyleyse;*

$$D^q x = f(t,x) + \varepsilon \;, \quad x(0) = x_0 + \varepsilon \tag{3.54}$$

kesirli diferansiyel denklemini ele alalım. $R_\varepsilon \subset R_0$ *olduğundan*

$f_\varepsilon(t,x) = f(t,x) + \varepsilon \;, \quad R_\varepsilon = \left\{ 0 \le t \le \alpha, \; \left| x - (x_0 + \varepsilon) \right| \le \frac{b}{2} \right\}$ *de süreklidir. Aynı*

zamanda;

$$\left| f_\varepsilon(t,x) \right| = \left| f(t,x) + \varepsilon \right| \le M + \varepsilon \le M + \frac{b}{2} \;\; dir. \tag{3.55}$$

Teorem 3.1 den (3.54) probleminin $0 \le t \le \alpha$ *aralığında en az bir çözümü vardır.*
Öncelikle $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \le \varepsilon$ *için çözümün var olduğunu göstereceğiz.*
$x(0,\varepsilon_2) < x(0,\varepsilon_1)$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon_2) &= x(0,\varepsilon_2) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f_{\varepsilon_2}\left(s, x(s,\varepsilon_2)\right) ds \\ x(t,\varepsilon_1) &= x(0,\varepsilon_1) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} f_{\varepsilon_1}\left(s, x(s,\varepsilon_1)\right) ds, \; \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \\ &> x(0,\varepsilon_1) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left[f\left(s, x(s,\varepsilon_1)\right) + \varepsilon_2 \right] ds \end{aligned} \tag{3.56}$$

$\left[f_{\varepsilon_1}(s, x(s,\varepsilon_1) = f(s, x(s,\varepsilon_1) + \varepsilon_1 \right]$ *olduğundan Teorem 3.1'i uygulayabiliriz.*
$x(t,\varepsilon_1) > x(t,\varepsilon_2), \; \{x(t,\varepsilon)\}, \; 0 \le t \le \alpha_0$ *ailesini ele alalım.*

$$\begin{aligned}\left|x(t,\varepsilon)-x(0,\varepsilon)\right| &= \left|\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x\left(s,x(s)\right)\right)ds\right| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1}\left| f_\varepsilon\left(s,x\left(s,x(s)\right)\right)\right|ds \\ &\le \frac{M+\frac{b}{2}}{\Gamma(q)}\frac{t^q}{q} = \frac{M+\frac{b}{2}}{\Gamma(q+1)}t^q \\ &\le \frac{M+\frac{b}{2}}{\Gamma(q+1)}\alpha_0^q \le \frac{b}{2} \le b\end{aligned} \tag{3.57}$$

$0 \le t_1 \le t_2 \le \alpha_0$ *için;*

$$\begin{aligned}\left|x(t_1,\varepsilon)-x(t_2,\varepsilon)\right| &= \frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds - \int_0^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds\right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(q)}\left|\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds \\ \displaystyle\qquad -\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds\end{array}\right| \\ &\le \left|\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}-(t_2-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds\right| - \\ &\quad \left|\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{q-1}\, f_\varepsilon\left(s,x(s,\varepsilon)\right)ds\right| \\ &= \frac{M+\frac{b}{2}}{\Gamma(q)}\left[\left|\frac{t_1^q}{q}+\frac{(t_2-t_1)^q}{q}-\frac{t_2^q}{q}\right|+\left|\frac{(t_2-t_1)^q}{q}\right|\right] \\ &\le \frac{2M+b}{\Gamma(q+1)}(t_2-t_1)^q < \varepsilon \\ &\le \frac{2M+b}{\Gamma(q+1)}(t_2-t_1)^q < \varepsilon\end{aligned} \tag{3.58}$$

