

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK
SİSTEM İÇİN TERS BAŞLANGIÇ-SINIR
DEĞER PROBLEMLERİ

İBRAHİM TEKİN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEBZE
2016

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK
SİSTEM İÇİN TERS BAŞLANGIÇ-SINIR
DEĞER PROBLEMLERİ

İBRAHİM TEKİN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE

2016

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**INVERSE INITIAL-BOUNDARY VALUE
PROBLEMS FOR A FIRST ORDER
HYPERBOLIC SYSTEM**

İBRAHİM TEKİN
**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF PHILOSOPHY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

THESIS SUPERVISOR
PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

GEBZE
2016



GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 18/05/2016 tarih ve 2016/32 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 02/06/2016 tarihinde tez savunma sınavı yapılan İbrahim TEKİN'in tez çalışması Matematik Anabilim Dalında DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI) : Prof. Dr. Mansur İSGENDEROĞLU

ÜYE

: Prof. Dr. Fatih TAŞÇI

ÜYE

: Prof. Dr. Emil NOVRUZ

ÜYE

: Prof. Dr. Davut UĞURLU

ÜYE

: Doç. Dr. Coşkun YAKAR

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, sonlu ve yarı sonsuz aralıklarda birinci mertebeden hiperbolik denklem sistemleri için sırasıyla düz ve ters başlangıç-sınır değer ve ters saçılım problemleri göz önüne alınmıştır. İlk önce, sonlu aralıkta iki hiperbolik denklemden ibaret sistem için düz problemin teorik ve nümerik çözümleri için sırasıyla karakteristikler metodu ve sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Bu sistemin katsayıları yalnızca mekan değişkenine bağlı olduğunda ters problem için karakteristikler metodunun ve yalnızca zaman değişkenine bağlı olduğunda ise sonlu farklar metodunun uygunluğu gösterilmiştir. Ayrıca nümerik yöntemin kararlılığı örneklerle desteklenmiştir. Daha sonra, sonsuzlukta sınır koşullu birinci mertebeden hiperbolik sistemin yarı eksende ikinci tip Volterra operatörü ile ifade edilebilen çözümünün mevcut olma koşulu belirlenmiştir. Bu koşul baz alınarak birinci mertebeden hiperbolik sistem için bazı kanonik formlar (Dirac sistem vs.) verilmiş ve yarı eksende birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters saçılım problemine bu koşulun uygunluğu gösterilmiştir. Son olarak, sınır koşulunda singüler geçiş matrisi içeren stasyoner olmayan matris Dirac denklemi için yarı eksende ters saçılım problemi göz önüne alınmıştır. Geçiş matrisinin rankı ile ilişkili bir potansiyel sınıfı, saçılım operatörü vasıtasıyla tek şekilde belirlenmiştir ve saçılım operatörünün tasviri yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Ters Problem, Birinci Mertebeden Hiperbolik Sistem, Karakteristikler Metodu, Sonlu Farklar Metodu, Saçılım Operatörü, Dönüşüm Operatörü.

SUMMARY

In this thesis, the direct and inverse initial boundary value problems and inverse scattering problems for the first order systems of hyperbolic equations are considered on a finite interval and semi finite interval, respectively. First of all, the method of characteristics and the finite difference method are applied to the theoretical and numerical solutions of the direct problem for a first order system of two hyperbolic equations on a finite interval, respectively. Moreover the suitability of the method of characteristics for the inverse problem of finding solely space-dependent coefficients and the finite difference method for solely time-dependent coefficients of this system are shown. Also, the stability of the numerical method is supported by the examples. Then, a condition for the first order hyperbolic system on the half-axis (with a boundary condition at infinity) to have a solution that can be expressed by the second kind Volterra operator is established. On the basis of this condition, some canonical forms (for instance Dirac-type system) of the first order hyperbolic system can be sorted. The suitability of this condition in inverse scattering problem for the first order hyperbolic system on the half-axis is given as an application. Finally, the inverse scattering problem for a non-stationary matrix Dirac equation on the half-axis with the boundary condition which includes a singular transmission matrix is considered. A class of potential related to the rank of the transmission matrix is determined for which such a potential is uniquely reconstructed from the scattering operator and the description of the scattering operator is given.

Key Words: Inverse Problem, First Order Hyperbolic System, Method of Characteristics, Finite Difference Method, Scattering Operator, Transformation Operators.

TEŞEKKÜR

BaŐta, doktora eğitimimde ve akademik hayatımda desteğini ve yardımlarını hiğbir zaman esirgemeyip bilgisi ile bu çalıŐmanın oluŐmasının yolunu açan danıŐmanım Prof. Dr. Mansur İSGENDEROğLU'na ve doktora tez jürimde bulunan sayın hocalarım Prof. Dr. Fatih TAŐCI, Prof. Dr. Emil NOVRUZ, Prof. Dr. Davut UğURLU ve Doç. Dr. Coşkun YAKAR'a teŐekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca beni her daim maddi ve manevi destekleyen aileme sonsuz teŐekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK SİSTEM İÇİN TERS BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLERİ	9
2.1. Düz Problem	9
2.1.1. Karakteristikler Metodu	9
2.1.2. Sonlu Farklar Metodu	12
2.2. Mekan Değişkenine Bağlı Katsayılı Ters Problem	15
2.2.1. Varlık ve Teklik	17
2.2.2. Başlangıç ve Sınır Verilerine Sürekli Bağlılık	22
2.3. Zaman Değişkenine Bağlı Katsayılı Ters Problem	27
2.3.1. Nümerik Prosedür	27
2.3.2. Nümerik Örnekler ve Bazı Kıyaslamalar	29
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK SİSTEMLERİN KANONİKLEŞTİRİLEBİLİRLİĞİ	42
3.1. Sonsuzlukta Sınır Koşulu ile Birinci Mertebeden Hiperbolik Sistem İçin Dönüşüm Operatörleri	42
3.2. Bazı Kanonik Formlar	46
3.3. Birinci Mertebeden Hiperbolik Sistem İçin Yarı Düzlemde Saçılım Operatörünün Volterra Yapısı	50
4. YARI DÜZLEMDE SINIR KOŞULUNDA SİNGÜLER GEÇİŞ MATRİSİ İÇEREN STASYONER OLMAYAN MATRİS DİRAC DENKLEMİ İÇİN TERS SAÇILIM PROBLEMİ	59
4.1. $\det H = 0$ Durumunda Bir Potansiyel Sınıfı	60

4.2. Saçılım Operatörünün Özellikleri	62
4.3. Ters Saçılım Problemi	64
KAYNAKLAR	67
ÖZGEÇMİŞ	72
EKLER	73

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler ve Açıklamalar

Kısaltmalar

- $C[a, b]$: $[a, b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar sınıfı
- $C_b(\mathbb{R}^2)$: \mathbb{R}^2 'de sınırlı sürekli fonksiyonlar sınıfı
- $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$: \mathbb{R} 'de \mathbb{C}^n değerli sürekli sınırlı fonksiyonlar uzayı
- $C^1[a, b]$: $[a, b]$ aralığında birinci mertebeye kadar sürekli türevleri mevcut olan fonksiyonlar sınıfı
- $L_2(a, b)$: (a, b) aralığında tanımlı reel değerli ölçülebilir ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1: a) (1.1)- (1.3) probleminin $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümü, b) (1.1)- (1.3) probleminin $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümü.	15
2.2: (1.1)-(1.4) probleminin a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.	31
2.3: (1.1)-(1.4) probleminin %1 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.	32
2.4: (1.1)-(1.4) probleminin %3 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.	33
2.5: (1.1)-(1.4) probleminin %5 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.	34
2.6: (1.1)-(1.4) probleminin %1 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.	36
2.7: (1.1)-(1.4) probleminin %3 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.	37
2.8: (1.1)-(1.4) probleminin %5 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.	38
2.9: (1.1)- (1.4) ters probleminin örnek 2.3 için $q(t)$ kesin ve nümerik çözümü.	40

- 2.10: (1.1)- (1.4) probleminin a) %1 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümü, b) %3 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümü, c) %5 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümü. 40
- 2.11: (1.1)- (1.4) probleminin a) %1 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümlerinin ortalastırılmışı, b) %3 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümlerinin ortalastırılmışı, c) %5 bozuklukla kesin ve nümerik çözüümlerinin ortalastırılmışı. 41

1. GİRİŞ

Birinci mertebeden hiperbolik denklem sistemleri dalga yayılımı ile alakalı birçok fiziksel süreci izah etmektedir. Örneğin, elastiklik teorisinin dinamik denklemleri, elektromanyetik osilasyon ve akustik denklemleri için bu tür sistemler mevcuttur. Transfer sürecinin düzlemsel simetrik olması ve hızın sonlu sabit sayıda yöne sahip olması varsayımları altında tek hızlı transfer denkleminin bir birinci mertebeden hiperbolik sisteme indirgenmesi bu tür sistemlere gerçeklik kazandırmak için bir örnektir [1]. Birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters problemler, uygulamalı matematik ve matematiksel fizik alanlarında önemli rol oynamaktadır. Birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters problem derken bu problemin çözümünün bazı fonksiyonellerinden problemin katsayılarının belirlenmesi problemi anlaşılır. Birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters problemlerin gravitasyon, jeofizik, deprem bilimi ve dalga yayılımı için saçılım problemlerinde birçok sonucu elde edilmiştir.

Hiperbolik sistemin sonlu aralıkta ve yarı ekseninde verilmesine bağlı olarak sırasıyla, aralığın uçlarında verilenlere göre katsayı bulma ters problemi ve saçılım operatörüne göre katsayı bulma ters saçılım problemi çok önemlidir.

Sisteme sonlu aralıkta bakılıyorsa uçlarda verilenlere göre katsayı bulma ters probleminde aranan özellikler; problemin çözümünün varlığı-tekliği ve verilenlere sürekli bağlı olmasıdır. Bu özellikler bakılan ters problemin iyi tanımlı olmasını belirler. Bu ise ters problemler teorisinde büyük önem arz eder.

Mühendislik ve fizikteki bazı problemler, sonlu aralıkta hiperbolik başlangıç-sınır değer problemleri ile modellenmiştir. Matematiksel literatürde birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemi için başlangıç-sınır değer problemleri önemli yere sahiptir. Bu sınıftaki problemler, iletken teldeki elektrik osilasyonu ve telin sönmükleştirme terimli küçük titreşiminin matematiksel modellemelerinde ve gaz dinamiği ile akustik dalga propogasyonu problemlerini içerir [2], [3]. Son yıllarda bu tür problemlerin çözümüne ilgi artmıştır [4]-[6].

$$D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\} \text{ bölgesinde}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} + q(x, t)u = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + p(x, t)v = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

iki denklemlili hiperbolik sistemi

$$u(0, t) = g_1(t), \quad v(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

sınır koşulları ve

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.3)$$

başlangıç koşulları ile göz önüne alınsın. $p(x, t)$ ve $q(x, t)$ katsayıları bilindiğinde (1.1) sistemi, (1.2) sınır koşulları ve (1.3) başlangıç koşullarından $\{u(x, t), v(x, t)\}$ çiftinin bulunması başlangıç-sınır değer problemine düz problem denir. (1.1) sistemi için düz problem [3], [7], [8] referanslarında yeteri kadar incelenmiştir.

$p(x, t)$ ve $q(x, t)$ katsayıları bilinmediğinde ise (1.1) sistemi, (1.2) sınır koşulları, (1.3) başlangıç koşulları ve bazı ek koşullardan $\{u(x, t), v(x, t)\}$ çifti ile beraber $\{p(x, t), q(x, t)\}$ çiftinin bulunması problemine ters başlangıç-sınır değer problemi denir. Katsayılar hem zaman hem de mekan değişkenlerine bağlı olduğunda birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters başlangıç-sınır değer problemi ne teorik ne de nümerik olarak incelenmiştir. Sırasıyla [9]-[11] ve [12]-[14] referanslarında ters Cauchy ve ters saçılım problemleri birinci mertebeden genel hiperbolik sistem için incelenmiştir. Bu çalışmada amaç ters başlangıç-sınır değer problemini katsayılarının yalnızca bir değişkene bağlı olduğu hali incelemektir [15]. Eğer ek koşullar

$$u(l, t) = h_1(t), \quad v(0, t) = h_2(t), \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

şeklinde ise (1.1)-(1.4) ters problemi için katsayılar yalnızca mekan değişkenine bağlı olduğunda karakteristikler metodu, katsayılar yalnızca zaman değişkenine bağlı olduğunda ise sonlu farklar metodu uygundur. Katsayılar yalnızca bir değişkene bağlı olduğunda (1.1) sistemi için çeşitli ters başlangıç-sınır değer problemleri teorik olarak [4]-[6], [8], [16], [17]'da, nümerik olarak ta [17]-[20] referanslarında göz önüne alınmıştır.

Referans [7]'de $\begin{bmatrix} r(x) & p(x) \\ q(x) & s(x) \end{bmatrix}$ matris katsayılı (1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemi iki farklı takım (1.2) sınır, (1.3) başlangıç ve (1.4) ek koşulları ile incelenmiştir. Bu teknik, öz eşlenik ve yalnızca mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1) sistemi için $x \geq 0$ yarı düzleminde (1.4) ek koşulunun ikinci kısmı kullanılarak [4]'de uygulanmıştır.

Yalnızca mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1) sistemi için katsayılardaki konsantrasyon parametresinin bulunması ters başlangıç-sınır değer problemi $x \geq 0$ yarı düzleminde $v(0, t) = h_2(t)$, $t \geq 0$ ek koşulu kullanılarak [16]'da invaryant gömme metodu ile incelenmiştir. Ayrıca [19]'da bu problemin matris durumuna genellemesi çalışılmıştır.

Aynı zamanda (1.2), (1.4) sınır koşulları ile yalnızca mekan değişkenine bağlı katsayılı iki denklemden ibaret birinci mertebeden hiperbolik sistem için bazı bileşenlerin bulunması ve bu sistemin $2n$ boyutlu matris genellemesi sırasıyla [5] ve [6] referanslarında bazı spektral özellikler kullanılarak ve bu probleme uygun spektral dönüşüm operatörü tekniği uygulanarak incelenmiştir. [14]'te yalnızca mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemi, $q(x) = -p(x)$ durumunda $u(0, t) = v(0, t) = h_2(t)$, $t \geq 0$ etki-tepkisi ile Gelfand-Levitan teorisi kullanılarak incelenmiştir.

Benzer hiperbolik ters problemler [2], [7], [22] referanslarında bulunabilir.

(1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemi için sonlu farklar metodu üzerine yeteri kadar çalışma olmadığından sınırlı sayıda makale mevcuttur. Katsayıların yalnızca mekan değişkenine bağlı olduğu durumda (1.1)-(1.4) ters problemi için sonlu farklar metodu elverişli olmadığı için var olan çalışmalarda bu metot direkt olarak probleme uygulanılmamıştır. Sonlu farklar metodu, [18]-[21] referanslarında göz önüne alınan ters problemlere denk integral denklemlere uygulanmıştır. Bu çalışmada katsayılar yalnızca zaman değişkenine bağlı olduğu durumda (1.1)-(1.4) ters problemine sonlu farklar metodu direkt uygulanacaktır.

Referans [23]'te dalga denklemi için zaman değişkenine bağlı bilinmeyen kuvvet fonksiyonunun bulunması ters problemi sonlu farklar metodu kullanılarak göz önüne alınmıştır. Aynı metot [24]'de dalga denklemindeki titreşim yapısı üzerine etki eden mekan değişkenine bağlı kuvvet fonksiyonunun bulunması için kullanılmıştır. Ayrıca dalga denklemi için mekan değişkenine bağlı katsayının belirlenmesi problemi sonlu farklar metodundan başka diğer metotlar (adaptive hybrid finite element/finite difference ve globally convergent method) ile de [25]-[27] referanslarında incelenmiştir.

Sisteme yarı eksende bakılıyor ise sistem için ters saçılım problemi saçılım operatörü veya saçılım verisi yardımı ile sistemin bilinmeyen katsayılarını belirleme problemidir. Bir ters saçılım probleminde şu özelliklerin sağlanması talep edilir: Çözümün tekliği, katsayıları elde etme algoritmasının verilmiş olması ve saçılım operatörünün karakterizasyonu.

Yarı eksende hiperbolik tipli sistemler için ters saçılım problemlerinin incelenmesinde çözümün Volterra tipli integral gösterimi önemli rol oynar. Bu tür bir gösterim sonsuzluktaki dönüşüm operatöründen elde edilebilir.

Dönüşüm operatörü, ilk olarak 1950'lerde Gelfand, Levitan ve Marchenko tarafından Sturm-Liouville operatörü için ters saçılım problemi ile bağlantılı olarak ortaya konmuştur [28], [29]. Klasik manada dönüşüm operatörü pertörb edilmemiş Sturm-Liouville denkleminin çözümünü, pertörb edilmiş Sturm-Liouville denkleminin çözümüne (Jost çözümü) dönüştürür. Bu durumda dönüşüm operatörü, birim operatör ile belli bir Volterra integral operatörünün toplamı şeklindedir. Çözümün bu şekildeki integral gösterimi adi diferansiyel denklemler sistemi için ters saçılım problemlerinin incelenmesinde temel oluşturur [30], [31].

Dönüşüm operatörü metodu aynı zamanda kısmi türevli diferansiyel denklemler için ters problemlere de uygundur. Bu metot [32]'de L. P. Nizhnik tarafından iki denklemlilik birinci mertebeden hiperbolik sistem (iki bileşenli stasyoner olmayan Dirac sistem) için ters saçılım problemine başarı ile uygulanmıştır. Bu durumun tersine, $x \rightarrow +\infty$ 'daki sınır koşulları ile n ($n \geq 2$) denklemlilik birinci mertebeden sistem daha karmaşık bir yapıya (dönüşüm operatörü matris integral operatörüdür fakat Volterra tipli değildir) sahiptir [33]. Bu durum, bu tür sistemler için ters saçılım problemlerinin çözümünü zorlaştırır. Hiperbolik denklemler sisteminin Volterra tipli integral dönüşüm operatörüne sahip olduğu bazı özel durumlar [34], [35]'te incelenmiştir.

$x \geq 0$ yarı ekseninde

$$\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = Q(x, t)\psi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemini

$$\psi_2(0, t) = H\psi_1(0, t). \quad (1.6)$$

sınır koşulu ile göz önüne alınsın.

Burada $\sigma = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_m > 0 > \xi_{m+1} \geq \dots \geq \xi_n$ olmakla sabit köşegen matristir, ψ_1 ve ψ_2 , ψ vektör fonksiyonunun sırasıyla ilk m ve son $n - m$ bileşenidir, H , $n - m \times m$ tipinde sabit geçiş matrisidir ve $Q(x, t)$ kompleks değerli ölçülebilir hızlı azalan (Schwartz) bileşenli matris fonksiyonudur.

Burada amaç (1.5) sisteminin $x \rightarrow +\infty$ 'da Volterra tipli dönüşüm operatörünün olması ve yarı eksende birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemi için ters saçılım problemine bunun uygulanmasının mümkünatı için koşullar belirlemektir [36]. Eğer (1.5) sisteminin $x \rightarrow +\infty$ 'da birim operatör ve belli bir Volterra integral operatörünün toplamı şeklinde ifade edilen dönüşüm operatörü mevcut ise bu sisteme kanonikleştirilebilir denilecektir. Kanonikleştirilebilir (1.5) sistemi için $n = 2m$ durumunda iki farklı

$$\begin{cases} \psi_2(0, t) = H_k \psi_1(0, t), & \det H_k \neq 0, & k = 1, 2, \\ \det(H_1 - H_2) \neq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

sınır koşullarına karşı gelen saçılım problemlerinin saçılım operatörleri bu sistemin katsayılarını tek türlü belirler.

Bütün eksende, (1.5) sistemi için ters saçılım problemi [32]'de Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM) tipli lineer integral denklemden, [37]'de ise Riemann-Hilbert probleminden yararlanılarak kapsamlı biçimde incelenmiştir. Genel olarak, yarı eksende ters saçılım problemleri iyi tanımlı olmayan (ill-posed) problemlerdir.

Çünkü göz önüne alınan ters saçılım probleminin çözümünün tekliğini garanti etmek için bu saçılım probleminin yeterli niceliklerini belirlemede temel zorluklar vardır. Bazı özel durumlar [34], [35]'de incelenmiştir. Fakat, genel olarak (1.5) sistemi için ters saçılım problemlerinin matematiksel formülasyonu açık bir problemdir. Yarı ekseninde, (1.5) sistemi için saçılım operatörünün Volterra tipli faktörizasyonunun (M. G. Krein faktörizasyonu) olması ters saçılım probleminin çözümünde önemli rol oynar. Bu nedenle, (1.5) sisteminin kanonikleştirilebilirliği önemlidir. Bu tür faktörizasyonlar kullanılarak, ters saçılım problemi GLM tipli integral denklemler olarak bilinen matris integral denklemine indirgenir. İkinci tip Fredholm operatörlerinin faktörizasyonu için M. G. Krein teorisi hakkında detaylı bilgi [32], [38], [39]'de bulunabilir.

(1.5) hiperbolik denklemler sistemi, stasyonere olmayan ortamda hızları $\xi_k, k = \overline{1, n}$ olan birden çok hızlı dalgaların etkileşimini ifade eder. Bu nedenle, uygun kısmi diferansiyel denklemin katsayıları yalnız uzayda değil aynı anda zamanda da değişir. Zamana bağlı model problemler, elektromanyetik dalga teorisinde, akustik ve optikte mevcuttur [40], [41]. Dalga yayılımı için uygulanan geleneksel model genel olarak zamandan bağımsız katsayılı dalga denklemdir. Buna örnek olarak elektrik mühendisliğindeki linye hatları arası etkileşimin modeli ve elastiklik teorisindeki Timoshenko giriş modeli söylenebilir. Bu modellere uygun sistem, katsayıları yalnız uzay değişkenine bağlı iki hızlı ikinci mertebeden hiperbolik sistemdir. Tepki operatöründen (girdi-çıkı ilişkisi) bu tür sistemler için katsayıların bulunması ters problemi [42]-[45]'te incelenmiştir. Özellikle [42]'de dalgalar arası etkileşimin ortaya çıkardığı bazı etkilerin (öncül dalganın mevcudluğu, dalgaların şekillendirilmesi vs.) elde edilmesi önem arz eder. Bu çalışmada aynı zamanda $0 < x < h$ sonlu aralığında lokalleşmiş simetrik potansiyel ile ekseninde ters saçılım problemi göz önüne alınmıştır. Burada $x \leq 0$ ve $x \geq h$ için sırasıyla yansıma ve geçiş katsayılarının fundamental matrisini içeren saçılım verileri vasıtasıyla potansiyelin elde edilebileceği ispatlanmıştır. [32], [34]-[36], [39] referanslarında birden çok hızlı sistem (özel halde bir ve iki hızlı sistemler) için ters saçılım problemini daha genel hal için incelemiştir. Çünkü potansiyel sonlu aralıkta lokalleşmiş değildir ve zamana bağlıdır. Buna rağmen [32], [34], [35], [39]'da ters saçılım probleminin ifadesi ve saçılım verisi, [42]'de ters saçılım problemi saçılım verisi yardımı ile tepki operatörünü kurmakla çözüldüğünden, daha farklı şekilde incelenmiştir.

Eğer potansiyel t 'den bağımsız ise, $\psi(x, t) = \psi(x)\exp(\lambda t)$ değişkenlerine ayrışımı yapılarak, (1.5) sisteminin $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) + Q(x)\psi(x) = i\lambda\sigma\psi(x)$ birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemine dönüşmesi önem arz eder. Bu sistem için ters problem [30], [31], [46]-[51]'de yeteri kadar incelenmiştir.

(1.5) sistemi için ters saçılım problemi aynı zamanda bazı integrallenebilir çok boyutlu lineer olmayan evrim denklemleri için yardımcı problem olarak ilgi görür. Birinci mertebeden kesin hiperbolik sistemler ile ilişkili bazı lineer olmayan evrim denklemleri [32], [37]'de verilmiştir. Ayrıca, [52]'de birinci mertebeden kesin hiperbolik olmayan sistem için ters saçılım problemi aralıksız N -dalga etkileşimi probleminin integrasyonunda kullanılmıştır.

Kanonikleştirilebilir (1.5) sisteminde $\sigma = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ ve $Q(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & q_{12}(x, t) \\ q_{21}(x, t) & 0 \end{bmatrix}$ ele alındığında bu sistem için ters saçılım problemi (1.6) sınır koşulu altında [53]'de incelenmiştir ve $\det H = 0$ 'ın ters saçılım probleminin çözümünün tekliliğinin bozulması için gerek ve yeter koşul olduğu gösterilmiştir. Bunun devamı olarak bu tez çalışmasının son kısmında amaç, (1.6) sınır koşulundaki H geçiş matrisi singüler olduğunda yani $\det H = 0$ koşulunu sağladığında bu geçiş matrisinin rankı ile ilişkili bir potansiyel sınıfını saçılım operatörü vasıtası ile tek şekilde belirlemektir.

Bu tez çalışması şu şekilde organize edilmiştir: İkinci bölümde, ilk olarak (1.1) sistemi için düz başlangıç-sınır değer problemi karakteristikler metodu ve sonlu farklar metodu kullanılarak sırasıyla teorik ve nümerik olarak incelenmiştir. Daha sonra (1.1) sistemi için katsayıları yalnızca mekan ve yalnızca zaman değişkenine bağlı olduğu durumlarda ters başlangıç-sınır değer problemi sırasıyla karakteristikler metodu kullanılarak teorik, sonlu farklar metodu kullanılarak nümerik olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde, sonsuzlukta sınır koşullu birinci mertebeden hiperbolik sistem için Volterra tipli dönüşüm operatörü olma (kanonikleştirilebilme) koşulları verilmiştir ve bazı örnekler (kanonik formlar) ile bu koşulların sağlandığı desteklenmiştir. Ayrıca birinci mertebeden hiperbolik denklemlerin kanonik sistemi için yarı eksende ters saçılım problemi göz önüne alınmıştır ve saçılım operatörünün Volterra özelliği elde edilmiştir. Bu özelliğin ters saçılım problemindeki önemi yarı eksende kanonikleştirilebilir birinci mertebeden hiperbolik sistem için bir örnek olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde ise yarı eksende sınır koşulunda singüler geçiş

matrisi içeren stasyoner olmayan matris Dirac denklemi için ters saçılım problemi incelenmiştir. Geçiş matrisinin rankı ile ilişkili bir potansiyel sınıfı, saçılım operatörü vasıtasıyla tek şekilde belirlenmiştir ve saçılım operatörünün tasviri yapılmıştır.

2. BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK SİSTEM İÇİN TERS BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLERİ

Bu bölümde, birinci mertebeden iki hiperbolik denklemden ibaret sistem için düz ve ters başlangıç-sınır değer problemleri göz önüne alınacaktır. Düz problemin teorik ve nümerik çözümleri için sırasıyla karakteristikler metodu ve sonlu farklar metodu kullanılacaktır. Ayrıca, birinci mertebeden hiperbolik sistemin katsayıları yalnızca mekan değişkenine bağlı olduğunda ters problem için karakteristikler metodunun ve yalnızca zaman değişkenine bağlı olduğunda ise sonlu farklar metodunun uygunluğu gösterilecektir.

2.1. Düz Problem

Kesin disipatif sınır koşullu birinci mertebeden genel hiperbolik sistem için düz problemin iyi tanımlılığı [3]'te ağlar metodu kullanılarak gösterilmiştir. Bu metod aynı zamanda düz problemi nümerik olarak ta çözmektedir. Bu bölümde, düz problemin çözümünün varlık ve tekliği karakteristikler metodu kullanılarak gösterilecektir. Ayrıca bu problem nümerik olarak sonlu farklar metodu kullanılarak ta çözülecektir. Bu metodlar, sırasıyla yalnızca mekan ve yalnızca zaman değişkenine bağlı (1.1) sistemi için ters problemlere adaptasyon için seçilmiştir. Kısaca bu bölüm daha sonraki bölümler için gerekli temel durumları içermektedir.

2.1.1. Karakteristikler Metodu

Bu alt bölümde, D bölgesinde başlangıç ve sınır koşulları arasındaki

$$\psi(0) = g_1(0), \quad \varphi(l) = g_2(0) \quad (2.1)$$

uyum koşulları sağlandığında (1.1)-(1.3) düz probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelenecektir. D bölgesinin uç noktalarından sağ ve sol sınırlarına doğru geçen karakteristikler bu bölgeyi aşağıdaki gibi dört alt bölgeye ayırır:

$$D_0 = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq \frac{l}{2} - \left| x - \frac{l}{2} \right| \right\}, \quad (2.2)$$

$$D_1 = \left\{ (x, t) : 0 \leq t \leq l, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} - \left| t - \frac{l}{2} \right| \right\}, \quad (2.3)$$

$$D_2 = \left\{ (x, t) : 0 \leq t \leq l, \frac{l}{2} - \left| t - \frac{l}{2} \right| \leq x \leq l \right\}, \quad (2.4)$$

$$D_3 = \left\{ (x, t) : 0 \leq x \leq l, \frac{l}{2} - \left| x - \frac{l}{2} \right| \leq t \right\}. \quad (2.5)$$

D_i , $i = \overline{0,3}$ bölgelerinde karakteristikler boyunca integrallemekle (1.1)-(1.3) problemine denk

$$\begin{cases} v(x, t) = \varphi(x+t) - \int_0^t q(x+t-\tau, \tau) u(x+t-\tau, \tau) d\tau, \\ u(x, t) = \psi(x-t) - \int_0^t p(x-t+\tau, \tau) v(x-t+\tau, \tau) d\tau, \end{cases} \quad (x, t) \in D_0 \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} v(x, t) = v\left(\frac{x+t}{2}, \frac{x+t}{2}\right) \\ \quad - \int_{\frac{x+t}{2}}^t q(x+t-\tau, \tau) u(x+t-\tau, \tau) d\tau, \\ u(x, t) = g_1(t-x) \\ \quad - \int_{t-x}^t p(x-t+\tau, \tau) v(x-t+\tau, \tau) d\tau, \end{cases} \quad (x, t) \in D_1 \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, t) = g_2(x + t - l) \\ \quad - \int_{x+t-l}^t q(x + t - \tau, \tau) u(x + t - \tau, \tau) d\tau, \\ u(x, t) = u\left(\frac{l + x - t}{2}, \frac{l - x + t}{2}\right) \\ \quad - \int_{\frac{l-x+t}{2}}^t p(x - t + \tau, \tau) v(x - t + \tau, \tau) d\tau, \end{array} \right. \quad (x, t) \in D_2 \quad (2.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x, t) = v\left(\frac{x + t}{2}, \frac{x + t}{2}\right) \\ \quad - \int_{\frac{x+t}{2}}^t q(x + t - \tau, \tau) u(x + t - \tau, \tau) d\tau, \\ u(x, t) = u\left(\frac{l + x - t}{2}, \frac{l - x + t}{2}\right) \\ \quad - \int_{\frac{l-x+t}{2}}^t p(x - t + \tau, \tau) v(x - t + \tau, \tau) d\tau, \end{array} \right. \quad (x, t) \in D_3 \quad (2.9)$$

şeklinde sistemi elde edilir. Kolayca görüldüğü gibi serbest terimli ve sürekli çekirdekli ikinci tip Volterra integral denklemler sistemi elde edilmiştir. Buradan (2.6) sistemi t 'ye göre tek çözüme sahiptir ve bu çözüm standart ardışık yaklaşımlar metodu ile elde edilebilir. (2.6) sisteminin çözümü kullanılarak sırasıyla (2.7) ve (2.8) sistemleri de tek şekilde çözülebilir. Son olarak (2.7) ve (2.8) sistemlerinin çözümleri kullanılarak (2.9) sisteminin çözümü elde edilir. Yani (1.1)-(1.3) düz probleminin sürekli çözümü, keyfi $p(x, t), q(x, t) \in C([0, l] \times [0, +\infty))$ ve $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, l]$ için mevcuttur ve tektir.

(2.6)-(2.9) integral denklemler sistemlerini sonraki bölümde kullanmak üzere aşağıdaki şekilde kompakt formda yazabiliriz:

$$v(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + t) \\ - \int_0^t q(x + t - \tau, \tau) u(x + t - \tau, \tau) d\tau, \\ (x, t) \in (D_0 \cup D_1), \\ g_2(x + t - l) \\ - \int_{x+t-l}^t q(x + t - \tau, \tau) u(x + t - \tau, \tau) d\tau, \\ (x, t) \in D \setminus (D_0 \cup D_1), \end{cases} \quad (2.10)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} \psi(x - t) \\ - \int_0^t p(x - t + \tau, \tau) v(x - t + \tau, \tau) d\tau, \\ (x, t) \in (D_0 \cup D_2), \\ g_1(t - x) \\ - \int_{t-x}^t p(x - t + \tau, \tau) v(x - t + \tau, \tau) d\tau, \\ (x, t) \in D \setminus (D_0 \cup D_2), \end{cases} \quad (2.11)$$

2.1.2. Sonlu Farklar Metodu

Bu alt bölümde, $[0, l] \times [0, T]$ dikdörtgeninde (1.1)-(1.3) düz probleminin nümerik çözümü sonlu farklar metodu kullanılarak incelenecektir. $[0, l]$ ve $[0, T]$ aralıklarını sırasıyla uzunlukları $\Delta x = \frac{l}{M}$ ve $\Delta t = \frac{T}{N}$ olacak şekilde M ve N alt aralığa bölelim. (1.1)-(1.3) başlangıç-sınır değer problemi için "Upwind" metodu uygundur [54]. Bu metot (1.1)-(1.3) problemini aşağıdaki şekilde ayrıklaştırır:

$$V_j^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{j+1}^n - \Delta t q_j^n U_j^n, \quad j = 0, \dots, M-1, \quad (2.12)$$

$$U_j^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{j-1}^n - \Delta t p_j^n V_j^n, \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.13)$$

$$U_0^n = (g_1)^n, \quad V_M^n = (g_2)^n, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

$$U_j^0 = \psi_j, \quad V_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, M. \quad (2.15)$$

Burada $V_j^n = V(x_j, t_n)$, $U_j^n = U(x_j, t_n)$, $(g_1)^n = g_1(t_n)$, $(g_2)^n = g_2(t_n)$, $\psi_j = \psi(x_j)$, $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $x_j = j\Delta x$ ve $t_n = n\Delta t$ 'dir. $t = 0$ başlangıç zamanında, başlangıç ve sınır koşulları arasında uyum koşulları sağlanmaktadır.

(2.12)-(2.15) denklemleri

$$V_0^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_0^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_1^n - \Delta t q_0^n U_0^n \quad (2.16)$$

$$U_M^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U_M^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{M-1}^n - \Delta t p_M^n V_M^n \quad (2.17)$$

şeklinde iki denklem ve her $n = 0, \dots, N-1$ için $(2M-2) \times (2M-2)$ boyutlu

$$W^{n+1} = AW^n - \Delta t BW^n + b^n \quad (2.18)$$

lineer sistemi şeklinde yazılabilir. Burada $W^n = (V_1^n, \dots, V_{M-1}^n, U_1^n, \dots, U_{M-1}^n)^{tr}$, $b^n = (0, \dots, rV_M^n, rU_0^n, \dots, 0)^{tr}$, $n=0, \dots, N-1$; $W^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_{M-1}, \psi_1, \dots, \psi_{M-1})^{tr}$, $b^0 = (0, \dots, rg_2(t_0), rg_1(t_0), \dots, 0)^{tr}$, $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1-r & r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-r & r & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-r & r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-r \end{bmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}, \quad (2.19)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1-r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ r & 1-r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r & 1-r \end{bmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}, \quad (2.20)$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} q_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_{M-1}^n \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}, \quad (2.21)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} p_1^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{M-1}^n \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)} \quad (2.22)$$

ve $r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, dir. (2.12)-(2.15) sisteminin birinci dereceden Δt ve Δx hassasiyeti vardır ve bu sistem açık şekilde çözülebilir. Ayrıca (2.12)-(2.15) ayrıklaştırılmış sistemi $0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ için $\|A\| \leq 1$ olduğundan dolayı kararlıdır [55].

Şimdi yukarıda verilmiş olan sonlu farklar metodu uygulanarak verilen ayrıklaştırma için bir test örneği verelim:

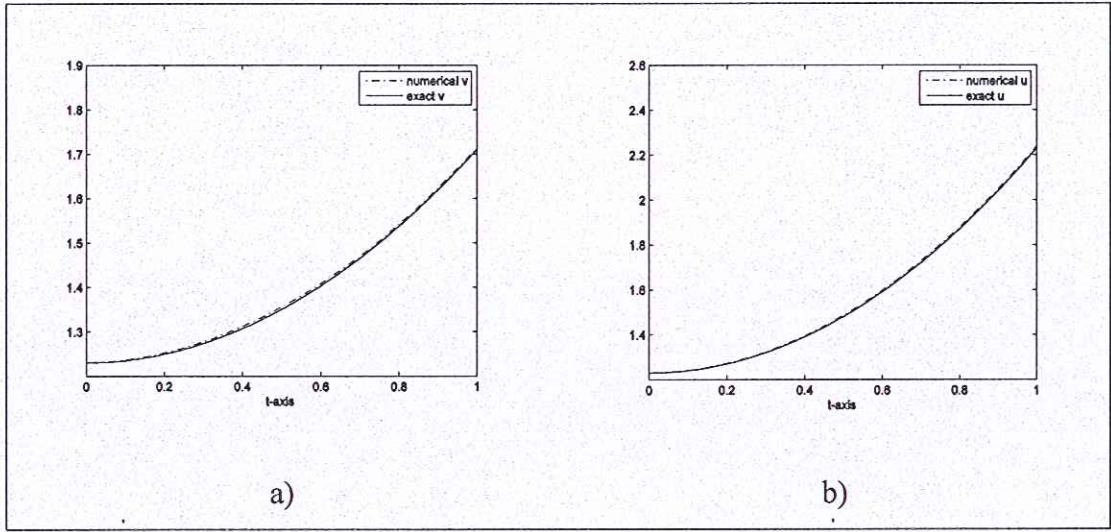
Örnek 2.1: (1.1)-(1.3) başlangıç-sınır değer problemini aşağıdaki veriler ile göz önüne alalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = x + 1, \quad \varphi(x) = x + 1, \\ g_1(t) = t + 1, \quad g_2(t) = t + 1, \\ q(x, t) = \frac{1 + t - x}{x + t + 1}, \\ p(x, t) = -\frac{2}{xt + x + 1}, \\ x \in [0, 1], t \in [0, T]. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Kolayca gösterilebilir ki (1.1)-(1.3) probleminin çözümü

$$\begin{cases} v(x,t) = 1 + xt + x, \\ u(x,t) = 1 + x + t \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde dir. $T=1$ alınıp $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0,01$ basamak sayısına göre sonlu farklar uygulanırsa çözüm nümerik olarak elde edilir. Şekil 2.1'de çözümün $v(0,t)$ ve $u(1,t)$ değerlerindeki kesin ve nümerik çözümlerinin grafikleri karşılaştırılmıştır.



Şekil 2.1: a) (1.1)- (1.3) probleminin $v(x,t)$ kesin ve nümerik çözümü, b) (1.1)- (1.3) probleminin $u(x,t)$ kesin ve nümerik çözümü.

2.2. Mekan Değişkenine Bağlı Katsayılı Ters Problem

Bu bölümde, (1.1) sisteminin yalnızca mekan değişkenine bağlı katsayılı hali için (1.2)-(1.4) koşulları altında ters başlangıç-sınır değer problemi göz önüne alınacaktır. Yani $p(x,t) = p(x)$ ve $q(x,t) = q(x)$. (1.1) sistemi için benzer ters başlangıç-sınır değer problemleri [4], [8]'de karakteristikler metodu, [16], [19]'da invaryant gömme metodu ve [5], [6]'da da probleme uygun spektral problemin bazı spektral özellikleri kullanılarak incelenmiştir.

Birinci mertebeden hiperbolik sistemler için ters problemlere [8]'de ki gibi karakteristikler metodu uygulanabilir. Referans [8]'de $\begin{bmatrix} r(x) & p(x) \\ q(x) & s(x) \end{bmatrix}$ matris katsayılı (1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemi iki farklı takım (1.2) sınır, (1.3) başlangıç ve (1.4) ek koşulları ile incelenmiştir. Görüldüğü gibi dört katsayı iki problemin başlangıç, sınır ve ek koşullarından tek türlü belirlenir fakat keyfi iki

katsayı tek bir problemin başlangıç, sınır ve ek koşullarından tek türlü belirlenemeyebilir. Bu durumu açıklamak için aşağıdaki örnek verilebilir.

$D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ bölgesinde

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + q(x)v + s(x)u = 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

sistemi

$$u(l, t) = h_1(t), \quad v(0, t) = h_2(t), \quad t \geq 0, \quad (2.26)$$

sınır koşulu

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.27)$$

başlangıç koşulu ile göz önüne alınsın. (2.25) sisteminden $q(x)$ ve $s(x)$, $0 \leq x \leq l$ katsayılarını bulma ters problemini

$$u(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.28)$$

ek koşulları altında inceleyelim.

Karakteristikler metodu kullanılarak (2.25), (2.27) ve (2.28) problemine denk

$$v(x, t) = \begin{cases} \varphi(x + t), & 0 \leq x + t \leq l, \\ 0, & l \leq x + t, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} - \int_{x-t}^x q(\tau) v(\tau, \tau - x + t) e^{-\int_{\tau}^x s(\mu) d\mu} d\tau \\ \quad + \psi(x-t) e^{-\int_{x-t}^x s(\mu) d\mu}, & 0 \leq x-t \leq l, \\ - \int_0^x q(\tau) v(\tau, \tau - x + t) e^{-\int_{\tau}^x s(\mu) d\mu} d\tau, & x-t < 0, \end{cases} \quad (2.30)$$

denklemler sistemi elde edilir. (2.26) koşulları (2.29) ve (2.30)'da göz önüne alınırsa

$$h_1(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq x+t \leq l, \\ 0, & l \leq x+t, \end{cases} \quad (2.31)$$

$$h_2(t) = \begin{cases} - \int_{l-t}^{l-t/2} q(\tau) \varphi(2\tau - l + t) e^{-\int_{\tau}^l s(\mu) d\mu} d\tau \\ \quad + \psi(l-t) e^{-\int_{l-t}^l s(\mu) d\mu}, & 0 \leq t \leq l, \\ - \int_0^{l-t/2} q(\tau) \varphi(2\tau - l + t) e^{-\int_{\tau}^l s(\mu) d\mu} d\tau, & l < t < 2l, \end{cases} \quad (2.32)$$

elde edilir. $q(x)$ ve $s(x)$, $0 \leq x \leq l$ katsayılarını bulma ters problemi için (2.32) integral denklemler sistemi elde edildi. Kolayca görüldüğü üzere bu sistemden $q(x)$ katsayısının $[0, \frac{l}{2}]$ aralığındaki çözümü elde edilebilir. $[0, l]$ aralığının kalan kısmında ise bu katsayının ifadesi keyfidir. Bu ise (2.25)-(2.28) ters probleminin çözümünün tek olması ile çelişir.

2.2.1. Varlık ve Teklik

Katsayıları yalnızca mekan değişkenine bağlı yani $p(x, t) = p(x)$ ve $q(x, t) = q(x)$, (1.1)-(1.4) ters problemi $\Pi = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < l\}$ dikdörtgeninde göz önüne alınsın. Burada (1.4) ek koşulları ile başlangıç koşulları arasında

$$\psi(l) = h_1(0), \quad \varphi(0) = h_2(0) \quad (2.33)$$

uyum koşulları sağlanmalıdır. (2.10) ve (2.11) denklemleri $p(x, t) = p(x)$ ve $q(x, t) = q(x)$ olduğu durumda t 'ye göre diferansiyellenirse

$$v_t(x, t) = \begin{cases} h_2'(x+t) + \int_0^x q(\tau) u_z(\tau, z)|_{z=x+t-\tau} d\tau, & (x, t) \in (D_0 \cup D_1), \\ g_2'(x+t-l) - \int_x^l q(\tau) u_z(\tau, z)|_{z=x+t-\tau} d\tau, & (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_1), \end{cases} \quad (2.34)$$

$$u_t(x, t) = \begin{cases} h_1'(l-x+t) + \int_x^l p(\tau) v_z(\tau, z)|_{z=x-t+\tau} d\tau, & (x, t) \in (D_0 \cup D_2), \\ g_1'(t-x) - \int_0^x p(\tau) v_z(\tau, z)|_{z=x-t+\tau} d\tau, & (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_2), \end{cases} \quad (2.35)$$

elde edilir. Ayrıca $\psi(x), \varphi(x) \neq 0$ olmakla (1.4) ek koşulları (2.10) ve (2.11)'de göz önüne alınıp t 'ye göre diferansiyellenirse $0 \leq x \leq l$ aralığında katsayılar için

$$q(x) = \frac{1}{\psi(x)} \left(\varphi'(x) - h_2'(x) - \int_0^x q(\tau) u_z(\tau, z)|_{z=x-\tau} d\tau \right), \quad (2.36)$$

$$p(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \left(-\psi'(x) - h_1'(l-x) - \int_x^l p(\tau) v_z(\tau, z)|_{z=\tau-x} d\tau \right), \quad (2.37)$$

$$A_3 g = \frac{1}{\varphi(x)} \left(-\psi'(x) - h_1'(l-x) - \int_x^l g_3(\tau) g_1(\tau, z)|_{z=\tau-x} d\tau \right), \quad (2.41)$$

$$A_4 g = \frac{1}{\psi(x)} \left(\varphi'(x) - h_2'(x) - \int_0^x g_4(\tau) g_2(\tau, z)|_{z=x-\tau} d\tau \right), \quad (2.42)$$

denklemlerini sağlar.

$$\|g\| = \|g_1\|_{L_2(\Pi)} + \|g_2\|_{L_2(\Pi)} + \|g_3\|_{C[0,l]} + \|g_4\|_{C[0,l]} \quad (2.43)$$

ve

$$g_0(x, t) = \{H_1(x, t), H_2(x, t), p_0(x), q_0(x)\} \quad (2.44)$$

işaretlensin. Burada

$$H_1(x, t) = \begin{cases} h_2'(x+t), (x, t) \in (D_0 \cup D_1), \\ g_2'(x+t-l), (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_1), \end{cases}, \quad (2.45)$$

$$H_2(x, t) = \begin{cases} h_1'(l-x+t), (x, t) \in (D_0 \cup D_2), \\ g_1'(t-x), (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_2), \end{cases}, \quad (2.46)$$

$p_0(x) = \frac{1}{\varphi(x)} (-\psi'(x) - h_1'(l-x)), q_0(x) = \frac{1}{\psi(x)} (\varphi'(x) - h_2'(x))$ 'dir.