$\left|t_2-t_1\right| < \delta_0 = \left[\frac{\varepsilon.\Gamma(q+1)}{2M+b}\right]^{\frac{1}{q}}$ *olduğunda verilen ifade* ε *dan küçük kalır.* $\left\{x(t,\varepsilon)\right\}$

eş sürekli ve düzgün sınırlı bir aile ve $\eta(t) = \lim\limits_{(n\to\infty)} x(t,\varepsilon_n)$ $t \in [0,\alpha_0]$ *dir. Burada* $\eta(0) = x(0) = x_0$ *dır.* f *düzgün sürekli olduğundan* $\eta(t)$, *başlangıç değer probleminin bir çözümüdür. Şimdi maksimal çözümün var olduğunu göstermeliyiz.* $x(t)$, *başlangıç değer probleminin* $0 \le t \le \alpha_0$ *aralığında herhangi bir çözümü olsun.*

$x_0 < x_0 + \varepsilon = x(0,\varepsilon)$ *olmak üzere;*

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f\left(s, x(s)\right) ds \\ &< x_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} f\left(s, x(s)+\varepsilon\right) ds \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$x(t,\varepsilon) = x_0 + \varepsilon + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t (t-s)^{q-1} \underbrace{\left[(f(s,x(s)) + \varepsilon) \right]}_{f_\varepsilon(s,x(s,\varepsilon))} ds \tag{3.60}$$

Teorem 3.1'den $[0,\alpha_0]$ *da* $x(t) < x(t,\varepsilon)$ *dir. Maksimal çözümün tekliğinden ve* $x(t,\varepsilon) \to \eta(t), \varepsilon \to 0,$ *olmasından dolayı* $[0,\alpha_0]$ *da* $\eta(t)$ *maksimal çözümdür.* ■

Tanım 3.1: Bir $v \in C_p([t_0,T],\mathbb{R}),\ 1-q = p,\ 0 < q < 1$ *fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona (3.17) başlangıç değer probleminin bir alt çözümü denir,*

$$D^q v(t) \le f\left(t, v(t)\right),\ v^0 \le x_0 \tag{3.61}$$

burada $v^0 = v(t)(t - t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0}$. *Eğer bu fonksiyon yukarıda eşitsizlikleri tersten sağlıyorsa bu durumda aynı problem için bir üst çözümdür denir.*

Sıradaki teorem bir varlık teoremidir. $v(t)$ ve $w(t)$ sırasıyla alt ve üst çözüm fonksiyonları olmak ve $v(t) \le w(t),\ \ t \in [t_0,T], t_0 \ge 0$ koşulunu sağlanmak üzere aşağıdaki Ω kapalı kümesi üzerinde (3.17) fraksiyonel diferansiyel denkleminin bir çözümü mevcuttur.

$$\Omega = \left[(t,x) : v(t) \le x \le w(t), t \in \left[t_0, T\right]\right]. \tag{3.62}$$

Aşağıdaki teoremde bu durum ifade ve ispat edilmiştir.

Teorem 3.7: Kabul edelim ki $v, w \in C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ *fonksiyonları (3.17) problemi için sırasıyla bir alt ve üst çözüm ve* λ*. mertebeden* $(\lambda > q)$ *lokal Hölder sürekli olsunlar. Ayrıca* $v(t) \le w(t),\ t \in \left[t_0, T\right]$ *ve* $f \in C(\Omega,\mathbb{R})$ *olsun. Bu takdirde (3.17) BDP'nin* $x(t)$ *gibi bir çözümü vardır öyle ki* $v(t) \le x(t) \le w(t)\ \ t \in [t_0, T]$ *dir.*

İspat 3.7: Bir $p(t)$ *fonksiyonunu* $[t_0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *'ye ve* $p(t,x) = max[v(t), min(x, w(t))]$ *biçiminde tanımlamış olalım. Bu durumda* $f(t, p(t,x))$ *fonksiyonu* f *fonksiyonunun* $[t_0,T]\times R$ *'ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü* f *fonksiyonu* Ω*. üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle aşağıdaki gibi bir çözüme sahiptir.*

$$D^q x = f(t, p(t,x)),\ x(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} = x_0. \tag{3.63}$$

$\varepsilon > 0$ *için aşağıdaki eşitlikleri ele alalım,*

$$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon\lambda(t)\ \text{ ve }\ w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon\lambda(t) \tag{3.64}$$

burada $\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left((t-t_0)^q\right)$*. Açıktır ki*

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= v(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} - \varepsilon \\ w_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= w(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.65}$$

bu nedenle $v_\varepsilon^0 = v^0 - \varepsilon,\ w_\varepsilon^0 = w^0 + \varepsilon$ *ve* $v_\varepsilon^0 < x^0 < w_\varepsilon^0$ *yazılabilir.*

Amacımız $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t),\ \ t \in \left[t_0, T\right]$ *olduğunu göstermek. Farz edelim ki bu* *eşitsizlik yanlış olsun. Bu takdirde bir* $t_1 \in (t_0, T]$ *değeri bulunabilir öyle ki*

$$x(t_1) = w_\varepsilon(t_1) \text{ ve } v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t),\ t_0 \le t < t_1. \tag{3.66}$$

Buradan $x(t_1) > w(t_1)$ *ve* $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$ *ve* $v(t_1) \le p(t_1, x(t_1)) \le w(t_1)$ *dir.*

Şimdi $m(t) = x(t) - w_\varepsilon(t)$ *fonksiyonunu teşkil edersek* $m(t_1) = 0$ *ve* $m(t) \le 0$ $t \in [t_0, t_1]$ *olduğu kolayca gözükür. Lemma 3.1 kullanılırsa* $D^q m(t_1) \ge 0$ *sonucunu buluruz ki bu ise aşağıda görüleceği gibi bir çelişki vermektedir,*

$$f(t_1, w(t_1)) = f(t_1, p(t_1, x(t_1))) = D^q x(t_1) \ge D^q w_\varepsilon(t_1) = D^q w(t_1) + \varepsilon\lambda(t_1) > f(t_1, w(t_1))$$

Benzer şekilde diğer durum ispatlanabilir.

Neticede, $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, T]$ *eşitsizliği doğrudur. Şimdi* $\varepsilon \to 0$ *için limite geçersek istenilen sonuca ulaşmış oluruz.*

$$v(t) \le x(t) \le w(t),\ [t_0, T]. \tag{3.67}$$

Böylece ispat tamamlanmıştır. ■

4. FRAKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN BAZI MUKAYESE TEOREMLERİ

Aşağıda başlangıç koşuluyla verilen fraksiyonel diferansiyel denklemi ele alalım.

$$D^q x(t) = f\left(t,x\right)+g\left(t,x\right),\quad x\left(t_0\right)=x^0 = x\left(t\right)\left(t-t_0\right)^{1-q}\big|_{t=t_0},\ t_0 \le t \le T, \tag{4.1}$$

Burada $f,g \in C\left[J\times\mathbb{R},\mathbb{R}\right],\ J=\left[t_0,T\right]$ D^q ise R-L manada $q.$ mertebeden $0<q<1$ fraksiyonel türevi göstermektedir.

Yukarıdaki probleme karşılık gelen Volterra tipli integral denklem ise

$$x(t) = x^0\left(t\right)+\frac{1}{\Gamma\left(q\right)}\int_{t_0}^{t}\left(t-s\right)^{q-1}\left[f\left(s,x\left(s\right)\right)+g\left(s,x\left(s\right)\right)\right]ds \tag{4.2}$$

burada $x^0\left(t\right)=\dfrac{x^0\left(t-t_0\right)^{q-1}}{\Gamma\left(q\right)}.$