$\Pi = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq l\}$ dikdörtgeninde

$$\|g - g_0\| \leq M \quad (2.47)$$

eşitsizliğini sağlayan $g(x, t)$ fonksiyonlarının bir $S(M)$ kümesi göz önüne alınsın. Kolayca gösterilebilir ki yeteri kadar küçük l için A operatörü $S(M)$ kümesini kendisine tasvir eden sıkıştırıcı tasvirdir. Buradan $g \in S(M)$ için

$$\|g\| \leq M + \|g_0\| \quad (2.48)$$

eşitsizliği doğrudur. Diğer yandan (2.39)-(2.42) integrallerinden

$$\|Ag - g_0\| \leq \max\left(\sqrt{l}(M + \|g_0\|)^2, \frac{\sqrt{l}}{\min(K_1, K_2)}(M + \|g_0\|)^2\right) \quad (2.49)$$

alınır. Burada $|\varphi| \geq K_1 > 0$, $|\psi| \geq K_2 > 0$ ve K_1, K_2 sabitlerdir. (2.49) eşitliğinden

$$l \leq l^* = \min\left(\frac{M^2}{(M + \|g_0\|)^4}, \frac{(M \min(K_1, K_2))^2}{(M + \|g_0\|)^4}\right) \quad (2.50)$$

için A operatörünün $S(M)$ kümesini kendisine tasvir ettiği görülür.

$g^{(1)}, g^{(2)}$ vektör fonksiyonları $S(M)$, $l \leq l^*$ kümesinin iki elemanı olsun. Bu durumda

$$\|Ag^{(1)} - Ag^{(2)}\| \leq \alpha \|g^{(1)} - g^{(2)}\| \quad (2.51)$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $0 < \alpha = \max\left(\sqrt{l}(M + \|g_0\|), \frac{\sqrt{l}}{\min(K_1, K_2)}(M + \|g_0\|)\right) < 1$ 'dir.

Demek ki keyfi $l \leq l^*$ için A operatörü, $S(M)$ kümesini kendisine tasvir eden sıkıştırıcı tasvirdir. Banach sabit nokta teoremine göre (2.38) denkleminin tek çözümü vardır. Yani (2.34)-(2.37) denklemlerinin çözümü ardışık yaklaşımlar metodu ile tek şekilde bulunur. O halde ispatı yukarıda yapılan aşağıdaki teorem doğrudur:

Teorem 2.1: $p(x), q(x) \in C[0, l]$, $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t) \in C^1[0, l]$ ve $\psi(x), \varphi(x) \neq 0$ olmakla $\psi(x), \varphi(x) \in C^1[0, l]$ olsun. Ayrıca (2.1) ve (2.33) uyum koşulları sağlansın. O halde $l \in (0, l^*)$ olacak şekilde öyle $l^* > 0$ vardır ki (1.1)-(1.4) probleminin klasik çözümü mevcuttur ve tektir.

2.2.2. Başlangıç ve Sınır Verilerine Sürekli Bağlılık

Bu alt bölümde, ters problemin çözümünün klasik kararlılık değerlendirmeleri karakterize edilecektir. Bu tür yaklaşımlar $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t), \psi(x), \varphi(x)$ için belli bir $M(\alpha, K)$ sınıfı ve $p(x), q(x)$ fonksiyonları için de $Q(N)$ sınıfı ayarlamak ile elde edilebilir. Eğer $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t), \psi(x), \varphi(x)$ fonksiyonları α ve K pozitif sabitleri için

$$\left\{ \begin{array}{l} |\psi(x)| \geq \alpha > 0, \quad |\varphi(x)| \geq \alpha > 0, \quad x \in [0, l], \\ \|\psi(x)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \quad \|\varphi(x)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \\ \|h_1(t)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \quad \|h_2(t)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \\ \|g_1(t)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \quad \|g_2(t)\|_{C^1[0, l]} \leq K, \end{array} \right. \quad (2.52)$$

koşullarını sağlıyor ise $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t), \psi(x), \varphi(x)$ fonksiyonları $M(\alpha, K)$ sınıfına dahildir. Benzer olarak $p(x), q(x)$ fonksiyonları

$$\|p(x)\|_{C[0, l]} \leq N, \quad \|q(x)\|_{C[0, l]} \leq N \quad (2.53)$$

koşullarını sağladığında $p(x), q(x) \in Q(N)$ 'dir.

v, u ve \bar{v}, \bar{u} , sırasıyla katsayıları $p(x), q(x)$ ve $\bar{p}(x), \bar{q}(x)$ olan (1.1)-(1.4) probleminin iki farklı çözümü olsun. İki fonksiyonun farkını tilda ($\tilde{\cdot}$) ile yani $\tilde{v} = v - \bar{v}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$ vb. ile işaretleyelim. (2.10), (2.11), (2.34)-(2.37) denklemlerinden

$$\tilde{v}(x, t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(x+t) \\ \quad - \int_0^t [q(s)\tilde{u}(s, \tau) + \tilde{q}(s)\tilde{u}(s, \tau)]|_{s=x+t-\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in (D_0 \cup D_1), \\ \tilde{g}_2(x+t-l) \\ \quad - \int_{x+t-l}^t [q(s)\tilde{u}(s, \tau) + \tilde{q}(s)\tilde{u}(s, \tau)]|_{s=x+t-\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_1), \end{cases} \quad (2.54)$$

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \tilde{\psi}(x-t) \\ \quad - \int_0^t [p(s)\tilde{v}(s, \tau) + \tilde{p}(s)\tilde{v}(s, \tau)]|_{s=x-t+\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in (D_0 \cup D_2), \\ \tilde{g}_1(t-x) \\ \quad - \int_{t-x}^t [p(s)\tilde{v}(s, \tau) + \tilde{p}(s)\tilde{v}(s, \tau)]|_{s=x-t+\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_2), \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\tilde{v}_t(x, t) = \begin{cases} \tilde{h}_2'(x+t) \\ \quad + \int_0^x [q(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z) + \tilde{q}(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z)]|_{z=x+t-\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in (D_0 \cup D_1), \\ \tilde{g}_2'(x+t-l) \\ \quad - \int_x^l [q(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z) + \tilde{q}(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z)]|_{z=x+t-\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_1), \end{cases} \quad (2.56)$$

$$\tilde{u}_t(x, t) = \begin{cases} \tilde{h}_1'(l-x+t) \\ \quad + \int_x^l [p(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z) + \tilde{p}(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z)]|_{z=x-t+\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in (D_0 \cup D_2), \\ \tilde{g}_1'(t-x) \\ \quad - \int_0^x [p(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z) + \tilde{p}(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z)]|_{z=x-t+\tau} d\tau, \\ \quad \quad \quad (x, t) \in \Pi \setminus (D_0 \cup D_2), \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\tilde{q}(x) = \frac{1}{\tilde{\psi}(x)} \left(\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{h}_2'(x) - q(x)\tilde{\psi}(x) - \int_0^x [q(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z) + \tilde{q}(\tau)\tilde{u}_z(\tau, z)]|_{z=x-\tau} d\tau \right), \quad (2.58)$$

$$0 \leq x \leq l,$$

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{\tilde{\varphi}(x)} \left(-\tilde{\psi}'(x) - \tilde{h}_1'(l-x) - p(x)\tilde{\varphi}(x) - \int_x^l [p(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z) + \tilde{p}(\tau)\tilde{v}_z(\tau, z)]|_{z=\tau-x} d\tau \right), \quad (2.59)$$

$$0 \leq x \leq l,$$

eşitlikleri elde edilir. (2.54)-(2.59) denklemler sistemi $\tilde{v}(x, t)$, $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{v}_t(x, t)$, $\tilde{u}_t(x, t)$, $\tilde{q}(x)$ ve $\tilde{p}(x)$ fonksiyonlarına göre göz önüne alınsın. Ayrıca $\tilde{v}(x, t)$, $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{v}_t(x, t)$, $\tilde{u}_t(x, t)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} \|\tilde{v}(x, t)\|_{C(\Pi)}, \|\tilde{u}(x, t)\|_{C(\Pi)} \leq K \exp(Nl), \\ \|\tilde{v}_t(x, t)\|_{L_2(\Pi)}, \|\tilde{u}_t(x, t)\|_{L_2(\Pi)} \leq \frac{K}{1 - N\sqrt{l}}, \end{cases} \quad (2.60)$$

şeklinde değerlendirilebilir.

O halde (2.60) değerlendirmeleri kullanılarak (2.54)-(2.59) denklemlerinden küçük l değerlerinde sağlanan $1 - (N\sqrt{l})^2 > 0$ için

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{v}_t(x, t)\|_{L_2(\Pi)} \\
& \leq \frac{1}{1 - (N\sqrt{l})^2} \max \left\{ \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]} \right\} \\
& + \frac{N\sqrt{l}}{1 - (N\sqrt{l})^2} \max \left\{ \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]} \right\} \\
& + \frac{K\sqrt{l}}{(1 - N\sqrt{l})(1 - (N\sqrt{l})^2)} \|\tilde{q}(x)\| \\
& + \frac{KNl}{(1 - N\sqrt{l})(1 - (N\sqrt{l})^2)} \|\tilde{p}(x)\|,
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{u}_t(x, t)\|_{L_2(\Pi)} \\
& \leq \frac{N\sqrt{l}}{1 - (N\sqrt{l})^2} \max \left\{ \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]} \right\} \\
& + \frac{1}{1 - (N\sqrt{l})^2} \max \left\{ \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]} \right\} \\
& + \frac{KNl}{(1 - N\sqrt{l})(1 - (N\sqrt{l})^2)} \|\tilde{q}(x)\| \\
& + \frac{K\sqrt{l}}{(1 - N\sqrt{l})(1 - (N\sqrt{l})^2)} \|\tilde{p}(x)\|,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

değerlendirmeleri elde edilir. (2.61) ve (2.62) değerlendirmelerinden

$$\begin{aligned}
\|\tilde{q}(x)\| \leq \frac{C_1}{\Delta(l)} & \left(\|\psi(x)\|_{C^0[0,l]}, \|\psi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\varphi(x)\|_{C^0[0,l]}, \right. \\
& \|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \\
& \left. \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]} \right),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}(x)\| \leq \frac{C_1}{\Delta(l)} & \left(\|\psi(x)\|_{C^0[0,l]}, \|\psi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\varphi(x)\|_{C^0[0,l]}, \right. \\ & \|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \\ & \left. \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]} \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

alınır. Burada $\Delta(l) = a^2 - b^2$, $a = 1 - \frac{KN^2l^3}{(1-N\sqrt{l})(1-N^2l^2)\alpha} - \frac{Kl}{(1-N\sqrt{l})\alpha}$, $b = \frac{KNl}{(1-N\sqrt{l})(1-(N\sqrt{l})^2)\alpha}$, $C_1 = \max \left\{ \max(1, N) a, \max(1, N) b, a \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{N^2l}{(1-(N\sqrt{l})^2)\alpha} \right) + b \left(\frac{N\sqrt{l}}{(1+(N\sqrt{l})^2)\alpha} \right), b \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{N^2l}{(1-(N\sqrt{l})^2)\alpha} \right) + a \left(\frac{N\sqrt{l}}{(1+(N\sqrt{l})^2)\alpha} \right) \right\}$, dir.

Benzer olarak

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}(x)\|_{C(\Pi)} \leq C_2 & \left(\|\psi(x)\|_{C^0[0,l]}, \|\psi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\varphi(x)\|_{C^0[0,l]}, \right. \\ & \|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \\ & \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^0[0,l]}, \\ & \left. \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^0[0,l]} \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(x)\|_{C(\Pi)} \leq C_2 & \left(\|\psi(x)\|_{C^0[0,l]}, \|\psi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\varphi(x)\|_{C^0[0,l]}, \right. \\ & \|\varphi(x)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{h}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \\ & \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^1[0,l]}, \|\tilde{g}_1(t)\|_{C^0[0,l]}, \\ & \left. \|\tilde{g}_2(t)\|_{C^0[0,l]} \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

elde edilir. Burada C_2 sadece K, N ve α parametrelerine bağlıdır. O halde ispatı yukarıda yapılan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.2: v, u, q, p ve $\bar{v}, \bar{u}, \bar{q}, \bar{p}$ fonksiyonları sırasıyla Teorem 2.1'deki koşulları sağlayan $h_1, h_2, g_1, g_2, \psi, \varphi$ ve $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{\psi}, \bar{\varphi}$ başlangıç ve sınır verileri ile (1.1)-(1.4) probleminin iki çözümü olsun. Ayrıca $p, q, \bar{p}, \bar{q} \in Q(N)$ ve $h_1, h_2, g_1, g_2, \psi, \varphi, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{\psi}, \bar{\varphi} \in M(\alpha, K)$ olsun. O halde küçük l için (2.63)-(2.66) değerlendirmeleri doğrudur ve buradaki C_1 ve C_2 katsayıları $Q(N)$ ve $M(\alpha, K)$ sınıflarının seçimine bağlıdır.

2.3. Zaman Değişkenine Bağlı Katsayılı Ters Problem

Bu bölümde, (1.1) sisteminin yalnızca zaman değişkenine bağlı katsayılı hali için (1.2)-(1.4) koşulları altında ters başlangıç-sınır değer problemi göz önüne alınacaktır. Yani $p(x, t) = p(t)$ ve $q(x, t) = q(t)$. [18], [20], [21] referanslarından görüldüğü üzere mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemine sonlu farklar metodunu direk uygulamak mümkün değildir. Bu nedenle bu metot, çalışılmış ters probleme denk integral denkleme uygulanmıştır. Aşağıdaki alt bölümde sonlu farklar metodunun zaman değişkenine bağlı katsayılı (1.1) sistemi için ters başlangıç-sınır değer problemine direk uygulanabileceği gösterilecektir.

2.3.1. Nümerik Prosedür

Bu alt bölümde, $[0, l] \times [0, T]$ dikdörtgeninde (1.1)-(1.4) ters probleminin nümerik çözümü sonlu farklar metodu kullanılarak incelenecektir. Sonlu farklar prosedürünün uygunluğu için (1.1)-(1.4) ters probleminin başlangıç ve sınır verileri şu koşulları sağlamalıdır: $g_1(t), g_2(t) \neq 0$ olmakla $h_1(t), h_2(t), g_1(t), g_2(t) \in C^1[0, T]$ ve $\psi(x), \varphi(x) \in C^1[0, l]$. Ayrıca (2.1) ve (2.33) uyum koşulları da sağlansın. $[0, l]$ ve $[0, T]$ aralıklarını sırasıyla uzunlukları $\Delta x = \frac{l}{M}$ ve $\Delta t = \frac{T}{N}$ olacak şekilde M ve N alt aralığa bölünsün. (1.1)-(1.4) ters başlangıç-sınır değer problemi için birinci dereceden Δt ve Δx hassasiyete sahip ve $0 < \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ için kararlı olan "Upwind" metodunu kullanmak uygundur. Bu metot, (1.1)-(1.4) problemini aşağıdaki şekilde ayırklaştırır:

$$V_j^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) V_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{j+1}^n - \Delta t q_j^n U_j^n, \quad j = 0, \dots, M-1, \quad (2.67)$$

$$U_j^{n+1} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) U_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{j-1}^n - \Delta t p_j^n V_j^n, \quad j = 1, \dots, M, \quad (2.68)$$

$$U_0^n = (g_1)^n, \quad V_M^n = (g_2)^n, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (2.69)$$

$$U_j^0 = \psi_j, \quad V_j^0 = \varphi_j, \quad j = 0, \dots, M, \quad (2.70)$$

$$U_M^n = (h_1)^n, \quad V_0^n = (h_2)^n, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (2.71)$$

Burada $V_j^n = V(x_j, t_n)$, $U_j^n = U(x_j, t_n)$, $(g_1)^n = g_1(t_n)$, $(g_2)^n = g_2(t_n)$, $(h_1)^n = h_1(t_n)$, $(h_2)^n = h_2(t_n)$, $\psi_j = \psi(x_j)$, $\varphi_j = \varphi(x_j)$, $x_j = j\Delta x$ ve $t_n = n\Delta t$ 'dir. $t = 0$ başlangıç zamanında, başlangıç ve sınır koşulları arasında uyum koşulları sağlanmaktadır.

$p(t)$ ve $q(t)$ katsayılarını bulma mekanizması için ilk olarak (1.1)-(1.4) probleminden

$$q(t) = \frac{v_x(0, t) - h_2'(t)}{g_1(t)}, \quad (2.72)$$

$$p(t) = -\frac{h_1'(t) + u_x(1, t)}{g_2(t)}, \quad (2.73)$$

elde edilir. (2.72) ve (2.73) denklemlerine sonlu farklar metodu uygulanırsa $n = 1, \dots, N$ için

$$q^n = \frac{\left(\frac{v_1^n - v_0^n}{\Delta x}\right) - \left(\frac{(h_2)^n - (h_2)^{n-1}}{\Delta t}\right)}{(g_1)^n}, \quad (2.74)$$

$$p^n = -\frac{\left(\frac{(h_1)^n - (h_1)^{n-1}}{\Delta t}\right) + \left(\frac{U_M^n - U_{M-1}^n}{\Delta x}\right)}{(g_2)^n}, \quad (2.75)$$

ayrıklaştırılmış denklemleri alınır. $n = 0$ için

$$q^0 = \frac{\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta x}\right) - \left(\frac{(h_2)^1 - (h_2)^0}{\Delta t}\right)}{(g_1)^0}, \quad (2.76)$$

$$p^0 = -\frac{\left(\frac{(h_1)^1 - (h_1)^0}{\Delta t}\right) + \left(\frac{\psi_M - \psi_{M-1}}{\Delta x}\right)}{(g_2)^0}, \quad (2.77)$$

başlangıç değerleri elde edilir. (2.76), (2.77) koşulları ile beraber (2.74), (2.75) ayrıklaştırılmış denklemleri (2.67)-(2.71)'de göz önüne alınırsa V_j^n ve U_j^n , $j = 0, \dots, M, n = 0, \dots, N$ elemanlarına göre cebirsel bir sistem elde edilir. Kolayca görüldüğü gibi bu sistem açık şekilde çözülebilir. Hesaplanan değerler (2.74) ve (2.75)'da göz önüne alınırsa q^n ve p^n , $n = 0, \dots, N$ değerleri de elde edilir.

Uyarı 4.1: Sonuncu bölümde zaman değişkenine bağlı katsayıların bulunması ters problemde üzerine değinilen sonlu farklar metodu mekan değişkenine bağlı katsayıların bulunması ters problemi için uygun değildir. Mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1)-(1.4) ters problemine sonlu farklar metodu uygulandığında ikinci adımda ayrıklaştırılmış denklem sadece problemin bilinenlerini içeren bir ilişkiye gelmektedir. Bu nedenle sonlu farklar yöntemi mekan değişkenine bağlı katsayılı (1.1)-(1.4) ters problemine direkt uygulanamamaktadır. [18]-[21] referanslarında bu zorluk probleme denk integral denkleme sonlu farklar metodu uygulamakla ortadan kaldırılmıştır.

2.3.2. Nümerik Örnekler ve Bazı Kıyaslamalar

Bu alt bölümde, bir önceki alt bölümde bahsedilen sonlu farklar metodunun kullanılabilirliğini gösteren bazı örnekler verilecektir.

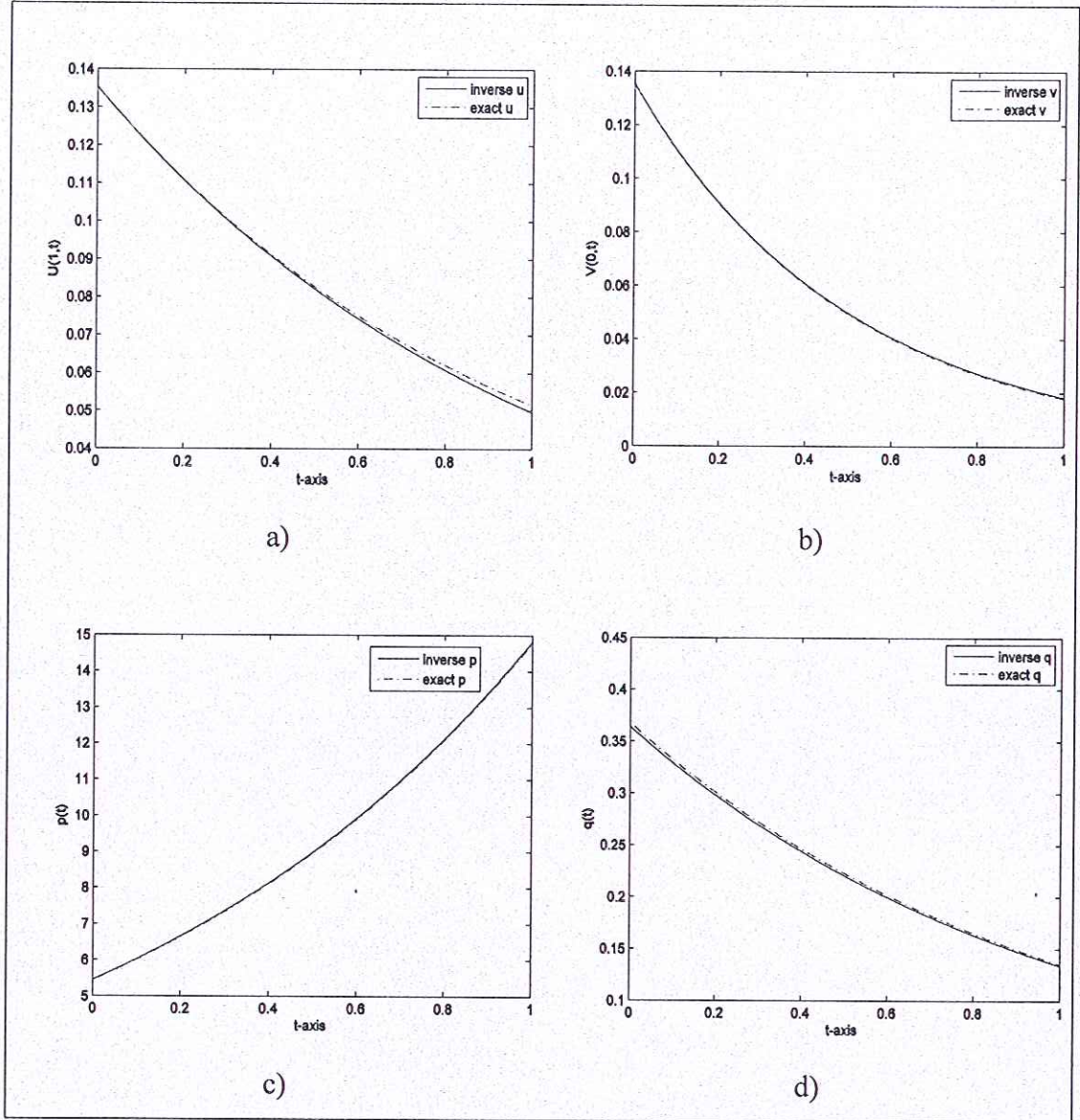
Örnek 4.1: (1.1)-(1.4) başlangıç-sınır değer problemini aşağıdaki veriler ile göz önüne alalım:

$$\begin{cases} \psi(x) = \exp(-x - 1), & \varphi(x) = \exp(-x - 2), \\ g_1(t) = \exp(-t - 1), & g_2(t) = \exp(-2t - 3), \\ h_1(t) = \exp(-t - 1), & h_2(t) = \exp(-2t - 3), \\ x \in [0,1], & t \in [0,T]. \end{cases} \quad (2.78)$$

Kolayca gösterilebilir ki (1.1)-(1.4) ters probleminin çözümü

$$\begin{cases} u(x,t) = \exp(-x - t - 1), & v(x,t) = \exp(-x - 2t - 2), \\ p(t) = 2 \exp(t + 1), & q(t) = \exp(-t - 1), \end{cases} \quad (2.79)$$

şeklindedir. $T=1$ alınıp $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0,01$ basamak sayısına göre sonlu farklar uygulanırsa çözüm nümerik olarak elde edilir. Şekil 2.2'de $v(0,t)$, $u(1,t)$, $p(t)$ ve $q(t)$ çözümlerinin kesin ve nümerik değerlerinin grafikleri karşılaştırılmıştır.