Tanım 4.1: Kabul edelim ki $v,w\in C_p\left[J,\mathbb{R}\right],\ p=1-q$ *fonksiyonları* $\lambda.$ *mertebeden* $\left(\lambda>q\right)$ *lokal Hölder sürekli ve* $D^q v$ *ve* $D^q w$ *var olsunlar.* v,w *fonksiyonları, Eğer;*

i) $D^q v\le f\left(t,v\right)+g\left(t,v\right),\ v^0\le x^0$

$D^q w\ge f\left(t,w\right)+g\left(t,w\right),\ w^0\ge x^0,\ t\in J$ *ise* v,w *fonksiyonları (4.1)*

fraksiyonel diferansiyel denkleminin doğal alt ve üst çözümleri,

ii) $D^q v\le f\left(t,v\right)+g\left(t,w\right),\ v^0\le x^0$

$D^q w\ge f\left(t,w\right)+g\left(t,v\right),\ w^0\ge x^0,\ t\in J$ *ise* v,w *fonksiyonları (4.1)*

fraksiyonel diferansiyel denkleminin I. tipten eşleşmiş alt ve üst çözümleri, *iii)* $D^q v \le f(t,w)+g(t,v),\ v^0 \le x^0$

$D^q w \ge f(t,v)+g(t,w),\ w^0 \ge x^0,\ t\in J$ *ise* v,w *fonksiyonları (4.1)*

fraksiyonel diferansiyel denkleminin II. tipten eşleşmiş alt ve üst çözümler,

iv) $D^q v \le f(t,w)+g(t,w),\ v^0 \le x^0$

$D^q w \ge f(t,v)+g(t,v),\ w^0 \ge x^0,\ t\in J$ *ise* v,w *fonksiyonları III. tipten*

eşleşmiş alt ve üst çözümler, olarak adlandırılırlar [9].

Teorem 4.1: $v,w\in C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ *fonksiyonları,* $f,g\in C(\Omega,\mathbb{R})$ *ve* $v(t)\le w(t)$, $t\in[t_0,T]$ *olmak üzere (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin I. tipten bağlı alt ve üst çözümleri olsunlar. Ayrıca varsayalım ki* $g(t,x)$ *her t için x'e göre artmayan olsun. Bu durumda (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin* $[t_0,T]$ *da* $v(t)\le x(t)\le w(t)$ *olacak şekilde* $x(t)$ *çözümü vardır.*

İspat 4.1: Bir $p(t)$ *fonksiyonunu* $p:[t_0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$p(t,x)=\min\left[w(t),\max\left(x(t),v(t)\right)\right] \tag{4.3}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $f\left(t,p(t,x)\right)+g\left(t,p(t,x)\right)$*fonksiyonu* $f+g$ *fonksiyonunun* $[t_0,T]\times\mathbb{R}$ *ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü* $f+g$ *fonksiyonu* Ω *üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle aşağıdaki gibi bir çözüme sahiptir.*

$$D^q x(t)=f\left(t,p(t,x)\right)+g\left(t,p(t,x)\right),\quad x(t_0)=x^0=x(t)(t-t_0)^{1-q}|_{t=t_0},\ t_0\le t\le T,$$

Biz $[t_0,T]$ *üzerinde* $v(t)\le x(t)\le w(t)$ *olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla* $\varepsilon>0$ *için aşağıdaki eşitliği ele alalım.*

$$v_\varepsilon(t)=v(t)-\varepsilon\lambda(t)\ \ ve\ \ w_\varepsilon(t)=w(t)+\varepsilon\lambda(t) \tag{4.4}$$

burada $\lambda(t)=(t-t_0)^{q-1}E_{q,q}\left((t-t_0)^q\right)$. *Açıktır ki*

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= v_\varepsilon^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} -\varepsilon\lambda(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} \\ w_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= w_\varepsilon^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} +\varepsilon\lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

bu nedenle $v_\varepsilon^0=v^0-\varepsilon\lambda^0$, $w_\varepsilon^0=w^0+\varepsilon\lambda^0$ *ve* $v(t)$ *ile* $w(t)$*nin alt ve üst çözüm tanımından* $v_\varepsilon^0<x^0<w_\varepsilon^0$ *yazılabilir.*