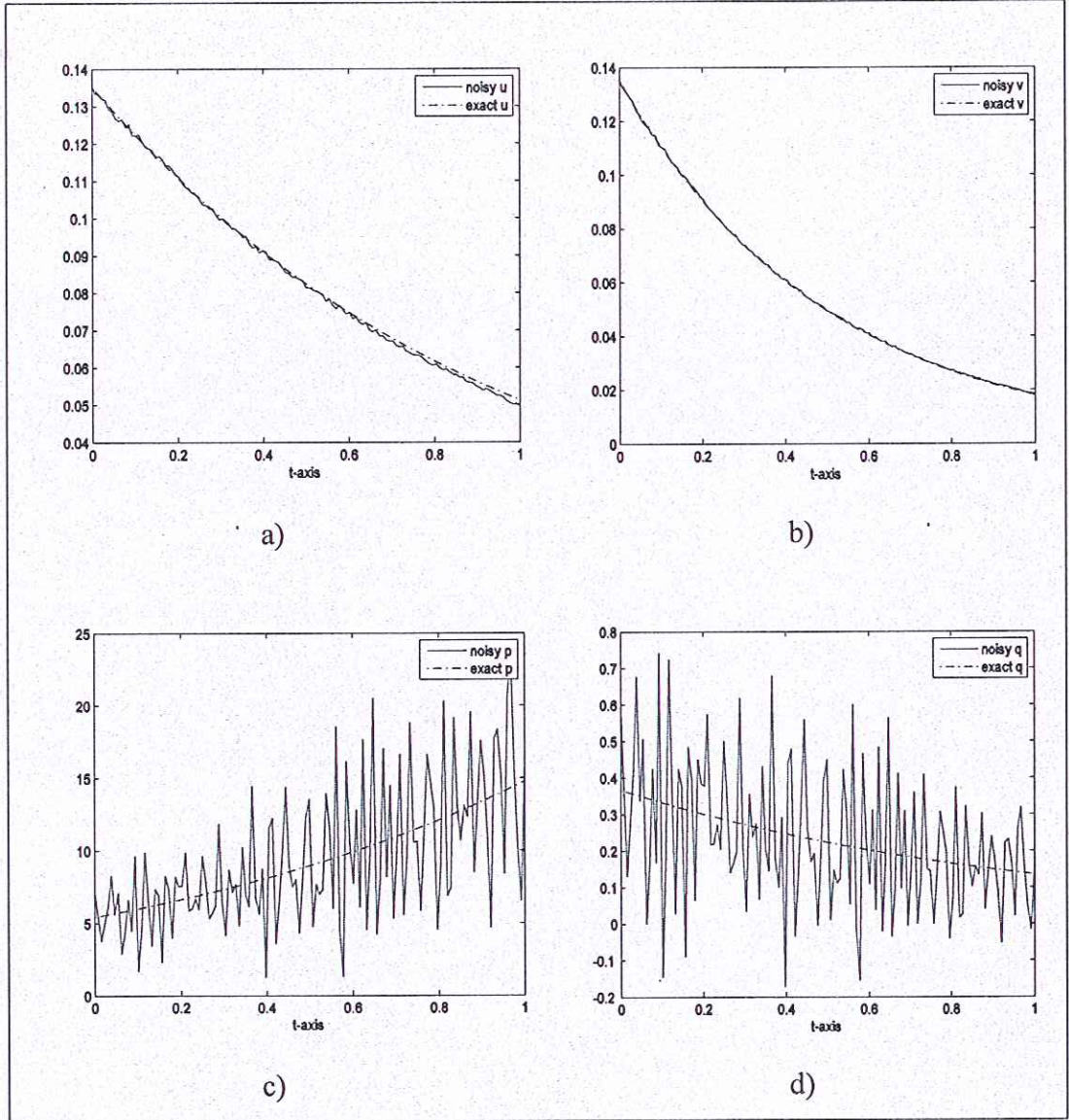
Şekil 2.2: (1.1)-(1.4) probleminin a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.

Şimdi (1.4) ek koşulunda

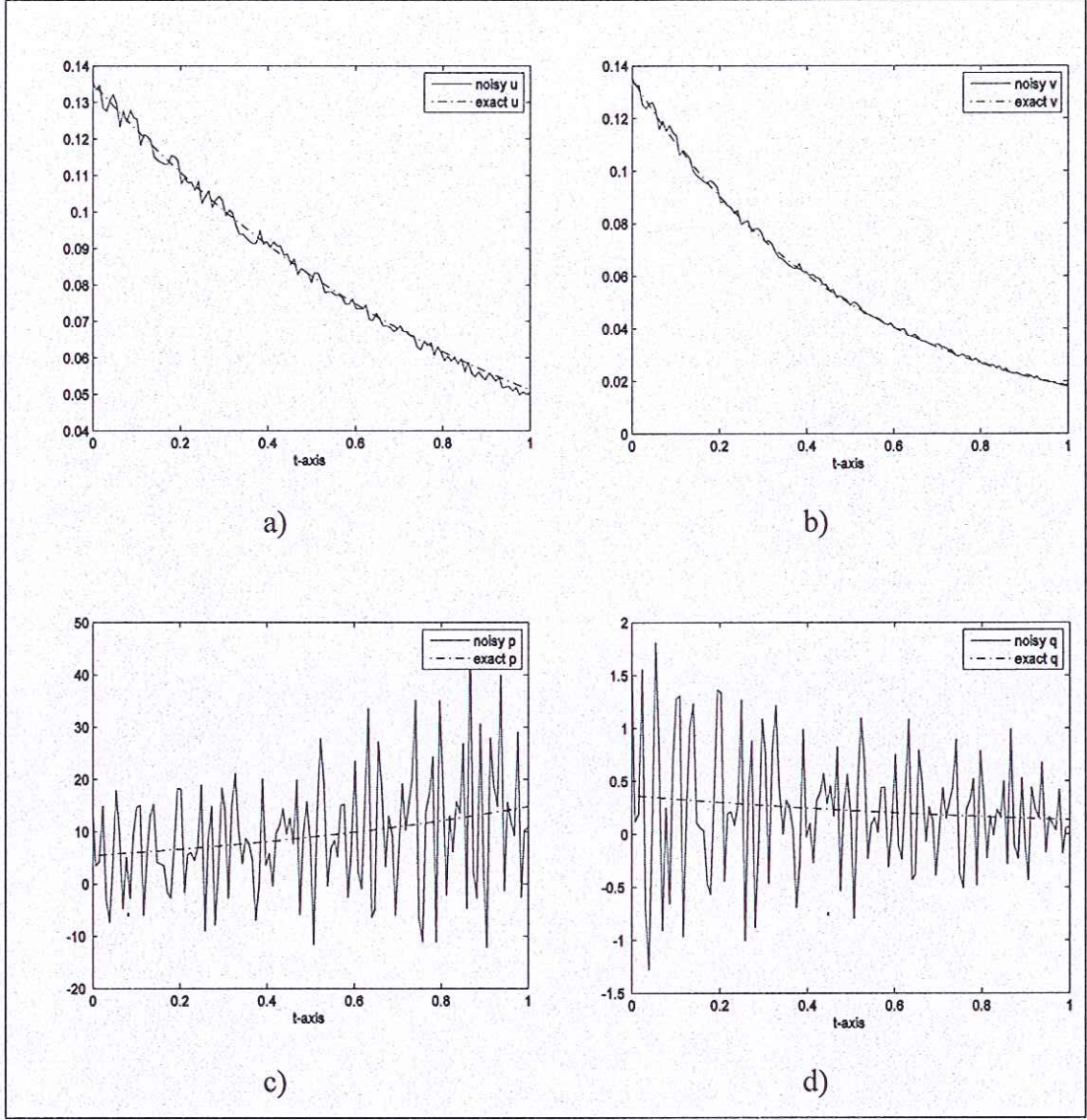
$$(h_i)_\gamma(t) = h_i(t)(1 + \gamma\theta), \quad i = 1,2 \quad (2.80)$$

şeklinde bozukluk olduğunda nümerik çözümün kararlılığını inceleyelim. Burada γ bozukluğun yüzdesidir, θ ise $[-1,1]$ aralığında MATLAB programındaki "rand" komutu kullanılarak oluşturulmuş düzgün dağılımdır.

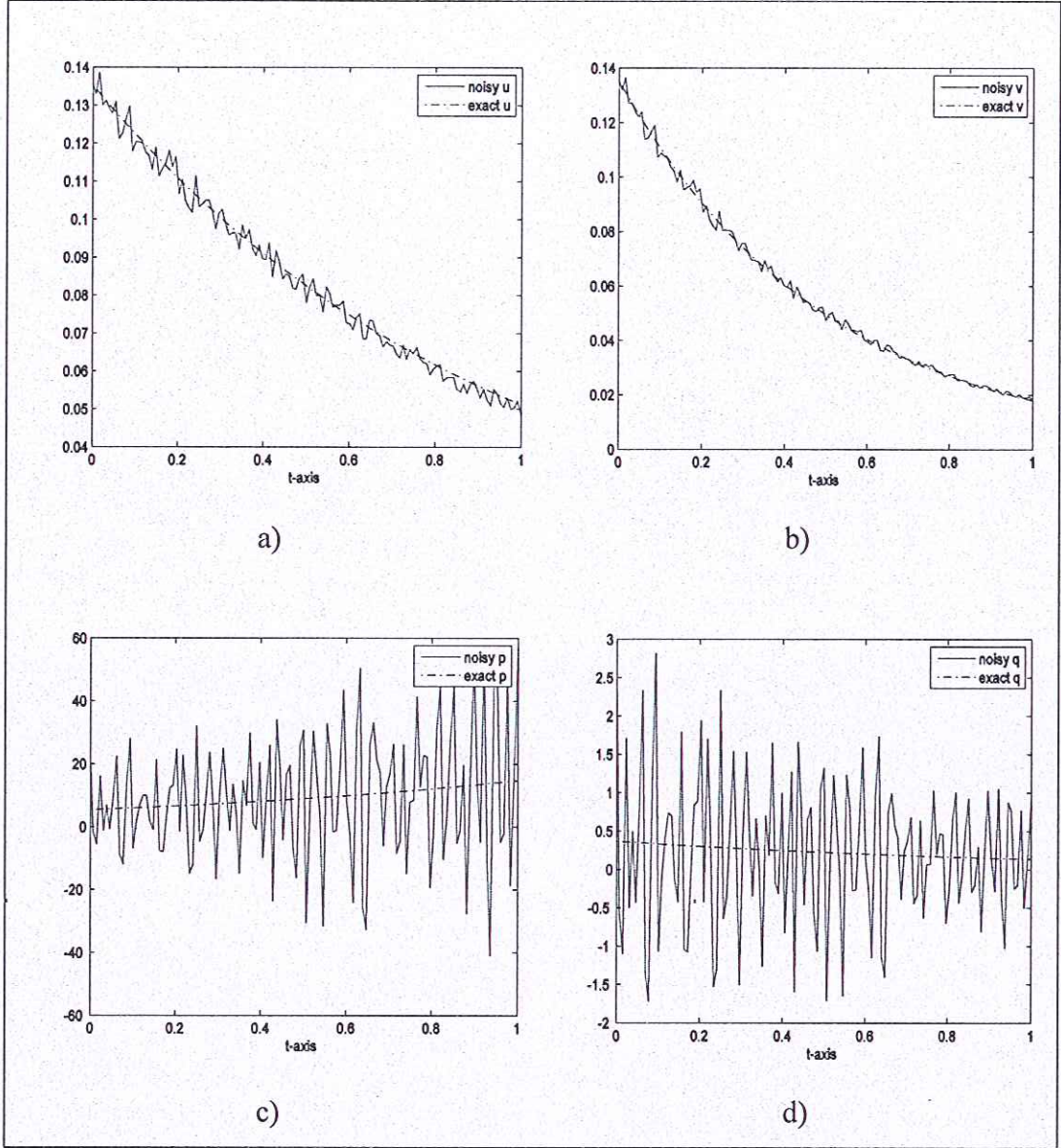
Şekil 2.3, Şekil 2.4 ve Şekil 2.5'te $v(0, t)$, $u(1, t)$, $p(t)$ ve $q(t)$ çözümlerinin (1.4) ek koşuluna sırasıyla $\gamma = \%1, \%3, \%5$ bozukluk uygulanmış durumları gösterilmektedir. Bu şekillerden görülüyor ki girdi verilerindeki bozukluk nümerik çözümleri kararsız hale getirmektedir. Çünkü (2.74) ve (2.75) denklemlerindeki türevler sadece sonu farklar metodu kullanıldığında (2.80) random bozukluğuna sahip verilerden dolayı kararsızdır.



Şekil 2.3: (1.1)-(1.4) probleminin %1 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.



Şekil 2.4: (1.1)-(1.4) probleminin %3 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.



Şekil 2.5: (1.1)-(1.4) probleminin %5 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümleri, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümleri, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümleri.

Kararlı nümerik türevler elde etmek için

$$J_{\delta} = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp(-t^2/\delta^2) \quad (2.81)$$

Gaussian ortalastırıcısı [56] ile ortalastırma metodu kullanılacaktır. Burada $\delta > 0$ ortalama filtresi olarak davranan ortalastırma yarıçapıdır. Bu yarıçapın seçilmesi genelleştirilmiş "cross-validation" kriteri şeklindeki kötü tanımlı problemlerde

regülerizasyon parametresinin seçimi için standart metodu temel alır. (2.80) bozuk verilerinin ortalastırması

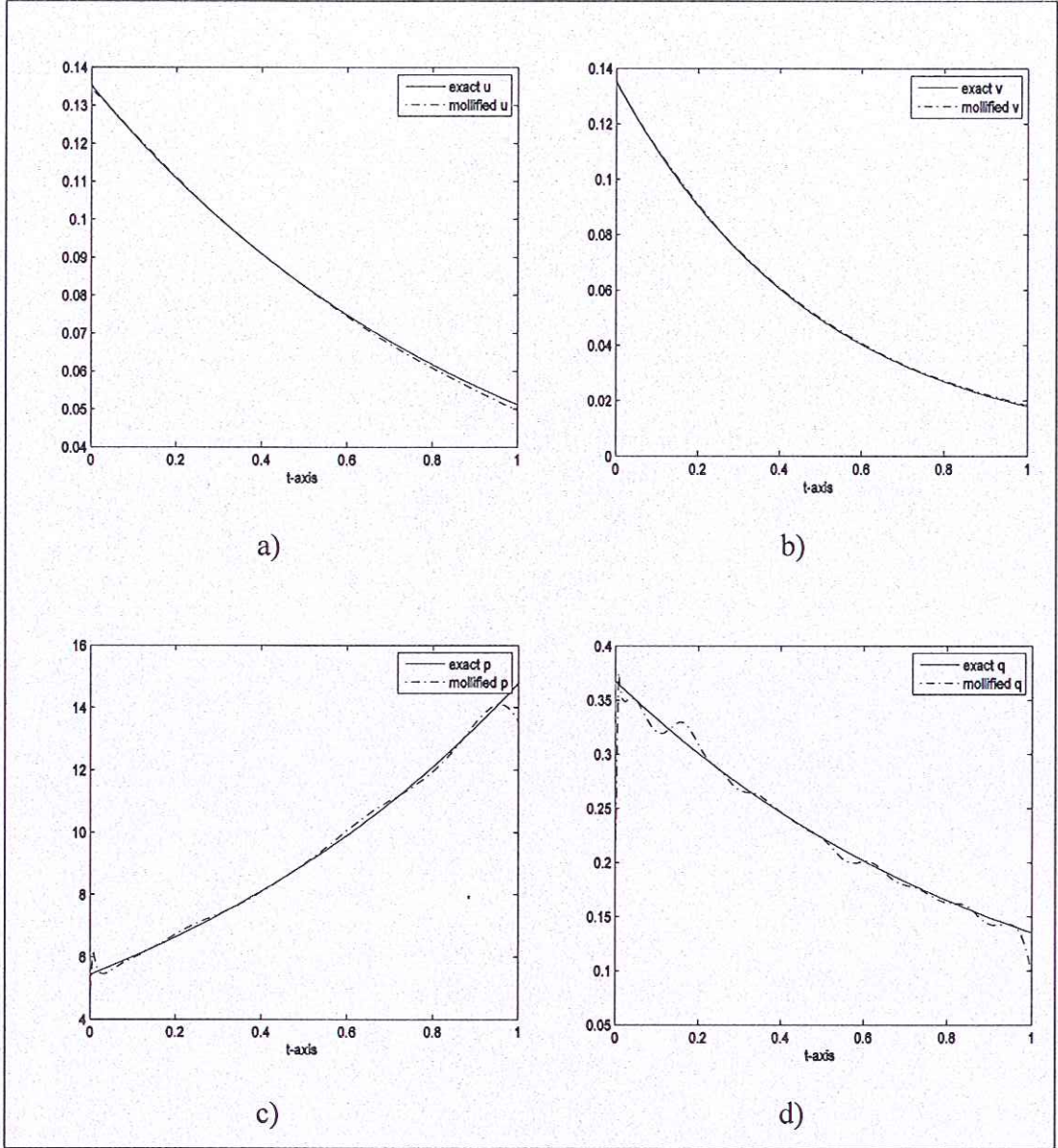
$$(J_{\delta} * h_i)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} J_{\delta}(\tau) h_i(t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2 \quad (2.82)$$

konvolüsyonu üzerine inşa edilmiştir. J_{δ} ortalastırıcısı her zaman pozitif ve yarıçapı 3δ olan aralığın dışında sıfırdır. $h_i'(t)$, $i = 1, 2$ türevleri için en iyi sonuçların $[3\delta, T - 3\delta]$ aralığında elde edilmesi beklenmektedir. Ayrıca her ne kadar (2.80) ile verilmiş $(h_i)_{\gamma}(t)$, $i = 1, 2$ verileri düzgün olmasa da, bunların ortalastırmaları olan $(J_{\delta} * h_i)(t)$, $i = 1, 2$ verileri C^{∞} sınıfındadır ve türevlenebilir. Bu ortalastırılmış türevler ise

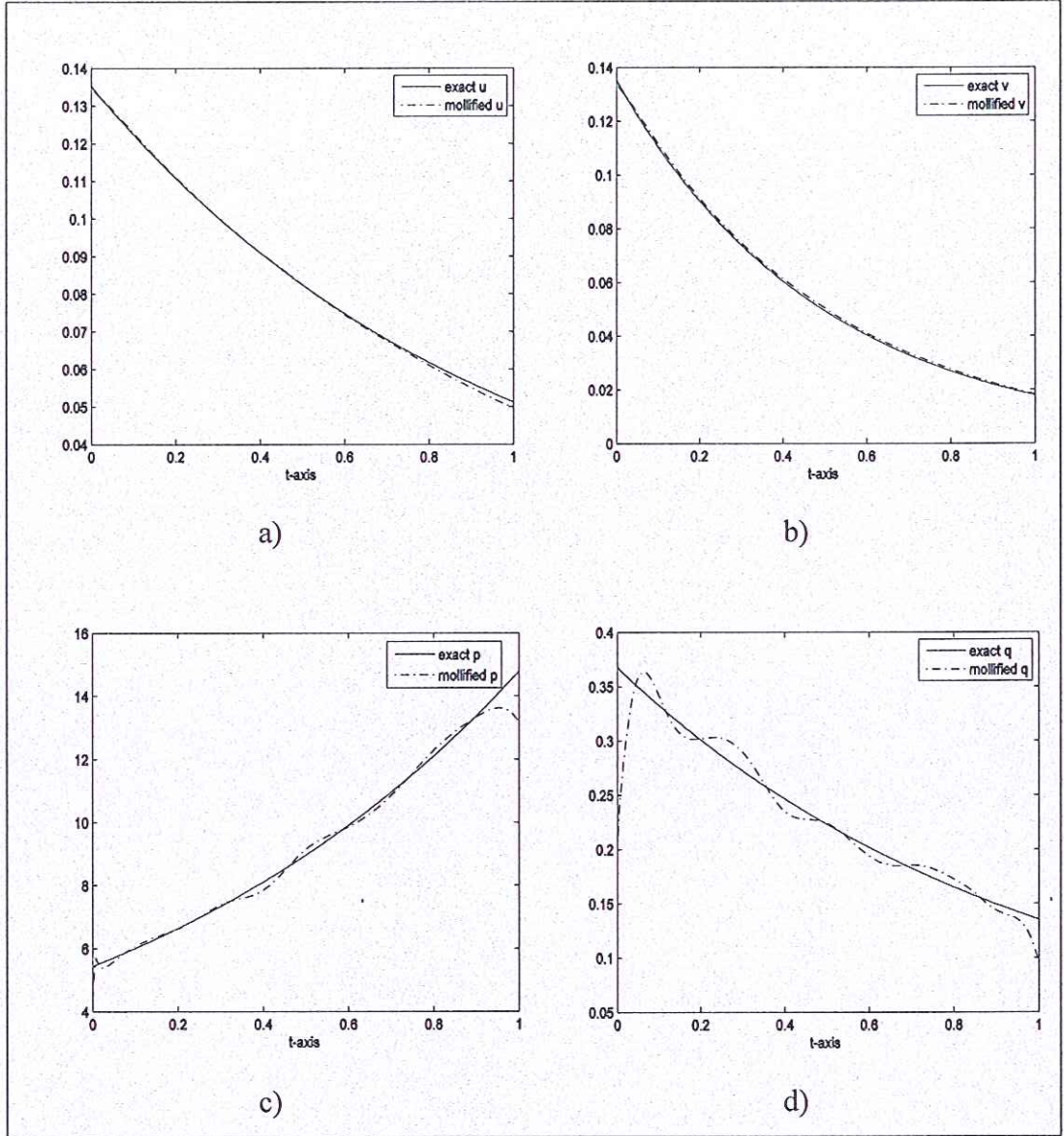
$$(J_{\delta} * (h_i)_{\gamma})'(t) = (J_{\delta} * (h_i)_{\gamma}') (t) = (J_{\delta}' * (h_i)_{\gamma})(t) \quad (2.83)$$

kullanılarak hesaplanır. Bu ortalastırılmış veriler (2.74) ve (2.75) yaklaşımlarında kullanılırsa yani $\frac{(h_i)^n - (h_i)^{n-1}}{\Delta t}$, $i = 1, 2$ sonlu farklar yaklaşımları yerine $(J_{\delta} * (h_i)_{\gamma})'(t)$ kullanılırsa bozukluk ortadan kaldırılır. Birinci mertebeden bu ortalastırma yapılırken [57]'daki D. A. Murio'nun MATLAB programı kullanılacaktır.