Amacımız $v_\varepsilon(t)<x(t)<w_\varepsilon(t)$, $t\in[t_0,T]$ *olduğunu göstermek. Farz edelim ki* $x(t)<w_\varepsilon(t)$ *yanlış olsun. Bu takdirde bir* $t_1\in(t_0,T]$ *değeri bulunabilir öyle ki*

$$x(t_1)=w_\varepsilon(t_1)\ \text{ve}\ x(t)<w_\varepsilon(t),\ t_0\le t<t_1. \tag{4.6}$$

Buradan $x(t_1)>w(t_1)\ge v(t_1)$ *ve* $p(t_1,x(t_1))=w(t_1)$ *ve* $v(t_1)\le p(t_1,x(t_1))\le w(t_1)$ *dir. Şimdi* $m(t)=x(t)-w_\varepsilon(t)$ *fonksiyonunu teşkil edersek* $m(t_1)=0$ *ve* $m(t)\le 0$ $t\in[t_0,t_1]$ *olduğu kolayca görülebilir. Lemma 3.1 kullanılırsa* $D^q m(t_1)\ge 0$ *sonucunu buluruz ki bu ise aşağıda görüleceği gibi bir çelişki vermektedir,*

$$\begin{aligned} f(t_1,w(t_1))+g(t_1,w(t_1)) &= f(t_1,p(t_1,x(t_1)))+g(t_1,p(t_1,x(t_1))) \\ &= D^q x(t_1) \\ &\ge D^q w_\varepsilon(t_1) \\ &= D^q w(t_1)+\varepsilon\lambda(t_1) \\ &> D^q w(t_1) \\ &\ge f(t_1,w(t_1))+g(t_1,v(t_1)) \\ &\ge f(t_1,w(t_1))+g(t_1,w(t_1)) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Burada $g(t,x)$*fonksiyonunun her t için x'e göre artmayan olmasını ve* $\lambda(t_1) > 0$ *olmasını kullandık.*

Benzer şekilde $[t_0,T]$ *de eşitsizliğin diğer tarafı olan* $v_\varepsilon(t) < x(t)$*ispat edilebilir. Bunun için farz edelim ki* $v_\varepsilon(t) < x(t)$*yanlış olsun. Bu takdirde bir* t_1 *değeri bulunabilir öyle ki*

$$v_\varepsilon(t_1) = x(t_1) \text{ ve } v_\varepsilon(t) < x(t),\ t_0 \le t < t_1. \tag{4.8}$$

Buradan $x(t_1) < v(t_1) \le w(t_1)$ *ve* $p(t_1, x(t_1)) = v(t_1)$ *ve* $v(t_1) \le p(t_1, x(t_1)) \le w(t_1)$ *dir.*

Şimdi $m(t) = v_\varepsilon(t) - x(t)$ *fonksiyonunu teşkil edersek* $m(t_1) = 0$ *ve* $m(t) \le 0$ $t \in [t_0, t_1]$ *olduğu kolayca gözükür. Lemma 3.1 kullanılırsa* $D^q m(t_1) \ge 0$ *sonucunu buluruz.* $g(t,x)$*fonksiyonunun her t için x'e göre artmayan olmasını ve* $\lambda(t_1) > 0$ *olmasını kullanırsak aşağıda çelişkiyi elde ederiz.*

$$\begin{aligned} f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) + g(t_1, p(t_1, x(t_1))) \\ &= D^q x(t_1) \\ &\ge D^q v_\varepsilon(t_1) \\ &= D^q v(t_1) - \varepsilon\lambda(t_1) \\ &< D^q v(t_1) \\ &\le f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) \\ &\le f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sonuç olarak,