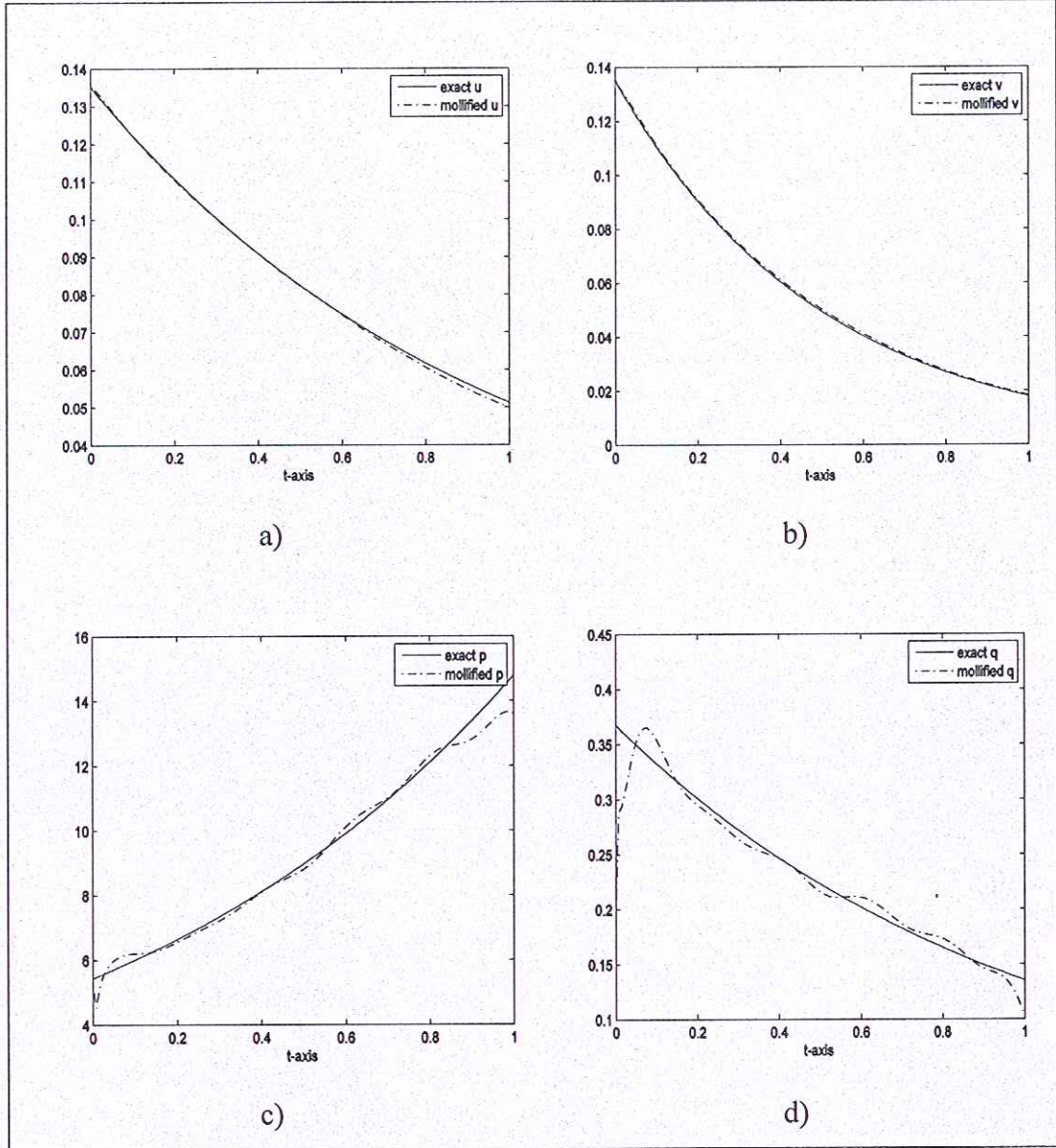
Şekil 2.6, Şekil 2.7 ve Şekil 2.8'de $v(0, t)$, $u(1, t)$, $p(t)$ ve $q(t)$ çözümlerinin (1.4) ek koşuluna sırasıyla $\gamma = \%1, \%3, \%5$ bozukluk uygulanmış durumlarının ortalastırma ile elde edilen değerleri gösterilmektedir. Bu şekillerden görülüyor ki $(h_i)_{\gamma}(t)$, $i = 1, 2$ fonksiyonlarının türevleri ortalastırma ile kararlı hale getirildiğinde $v(0, t)$, $u(1, t)$, $p(t)$ ve $q(t)$ kararlı çözümleri elde edilmiştir.



Şekil 2.6: (1.1)-(1.4) probleminin %1 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.



Şekil 2.7: (1.1)-(1.4) probleminin %3 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalştırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalştırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalştırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalştırılmışı.



Şekil 2.8: (1.1)-(1.4) probleminin %5 bozuklukla a) $u(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) $v(x, t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) $p(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, d) $q(t)$ kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.

Bir önceki örnekte $p(t)$ ve $q(t)$ katsayıları pürüzsüzdür. Fakat (2.72) ve (2.73) eşitliklerinden görüldüğü gibi bu katsayılarının pürüzsüz olması gerekli değildir.

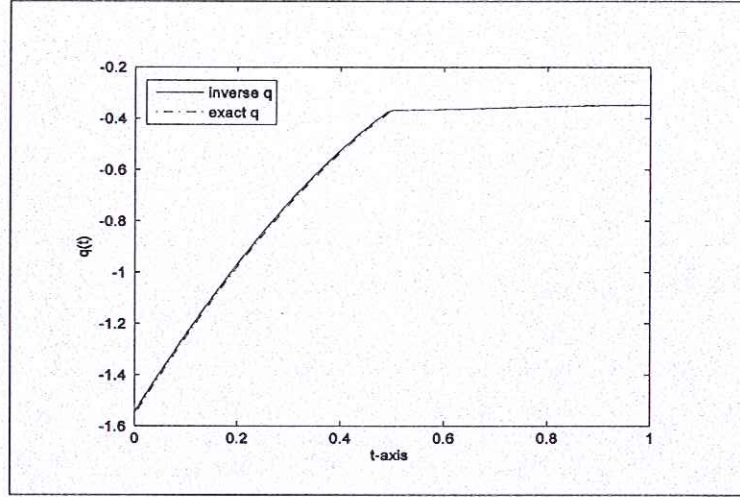
Örnek 2.3: (1.1)-(1.4) başlangıç-sınır değer problemini aşağıdaki veriler ile göz önüne alalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \exp(-x - 1/4), \quad \varphi(x) = \exp(-x), \\ g_1(t) = \exp(2t), \quad g_2(t) = \exp\left(-1 + \left|t - \frac{1}{2}\right|\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), \\ h_1(t) = \exp(2t - 1), \quad h_2(t) = \exp\left(\left|t - \frac{1}{2}\right|\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), \\ x \in [0,1], \quad t \in [0,T]. \end{array} \right. \quad (2.84)$$

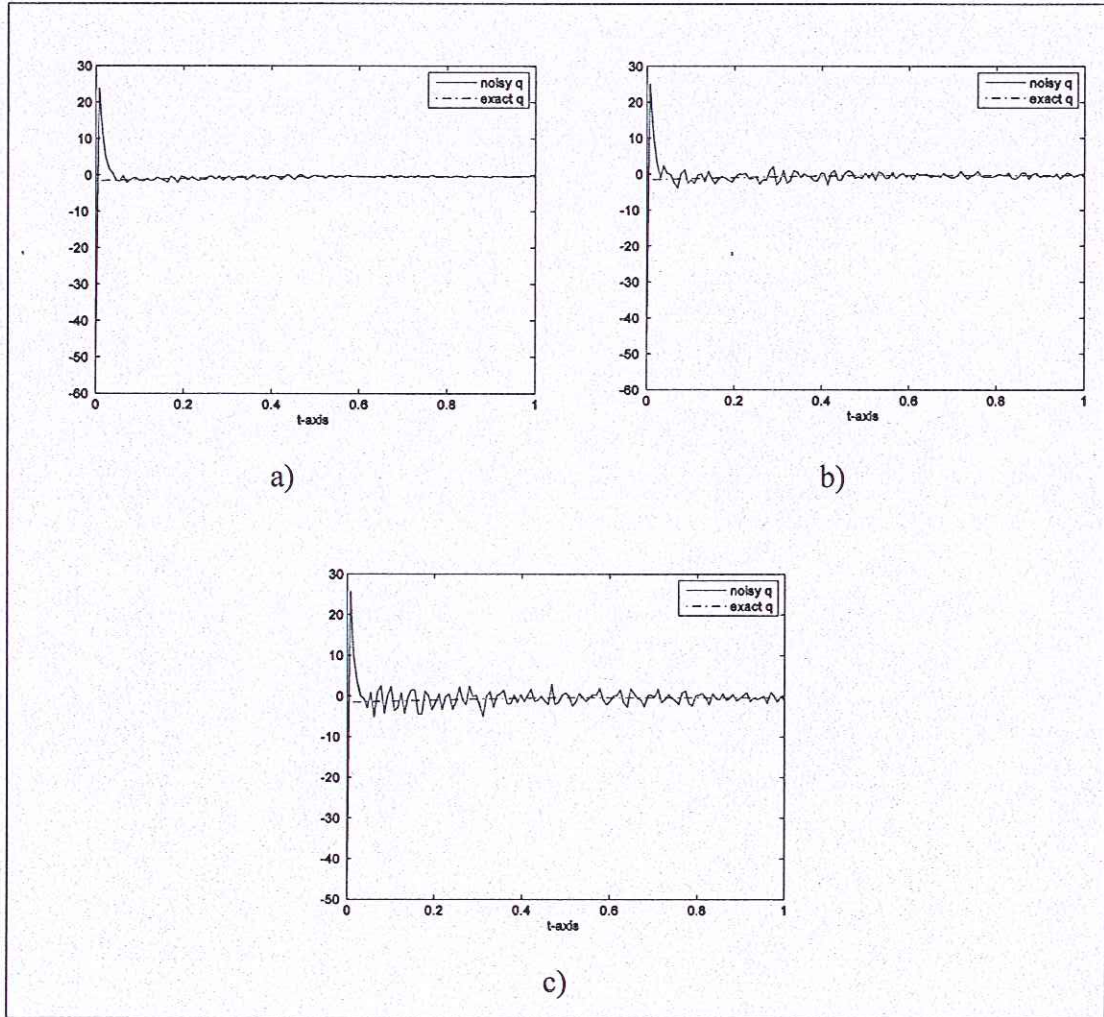
Kolayca gösterilebilir ki (1.1)-(1.4) ters probleminin çözümü

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = \exp(2t - x), \quad v(x,t) = \exp\left(-x + \left|t - \frac{1}{2}\right|\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), \\ q(t) = -\left(2\left|t - \frac{1}{2}\right| + 1\right) \exp\left(-2t + \left|t - \frac{1}{2}\right|\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), \\ p(t) = -\exp(2t)/\exp\left(\left|t - \frac{1}{2}\right|\left(t - \frac{1}{2}\right)\right), \end{array} \right. \quad (2.85)$$

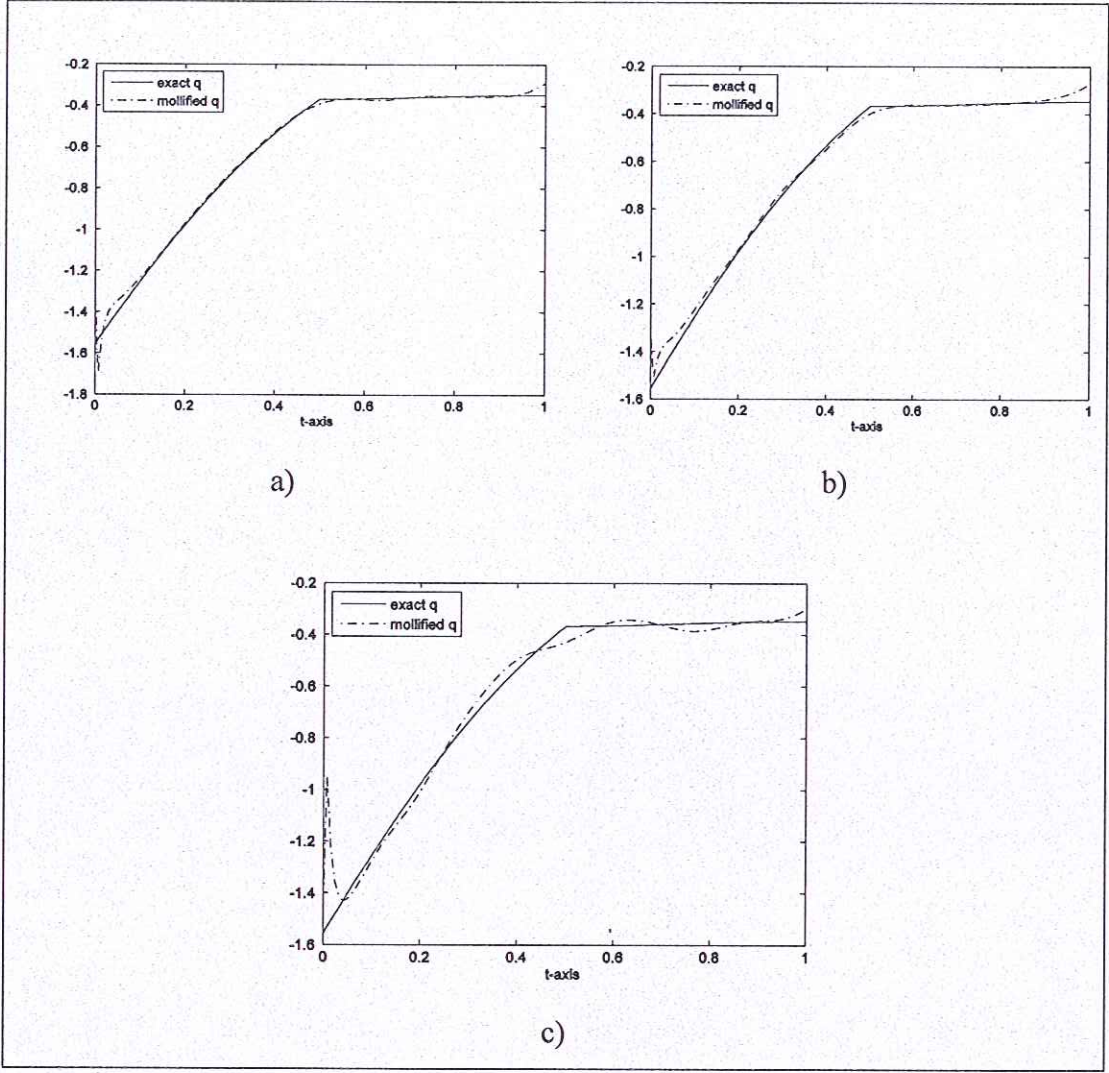
şeklindedir. $T=1$ alınıp $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$ basamak sayısına göre sonlu farklar uygulanırsa çözüm nümerik olarak elde edilir. Şekil 2.9'da pürüzsüz olmayan $q(t)$ katsayısının kesin ve nümerik değerlerinin grafikleri karşılaştırılmıştır. Şekilden görüldüğü üzere pürüzsüz olmayan $q(t)$ katsayısının kesin ve nümerik çözümleri iyi performans göstermiştir. Şekil 2.10 ve Şekil 2.11'de ise $q(t)$ katsayısının sırasıyla (1.4) ek koşullarına %1, %3, %5 bozukluk uygulanmış ve bunların ortalastırılmış halleri verilmiştir.



Şekil 2.9: (1.1)- (1.4) probleminin kesin ve nümerik çözümü.



Şekil 2.10: (1.1)- (1.4) probleminin a) %1 bozuklukla kesin ve nümerik çözümü, b) %3 bozuklukla kesin ve nümerik çözümü, c) %5 bozuklukla kesin ve nümerik çözümü.



Şekil 2.11: (1.1)- (1.4) probleminin a) %1 bozuklukla kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, b) %3 bozuklukla kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı, c) %5 bozuklukla kesin ve nümerik çözümlerinin ortalastırılmışı.

(1.1)-(1.4) ters problemi için sonlu farklar metodu ile problemin çözümlerini, ek koşullara %1, %3, %5 bozukluk verilmiş haldeki çözümlerini ve bu bozuklukların ortalastırma yapılmış çözümlerinin grafiklerini veren MATLAB programı Ek C'de Tablo C1.1 ile verilmiştir.

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERBOLİK SİSTEMLERİN KANONİKLEŞTİRİLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümde, birinci mertebeden hiperbolik sistemin yarı eksende ikinci tip Volterra operatörü ile ifade edilebilen çözümünün mevcut olma koşulu gösterilecektir. Bu koşul baz alınarak birinci mertebeden hiperbolik sistem için bazı kanonik formlar (Dirac sistem vs.) verilecektir. Son olarak yarı eksende birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters saçılım probleminde bu koşulun uygunluğundan bahsedilecektir.

3.1. Sonsuzlukta Sınır Koşulu ile Birinci Mertebeden Hiperbolik Sistem İçin Dönüşüm Operatörleri

$\psi(x, t) = col\{\psi_1(x, t), \dots, \psi_n(x, t)\}$ ve $Q(x, t) = (q_{kj})_{k,j=1}^n$ olmakla (1.5) sistemini göz önüne alalım. (1.5) sisteminde $Q(x, t) = 0$ olduğunda kolayca göstermek mümkündür ki bu sistemin çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\psi_0(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma x} h(t) \quad (3.1)$$

Burada $h(t)$ keyfi bir vektör fonksiyonu, $\mathfrak{I}_{\sigma x} = diag\{T_{\xi_1}, \dots, T_{\xi_n}\}$ ise $T_{\xi_i} h(t) = h(t + \xi_i x)$, $i = \overline{1, n}$ olmakla öteleme operatörüdür.

(1.5) sistemini

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\psi(x, t) - \psi_0(x, t)) = 0 \quad (3.2)$$

sınır koşulu altında göz önüne alalım.

Bundan sonra $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ ile \mathbb{R} 'de \mathbb{C}^n değerli sürekli sınırlı fonksiyonlar uzayını işaretleyeceğiz.

[37]'deki Önerme 3.1'e benzer olarak, keyfi $h(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ vektörü için (1.5), (3.1), (3.2) probleminin sürekli ve sınırlı çözümü mevcuttur ve tektir. Gerçekten, (1.5), (3.1), (3.2) problemi

$$\psi(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma_x} h(t) + \int_x^{+\infty} \mathfrak{I}_{\sigma(x-\eta)} [Q\psi](\eta, t) d\eta \quad (3.3)$$

integral denklemler sistemine denktir. Bu integral denklemler sistemi

$$\begin{aligned} \psi_k(x, t) &= h(t + \xi_k x) \\ &+ \int_{-\infty}^0 \sum_{j=1}^n q_{kj}(x - \tau, t + \xi_k \tau) \varphi_j(x - \tau, t + \xi_k \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$k = \overline{1, n}$$

formuna indirgenebilir. Açıkta ki bu sistem $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ ve $(\alpha_j, \beta_j) = (-1, \xi_k)$ olmakla aşağıda verilen Lemma 3.1'in birinci koşulunu sağlar. Bu sistem aynı zamanda $Q(x, t)$ matrisinin q_{kj} bileşenleri Schwartz sınıfından olduğundan Lemma 3.1'in ikinci koşulunu da sağlar. Demek ki Lemma 3.1'e göre (1.5)-(3.2) probleminin tek çözümü mevcuttur.

Şimdi varsayalım ki (1.5), (3.1), (3.2) probleminin (buna denk (3.3) integral denklemler sisteminin) çözümü

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) + \int_x^{+\infty} A(x, t, s) \psi_0(s, t) ds \quad (3.5)$$

formundadır.

$$\begin{cases} \sigma_+ = \{(k, j): \xi_k = \xi_j\}; \\ \sigma_- = \{(k, j): \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_j} > 0\}; \\ \sigma_+ = \{(k, j): \frac{\xi_k - \xi_j}{\xi_j} < 0\}; \end{cases} \quad (3.6)$$

işaretleyelim. Eğer her $h(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ için (3.3)'ün çözümü (3.5) formunda ifade edilebiliyor ise, (3.5)'i (3.3)'te göz önüne alarak çekirdekler için

$$A_{kj}(x, t, s) = \sum_{p=1}^n \int_x^{+\infty} q_{kp}(\eta, t + \xi_k(x - \eta)) A_{pj}(\eta, t + \xi_k(x - \eta), s - x + \eta) d\eta, \quad (k, j) \in \sigma_-, s \geq x, \quad (3.7)$$

$$A_{kj}(x, t, s) = \frac{\xi_j}{\xi_j - \xi_k} q_{kj}\left(\frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k}, t + \xi_k\left(x - \frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k}\right)\right) + \sum_{p=1}^n \int_x^{\frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k}} q_{kp}(\eta, t + \xi_k(x - \eta)) A_{pj}\left(\eta, t + \xi_k\left(x - \frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k}\right), s - \frac{\xi_k}{\xi_j}(x - \eta)\right) d\eta, \quad (k, j) \in \sigma_+, s \geq x, \quad (3.8)$$

$$A_{kj}(x, t, s) = \sum_{p=1}^n \int_x^{+\infty} q_{kp}(\eta, t + \xi_k(x - \eta)) A_{pj}\left(\eta, t + \xi_k(x - \eta), s - \frac{\xi_k}{\xi_j}(x - \eta)\right) d\eta, \quad (k, j) \in \sigma_-, s \geq x, \quad (3.9)$$

denklemler sistemi ve (1.5) sisteminden $(k, j) \in \sigma_+$ ve ya $(k, j) \in \sigma_-$ için A_{kj} çekirdekleri ve q_{kj} katsayıları arasındaki

$$q_{kj}(x, t) = 0, \quad (k, j) \in \sigma_-, \quad (3.10)$$

$$q_{kj}(x, t) = \frac{\xi_j - \xi_k}{\xi_j} \sum_{p=1}^n \int_x^{+\infty} q_{kp}(\eta, t + \xi_k(x - \eta)) A_{pj}\left(\eta, t + \xi_k(x - \eta), s - \frac{\xi_k}{\xi_j}(x - \eta)\right) d\eta, \quad s \leq x, \quad (k, j) \in \sigma_+ \quad (3.11)$$

ilişkileri elde edilir.

Kolayca göstermek mümkündür ki (3.7)-(3.9) denklemler sistemi aşağıdaki formlara indirgenebilir:

$$A_{kj}(x, t, s) = \int_{-\infty}^0 \sum_{p=1}^n q_{kp}(x - \tau, t + \xi_k \tau) A_{pj}(x - \tau, t + \xi_k \tau, s - \tau) d\tau, \quad (k, j) \in \sigma_{=}, \quad (3.12)$$

$$A_{kj}(x, t, s) = \frac{\xi_j}{\xi_j - \xi_k} q_{kj} \left(\frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k}, t + \xi_k \left(x - \frac{\xi_j s - \xi_k x}{\xi_j - \xi_k} \right) \right) + \int_{-\frac{\xi_j}{\xi_j - \xi_k}(s-x)}^0 \sum_{p=1}^n q_{kp}(x - \tau, t + \xi_k \tau) A_{pj} \left(x - \tau, t + \xi_k \tau, s - \frac{\xi_k}{\xi_j} \tau \right) d\eta, \quad (k, j) \in \sigma_{+}, \quad (3.13)$$

$$A_{kj}(x, t, s) = \int_{-\infty}^0 \sum_{p=1}^n q_{kp}(x - \tau, t + \xi_k \tau) A_{pj} \left(x - \tau, t + \xi_k \tau, s - \frac{\xi_k}{\xi_j} \tau \right) d\tau, \quad (k, j) \in \sigma_{-}. \quad (3.14)$$

(3.12)-(3.14) sistemi $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ ve $(\alpha_p, \beta_p) = (-1, \xi_k)$ olmakla Lemma 3.1'in koşullarını sağlar. O halde bu sistemin tek sınırlı çözümü mevcuttur.