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t),\ t \in [t_0, T] \tag{4.10}$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi $\varepsilon \to 0$ *için limite geçersek istenilen sonuca*

$$v(t) \le x(t) \le w(t),\ \ [t_0, T] \tag{4.11}$$

ulaşmış oluruz. ■

Teorem 4.2: $v, w \in C_p([t_0,T],\mathbb{R})$ *fonksiyonları,* $f, g \in C(\Omega,\mathbb{R})$ *ve* $v(t) \le w(t)$, $t \in [t_0,T]$ *olmak üzere (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin II. tipten bağlı alt ve üst çözümleri olsunlar. Ayrıca varsayalım ki* $f(t,x)$ *her t için x'e göre artmayan olsun. Bu durumda (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin* $[t_0,T]$ *da* $v(t) \le x(t) \le w(t)$ *olacak şekilde* $x(t)$ *çözümü vardır.*

İspat 4.2: Bir $p(t)$ *fonksiyonunu* $p:[t_0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$p(t,x) = \min\left[w(t), \max\left(x(t), v(t)\right)\right] \tag{4.12}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $f\left(t, p(t,x)\right) + g\left(t, p(t,x)\right)$ *fonksiyonu* $f+g$ *fonksiyonunun* $[t_0,T]x\mathbb{R}$ *ye sürekli bir genişlemesidir ve aynı zamanda sınırlıdır çünkü* $f+g$ *fonksiyonu* Ω *üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle aşağıdaki gibi bir çözüme sahiptir.*

$D^q x(t) = f\left(t, p(t,x)\right) + g\left(t, p(t,x)\right),\quad x(t_0) = x^0 = x(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0},\ t_0 \le t \le T,$

Biz $[t_0,T]$ *üzerinde* $v(t) \le x(t) \le w(t)$ *olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla* $\varepsilon > 0$ *için aşağıdaki eşitliği ele alalım.*

$$v_\varepsilon(t) = v(t) - \varepsilon\lambda(t) \text{ ve } w_\varepsilon(t) = w(t) + \varepsilon\lambda(t) \tag{4.13}$$

burada $\lambda(t) = (t-t_0)^{q-1} E_{q,q}\left((t-t_0)^q\right)$*. Açıktır ki*

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= v_\varepsilon^0 = v(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} - \varepsilon\lambda(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} \\ w_\varepsilon(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} &= w_\varepsilon^0 = w(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0} + \varepsilon\lambda(t)(t-t_0)^{1-q}\,|_{t=t_0}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

bu nedenle $v_\varepsilon^0 = v^0 - \varepsilon\lambda^0$, $w_\varepsilon^0 = w^0 + \varepsilon\lambda^0$ *ve* $v(t)$ *ile* $w(t)$*nin alt ve üst çözüm tanımından* $v_\varepsilon^0 < x^0 < w_\varepsilon^0$ *yazılabilir.*

Amacımız $v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, T]$ *olduğunu göstermek. Farz edelim ki* $x(t) < w_\varepsilon(t)$*yanlış olsun. Bu takdirde bir* $t_1 \in (t_0, T]$ *değeri bulunabilir öyle ki*

$$x(t_1) = w_\varepsilon(t_1) \text{ ve } x(t) < w_\varepsilon(t),\ t_0 \le t < t_1. \tag{4.15}$$

Buradan $x(t_1) > w(t_1) \ge v(t_1)$ *ve* $p(t_1, x(t_1)) = w(t_1)$ *ve* $v(t_1) \le p(t_1, x(t_1)) \le w(t_1)$ *dir.*

Şimdi $m(t) = x(t) - w_\varepsilon(t)$ *fonksiyonunu teşkil edersek* $m(t_1) = 0$ *ve* $m(t) \le 0$ $t \in [t_0, t_1]$ *olduğu kolayca gözükür. Lemma 3.1 kullanılırsa* $D^q m(t_1) \ge 0$ *sonucunu buluruz ki bu ise aşağıda görüleceği gibi bir çelişki vermektedir,*

$$\begin{aligned} f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) + g(t_1, p(t_1, x(t_1))) \\ &= D^q x(t_1) \\ &\ge D^q w_\varepsilon(t_1) \\ &= D^q w(t_1) + \varepsilon\lambda(t_1) \\ &> D^q w(t_1) \\ &\ge f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) \\ &\ge f(t_1, w(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Burada $f(t, x)$*fonksiyonunun her t için x'e göre artmayan olmasını ve* $\lambda(t_1) > 0$ *olmasını kullandık.*

Benzer şekilde $[t_0, T]$*de eşitsizliğin diğer tarafı olan* $v_\varepsilon(t) < x(t)$*ispat edilebilir. Bunun için farz edelim ki* $v_\varepsilon(t) < x(t)$*yanlış olsun. Bu takdirde bir* t_1 *değeri bulunabilir öyle ki*

$$v_\varepsilon(t_1)=x(t_1) \text{ ve } v_\varepsilon(t) < x(t),\ t_0 \le t < t_1. \tag{4.17}$$

Buradan $x(t_1) < v(t_1) \le w(t_1)$ *ve* $p(t_1, x(t_1)) = v(t_1)$ *ve* $v(t_1) \le p(t_1, x(t_1)) \le w(t_1)$ *dir.*

Şimdi $m(t) = v_\varepsilon(t) - x(t)$ *fonksiyonunu teşkil edersek* $m(t_1) = 0$ *ve* $m(t) \le 0$ $t \in [t_0, t_1]$ *olduğu kolayca gözükür. Lemma 3.1 kullanılırsa* $D^q m(t_1) \ge 0$ *sonucunu buluruz.* $g(t,x)$*fonksiyonunun her t için x'e göre artmayan olmasını ve* $\lambda(t_1) > 0$ *olmasını kullanırsak aşağıda çelişkiyi elde ederiz.*

$$\begin{aligned} f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) &= f(t_1, p(t_1, x(t_1))) + g(t_1, p(t_1, x(t_1))) \\ &= D^q x(t_1) \\ &\ge D^q v_\varepsilon(t_1) \\ &= D^q v(t_1) - \varepsilon\lambda(t_1) \\ &< D^q v(t_1) \\ &\le f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, w(t_1)) \\ &\le f(t_1, v(t_1)) + g(t_1, v(t_1)) \end{aligned} \tag{4.18}$$

Neticede,

$$v_\varepsilon(t) < x(t) < w_\varepsilon(t),\ t \in [t_0, T] \tag{4.19}$$

eşitsizliği doğrudur. Şimdi $\varepsilon \to 0$ *için limite geçersek istenilen sonuca ulaşmış oluruz.*

$$v(t) \le x(t) \le w(t),\ [t_0, T]. \blacksquare \tag{4.20}$$

Teorem 4.3: $v, w \in C_p([t_0, T], \mathbb{R})$ *fonksiyonları,* $f, g \in C(\Omega, \mathbb{R})$ *ve* $v(t) \le w(t)$, $t \in [t_0, T]$ *olmak üzere (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin III. tipten eşleşmiş* *alt ve üst çözümleri olsunlar. Ayrıca varsayalım ki* $f(t,x)$ *ve* $g(t,x)$ *fonksiyonlarının her ikisi de her t için x' e göre artmayan olsun. Bu durumda (4.1) fraksiyonel diferansiyel denkleminin* $[t_0,T]$ *da* $v(t) \le x(t) \le w(t)$ *olacak şekilde* $x(t)$ *çözümü vardır.*

KAYNAKLAR

[1] Mandelbrot B., (1982), “The fractional Geometry of Nature”, 1st Edition, Freeman.

[2] Gvsr D., (2009), “Generalized Monotone Iterative Technique for Fractional R-L Differential Equations”, Nonlinear Studies, 16 (1), 85-94.

[3] Hu T. C., Qian D. L., Li C. P., (2009), “Comparison theorems of fractional differential equations”, Communication on Applied Mathematics and Computation, 23 (1), 97-103.