Bu durumda (3.10), (3.11) eşitlikleri, (1.5) sisteminin (3.5) formunda Volterra çözümü olması için koşullardır.

O halde aşağıdaki teorem ispatlandı:

Teorem 3.1: (1.5) sisteminin (3.2) koşulu altında (3.5) formunda sınırlı çözümü olması için (3.5) integral operatörünün çekirdeklerinin (3.7)-(3.9)' denklemlerini sağlaması ve katsayılar ile çekirdekler arasındaki (3.10), (3.11) ilişkilerinin sağlanması gerek ve yeterdir.

Volterra tipli integral denklemler sisteminin çözülebilirliği ve çözümün tekliğinden bahsedilen aşağıdaki lemmayı verelim [37]. $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$ ile \mathbb{R}^2 'den sınırlı sürekli fonksiyonlar sınıfı işaretlensin.

Lemma 3.1: Varsayalım ki $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_N, \beta_N)$ düzlem üzerindeki bir doğrunun aynı tarafında olan N tane vektördür. Yani öyle (α, β) mevcuttur ki $l = \overline{1, N}$ için $\alpha\alpha_l + \beta\beta_l > 0$ sağlanır ve $g_{jl}(x, y, s)$, $1 \leq j, l \leq N$ fonksiyonları her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için $|g_{jl}(x, y, s)| \leq h(\alpha x + \beta y)$ koşulunu sağlar. Burada $h \in L_1(\mathbb{R}^2)$ 'dir. O halde

$$v_j(x, y) = f_j(x, y) + \int_{-\infty}^0 \sum_{l=1}^n [g_{jl} v_l](x + \alpha_l s, t + \beta_l s, s) ds, \quad (3.15)$$

$$j = 1, \dots, N$$

integral denklemler sisteminin verilmiş keyfi $f_j \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$ için $\mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)$ 'de çözümü vardır ve tektir.

3.2. Bazı Kanonik Formlar

Bu alt bölümde, (1.5) sisteminin (3.5) formunda Volterra çözümünün olması için iki örnek verilecektir ve (1.5) sistemi için (3.10) ve (3.11) ilişkilerinin otomatik olarak sağlandığı iki kanonik form elde edilecektir.

(1.5) sistemini

$$\begin{cases} \sigma_1 \partial_t \psi_1 - \partial_x \psi_1 = Q_{11}(x, t) \psi_1 + Q_{12}(x, t) \psi_2 \\ \sigma_2 \partial_t \psi_2 - \partial_x \psi_2 = Q_{21}(x, t) \psi_1 + Q_{22}(x, t) \psi_2 \end{cases} \quad (3.16)$$

uygun formunda yazalım. Burada $\sigma_1 = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, $\sigma_2 = \text{diag}\{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n\}$. Ayrıca ψ_1 , (1.5) sisteminin $\psi = \text{col}\{\psi_1, \psi_2\}$ çözümünün ilk m , ψ_2 ile de diğer $n - m$ bileşenidir ve

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

olmakla $Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}$ ile sırasıyla Schwartz sınıfından kompleks değerli ölçülebilir elemanlı $m \times m, m \times (n - m), (n - m) \times m, (n - m) \times (n - m)$ boyutlu matrisler işaretlenmiştir.

Örnek 3.1: (Dirac-type sistem [34]) $\xi_1 = \dots = \xi_m = 1, \xi_{m+1} = \dots = \xi_n = -1$ olsun. Eğer $Q_{11} = Q_{22} = 0$ ise (5.16) sistemine Dirac-type sistem [33] denir. Aynı zamanda değişik kaynaklarda bu tip sisteme Zakharov-Shabat (ZS) [48]-[49], Ablowitz-Kaup-Newell-Segur (AKNS) [50] veya kanonik sistem [58] denir. Bu durumda (3.16) sisteminin aşağıdaki formda çözümü mevcuttur:

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) + \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} (x, t, s) \psi_0(s, t) ds. \quad (3.18)$$

Burada $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ sırasıyla $m \times m, m \times (n - m), (n - m) \times m, (n - m) \times (n - m)$ boyutlu matrisler olmakla

$$A_{11}(x, t, \tau) = \int_x^{+\infty} Q_{12}(s, x + t - s) A_{21}(s, x + t - s, \tau - x + s) ds, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} A_{21}(x, t, \tau) = & \frac{1}{2} Q_{21} \left(\frac{\tau + x}{2}, t + \frac{\tau - x}{2} \right) \\ & - \int_{\frac{\tau+x}{2}}^x Q_{21}(s, t - x + s) A_{11}(s, t - x + s, \tau + x \\ & - s) ds, \tau \geq x \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} A_{12}(x, t, \tau) = & \frac{1}{2} Q_{21} \left(\frac{\tau + x}{2}, t + \frac{\tau - x}{2} \right) \\ & - \int_{\frac{\tau+x}{2}}^x Q_{12}(s, x + t - s) A_{22}(s, x + t - s, \tau + x - s) ds, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$A_{22}(x, t, \tau) = \int_x^{+\infty} Q_{21}(s, t - x + s) A_{21}(s, t - x + s, \tau - x + s) ds, \quad (3.22)$$

$$\tau \geq x$$

integral denklemler sistemini sağlarlar ve (3.10), (3.11) ilişkileri otomatik olarak sağlanır.

Örnek 3.2: (TS structure sistemi [35]) $n = 2m$ ve $\xi_1 > \dots > \xi_m > 0 > \xi_{m+1} > \dots > \xi_{2m}$ olsun. Varsayalım ki Q aşağıdaki üçgen yapıdadır:

Q_{11} , $m \times m$ boyutlu kesin alt üçgen, Q_{12} , $m \times m$ boyutlu alt üçgen olmayan, Q_{21} , $m \times m$ boyutlu üst üçgen olmayan ve Q_{22} , $m \times m$ boyutlu kesin üst üçgen matris fonksiyonlarıdır.

Bu durumda (3.16) sisteminin aşağıdaki formda çözümü mevcuttur:

$$\psi(x, t) = \psi_0(x, t) + \int_x^{+\infty} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} (x, t, s) \psi_0(s, t) ds. \quad (3.23)$$

Burada A_{11} alt üçgen, A_{12} alt üçgen olmayan, A_{21} üst üçgen olmayan ve A_{22} üst üçgen $m \times m$ boyutlu matris çekirdekleridir.

$$\begin{cases} A_{11}(x, t, s) = \sigma_1 B_{11}(x, t, t + \sigma_1(s - x)), \\ A_{12}(x, t, s) = -\sigma_2 B_{12}(x, t, t + \sigma_2(s - x)), \\ A_{21}(x, t, s) = \sigma_1 B_{21}(x, t, t + \sigma_1(s - x)), \\ A_{22}(x, t, s) = -\sigma_2 B_{22}(x, t, t + \sigma_2(s - x)) \end{cases} \quad (3.24)$$

işaretleyelim. Burada $\sigma = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ sabit matrisi $\sigma A(x, t, t + \sigma(s - x))$ matrisinin k . ($k = \overline{1, n}$) sütununa $\xi_k A_{ki}(x, t, t + \xi_k(s - x))$, ($i = \overline{1, n}$) şeklinde uygulanmıştır. $B_{ij}(x, t, \tau)$, $i, j = 1, 2$ çekirdekleri aşağıdaki integral denklemler sistemini sağlar:

$$\begin{aligned}
[B_{11}]_{ij}(x, t, \tau) &= \frac{1}{\xi_j - \xi_i} [Q_{11}]_{ij} \left(x + \frac{\tau - t}{\xi_j - \xi_i}, t - \frac{\xi_i}{\xi_j - \xi_i} (\tau - t) \right) \\
&\quad + \int_x^{x + \frac{\tau - t}{\xi_j - \xi_i}} [Q_{11}B_{11} + Q_{12}B_{12}]_{ij}(s, t + \xi_i(x - s), \tau \\
&\quad + \xi_j(x - s)) ds,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
[B_{21}]_{ij}(x, t, \tau) &= \frac{1}{\xi_j - \xi_{m+i}} [Q_{21}]_{ij} \left(x + \frac{\tau - t}{\xi_j - \xi_{m+i}}, t - \frac{\xi_{m+i}}{\xi_j - \xi_{m+i}} (\tau - t) \right) \\
&\quad + \int_x^{x + \frac{\tau - t}{\xi_j - \xi_{m+i}}} [Q_{21}B_{11} + Q_{22}B_{12}]_{ij}(s, t + \xi_{m+i}(x - s), \tau \\
&\quad + \xi_j(x - s)) ds, \tau \geq x,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
[B_{12}]_{ij}(x, t, \tau) &= -\frac{1}{\xi_{m+j} - \xi_i} [Q_{12}]_{ij} \left(x + \frac{\tau - t}{\xi_{m+j} - \xi_i}, t \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi_i}{\xi_{m+j} - \xi_i} (\tau - t) \right) \\
&\quad + \int_x^{x + \frac{\tau - t}{\xi_{m+j} - \xi_i}} [Q_{12}B_{22} + Q_{11}B_{12}]_{ij}(s, t + \xi_i(x - s), \tau \\
&\quad + \xi_{m+j}(x - s)) ds,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
[B_{22}]_{ij}(x, t, \tau) &= \frac{1}{\xi_{m+j} - \xi_{m+i}} [Q_{21}]_{ij} \left(x + \frac{\tau - t}{\xi_{m+j} - \xi_{m+i}}, t \right. \\
&\quad \left. - \frac{\xi_{m+i}}{\xi_{m+j} - \xi_{m+i}} (\tau - t) \right) \\
&\quad + \int_x^{x + \frac{\tau - t}{\xi_{m+j} - \xi_{m+i}}} [Q_{21}B_{12} + Q_{22}B_{22}]_{ij}(s, t \\
&\quad + \xi_{m+i}(x - s), \tau + \xi_{m+j}(x - s)) ds, \tau \geq x
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada $[B]_{ij}(x, t, \tau)$ ile $B(x, t, \tau)$ matris fonksiyonunun (i, j) . elemanı ve $[QB]_{ij}(s, t, \tau) = [Q(s, t)B(x, t, \tau)]_{ij}$ işaretlenmiştir. Ayrıca (3.11) ve (3.12) ilişkileri otomatik olarak sağlanır. $i = j$ olduğunda ise integrallerin üst sınırı $+\infty$ olur.

$(a_{ij})_{i,j=1}^n$ matrisine $j > i$ ($j \geq i$) için $a_{ij} = 0$ olursa alt üçgen (kesin alt üçgen), $j + i \leq n$ için $a_{ij} = 0$ olursa alt üçgen olmayan, $j < i$ ($j \leq i$) için $a_{ij} = 0$ olursa üst üçgen (kesin üst üçgen) ve $j + i \geq n + 2$ için $a_{ij} = 0$ olursa üst üçgen olmayan matris denir.

3.3. Birinci Mertebeden Hiperbolik Sistem İçin Yarı Düzlemde Saçılım Operatörünün Volterra Yapısı

(5.16) sistemini $x = 0$ 'da aşağıdaki sınır koşulu altında göz önüne alalım:

$$\psi_2(0, t) = H\psi_1(0, t). \quad (3.29)$$

Burada H , $(n - m) \times m$ boyutlu sabit matristir ve $a(t)$ ile tanımlı gelen dalgaların profili ise

$$\psi_1(x, t) = \mathfrak{F}_{\sigma_1 x} a(t) + o(1), x \rightarrow +\infty \quad (3.30)$$

asimptotik ilişkisini sağlar.

(3.16), (3.29), (3.30) problemine yarı düzlemde saçılım problemi denir. Aşağıdaki teorem, bu saçılım problemi için sağlar:

Teorem 3.2: Keyfi $a(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ vektörü için saçılım probleminin tek çözümü vardır ve çözümün ikinci bileşeni

$$\psi_2(x, t) = \mathfrak{F}_{\sigma_2 x} b(t) + o(1), x \rightarrow +\infty \quad (3.31)$$

asimptotik ilişkisini sağlar. Burada $b(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n-m})$ saçılan dalgalarının profilidir.

İspat 3.2: (3.16), (3.29), (3.30) saçılım problemi aşağıdaki integral denklemler sistemine denktir:

$$\begin{cases} \psi_1(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma_1 x} a(t) + \int_x^{+\infty} \mathfrak{I}_{\sigma_1(x-s)} [Q_{11}\psi_1 + Q_{12}\psi_2](s, t) ds, \\ \psi_2(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma_2 x} b(t) + \int_x^{+\infty} \mathfrak{I}_{\sigma_2(x-s)} [Q_{21}\psi_1 + Q_{22}\psi_2](s, t) ds. \end{cases} \quad (3.32)$$

Burada $b(t) = Ha(t) + \int_x^{+\infty} \{H\mathfrak{I}_{-\sigma_1 s} [Q_{11}\psi_1 + Q_{12}\psi_2](s, t) - \mathfrak{I}_{-\sigma_2 s} [Q_{21}\psi_1 + Q_{22}\psi_2](s, t)\} ds'$ tir.

(3.32) sisteminden

$$r_{m+l}(x, t, \tau) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \frac{h_{li}}{\xi_i} \sum_{j=1}^n [q_{ij}\varphi_j] \left(\frac{\xi_{m+l}}{\xi_i} x + \frac{t-\tau}{\xi_i}, \tau \right), & \tau < t + \xi_{m+l} x \\ \frac{1}{\xi_{m+l}} \sum_{j=1}^n [q_{m+l,j}\varphi_j] \left(x + \frac{t-\tau}{\xi_{m+l}}, \tau \right), & \tau > t + \xi_{m+l} x \end{cases} \quad (3.33)$$

olmakla

$$\varphi_i(x, t) = a_i(t + \xi_i x) + \frac{1}{\xi_i} \int_{-\infty}^t \sum_{j=1}^n [q_{ij}\varphi_j] \left(x + \frac{t-\tau}{\xi_i}, \tau \right) d\tau, \quad (3.34)$$

$i = 1, \dots, m,$

$$\varphi_{m+l}(x, t) = \sum_{i=1}^m h_{li} a_i(t + \xi_{m+l} x) + \int_{-\infty}^t r_{m+l}(x, t, \tau) d\tau, \quad (3.35)$$

$l = 1, \dots, n - m$

sistemi elde edilir. Sonuncu sistem t 'ye göre Volterra integral denklemler sistemi ve çekirdekleri Schwartz sınıfından olduğundan, bu sistemin çözümü vardır ve tektir [37]. $q_{ij}(x, t)$, $i, j = 1, \dots, n$ Schwartz sınıfından olduğu için (3.31) ilişkisi (3.32)'den kolayca elde edilir. ■

Teorem 3.2'ye göre her $a(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m)$ gelen dalga vektörü için saçılım probleminin bir sınırlı çözümü mevcuttur ve bu çözüm (3.31) ile tanımlı $b(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n-m})$ saçılan dalga vektörüdür. Böylece $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m)$ uzayında a 'yi b 'ye dönüştüren

$$b = S_H a \quad (3.36)$$

S_H matris operatörü tanımlayabiliriz. Bu operatöre, yarı düzlemde (3.29) sınır koşullu (3.16) sistemi için saçılım operatörü denir.

(3.16) sisteminin kanonikleştirilebilirliği, S_H operatörünün yapısının Volterra olmasını sağlar.

Teorem 3.3: S_H , (7) ilişkilerini sağlayan ve kanonikleştirilebilir olan (3.16) sisteminin saçılım operatörü olsun. O halde S_H operatörünün

$$S_H = (I + A_+)(H + A_-) \quad (3.37)$$

faktörizasyonunu mevcuttur. Burada I birim operatör, A_- üst Volterra integral operatörü ve A_+ alt Volterra integral operatörüdür.

İspat 3.3: $h(t) = \text{col}\{a(t), b(t)\}$ olduğunu göz önüne alalım. (3.5) ifadesini değişken dönüşümü ile aşağıdaki şekilde tekrar yazalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma_1 x} a(t) + \int_t^{+\infty} \hat{A}_{11}(x, t, s) \mathfrak{I}_{\sigma_1 x} a(s) ds \\ \quad + \int_{-\infty}^t \hat{A}_{12}(x, t, s) \mathfrak{I}_{\sigma_2 x} b(s) ds, \\ \psi_2(x, t) = \mathfrak{I}_{\sigma_1 x} a(t) + \int_t^{+\infty} \hat{A}_{21}(x, t, s) \mathfrak{I}_{\sigma_1 x} a(s) ds \\ \quad + \int_{-\infty}^t \hat{A}_{22}(x, t, s) \mathfrak{I}_{\sigma_2 x} b(s) ds. \end{array} \right. \quad (3.38)$$

Burada $\hat{A}_{11}(x, t, s), \hat{A}_{12}(x, t, s), \hat{A}_{21}(x, t, s), \hat{A}_{22}(x, t, s)$ sırasıyla $m \times m$, $m \times (n - m)$, $(n - m) \times m$ ve $(n - m) \times (n - m)$ tipinde matris çekirdekleridir ve

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}_{11}(x, t, s) = \frac{1}{\sigma_1} A_{11} \left(x, t, x + \frac{1}{\sigma_1} (s - t) \right), \\ \hat{A}_{12}(x, t, s) = -\frac{1}{\sigma_2} A_{12} \left(x, t, x + \frac{1}{\sigma_2} (s - t) \right), \\ \hat{A}_{21}(x, t, s) = \frac{1}{\sigma_1} A_{21} \left(x, t, x + \frac{1}{\sigma_1} (s - t) \right), \\ \hat{A}_{22}(x, t, s) = -\frac{1}{\sigma_2} A_{22} \left(x, t, x + \frac{1}{\sigma_2} (s - t) \right) \end{array} \right. \quad (3.39)$$

ile işaretlenmişlerdir. Burada $\sigma = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ sabit matrisi $m_2 \times m_1$ boyutlu $\frac{1}{\sigma} A \left(x, t, x + \frac{1}{\sigma} (s - t) \right)$ matrisinin $k. (k = \overline{1, m_1})$ sütununa $\frac{1}{\xi_k} A_{ki} \left(x, t, x + \frac{1}{\xi_k} (s - t) \right), i = \overline{1, m_2}$ şeklinde uygulanmıştır. Sınır koşulundan ve (3.38) ifadesinden

$$b(t) + A_{21-} a(t) + A_{22+} b(t) = H a(t) + H A_{11-} a(t) + H A_{12+} b(t) \quad (3.40)$$

veya

$$(I + +A_{22+} - HA_{12+})b(t) = (H + HA_{11-} - A_{21-})a(t) \quad (3.41)$$

alınır. Burada

$$\begin{cases} A_{i1-}(x)f(t) = \int_t^{+\infty} \hat{A}_{i1}(x, t, s)f(s)ds, \\ A_{i1-}(x)f(t) = \int_t^{+\infty} \hat{A}_{i1}(x, t, s)f(s)ds, \end{cases} \quad (3.42)$$

ve $A_{i1-} = A_{i1-}(0)$, $A_{i2+} = A_{i2+}(0)$, $i = 1, 2$ 'dir.

(3.36) saçılım operatörünün tanımı ve (3.38) eşitliklerinden

$$S_H = (I + A_+)(H + A_-) \quad (3.43)$$

alınır. Burada $I + A_+ = (I + +A_{22+} - HA_{12+})^{-1}$ ve $A_- = HA_{11-} - A_{21-}$ 'dir. ■

(3.37) Volterra yapılı S_H saçılım operatörü, yarı düzlemde birinci mertebeden hiperbolik sistem için ters saçılım probleminin çözümünde önemli rol oynar.

Örneğin, $n = 2m$ durumunda

$$\psi_2(0, t) = H_k \psi_1(0, t), \quad \det H_k \neq 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.44)$$

sınır koşulları ile (3.16) kanonikleştirilebilir sistemi için yarı eksende iki saçılım problemi göz önüne alınsın. Bilindiği üzere

$$\Pi = \begin{bmatrix} A_{11-} & A_{12+} \\ A_{21-} & A_{22+} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

matris geçiş operatörü, $x < 0$ için (3.16) sisteminin katsayıları sıfıra eşit olmakla tüm ekseninde birinci mertebeden hiperbolik denklemler sistemi için saçılım operatörüdür. Hiperbolik denklemler sistemi için tüm ekseninde ters saçılım problemi [32]-[37]'de çözüldüğünden, yarı ekseninde $n = 2m$ durumunda (3.16) kanonikleştirilebilir sistemi için ters saçılım problemi hakkında aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.4: S_{H_1}, S_{H_2} , yarı ekseninde $n = 2m$ olmakla (3.16) kanonikleştirilebilir sistemi için iki saçılım operatörü olsun. Burada H_1 ve H_2 , $\det[H_1 - H_2] \neq 0$ koşulunu sağlayan matrislerdir. O halde (3.16) sisteminin katsayıları, S_{H_1} ve S_{H_2} saçılım operatörleri vasıtasıyla tek biçimde elde edilir.

İspat 3.4: $B_{k+} = A_{22+} - H_k A_{12+}$ ve $B_{k-} = H_k A_{11-} H_k^{-1} - A_{21-} H_k^{-1}$ olsun. Sonuncu eşitlikler ve $S_{H_k} H_k^{-1} = I + F_k, k = 1, 2$ eşitliği kullanılarak (3.37)'den

$$B_{k-} = B_{k+} + F_k + B_{k+} F_k \quad (3.46)$$

elde edilir. (3.46)'da ki B_{k-}, B_{k+} integral operatörlerinin çekirdekleri $B_{k-}(t, s), B_{k+}(t, s)$ olsun. (3.46) operatör denklemlerini çekirdekler üzerinden aşağıdaki şekilde tekrar yazalım:

$$\begin{cases} B_{k+}(t, s) + F_k(t, s) + \int_{-\infty}^t B_{k+}(t, \tau) F_k(\tau, s) d\tau = 0, s \leq t, \\ B_{k-}(t, s) - F_k(t, s) - \int_{-\infty}^t B_{k+}(t, \tau) G_k(\tau, s) d\tau = 0, s \geq t. \end{cases} \quad (3.47)$$

Burada $F_k(t, s)$ ve $G_k(t, s)$ sırasıyla F_k ve $G_k = H_k S_{H_k}^{-1} - I$ Hilbert-Schmidt integral operatörlerinin çekirdekleridir. Bu integral denklemler GLM tiplidir ve $S_{H_k}, k = 1, 2$ operatörlerinin faktörizasyonu ile tek şekilde çözülür [32]-[37].

O halde,

$$\begin{cases} H_k A_{12+} - A_{22+} = \Gamma_{k+}, \\ A_{21-} - H_k A_{11-} = \Gamma_{k-} H_k \end{cases} \quad (3.48)$$

sağlanır. Burada $\Gamma_{k+} = [F_k(I + Q_t F_k)^{-1}]_+$, $\Gamma_{k-} = [G_k(I + E_t G_k)^{-1}]_-$, $k = 1, 2$ ve Q_{t-} , $s \leq t$ olduğunda yarı eksendeki projeksiyon, E_{t-} ise $s \geq t$ olduğunda yarı eksendeki projeksiyondur. Ayrıca $[K]_+$ ve $[K]_-$, sırasıyla $Kf(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t,s)f(s)ds$ integral operatörünün alt ve üst Volterra kısmıdır. Yani $[K]_+ f(t) = \int_{-\infty}^t K(t,s)f(s)ds$ ve $[K]_- f(t) = \int_t^{+\infty} K(t,s)f(s)ds$ 'tir.

(3.48)'den Π matris geçiş operatörü, $\det[H_1 - H_2] \neq 0$ koşulu altında S_{H_1} ve S_{H_2} vasıtasıyla tek şekilde elde edilir. (3.16) sisteminin katsayıları Π matris operatörü ile tek şekilde elde edilebildiğinden, (3.16) sisteminin katsayıları S_{H_1} ve S_{H_2} saçılım operatörleriyle de tek şekilde elde edilir. ■

Uyarı 3.1: Teorem 3.4, [36]'da TS-structure sistemi için ispatlanmıştır. Bu makalede, $\sigma = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $\xi_1 \geq \dots \geq \xi_m > 0 > \xi_{m+1} \geq \dots \geq \xi_n$ ile (1.5) kanonikleştirilebilir sistemi için genelleştirilmiştir. Teorem 3.4, [32] ve [34]'deki sistemlerden farklı sistemlere de uygulanabilir. Örneğin, $\sigma = \text{diag}\{\xi_1, \dots, 4\}$, $\xi_1 > \xi_2 > 0 > \xi_3 > \xi_4$ olmakla

$$Q(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & q_{14}(x, t) \\ 0 & 0 & q_{23}(x, t) & q_{24}(x, t) \\ q_{31}(x, t) & q_{32}(x, t) & 0 & q_{34}(x, t) \\ q_{41}(x, t) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

potansiyelli kesin hiperbolik olmayan (1.5) sistemi için yarı eksen de ters saçılım problemi daha önce incelenmemiştir. Bu sistemin kanonikleştirilebilir olduğu kolayca gösterilebilir. Yani, bu problemin (3.3) formunda Volterra tipli integral gösterimi vardır ve çekirdekler

$$A(x, t, s) = \begin{bmatrix} A_{11}(x, t, s) & 0 & 0 & A_{14}(x, t, s) \\ A_{21}(x, t, s) & A_{22}(x, t, s) & A_{23}(x, t, s) & A_{24}(x, t, s) \\ A_{31}(x, t, s) & A_{32}(x, t, s) & A_{33}(x, t, s) & A_{34}(x, t, s) \\ A_{41}(x, t, s) & 0 & 0 & A_{44}(x, t, s) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

olduğunda bu sistem kanonikleştirilebilir. Bu durumda Teorem 3.4, $x \geq 0$ yarı ekseninde iki hızlı (3.52) sistemine uygulanabilir.

4. YARI DÜZLEMDE SINIR KOŞULUNDA SİNGÜLER GEÇİŞ MATRİSİ İÇEREN STASYONER OLMAYAN MATRİS DİRAC DENKLEMİ İÇİN TERS SAÇILIM PROBLEMİ

Yarı düzlemde

$$\sigma \partial_x \psi(x, t) + \partial_t \psi(x, t) = Q(x, t) \psi(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad (4.1)$$

stasyonere olmayan matris Dirac denklemi için saçılım problemini göz önüne alalım. Burada $\sigma = \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ bileşenleri n . mertebeden I_n birim matrisler olan sabit matristir. $Q(x, t) = \begin{bmatrix} 0 & q_{12}(x, t) \\ q_{21}(x, t) & 0 \end{bmatrix}$ ise bileşenleri $L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$ sınıfından $n \times n$ tipinde q_{12}, q_{21} blok matrisleri olan potansiyel matrisidir.

Yarı düzlemde (4.1) sistemi için saçılım problemi, (4.1) sisteminin $x = 0$ 'da

$$\psi_2(0, t) = H \psi_1(0, t), \quad (4.2)$$

sınır koşulu ve

$$\psi_1(x, t) = a(t + x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (4.3)$$

asimptotik koşulu ile çözümünün bulunmasını içerir. Burada ψ_1 ve ψ_2 , n boyutlu sütun vektörleri olmakla $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$ 'dir. Ayrıca H , $n \times n$ tipinde sabit geçiş matrisidir ve $a(t)$ vektör fonksiyonu gelen dalgaların profilidir.

Keyfi bir $a(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ gelen dalga vektörü için saçılım probleminin tek çözümü mevcuttur ve bu çözümün ikinci bileşeni

$$\psi_2(x, t) = b(t - x) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty \quad (4.4)$$

asimptotik ilişkisini sağlar. Burada $b(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ vektör fonksiyonu saçılan dalgaların profili olarak tanımlıdır.

O halde her $a(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ gelen dalga vektörü için (4.1) sisteminin tek çözümü mevcuttur ve bu çözüm (4.4) ile $b(t) \in L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ saçılan dalgaların profilini belirler. Böylece $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ sınıfından a 'yı b 'ye dönüştüren

$$b = S_H a \quad (4.5)$$

olacak şekilde $n \times n$ tipinde S_H matris saçılım operatörü tanımlayabiliriz. Bu operatöre, (4.2) sınır koşullu (4.1) sistemi için yarı düzlemde saçılım operatörü denir. Bilinen S_H matris saçılım operatöründen $Q(x, t)$ potansiyel matrisini bulma problemine de (4.2) sınır koşullu (4.1) sistemi için ters saçılım problemi denir. Bu bölümde, (4.1) sistemi için sınır koşulunda singüler H geçiş matrisi içeren ters saçılım probleminin tekliği incelenecektir. Yarı düzlemde $\det H \neq 0$ durumunda (4.1) sistemi için ters saçılım problemi [32]'deki stasyonere olmayan sikalar Dirac denklemi için metod ve sonuçların matris durumuna genelleştirilmesi [53]'de çalışılmıştır. Bu genelleştirme çok zor olmamasına rağmen sınır koşulundaki singüler durum için önem arz eder.

4.1. $\det H = 0$ Durumunda Bir Potansiyel Sınıfı

Bu alt bölümde $\det H = 0$ durumunda ters saçılım probleminin çözümünün tekliği incelenecektir [59]. $\det H \neq 0$ durumunda keyfi potansiyel için ters saçılım probleminin çözümünün tek olmama durumu [53]'de gösterilmiştir. Bu durumda, ters saçılım problemi H matrisinin rankı ile ilişkili $2n^2$ 'den az sayıda fonksiyonel bileşenli bir potansiyel sınıfı için göz önüne alınabilir.

$\text{rank} H = r, 0 < r < n, n > 2$ olsun. O halde H matrisi

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

matrisine denktir. H ve \hat{H} matrisleri ancak ve ancak singüler olmayan A ve B matrisleri için $AH = \hat{H}B$ sağlanırsa denktir.

(4.1)-(4.2) problemi, $\hat{\psi}_2 = A\psi_2$ ve $\hat{\psi}_1 = B\psi_1$ dönüşümleri ile

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\psi}_1(x, t) - \partial_x \hat{\psi}_1(x, t) = \hat{q}_{12}(x, t) \hat{\psi}_2(x, t), \\ \partial_t \hat{\psi}_2(x, t) + \partial_x \hat{\psi}_2(x, t) = \hat{q}_{21}(x, t) \hat{\psi}_1(x, t), \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\hat{\psi}_2(0, t) = \hat{H} \hat{\psi}_1(0, t) \quad (4.8)$$

saçılım problemine indirgenir. Burada $\hat{q}_{12} = Bq_{12}A^{-1}$ ve $\hat{q}_{21} = Aq_{21}B^{-1}$ 'dir.

Yeni bir

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 0_n & Q_1 & 0_{r,n-r} \\ Q_2 & 0_{r,n-r} & 0_{n-r} \\ 0_{n-r,r} & Q_3 & 0_n \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

potansiyel sınıfı dahil edilerek (4.1)-(4.2) saçılım problemi

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\psi}_{11}(x, t) - \partial_x \hat{\psi}_{11}(x, t) = Q_1(x, t) \hat{\psi}_{21}(x, t), \\ \partial_t \hat{\psi}_{21}(x, t) + \partial_x \hat{\psi}_{21}(x, t) = Q_2(x, t) \hat{\psi}_{11}(x, t), \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\hat{\psi}_{21}(0, t) = \hat{\psi}_{11}(0, t), \quad (4.11)$$

ve

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\psi}_{12}(x, t) - \partial_x \hat{\psi}_{12}(x, t) = 0, \\ \partial_t \hat{\psi}_{22}(x, t) + \partial_x \hat{\psi}_{22}(x, t) = Q_3(x, t) \hat{\psi}_{12}(x, t), \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\hat{\psi}_{22}(0, t) = 0, \quad (4.13)$$

şeklinde iki saçılım problemine dönüştürülür. Burada $Q_i, i = 1, 2, 3$ sırasıyla $r \times r$, $r \times r$ ve $(n - r) \times (n - r)$ boyutlu sıfırdan farklı matris bloklarıdır, $\hat{\psi}_{11}$, $\hat{\psi}_{21}$ sırasıyla n boyutlu $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ vektörlerinin ilk r ve $\hat{\psi}_{12}$, $\hat{\psi}_{22}$ sırasıyla n boyutlu $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2$ vektörlerinin son $n - r$ bileşenleridir.

(4.5) saçılım operatörünün tanımına göre (4.9) potansiyelli (4.7)-(4.8) sistemin için $S_{\bar{H}}$ saçılım operatörü

$$S_{\bar{H}} = \begin{bmatrix} S_{I_r} & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & S_{0_{n-r}} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

şeklinde. Burada S_{I_r} ve $S_{0_{n-r}}$ sırasıyla (4.10)-(4.11) ve (4.12)-(4.13) problemlerinin saçılım operatörleridir.

4.2. Saçılım Operatörünün Özellikleri

Ters saçılım problemlerinin çözümünde çözümün Volterra tipli integral gösterimi önemli rol oynar. Bu tür gösterim $x \rightarrow +\infty$ 'da dönüşüm operatöründen elde edilebilir.

Teorem 4.1: ([34]) Keyfi $a_1(t)$, $b_1(t)$, $(-\infty < t < +\infty)$ için (4.10) sisteminin tek çözümü mevcuttur. Ayrıca bu çözüm

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{11}(x, t) = [I_r + A_{11-}(x)]a_1(t + x) + A_{12+}(x)b_1(t - x), \\ \hat{\psi}_{21}(x, t) = A_{21-}(x)a_1(t + x) + [I_r + A_{22+}(x)]b_1(t - x) \end{cases} \quad (4.15)$$

gösterimine sahiptir. Burada $a_1(t)$, $b_1(t)$ vektörleri sırasıyla $a(t)$ ve $b(t)$ gelen ve kaçan dalga vektörlerinin ilk r bileşenidir. $A_{ij-}(x)f(t) = \int_t^{+\infty} A_{ij}(x, t, s)f(s)ds$ ve $A_{ij+}(x)f(t) = \int_{-\infty}^t A_{ij}(x, t, s)f(s)ds$, $i, j = 1, 2$ şeklindedir. $A_{ij}(x, t, s), i, j = 1, 2$

çekirdekleri (4.10) sisteminin katsayılarından tek şekilde elde edilir ve sabitlenmiş x için bu çekirdekler Hilbert-Schmidt çekirdekleridir.

Ayrıca yukarıda bahsedilen $A_{ij}(x, t, s)$, $i, j = 1, 2$ çekirdekleri (4.10) sisteminin potansiyeli ile aşağıdaki gibi bağlıdır [33]:

$$\begin{cases} A_{11}(x, t, t) = -\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} Q_1(s, x+t-s) Q_2(s, x+t-s) ds, \\ A_{12}(x, t, t) = \frac{1}{2} Q_1(x, t), \quad A_{21}(x, t, t) = -\frac{1}{2} Q_2(x, t), \\ A_{22}(x, t, t) = -\frac{1}{2} \int_x^{+\infty} Q_2(s, t-x+s) Q_1(s, t-x+s) ds. \end{cases} \quad (4.16)$$

(4.15) gösterimi ve (4.11) sınır koşulları kullanılarak

$$b_1(t) = (I_r + A_{22+} - A_{12+})^{-1} (I_r + A_{11-} - A_{21-}) a_1(t) \quad (4.17)$$

alınır. Burada $A_{ij-} = A_{ij-}(0)$ ve $A_{ij+} = A_{ij+}(0)$, $i, j = 1, 2$ 'dir.

(4.17) formülü ve saçılım operatörünün tanımı göz önüne alınırsa yarı düzlemde (4.10) sistemi için matris saçılım operatörünün Volterra yapısı

$$S_{I_r} = (I_r + A_{22+} - A_{12+})^{-1} (I_r + A_{11-} - A_{21-}) \quad (4.18)$$

şeklindedir. Saçılım operatörünün karakterizasyonu için önem arz eden $S_{\bar{H}}$ saçılım operatörünün çift taraflı faktörizasyona sahip olması aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 4.2: $S_{\bar{H}} = \begin{bmatrix} S_{I_r} & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & S_{0_{n-r}} \end{bmatrix}$, (4.9) potansiyel matrisli (4.7)-(4.8) probleminin saçılım operatörü olsun. O halde S_{I_r} bloğu çift taraflı faktörizasyona sahiptir ve $S_{0_{n-r}}$ ise üst üçgen (üst Volterra) integral operatörüdür.

İspat 4.2: (4.18) formülünden S_{I_r} matris operatörünün sağ faktörizasyona sahip olduğu görülür. Dahası, bu operatör F Hilbert-Schmidt operatörü olmakla $S_{I_r} = I_r + F$ yapısı ile verilebilir. Ayrıca (4.18)'den S_{I_r} operatörünün tersi de elde edilebilir ve bu ters G Hilbert-Schmidt operatörü olmakla $S_{I_r}^{-1} = I_r + G$ şeklindedir. F ve G operatörlerinin çekirdekleri $F(t,s)$ ve $G(t,s)$ olsun. S_{I_r} operatörünün sol faktörizasyonu [53]'de gösterilmiştir.

(4.12)-(4.13) problemi ise açık olarak çözülebilirdir ve bu çözümler

$$\begin{cases} \hat{\psi}_{12}(x,t) = a_2(t+x), \\ \hat{\psi}_{22}(x,t) = b_2(t-x) - \int_x^{+\infty} Q_3(s, t-x+s) a_2(t-x+2s) ds, \end{cases} \quad (4.19)$$

şeklindedir. Burada $b_2(t) = \frac{1}{2} \int_t^{+\infty} Q_3(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau+t}{2}) a_2(\tau) d\tau$ ve $a_2(t)$, $b_2(t)$ sırasıyla $a(t)$, $b(t)$ gelen ve kaçan dalga vektörlerinin son $n-r$ bileşenleridir. O halde

$$S_{0_{n-r}} a_2(t) = b_2(t) = \frac{1}{2} \int_t^{+\infty} Q_3(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau+t}{2}) a_2(\tau) d\tau \quad (4.20)$$

saçılım operatörü çekirdeği $\frac{1}{2} Q_3(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau+t}{2})$ olan üst Volterra integral operatörüdür. ■

4.3. Ters Saçılım Problemi

Bilinen (4.14) saçılım matrisinden (4.9) formundaki \hat{Q} potansiyel matrisini bulma problemine (4.8) sınır koşullu (4.7), (4.9) sistemi için ters saçılım problemi denir. (4.16) yeniden kurma formülleri potansiyelin tek şekilde bulunması için bazı eksik bilgiler içermektedir. Aşağıdaki teorem (4.7)-(4.9) için ters saçılım probleminin tek şekilde çözülebilirliğini vermektedir.

Teorem 4.3: $\hat{Q}(x,t) \in L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{C}^{n \times n})$, (4.9) formunda keyfi bir matris olsun.

Ayrıca $S_{\hat{H}} = \begin{bmatrix} S_{I_r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & S_{0_{n-r}} \end{bmatrix}$, (4.9) potansiyel matrisli (4.8) sınır koşullu (4.7)

probleminin saçılım operatörü olsun. O halde $\widehat{Q}(x, t)$ potansiyeli $S_{\widehat{H}}$ ' dan tek türlü belirlenir.

$S_{0_{n-r}}$ operatörü üst Volterra integral operatörü olduğundan, bu operatörün çekirdeği (4.20) formülü ile verilmiş $\frac{1}{2}Q_3(\frac{\tau-t}{2}, \frac{\tau+t}{2})$ çekirdeği ile çakışıktır. S_{I_r} operatörünün çift taraflı faktörizasyona sahip olması aşağıdaki teoremi ifade etmeye imkan verir:

Teorem 4.4: $S_{\widehat{H}} = \begin{bmatrix} S_{I_r} & 0_{r, n-r} \\ 0_{n-r, r} & S_{0_{n-r}} \end{bmatrix}$, $S_{I_r} = I_r + F$ ve $S_{0_{n-r}} = H_-$ olmakla (4.7)-(4.9) probleminin saçılım operatörü olsun. O halde F, G ve H_- Hilbert-Schmidt integral operatörleri olacak şekilde $S_{I_r}^{-1} = I_r + G$ tersi mevcuttur ve her $x \in \mathbb{R}_+$ ve $t \in \mathbb{R}$ için keyfi $h_1, h_2 \in L_2$ için

$$\begin{cases} v_1(s) + \int_{-\infty}^t v_2(\tau) F(\tau - x, s + x) d\tau = h_1(s), & s \geq t, \\ v_2(s) + \int_t^{+\infty} v_1(\tau) G(\tau + x, s - x) d\tau = h_2(s), & s \leq t, \end{cases} \quad (4.21)$$

sisteminin L_2 'de tek çözümü mevcuttur. Ayrıca, eğer $h_1(s) = 0$, $h_2(s) = -G(t + x, s - x)$ ve $h_1(s) = -F(t - x, s + x)$, $h_2(s) = 0$ ise sırasıyla $A_{11}(x, t, s) = v_1(s)$, $A_{12}(x, t, s) = v_2(s)$ ve $A_{21}(x, t, s) = v_1(s)$, $A_{22}(x, t, s) = v_2(s)$ yukarıdaki sistemin çözümleridir. Dahası (4.7) sisteminin potansiyeli $Q_1(x, t) = 2A_{12}(x, t, t)$, $Q_2(x, t) = -2A_{21}(x, t, t)$ ve $Q_3(x, t) = H(t - x, t + x)$ şeklinde tek türlü belirlenir.

S_{I_r} saçılım operatörü çift taraflı faktörizasyona sahip olduğundan [38], (4.10) sistemi tek türlü çözülebilirdir.

Teorem 4.5: $\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_r & 0 \\ 0 & \gamma_{n-r} \end{bmatrix}$, $L_2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ 'de bir operatör olsun. Burada γ_r, F ve G Hilbert-Schmidt integral operatörleri olmakla $\gamma_r = I_r + F$ ve $\gamma_r^{-1} = I_r + G$ olacak şekilde tersi mevcut $r \times r$ matris operatörüdür. γ_{n-r} ise $(n - r) \times (n - r)$

üst Volterra ve Hilbert-Schmidt integral operatörüdür. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}_+$ ve $t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} v_1(s) + \int_{-\infty}^t v_2(\tau) F(\tau - x, s + x) d\tau = 0, & s \geq t, \\ v_2(s) + \int_t^{+\infty} v_1(\tau) G(\tau + x, s - x) d\tau = 0, & s \leq t, \end{cases} \quad (4.22)$$

sisteminin L_2 'de sadece trivial çözümünü mevcut olsun. O halde γ , (4.7)-(4.9) saçılım probleminin saçılım operatörüdür.

İspat 4.5: İspat, [32]'deki sikalar Dirac denklem için olan ters saçılım problemi üzerine elde edilen sonuçları matris durumuna genelleterek ve γ_r matris operatörünün (4.10)-(4.11) problemi için saçılım operatörü olma unsurunu kullanarak kolayca yapılır. ■

KAYNAKLAR

- [1] Vladimrov V. S., (1961), "Mathematical problems of the one-velocity theory of particle transport", 1st Edition, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.
- [2] Blagoveshchenskii A. S., (2001), "Inverse problems of wave processes", 1st Edition, VSP Science Press.
- [3] Godunov S. K., (1979), "Uravneniya matematicheskoi fiziki", 2nd Edition, Nauka.
- [4] Prilepko A. I., Orlovsky D., Vasin I. A., (2000), "Methods for solving inverse problems in mathematical physics", 1st Edition, CRC Press.
- [5] Yamamoto M., Trooshin I., (2005), "Identification problem for one dimensional vibrating system", Mathematical methods in the applied sciences, 28 (17), 2037-2059.
- [6] Yamamoto M., Yamazaki T., (2008), "Inverse problems for vibrating systems of first order", Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 16 (9), 887-936.
- [7] Lavrentev M. M., Romanov V. G., Shishatskii S. P., (1986), "Ill-posed problems of mathematical physics and analysis", 1st Edition, American Mathematical Society.
- [8] Romanov V. G., (1987), "Inverse problems of Mathematical Physics", 1st Edition, VNU Science Press BV.
- [9] Belinskii S. P., (1976), "A certain inverse problem for linear symmetric t -hyperbolic systems with $n+1$ independent variables", *Differentsial'nye Uravneniya*, 12, 15-23.
- [10] Belinskii S. P., Romanov V. G., (1980), "On the problem of determining the coefficients of a t -hyperbolic system", *Matematicheskie Zametki*, 28, 525-532, (in Russian).
- [11] Romanov V. G., (1978), "A formulation of an inverse problem for first-order symmetric hyperbolic systems", *Matematicheskie Zametki*, 24, 231-236.
- [12] Ismailov M. I., (2010), "Inverse scattering problem for nonstationary Dirac-type systems on the plane", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365 (2), 498-509
- [13] Nizhnik L. P., (1991), "Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations", 1st Edition, Naukova Dumka, (in Russian).
- [14] Shabat A. B., (1972), "An one-dimensional scattering theory", *Differentsial'nye Uravneniya*, 8, 164-178, (in Russian).