[4] Podlubny I., (1999), “Fractional Differential Equations”, 1st Edition, Academic Press.

[5] Miller K. S., Ross B., (1993), “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations”, 1st Edition, Wiley.

[6] Lakshmikantham V., (1994), “An Extension of the Method of Quasilinearization”, Journal of Optimization Theory and Applications, 82 (2), 315-321.

[7] Lakshmikantham V., (1996), “Further improvement of generalized quasilinearization”, Nonlinear Analysis, 27 (2), 223-227.

[8] Lakshmikantham V., Vatsala, A. S., (2007), “Basic theory of fractional differential equations”, Nonlinear Analysis, 69 (8), 2677-2682.

[9] Lakshmikantham V., Leela S., Vasundhara D. J., (2009), “Theory of Fractional Dynamic Systems”, 1st Edition , Cambridge Academic Publishers.

[10] Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (2008), “General Uniqueness And Monotone Iterative Technique For Fractional Differential Equations”, Applied Mathematics Letters, 21 (8), 828-834.

[11] Ladde G. S., Lakshmikantham V., Vatsala A. S., (1985), “Monotone Iterative Technique for Nonlinear Differential Equations”, 1st Edition, Pitman Publishing.

[12] McRae F. A., (2009), “Monotone Iterative Technique And Existence Results For Fractional Differential Equations”, Nonlinear Analysis, 71 (12), 6093-6096.

[13] Oldham K. B., Spanier J., (1974), “The Fractional Calculus”, 1st Edition, Academic Press.

[14] Samko S. G., Kilbas A. A., Maritchev O. I., (1993), “Fractional Integrals and Derivatives:Theory and Applications”, 1st Edition, Gordon and Breach Science Publishers.

[15] Vasundhara D. J., Suseela C., (2008), "Quasilinearization for Caputo fractional differential equations", Communications in Applied Analysis, 12 (4), 407-418.

[16] Vasundhara D. J., (2008), “Generalized Monotone Technique for Periodic Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations”, Communications in Applied Analysis, 12 (4), 399-406.

[17] Yakar C., Yakar A, (2007), “An Extension of the Quasilinearization Method with Initial Time Difference”, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis, 14 (S2), 275-279

[18] Yakar C., Yakar A., (2009), “Further Generalization of Quasilinearization Method with Initial Time Difference”, Journal of Applied Functional Analysis, 4 (4), 714-727.

[19] Yakar C., Cicek M., Gücen M. B., (2011), “Boundedness and Lagrange stability of fractional order perturbed system related to unperturbed systems with initial time difference in Caputo’s sense”, Advances in Difference Equations, 54.

[20] Yakar C., Cicek M., Gücen M. B., (2014), “Practical stability in terms of two measures for fractional order dynamic systems in Caputo’s sense with initial time difference”, Journal of Franklin Institute, 351, 732-742.

[21] Çiçek M., (2015), “Lineer olmayan kesirli türevli dinamik sistemlerin başlangıç zaman farklı kararlılık analizi”, Doktora Tezi, Gebze Teknik Üniversitesi.

[22] Yakar C., Arslan İ., Çiçek M., (2015), “Monotone iterative technique by upper and lower solutions with initial time difference”, Miskolc Mathematical Notes, 16 (1), 575-586.

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ÇAKICI, 02.01.1978 tarihinde Bursa/Orhangazi'de doğdu. İlköğrenimini Türkiye'nin çeşitli illerinde sürdürdükten sonra 1994'de İstanbul Bağcılar Lisesi'nde orta öğrenimini tamamlamıştır. Lisans eğitimini ise 1998 yılında Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde tamamlamıştır. Yüksek lisans eğitimine 1999 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında başladı. Evli ve iki kız çocuk babası olup, hâlen Gebze Emlak Konutları Ortaokulu'nda Yönetici olarak görev yapmaktadır.