- [15] Ismailov M. I., Tekin I., (2016), "Inverse coefficient problems for a first order hyperbolic system", *Applied Numerical Mathematics*, 106, 98-115.
- [16] Bui D. D., Nelson P., (1992), "Existence and uniqueness of an inverse problem for a hyperbolic system of lidar probing", *Inverse Problems*, 8 (6), 821-829.
- [17] Zhu B., Dou X., (1997), "On an inverse initial boundary value problem for a one dimensional hyperbolic system of differential equations", *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 13 (1), 33-44.
- [18] Abaturov M. Y., Baev A. V., (1992), "Numerical solution of an inverse problem for the wave equation", *Computational Mathematics and Modeling*, 3, 125-128.
- [19] Ayoubi I. S., (1990), "Numerical solution of the inverse scattering problem for hyperbolic systems of n-components in semi-infinite media", *Invariant Imbedding and Inverse Problems*, 63, 187.
- [20] Kabanikhin S. I., Akhmetov Zh. A., (1983), "Finite-difference regularization of the inverse problem for a first-order hyperbolic system. Methods for solving inverse problems", *Akademii Nauk SSSR Sibirskogo Otdeleniya Vychislitelniy*, 65-74, (in Russian).
- [21] Wang D. L., Zhang G. Q., (1988), "Convergence of difference methods for inverse problems of a one-dimensional hyperbolic system of first order", *Journal of Computational Mathematics*, 6, 226-237.
- [22] Prilepko A. I., Orlovsky D., Vasin I. A., (2000), "Methods for solving inverse problems in mathematical physics", 1st Edition, CRC Press.
- [23] Hussein S. O., Lesnic D., (2016), "Determination of forcing functions in the wave equation. Part II: the time-dependent case", *Journal of Engineering Mathematics*, 96 (1), 115-133.
- [24] Hussein S. O., Lesnic D., (2016), "Determination of forcing functions in the wave equation. Part I: the space-dependent case", *Journal of Engineering Mathematics*, 96 (1), 135-153.
- [25] Beilina L., (2002) "Adaptive hybrid FEM/FDM methods for inverse scattering problems", *Journal of Inverse Problems and Information Technologies*, 1 (3), 73-116.
- [26] Beilina L., Thanh N. T., Klibanov M. V., Malmberg J. B., (2015), "Globally convergent and adaptive finite element methods in imaging of buried objects from experimental backscattering radar measurements", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 289, 371-391.

- [27] Chow Y. T., Zou J., (2015), "A numerical method for reconstructing the coefficient in a wave equation", *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 31 (1), 289-307.
- [28] Marchenko V. A., (2011), "Sturm-Liouville operators and applications", 2nd Edition, American Mathematical Society.
- [29] Levitan B. M., (1987), "Inverse Sturm-Liouville problems", 1st Edition, VNU Science Press.
- [30] Lesch M., Malamud M. M., (2000), "The inverse spectral problem for first order systems on the half line", In *Differential operators and related topics*, 1st Edition, Birkhäuser Basel.
- [31] Gasymov M. G., (1968), "The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order $2n$ ", *Moscow Mathematical Society*, 19, 41-119.
- [32] Nizhnik L. P., (1991), "Inverse scattering problems for hyperbolic equations", 1st Edition, Naukova Dumka, (in Russian).
- [33] Nizhnik L. P., Iskenderov N. Sh., (1990), "An inverse nonstationary scattering problem for a hyperbolic system of three first-order equations on the half-axis", *Ukrainian Mathematical Journal*, 42 (7), 825-832.
- [34] Iskenderov N. Sh., Ismailov M. I., (2009), "Inverse scattering problem for nonstationary Dirac-type systems on the half-plane", *Journal of Differential Equations*, 246 (1), 277-290.
- [35] Ismailov M. I., (2006), "Inverse scattering problem for hyperbolic system on a semi-axis in the case of equal number of incident and scattered waves", *Inverse Problems*, 22 (3), 955-974.
- [36] Ismailov M. I., Tekin I., (2015), "Canonicability of the first order system of hyperbolic equations", *Journal of Integral Equations and Applications*, 27 (1), 47-65.
- [37] Sung L. Y., Fokas A. S., (1991), "Inverse problem for $N \times N$ hyperbolic systems on the plane and N -wave interactions", *Communications on pure and applied mathematics*, 44 (5), 535-571.
- [38] Gohberg I., Krein M., (1970), "Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space", 1st Edition, American Mathematical Society.
- [39] Ismailov M. I., (2010), "Inverse scattering problem for nonstationary Dirac-type systems on the plane", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 365 (2), 498-509.
- [40] Åberg I., Kristensson G., Wall J. N., (1995), "Propagation of transient electromagnetic waves in time-varying media-direct and inverse scattering problems", *Inverse Problems*, 11 (1), 29-49.

- [41] Yagle A. E., (1997), "Inverse scattering for time-varying one-dimensional layered media: algorithms and applications", *Inverse Problems*, 13 (3), 867-881.
- [42] Belishev M. I., Blagovestchenskii A., Ivanov S. A., (1997), "The two-velocity dynamical system: boundary control of waves and inverse problems", *Wave Motion*, 25 (1), 83-107.
- [43] Belishev M. I., Ivanov S. A., (2002), "Characterization of data in the dynamic inverse problem for a two-velocity system" *Journal of Mathematical Sciences*, 109 (5), 1814-1834.
- [44] Morassi A., Nakamura G., Sini M., (2005), "An inverse dynamical problem for connected beams *European Journal of Applied Mathematics*, 16 (1), 83-109.
- [45] Rakesh, Sacks P., (2010), "Stability for an inverse problem for a two-speed hyperbolic PDE in one space dimension", *Inverse Problems*, 26 (2), 025005.
- [46] Yurko V. A., "An inverse spectral problem for singular non-self-adjoint differential systems", *Sbornik: Mathematics*, 195 (12), 1823.
- [47] Sakhnovich A. L., (2003), "Dirac type system on the axis: explicit formulae for matrix potentials with singularities and soliton-positon interactions", *Inverse Problems*, 19 (4), 845-854.
- [48] Manakov S.V., (1974), "On the theory of two-dimensional stationary self focussing of electromagnetic waves", *Soviet Physics-JETP*, 38 (2), 248-253.
- [49] Demontis F., Cornelis, V. D. M, (2008), "Marchenko equations and norming constants of the matrix Zakharov-Shabat system", *Operators and Matrices*, 2, 79-113.
- [50] Ablowitz M. J., Segur H., (1981), "Solitons and the Inverse Scattering Transform", 1st Edition, SIAM.
- [51] Aktosun T., Klaus M., Cornelis, V. D. M, (2000), "Direct and inverse scattering for selfadjoint Hamiltonian systems on the line", *Integral Equations Operator Theory*, 38 (2), 129-171.
- [52] Iskenderov N. Sh., Ismailov M . I., (2012), "On the inverse scattering transform of a nonlinear evolution equation with 2 + 1 dimensions related to nonstrict hyperbolic systems", *Nonlinearity*, 25 (7), 1967-1979.
- [53] Ismailov M. I., (2016), "Inverse scattering problem for the nonstationary Dirac equation on the half-plane", *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 24 (3), 221-231.

- [54] Ashyralyev A., Prenov R., (2014), "Finite-difference method for the hyperbolic system of equations with nonlocal boundary conditions", *Advances in Difference Equations*, 2014 (1), 1-24.
- [55] Thomas J. W., (1995), "Numerical partial differential equations: finite difference methods", 1st Edition, Springer Science & Business Media.
- [56] Murio D. A., (1993), "The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems", 1st Edition, John Wiley & Sons.
- [57] Murio D. A., (2002), "Mollification and space marching", in: K.A. Woodbury, Editor, "Inverse Engineering Handbook", 1st Edition, CRC Press.
- [58] Sakhnovich L. A., (1999), "Spectral theory of canonical differential systems. Method of operator identities", 1st Edition, Birkhäuser Basel.
- [59] Tekin I., Ismailov M. I., (2015), "Inverse scattering problem for the non-stationary matrix Dirac equation on the half-plane with the singular transmission matrix in the boundary condition", *AIP Conference Proceedings*, 1676, 020092.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Antalya ilinin Alanya ilçesinde dünyaya geldi. İlk, orta ve lise eğitimini Tekirdağ'da tamamladı. 2004 yılında Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı. 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitime başladı. 2011 yılında yüksek lisans eğitimini tamamlayıp aynı yıl doktora eğitimine başladı. 2010 yılından beri Gebze Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

EKLER

Ek A: Tez Çalışması Kapsamında Yapılan Yayınlar

M. I. Ismailov, I. Tekin, (2015), "Canonicability of the first order system of hyperbolic equations", Journal of Integral Equations and Applications, 27 (1), 47-65.

I. Tekin, M. I. Ismailov, (2015), "Inverse scattering problem for the non-stationary matrix Dirac equation on the half-plane with the singular transmission matrix in the boundary condition", AIP Conference Proceedings, 1676, 020092.

Ismailov M. I., Tekin I., (2016), "Inverse coefficient problems for a first order hyperbolic system", Applied Numerical Mathematics, 106, 98-115

Ek B: Bölüm 2.1 İçin Matlab Kodları

Tablo B1.1: Düz Problem İçin Sonlu Farklar Metodu MATLAB Kodları.

```
function [U,V,u,v]= Wavextyebagli(p,u0,g1,q,v0,g2,L,T,nx,nt)

% p, q katsayı girdileri
% u0, v0, g1, g2 başlangıç ve sınır girdileri
% L, x eksenindeki uzunluk, T, t eksenindeki uzunluk
% nx ve nt, sırasıyla x ve t eksenlerindeki bölüntü sayısı
hx=L/nx; % x ekseninde bölüntü uzunluğu
ht=T/nt; % t ekseninde bölüntü uzunluğu
r=ht/hx;
xvec=hx*(0:nx);
tvec=ht*(0:nt);

V=zeros(nt+1,nx+1);
U=zeros(nt+1,nx+1);
V(1,:)=feval(v0,xvec(:));
U(1,:)=feval(u0,xvec(:));
v=zeros(nt+1,nx+1);
u=zeros(nt+1,nx+1);
```


Tablo B1.1 Devam.

```

for k=0:nt
    for n=0:nx
v(k+1,n+1)=1+(n*hx).*(k*ht).*(k*ht)+(n*hx).*(n*hx); %kesin v çözümü
u(k+1,n+1)=1+(n*hx).*(n*hx)+(k*ht).*(k*ht);      %kesin u çözümü
    end
end

%nümerik çözüm için sonlu farklar ayrışımı

for k=1:nt
    for n=1:nx
V(k+1,n)=(1-r)*V(k,n)+r*V(k,n+1)- ht*feval(q,tvec(k),xvec(n)).*U(k,n);
V(k+1,nx+1)=feval(g2,k*ht);
U(k+1,1)=feval(g1,k*ht);
U(k+1,n+1)=(1-r)*U(k,n+1)+r*U(k,n)-ht*feval(p,tvec(k),xvec(n+1)).*V(k,n+1);
    end
end

u1=u(:,1);
v1=v(:,nx+1);
V1=V(:,nx+1);
U1=U(:,1);

figure(1)
plot(tvec,U1,'-.',tvec,u1,'k')
legend('numerical u','exact u')
xlabel('t-axis')

figure(2)
plot(tvec,V1,'-.',tvec,v1,'k')
legend('numerical v','exact v')
xlabel('t-axis')

```


Ek C: Bölüm 2.3 İçin Matlab Kodları

Tablo C1.1: Ters Problemin Çözümü ve Molifikasyon için Sonlu Farklar Metodu MATLAB Kodları.

```
function [U,V,Q,P,u,v]= katsayimol(u0,g1,v0,g2,L,T,nx,nt)

% u0, v0, g1, g2 başlangıç ve sınır girdileri
% L, x eksenindeki uzunluk, T, t eksenindeki uzunluk
% nx ve nt, sırasıyla x ve t eksenlerindeki bölüntü sayısı
hx=L/nx; % x ekseninde bölüntü uzunluğu
ht=T/nt; % t ekseninde bölüntü uzunluğu
r=ht/hx;
xvec=hx*(0:nx);
tvec=ht*(0:nt);

V=zeros(nt+1,nx+1);
U=zeros(nt+1,nx+1);
Q=zeros(nt+1,1);
P=zeros(nt+1,1);

V(1,:)=feval(v0,xvec(:));
U(1,:)=feval(u0,xvec(:));

qq=zeros(nt+1,1);
pp=zeros(nt+1,1);
vv=zeros(nt+1,nx+1);
uu=zeros(nt+1,nx+1);

vv(1,:)=feval(v0,xvec(:));
uu(1,:)=feval(u0,xvec(:));

v=zeros(nt+1,nx+1);
u=zeros(nt+1,nx+1);
```


Tablo C1.1 Devam.

```

q=zeros(nt+1,1);
p=zeros(nt+1,1);
v(1,:)=feval(v0,xvec(:));
u(1,:)=feval(u0,xvec(:));

    n=nt;
    n1=n+1;
    eps=input('eps between 0 and 0.1:'); % bozukluk miktarı
if (eps<0 || eps>0.1), stop;
end
clc
tic
[funch1,funch2]=func1(n); % func1 programını çağırır
c=clock;
k=c(2)*c(4)*c(5)*c(6);
rand('seed',k)

for k=1:n+2
    noise(k)=(2*rand(1)-1)*eps; % bozukluk üretimi
end

h1=funch1.*(1+noise);
h2=funch2.*(1+noise);

    [molh1,delta]=molgcv(h1,n1); %programı çağırır
    [molh2,delta]=molgcvh2(h2,n1); %programı çağırır

h11=h1';
molh11=molh1';
h22=h2';
molh22=molh2';

```


Tablo C1.1 Devam

```

for k=0:nt
qq(k+1)=exp(-k*ht-1); % katsayıların kesin çözümlerini verir
pp(k+1)=2*exp(k*ht+1);
end

for k=1:nt % düz problemin nümerik çözümünü verir
vv(k+1,1:nx)=(1-r)*vv(k,1:nx)+r*vv(k,2:nx+1)-ht*qq(k).*uu(k,1:nx);
vv(k+1,nx+1)=feval(g2,k*ht);
uu(k+1,1)=feval(g1,k*ht);
uu(k+1,2:nx+1)=(1-r)*uu(k,2:nx+1)+r*uu(k,1:nx)-ht*pp(k).*vv(k,2:nx+1);
end

q(1)=-((h22(2)-h11(1))/(ht*u(1,1)))+(v(1,2)-v(1,1))/(hx*u(1,1));
p(1)=-((h11(2)-h11(1))/(ht*v(1,nx+1)))-(u(1,nx+1)-u(1,nx))/(hx*v(1,nx+1));

for k=1:nt
v(k+1,1:nx)=(1-r)*v(k,1:nx)+r*v(k,2:nx+1)-ht*q(k).*u(k,1:nx);
u(k+1,2:nx+1)=(1-r)*u(k,2:nx+1)+r*u(k,1:nx)-ht*p(k).*v(k,2:nx+1);
v(k+1,nx+1)=feval(g2,k*ht);
u(k+1,1)=feval(g1,k*ht);
v(k+1,1)=h22(k+1);
u(k+1,nx+1)=h11(k+1);
q(k+1)=-((h22(k+2)-h22(k))/(2*ht*u(k+1,1)))+(v(k+1,2)
-v(k+1,1))/(hx*u(k+1,1));
p(k+1)=-((h11(k+2)-h11(k))/(2*ht*v(k+1,nx+1)))-(u(k+1,nx+1)
-u(k+1,nx))/(hx*v(k+1,nx+1));
end

Q(1)=-((molh22(2)-molh22(1))/(ht*U(1,1)))+(V(1,2)-V(1,1))/(hx*U(1,1));
P(1)=-((molh11(2)-molh11(1))/(ht*V(1,nx+1)))-(U(1,nx+1)
-U(1,nx))/(hx*V(1,nx+1));

```


Tablo C1.1 Devam

```

for k=1:nt
V(k+1,1:nx)=(1-r)*V(k,1:nx)+r*V(k,2:nx+1)-ht*Q(k).*U(k,1:nx);
U(k+1,2:nx+1)=(1-r)*U(k,2:nx+1)+r*U(k,1:nx)-ht*P(k).*V(k,2:nx+1);
V(k+1,nx+1)=feval(g2,k*ht);
U(k+1,1)=feval(g1,k*ht);
V(k+1,1)=molh22(k+1);
U(k+1,nx+1)=molh11(k+1);
Q(k+1)=-((molh22(k+2)-molh22(k))/(2*ht*U(k+1,1)))+(V(k+1,2)-
          V(k+1,1))/(hx*U(k+1,1));
P(k+1)=-((molh11(k+2)-molh11(k))/(2*ht*V(k+1,nx+1)))-(U(k+1,nx+1)-
          U(k+1,nx))/(hx*V(k+1,nx+1));
end
    u1=uu(:,nx+1);
    v01=vv(:,1);
    U1=U(:,nx+1);
    V01=V(:,1);
    U11=u(:,nx+1);
    V011=v(:,1);
figure(1)
plot(tvec,U11,tvec,u1,'-.k')
legend('noisy u','exact u')
xlabel('t-axis')

figure(2)
plot(tvec,V011,tvec,v01,'-.k')
legend('noisy v','exact v')
xlabel('t-axis')

figure(3)
plot(tvec,q,tvec,qq,'-.k')
legend('noisy q','exact q')
xlabel('t-axis')

```


Tablo C1.1 Devam.

```
figure(4)
plot(tvec,p,tvec,pp,'-.k')
legend('noisy p','exact p')
xlabel('t-axis')
```

```
figure(5)
plot(tvec,qq,tvec,Q,'-.k')
legend('exact q','mollified q')
xlabel('t-axis')
```

```
figure(6)
plot(tvec,pp,tvec,P,'-.k')
legend('exact p','mollified p')
xlabel('t-axis')
```

```
figure(7)
plot(tvec,u1,tvec,U1,'-.k')
legend('exact u','mollified u')
xlabel('t-axis')
```

```
figure(8)
plot(tvec,v01,tvec,V01,'-.k')
legend('exact v','mollified v')
xlabel('t-axis')
```

```
*****
```

```
function [molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,delta,h2)
```

```
sn1=0;
```

```
sn2=0;
```

```
sd=0;
```

```
itmin=iwtmax/2;
```


Tablo C1.1 Devam.

```

for i=1:iwtmax-1
    drh2(i)=h2(2+n1-i);
end
for i=1:itmin
    sk=0;
    for k=itmin+i:iwtmax
        sk=sk+wt(k);
    end
    sj1=0;
    sj2=0;
    for j=1:itmin+i-1
        sj1=sj1+wt(j)*h2(itmin+i-j);
        sj2=sj2+wt(j)*drh2(itmin+i-j);
    end
    sn1=sn1+(h2(i)-sj1)*sk;
    sn2=sn2+(drh2(i)-sj2)*sk;
    sd=sd+sk*sk;
end
ca=sn1/sd;
caa=sn2/sd;
for i=1:itmin-1
    one(i)=ca;
    three(i)=caa;
end
big=[one,h2,three];
wtt=wt(1:(iwtmax-1));
c=conv(big,wtt);
for i=1:n1+1
    molh2(i)=c(iwtmax-2+i);
end
gcv=2*((h2-molh2)*(h2-molh2)')/iwtmax;
*****

```


Tablo C1.1 Devam.

```

function [molh1,gcv]=moll(iwtmax,n1,wt,delta,h1)
sn1=0;
sn2=0;
sd=0;
itmin=iwtmax/2;
for i=1:iwtmax-1
drh1(i)=h1(2+n1-i);
end

for i=1:itmin
sk=0;
for k=itmin+i:iwtmax
sk=sk+wt(k);
end
sj1=0;
sj2=0;
for j=1:itmin+i-1
sj1=sj1+wt(j)*h1(itmin+i-j);
sj2=sj2+wt(j)*drh1(itmin+i-j);
end
sn1=sn1+(h1(i)-sj1)*sk;
sn2=sn2+(drh1(i)-sj2)*sk;
sd=sd+sk*sk;
end

ca=sn1/sd;
caa=sn2/sd;

for i=1:itmin-1
one(i)=ca;
three(i)=caa;
end

```


Tablo C1.1 Devam.

```

big=[one,h1,three];
wtt=wt(1:(iwtmax-1));
c=conv(big,wtt);

for i=1:n1+1
molh1(i)=c(iwtmax-2+i);
end
gcv=2*((h1-molh1)*(h1-molh1)')/iwtmax;
*****

function [molh1,delta]=molgcv(h1,n1)
tol=0.001;
deltamin=0.001;
deltamax=0.10;
delta=0.04;
maxniter=30;
gr=0.5*(sqrt(5.0)-1);
cc=1-gr;
t0=deltamin;
t3=deltamax;

if(abs(deltamax-delta)>abs(delta-deltamin))
t1=delta;
t2=delta+cc*(deltamax-delta);
else
t2=delta;
t1=delta-cc*(delta-deltamin);
end
[iwtmax,wt]=mol(t1,n1);
[molh1,gcv]=mol1(iwtmax,n1,wt,t1,h1);
f1=gcv;
[iwtmax,wt]=mol(t2,n1);
[molh1,gcv]=mol1(iwtmax,n1,wt,t2,h1);

```


Tablo C1.1 Devam.

```

f2=gcv;
counter=0;
test1=abs(t3-t0);
test2=tol*(abs(t1)+abs(t2));
while ((test1>test2)&&(counter<maxniter))
counter=counter+1;

if(f2<f1)
t0=t1; t1=t2;
t2=gr*t1+cc*t3;
f1=f2;
[iwtmax,wt]=mol(t2,n1);
[molh1,gcv]=mol1(iwtmax,n1,wt,t2,h1);
f2=gcv;
else
t3=t2;
t2=t1;
t1=gr*t2+cc*t0;
f2=f1;
[iwtmax,wt]=mol(t1,n1);
[molh1,gcv]=mol1(iwtmax,n1,wt,t1,h1);
f1=gcv;
end
test1=abs(t3-t0);
test2=tol*(abs(t1)+abs(t2));
end
if (f1<f2)
golden=f1;
mint=t1;
else
golden=f2;
mint=t2;

```


Tablo C1.1 Devam

```

delta=mint;
[iwtmax,wt]=mol(delta,n1);
[molh1,gcv]=mol1(iwtmax,n1,wt,delta,h1);
*****
function [molh2,delta]=molgcvh2(h2,n1)

tol=0.001;
deltamin=0.001;
deltamax=0.10;
delta=0.04;
maxniter=30;
gr=0.5*(sqrt(5.0)-1);
cc=1-gr;
t0=deltamin;
t3=deltamax;
if(abs(deltamax-delta)>abs(delta-deltamin))
t1=delta;
t2=delta+cc*(deltamax-delta);
else
t2=delta;
t1=delta-cc*(delta-deltamin);
end

[iwtmax,wt]=mol(t1,n1);
[molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,t1,h2);
f1=gcv;
[iwtmax,wt]=mol(t2,n1);
[molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,t2,h2);
f2=gcv;
counter=0;
test1=abs(t3-t0);
test2=tol*(abs(t1)+abs(t2));

```


Tablo C1.1 Devam.

```

while ((test1>test2)&&(counter<maxniter))
counter=counter+1;
if(f2<f1)
t0=t1;
t1=t2;
t2=gr*t1+cc*t3;
f1=f2;
[iwtmax,wt]=mol(t2,n1);
[molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,t2,h2);
f2=gcv;
else
t3=t2;
t2=t1;
t1=gr*t2+cc*t0;
f2=f1;
[iwtmax,wt]=mol(t1,n1);
[molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,t1,h2);
f1=gcv;
end
test1=abs(t3-t0);
test2=tol*(abs(t1)+abs(t2));
end
if (f1<f2)
golden=f1;
mint=t1;
else
golden=f2;
mint=t2;
end
delta=mint;
[iwtmax,wt]=mol(delta,n1);
[molh2,gcv]=molh22(iwtmax,n1,wt,delta,h2);

```


Tablo C1.1 Devam.

```
*****  
function [iwtmax,wt]=mol(delta,n1)  
a=1/(n1*delta*sqrt(pi));  
m=round(3*delta*n1)+3;  
iwtmax=2*m;  
t=-m/n1+1/n1:1/n1:m/n1;  
wt=a*exp(-t.^2/(delta*delta));  
*****  
function [funch1,funch2]=func1(n)  
  
t=0:1/n:1+1/n;  
funch1=exp(-t-2);  
funch2=exp(-2*t-2);
```